柯西矩阵逆矩阵的元素和

Darij Grinberg*

2023年1月25日

arXiv:2301.09777v1 [math.RA] 24 Jan 2023

1. 柯西矩阵

设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是n个数，而$y_1, y_2, \ldots, y_n$是另外n个数，并且这些数满足所有n^2个两两之和$x_i + y_j$都不为零[1]。考虑$n \times n$矩阵

$$C := \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix}.$$

这个矩阵C称为柯西矩阵，已有180年的研究历史[2]。第一个重要成果是它的行列式公式：

$$\det C = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} \left(\left(x_i - x_j \right) \left(y_i - y_j \right) \right)}{\prod\limits_{(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2} \left(x_i + y_j \right)} \tag{1}$$

*德雷塞尔大学，Korman中心，南33街15号，费城，宾夕法尼亚州19104，美国[1]代数学家可以将“数”和“非零”分别替换为“交换环的元素”和“可逆”。这种推广是顺理成章的；在证明中，我们不会用到任何特定类型的数的性质。[2]许多作者将其定义为元素为$1\ x_i - y_j$，而非$1\ x_i + y_j$。这相当于将$y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$替换为$-y_1, -y_2, \ldots\ldots, -y_n$。

该公式由柯西于 1841 [1] 发现（例如参见 [11, §1.3] ，或 [2, 习题 6.18 或习题 6.64] ，其中给出了现代证明）。较新的研究聚焦于 LU分解[5], 的正性性质 [4], 或推广形式 [7]。关于该主题的历史及其与拉格朗日插值的联系（以及公式 (1) 的另一种证明），请参见 [6] 。其应用范围既包括理论方面（经典对称群表示论中使用了公式 (1) 的一个等价形式，即 [3, 引理 5.15.3] ），也包括实际应用（计算逆矩阵 C^{-1} 是一个众所周知的病态问题，常被用作数值不稳定性的试金石 [13]）。

2. 逆矩阵元素之和

以下这个有趣的结果至少从 20 世纪 40 年代起就已为人所知：

定理 2.1。 假设矩阵 C 可逆。那么，其逆矩阵 C^{-1} 的所有元素之和为 $n\sum_{k=1} x_k + n\sum_{k=1} y_k$。

证明这一结论的一种自然但繁琐的方法是利用 (1) 求出C^{-1} 的各个元素，然后将它们相加。通过一个巧妙的归纳法，可以n n看出，这个和可化简为 $\sum x_k + \sum y_k$。关于此证明的一些细节可参见 [8, §1.2.3, 练习 44]。 [12, (13)] 中给出的证明更为简洁，它避免使用 (1)，转而依赖拉格朗日插值理论。

我们提出定理 2.1 的一种新证明，体现了该定理的简洁性。我们用$A_{i,j}$ 表示任意矩阵A的(i,j)项。下面这个简单的引理让我们完成了一半的证明：

引理 2.2。 设 A 是一个$n \times m$矩阵，设 B 是一个$m \times n$矩阵。那么，

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(x_i + y_j\right) A_{i,j} B_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(AB\right)_{i,i} + \sum_{j=1}^{m} y_j \left(BA\right)_{j,j}.$$

引理 *2.2* 的证明。我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i+y_j\right)A_{i,j}B_{j,i} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iA_{i,j}B_{j,i}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}}_{=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}}y_j\underbrace{A_{i,j}B_{j,i}}_{=B_{j,i}A_{i,j}}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_iA_{i,j}B_{j,i}+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}y_jB_{j,i}A_{i,j}\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i\underbrace{\sum_{j=1}^{m}A_{i,j}B_{j,i}}_{=(AB)_{i,i}}+\sum_{j=1}^{m}y_j\underbrace{\sum_{i=1}^{n}B_{j,i}A_{i,j}}_{=(BA)_{j,j}}\\ &\qquad\text{(by the definition of the matrix product)}\qquad\text{(by the definition of the matrix product)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i\left(AB\right)_{i,i}+\sum_{j=1}^{m}y_j\left(BA\right)_{j,j}.\end{aligned}$$

□

证明 定理 *2.1* 的证明。将引理 2.2 应用于 $m=n$、$A=C$ 和 $B=C^{-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i+y_j\right)C_{i,j}\left(C^{-1}\right)_{j,i} &= \sum_{i=1}^{n}x_i\underbrace{\left(CC^{-1}\right)_{i,i}}_{=1}+\sum_{j=1}^{n}y_j\underbrace{\left(C^{-1}C\right)_{j,j}}_{=1}\\ &\qquad\text{(since } CC^{-1}\text{ is the identity matrix)}\qquad\text{(since } C^{-1}C\text{ is the identity matrix)}\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{j=1}^{n}y_j=\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}y_k.\end{aligned}$$

然而，这个等式左边的因子 $\left(x_i+y_j\right)C_{i,j}$ 可化简为 *1*（因为根据 C 的定义，$C_{i,j}=\dfrac{1}{x_i+y_j}$）。因此，这个等式左边为 $n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(x_i+y_j\right)}_{}\left(C^{-1}\right)_{j,i}=n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(C^{-1}\right)_{j,i}$，这显然是 C^{-1} 所有元素的和=1。由此我们证明了 C^{-1} 所有元素的和为 $n\sum_{k=1}^{n}x_k+\sum_{k=1}^{n}y_k$。这就证明了定理 *2.1*。

□

3. 变体

定理 2.1 的表述假设C 可逆。由 (1) 易知，该假设等价于要求$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 两两

不同，且$y_1, y_2, \ldots, y_n$两两不同[3]。不难去掉定理 2.1 的这一假设：只需用矩阵C的伴随矩阵[4] $\operatorname{adj}C$ 替代C^{-1} 的逆（后者此时已不存在）。由此得到的定理如下：

定理 3.1。 伴随矩阵 $\operatorname{adj}C$ 的所有元素之和为
$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \det C.$

证明。与我们上面对定理 2.1 的证明类似。[5] 利用经典结果$C \cdot \operatorname{adj} C = \operatorname{adj} C \cdot C = \det C \cdot I_n$（其中$I_n$表示$n \times \times n$单位矩阵）。 □

定理 3.1 还可以进一步变换：

定理 3.2。 设 D 是由C得到的$(n+1) \times (n+1)$-矩阵：在最底部插入一行全为 1 的行，在最右侧插入一列全为 1 的列，并在右下角填入 0：

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} & 1 \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，

$$\det D = -\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k\right) \cdot \det C.$$

证明思路。 由定理 3.1 可得，依据以下更一般的事实：若 A 是任意一个 $n \times n$ 阶矩阵，且 B 是按与从 C 得到 D 相同的方式从 A得到的 $(n+1) \times (n+1)$ 阶矩阵（即在最底部插入一行全为 1 的行，并在最右侧插入一列全为 1 的列，同时将右下角设为 0），那么

$$\det B = -s,$$

[3]在任意交换环上工作的代数学家，应将“不同”理解为“强不同”（如果环中的两个元素 a、b 之差 a − b 可逆，就称它们强不同）。[4]n × n 矩阵 A 的伴随矩阵 adj A 是一个 n × n 矩阵，其第 (i, j) 个元素为 $(-1)^{i+j} \det(\text{A}\sim\text{j},\sim\text{i})$，其中 A∼j,∼i 是从 A 中删除第 j 行和第 i 列后得到的矩阵。较早的文献常将伴随矩阵称为“经典伴随矩阵”（或简称“伴随矩阵”，不过这个词也有另一种含义）。[5]我在 [2, 练习 6.69 (a) 的解答]中，对这个证明作了更为详尽的阐述。

其中 s 是 $\operatorname{adj}A$所有元素之和。反过来，这一事实可通过沿最后一行对 $\det B$ 作拉普拉斯展开（然后沿最后一列展开每个余子式）来证明。所有细节请参见 [2, 练习 6.69(c)] 的解答。

□

定理 3.2 出现在 [9, 第十一章练习 43]中；关于它的起源，我们一无所知。

4. 两个小练习

尽管引理 2.2 在我们的证明中帮了大忙，但它似乎只是个「一招鲜」：我们不知道还有哪些有趣的结果能借助它简化证明。矩阵所有元素的和通常并不是一个特别良好的量（与之不同的是，其**对角**元素之和称为迹，具有许多良好性质）。不过，经过一些尝试，我们发现了定理 2.1 的一个令人惊讶（虽说并不算特别深刻）的孪生结论。

我们假设$x_1, x_2, \ldots\ldots$、x_n 以及$y_1, y_2, \ldots\ldots$、y_n 都是**实**数（且$n \geq 1$）。考虑$n \times n$矩阵

$$F := \left(\min\left\{x_i, y_j\right\}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n} = \begin{pmatrix} \min\left\{x_1, y_1\right\} & \min\left\{x_1, y_2\right\} & \cdots & \min\left\{x_1, y_n\right\} \\ \min\left\{x_2, y_1\right\} & \min\left\{x_2, y_2\right\} & \cdots & \min\left\{x_2, y_n\right\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min\left\{x_n, y_1\right\} & \min\left\{x_n, y_2\right\} & \cdots & \min\left\{x_n, y_n\right\} \end{pmatrix}.$$

因此，F 是通过将C 中的“倒数和”[1] $x_i + y_j$ 替换为最小值 $\min\left\{x_i、\ y_j\right\}$ [6]得到的。要求F^{-1} 具有与C^{-1}相当的性质，似乎有些强人所难。但事实上，它的表现甚至更好：

命题 4.1. 假设F 是可逆的。那么：

(a) F^{-1} 的所有元素之和为 $1 \min\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\right\}$。

(b) 假设$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$和$y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$，且$x_1 \leq y_1$。那么，对于每个$j \in \{1, 2, \ldots\ldots n\}$，$j$列$F^{-1}$ 中所有元素之和为 $1x_1$ （若$j = 1$），若$j > 1$则为 0。 —

[6]这可以看作热带化的一个例子（参见例如 [10]）。更准确地说，热带化（即将 $+$ 和 $\cdot$ 替换为 max 和 $+$的那种）会将 $1\ x_i + y_j$ 替换为 $-\max\left\{x_i、\ y_j\right\}$；但如果将所有数$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ 乘以 -1，它就会变成 $\min\left\{x_i、\ y_j\right\}$。

这个命题的证明是另一个关于逆矩阵运算的巧妙练习——我们不想提前透露答案，以免破坏读者的乐趣。与C一样，无须计算行列式。不过，行列式是可以计算的，而结果又是一个有趣的练习：

命题 4.2。假设$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$且$y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n$。对于任意$i$、$j \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$，设$f_{i,j} := \min\{x_i, y_j\}$。那么，

$$\det F = f_{1,1} \cdot \prod_{k=2}^{n} \left(f_{k,k} - f_{k,k-1} - f_{k-1,k} + f_{k-1,k+1}\right). \tag{2}$$

注意，如果x_i和y_j的排列方式“平衡不足”（例如，两个相邻x_i之间有两个以上y_j），则 (2) 右侧的乘积通常为 0。我们将留给读者自行确定使 $\det F$ 为 0 的更精确判据。

参考文献

[1] 奥古斯丁-路易·柯西，关于交错函数与交错和的回忆录，《分析与数学物理习题》，第 ii 卷（1841年），第 151–159 页。重印于：《全集》，第二辑，第 xii 卷。[2] Darij Grinberg，代数组合基础笔记，2022 年 9 月 15 日，arXiv:2008.09862v3。[3] Pavel Etingof、Oleg Golberg、Sebastian Hensel、Tiankai Liu、Alex Schwendner、Dmitry Vaintrob、Elena Yudovina，表示论导论，历史插曲由 Slava Gerovitch 撰写，《学生数学图书馆》**59**，美国数学学会，2011年。[4] Miroslav Fiedler，关于希尔伯特矩阵与柯西矩阵的笔记，《线性代数及其应用》**432**（2010年），第 351–356 页。[5] Israel Gohberg、Israel Koltracht，柯西矩阵与范德蒙德矩阵的三角因子，《积分方程与算子理论》**26**（1996年），第 46–59 页。[6] R. Gow，柯西矩阵、范德蒙德矩阵与多项式插值，《IMS 公报》**28**（1992年），第 45–52 页。[7] Masao Ishikawa、Soichi Okada、Hiroyuki Tagawa、Jiang Zeng，柯西行列式与舒尔的佩尔方的推广，《应用数学进展》**36**（2006年），第 251–287 页。[8] 唐纳德·欧文·克努特，《计算机程序设计艺术》第一卷：基本算法，第 3 版，艾迪生-韦斯利，1997年。勘误见 https://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/taocp.html。

[9] Thomas Muir, 《行列式理论论著》, William H. Metzler 修订并增补, Dover, 1960年。[10] Masatoshi Noumi、Yasuhiko Yamada, 热带罗宾逊-申斯特德-克努特对应与双有理魏尔群作用, arXiv:math-ph/0203030v2。[11] Viktor V. Prasolov, 《线性代数中的问题与定理》, 《数学专著译丛》第 #134 卷, 美国数学学会, 1994年。预印本见 https://staff.math.su.se/mleites/books/prasolov-1994-problems.pdf。俄文新版另见 https://drive.google.com/open?id=0B2UfTLwpN9okblBJbGxOZXc4Rm8。[12] Samuel Schechter, 《论某些矩阵的求逆》, 《数学计算》**13** (1959年), 第 73–77 页。[13] John Todd, 《关于希尔伯特矩阵的计算问题》, 《美国国家标准局研究杂志》–B **65** (1961年), 第 1 期, 第 19–22 页。