arXiv:2301.09793v1 [physics.class-ph] 24 Jan 2023

大质量薄环环绕的均匀旋转均匀密度椭球体的分岔与稳定性

Shin'ichirou Yoshida*Department of Earth Science and Astronomy, Graduate School of Arts and Sciences, The University of TokyoKomaba 3-8-1, Meguro-ku, Tokyo 153-8902, Japan（日期：2023年1月25日）

我们研究了大质量同心环对均匀密度、均匀旋转的旋转椭球体或椭球的影响。我们得到了轴对称麦克劳林型旋转椭球体和三轴雅可比型椭球体的平衡序列。由于环的引力场，当物体的角频率趋于零时，麦克劳林型旋转椭球体并无球形极限。在旋转椭球体子午剖面的偏心率达到某一临界值时，会分岔出三轴雅可比型椭球体。当表征环的引力场的参数低于某一阈值时，麦克劳林型和雅可比型椭球体的分岔点均存在，且临界偏心率略大于经典麦克劳林到雅可比分岔对应的偏心率。当该参数超过阈值时，麦克劳林型旋转椭球体不再有分岔点，而雅可比型椭球体则在低于麦克劳林型旋转椭球体的偏心率处出现。通过比较角动量相同的椭球体的能量可知，分岔临界点并不对应麦克劳林型旋转椭球体长期不稳定性的起始点。研究得出，环绕均匀旋转旋转椭球体的大质量环所产生的引力场，能够使其免受黏性耗散导致的棒状形变，从而增强其稳定性。

PACS分类号：47.20.Ky, 47.32.Ef, 96.30.W, 96.30.Iz, 96.15.Ef, 98.52.Eh, 98.56.Ew

I. 引言

自引力流体的旋转平衡形状自艾萨克·牛顿时代以来便有着悠久的研究历史。这些研究旨在探索行星、恒星、星团和星系可能具有的构型，它们的物理尺度和时间尺度跨越了许多个数量级。最简单且至今仍有用的模型，是密度均匀、均匀旋转的旋转椭球体和椭球体，可据此推导出物理特性的解析表达式（经典成果见 Lyttleton 1、Chandrasekhar 2）。例如，这些简单的结果至今仍有助于研究矮行星妊神星的平衡形状；人们认为它呈三轴椭球形状 [3–5]。在完全不同的致密星物理学领域，这些模型被用于模拟快速旋转的致密星；这类致密星可能呈现随时间变化的三轴椭球形状。随后，这些天体会发射频率适合地基引力波观测台探测的引力波 [6]。关于经典椭球体近期在致密星研究中的一些应用，参见例如 [7–9]。在更大的尺度上，经典椭球体被用于建立星团 [10]，或被暗物质晕包围的椭圆星系 [11] 的模型。事实上，Kondratyev 及其合作者开展了与我们研究密切相关的工作 [11–13],，他们研究星系周围暗物质环对椭圆星系的影响，以解释高度扁平的早型星系的起源。一些高度扁平的椭球星系明显缺乏旋转速度，这被归因于均匀旋转椭球体周围一个大质量同心环的潮汐效应。

本文采用与 Kondratyev 及其合作者相同的模型，研究椭球形状的更基本问题。其中一个问题是，在环的引力作用下，麦克劳林型轴对称球体（下文称为 M-球体）与类雅可比三轴椭球体（下文称为 J-椭球体）的分岔点。众所周知，具有均匀密度和均匀旋转的经典麦克劳林旋转椭球，其子午剖面的偏心率 e 从零到一变化。$e = 0$ 对应于非旋转天体，而 $e = 1$ 对应于无限薄的圆盘。对于 $e \geq 0.81267$，存在另一个均匀旋转、角动量与麦克劳林旋转椭球相同的三轴椭球体，称为雅可比椭球 [1, 2]。当旋转椭球／椭球体被大质量环包围时，这一经典图景会如何改变，目前尚不清楚。对于大质量环的任意参数取值，轴对称 M-球体和三轴 J-椭球体之间是否总存在分岔点？另一个问题是 M-旋转椭球的长期稳定性。在分岔点之后（$e = 0.81267$），经典麦克劳林旋转椭球的能量高于角动量相同的雅可比椭球。当考虑黏性耗散时，麦克劳林旋转椭球会变得长期不稳定，并在保持角动量不变的情况下演化为雅可比椭球 [14, 15]。当包围旋转椭球／椭球体的大质量环产生潮汐场时，我们是否可以预期，在相应分岔点之后，轴对称构型也会出现同样的长期不稳定性？

*电子邮箱：yoshida@ea.c.u-tokyo.ac.jp

乍看之下，这些问题或许显得偏于学术，但它们与各种天体物理天体的结构和稳定性有关。例如，这些问题关系到带环快速旋转矮行星的形成与稳定性。大质量恒星在铁核坍缩后新生的原中子星或奇异星，或双中子星并合后形成的大质量遗迹中子星，可能旋转得足够快，以致因黏性耗散而长期不稳定。它们可能是准单色引力波的潜在来源，而地面引力波观测站网络有望探测到这些引力波。当它们被回落物质或并合碎片构成的大质量环面包围时，这一图景会如何改变？如果某些椭圆星系周围或螺旋星系核球周围的暗物质分布可以用环的分布来模拟（正如 Kondratyev 等人 13 所提出的），我们是否会预期恒星系统呈现为旋转椭球体或三轴椭球体？宇宙中这些尺度迥异的问题，或许与本文所考虑的简单模型有关。

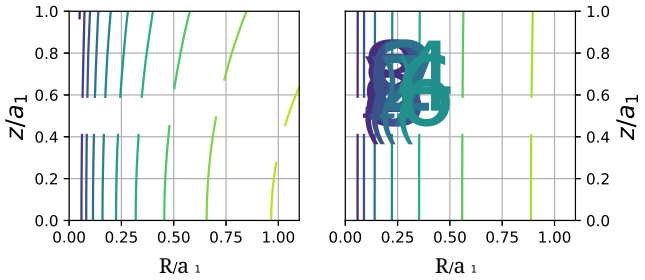


图1：在 $n=1$ 处，环势级数展开（式2）的截断误差。图中给出了比值 $\frac{\sum_{n=2}^{N}\phi_n}{\sum_{n=0}^{1}\phi_n}$ 的对数等值线，位于（R，z）平面上。 ϕ_n 是式（2）的第 n 项。左图对应 $R_o/a_1=2$，右图对应 $R_o/a_1=10$。

II. 模型

在均匀椭球体理论中，[1, 2],假设等压面由同心椭球构成，压力为零的表面以半长轴 a_1、a_2、a_3 为参数，因此该表面定义为

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_2^2}+\frac{z^2}{a_3^2}=1. \tag{1}$$

这里采用笛卡尔坐标 (x,y,z)，其原点位于质心，坐标轴沿半长轴方向。对于此处关注的扁球情形，不失一般性，可假设 $a_3\le a_2\le a_1$。

A. 环势

质量为 m_o、半径为 R_o 的薄环的引力势是泊松方程的一个解，可表示为级数 [16],

$$\Phi_o=-Gm_o\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n-1)!!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(RR_o)^{2n}}{(R^2+R_o^2+z^2)^{2n+\frac{1}{2}}}, \tag{2}$$

其中使用柱坐标（R,z），其 z 轴与椭球的旋转轴重合。为了使解具有半解析形式，我们将环势截断至关于 R 和 z 的二次阶，因此在级数中保留 $n=0$、1。于是，环势近似为

$$\Phi_o=-\frac{Gm_o}{R_o}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{R}{R_o}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{R_o}\right)^2\right]. \tag{3}$$

通过预先假设其为二次型，也可得到相同的表达式。图 1 以（R,z）平面上的等高线图展示了式（2）的截断误差。误差估算如下：

$$\text{error}=\frac{\sum_{n=2}^{N}\phi_n}{\sum_{n=0}^{1}\phi_n},\quad \phi_n\equiv\frac{(4n-1)!!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{(RR_o)^{2n}}{(R^2+R_o^2+z^2)^{2n+\frac{1}{2}}}, \tag{4}$$

其中 N 是一个足够大的整数。这里我们采用 $N=50$。坐标以最长半长轴 a_1 归一化，并在此处显示误差的对数。在椭球（$0\le R/a_1$，$z/a_1\le 1$）中，赤道面上的误差最大。对于 $R_o/a_1=2$，最大误差达百分之几；而对于 $R_o/a_1=10$，最大误差小于 10^{-3} %。正如预期，截断在较大的 R_o 情况下能给出更好的近似。

B. 椭球方程

以角频率 Ω 旋转的静态构型，其流体静力学方程为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}p=-\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi+x_j\Omega^2(1-\delta_{j3})\quad j=1,2,3, \tag{5}$$

其中 $x_1=x,x_2=y,x_3=z$。 Φ 是总引力势。该方程的第一积分形式为

$$\frac{p}{\rho}=-\Phi+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Omega^2+C, \tag{6}$$

其中 C 为常数。

自引力均匀密度椭球的内部势 Φ_i 可表示为一个简单的二次式

form

$$\Phi_i = -\pi G\rho\left[A - A_1x^2 - A_2y^2 - A_3z^2\right]. \tag{7}$$

系数 A_j 由下式给出

$$A_j = a_1a_2a_3\int_0^\infty \frac{du}{(a_j^2+u)\Delta},\ A = \sum_{j=1}^{3} a_j^2A_j, \tag{8}$$

其中 $\Delta^2 = (a_1^2+u)(a_2^2+u)(a_3^2+u)$。

由于环状质量的势由式（3）给出，总势 $\Phi = \Phi_i + \Phi_o$ 可写为

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{3GM}{4a_1a_2a_3}\left[A + \frac{4a_2a_3m_o}{3\lambda M}\right.\\ &\quad -\left(A_1 - \frac{a_2a_3m_o}{3\lambda^3a_1^2M}\right)x^2 - \left(A_2 - \frac{a_2a_3m_o}{3\lambda^3a_1^2M}\right)y^2\\ &\quad \left.-\left(A_3 + \frac{2a_2a_3m_o}{3\lambda^3a_1^2M}\right)z^2\right]\\ &\equiv -\frac{3GM}{4a_1a_2a_3}\left[A' - A_1'x^2 - A_2'y^2 - A_3'z^2\right].\end{aligned} \tag{9}$$

这里 $\lambda = R_o/a_1$。

根据椭球表面与等势面重合这一条件，可得

$$a_1^2\left(A_1' - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right) = a_2^2\left(A_2' - \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho}\right) = a_3^2A_3'. \tag{10}$$

于是，等式

$$a_1^2a_2^2(A_1' - A_2') + (a_1^2 - a_2)a_3^2A_3' = 0 \tag{11}$$

and

$$\frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{a_1^2A_1' - a_2^2A_2'}{a_1^2 - a_2^2} = \frac{a_1^2A_1' - a_3^2A_3'}{a_1^2} = \frac{a_2^2A_2' - a_3^2A_2'}{a_2^2}, \tag{12}$$

成立。根据上述 A_i 和 A_i' 的定义，我们可由式（11）推得

$$\begin{aligned}&(a_2^2 - a_1^2)\left[\int_0^\infty\left(\frac{a_1^2a_2^2}{(a_1^2+u)(a_2^2+u)} - \frac{a_3^2}{a_3^2+u}\right)\frac{du}{\Delta}\right.\\ &\left.-\frac{2}{3}\lambda^{-3}\frac{m_o}{M}\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2\right] = 0\end{aligned} \tag{13}$$

该方程给出两个平衡序列。一种情况是 $a_1 = a_2$ 成立，对应于轴对称旋转椭球体。我们称之为 M-旋转椭球序列。另一种情况是方括号中的表达式为零，对应于非轴对称三轴椭球体序列。我们称之为 J-椭球体。M-旋转椭球序列中 Ω 与归一化主轴之间的函数关系由式（12）的第二个或第三个等式给出。对于 J-椭球序列，将式（13）方括号中的表达式置为零，并在给定 a_1 和 a_2 时求解 a_3 。将 a_j的值代入式（12）即可得到 Ω。

M-旋转椭球序列与 J-椭球序列的分岔点对应于将 $a_1 = a_2$ 设定为特定值时该方程关于 J-椭球体的特殊解。

按照椭球形状的传统处理方法，我们用椭球子午剖面的偏心率e 来参数化各序列，

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2}. \tag{14}$$

C. 能量和角动量的表达式

均匀旋转椭球体的转动动能 T 由下式给出：

$$T = \frac{1}{2}I_z\Omega^2, \tag{15}$$

其中 I_z 为转动惯量，计算式为：

$$I_z = \frac{4}{15}\pi\rho a_1a_2a_3(a_1^2 + a_2^2). \tag{16}$$

角动量 J 可直接写为 $J = I_z\Omega$。引力能 W 为：

$$W = W_i + W_o = \frac{1}{2}\int\rho\Phi_i dV + \int\rho\Phi_o dV. \tag{17}$$

注意，势 Φ_i 由椭球体自身的质量产生，因此自引力的贡献乘以 1/2 因子，以消除重复计数；而 Φ_o 是由环产生的外势，无需乘以该因子。自引力项 W_i 的计算式为：

$$W_i = -\frac{8}{15}\pi^2G\rho a_1a_2a_3A, \tag{18}$$

而环的贡献为，

$$W_o = -\frac{Gm_o}{R_o}\frac{4\pi\rho}{3}a_1a_2a_3\left[1 + \frac{1}{20}\frac{a_1^2+a_2^2}{R_o^2} - \frac{1}{10}\frac{a_3^2}{R_o^2}.\right] \tag{19}$$

椭球的总能量为 $E = T + W$。

D. 数值处理

为了得到角速度 Ω 与椭球主轴之间的函数关系，我们需要计算出现在 A_j 中的椭圆积分。更具体地说，我们使用的积分形式为，

$$R_J(x,y,z,p) = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{du}{(u+p)\sqrt{(u+x)(u+y)(u+z)}}. \tag{20}$$

这是 Carlson椭圆积分之一 [17, 18]。我们使用 TOMS577库 的 Python 版本来计算该积分。 [21]

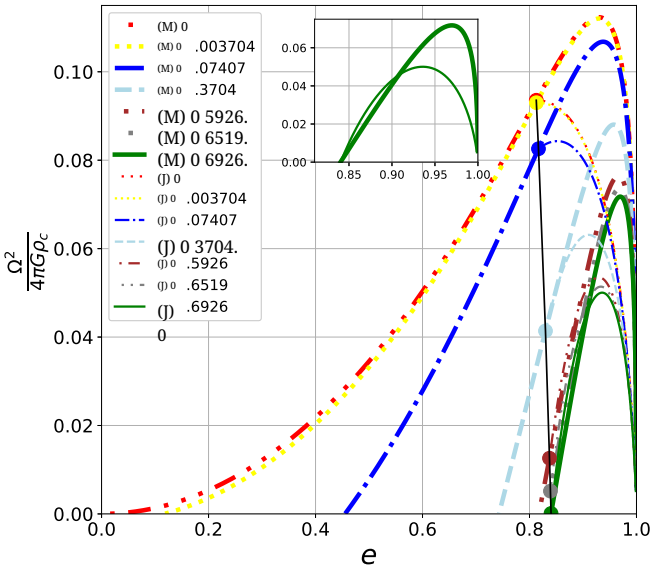


图 2：绘出了平方角频率 Ω^2，经$4\pi G\rho_c$归一化后随偏心率 $e = \sqrt{1-(a_3/a_1)^2}$变化的关系。平均轴 $\bar{a}$ 定义为 $\bar{a} = (a_1a_2a_3)^{1/3}$。标记为 (M) 的粗曲线表示 M-旋转椭球体，标记为 (J) 的则表示 J-椭球体。图例中的数字为 ν的取值，其中 $\nu = 0$ 曲线分别是原始的麦克劳林序列和雅可比序列。实心圆及连接它们的实线标出了 M-球体和 J-椭球体的分岔点。插图显示了 $\nu = 0.6926$ 的 M-球体和 J-椭球体序列，在分岔处 $\Omega = 0$。

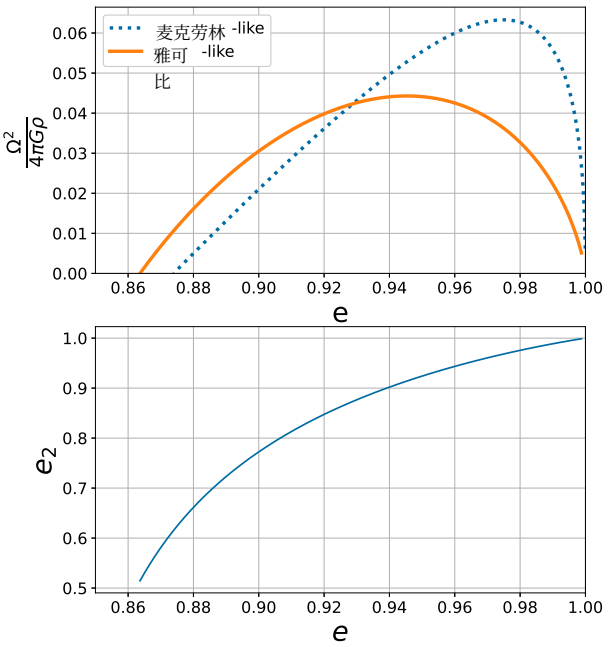


图3：上：一个 M-球体和一列 J-椭球，参数为$\nu > 0.6926$。此处 $m_0 = 3$ 和 $\lambda = 1.5$，因此 $\nu = 0.8889$。下：上方 J-椭球序列的 x-z 截面偏心率 e 与 x-y 截面偏心率 e_2 的关系。

III. 结果

A. 角频率

由式（9）、（12）、（13）可见，角速度 Ω^2 关于偏心率 e 的序列由无量纲参数 $\nu \equiv \lambda^{-3}m_o/M$表征。从该参数的表达式可知，

$$\nu = \lambda^{-3}\frac{m_o}{M} = \left(\frac{R_o}{a_1}\right)^{-3}\frac{m_o}{M} = \frac{\frac{Gm_o}{R_o^3}a_1^2}{\frac{GM}{a_1}} \sim \frac{\Phi_o(a_1)}{\Phi_i(a_1)}, \quad (21)$$

其物理意义是环的引力场相对于椭球表面引力场的强度。

图 2 中绘出了 M-旋转椭球和 J-椭球的 Ω^2 随偏心率变化的序列。对于给定的线型，较粗的曲线对应 M-旋转椭球序列。各 ν的分岔点以圆圈标出。可以看到，归一化频率随参数 ν 增大而降低。此外，M-旋转椭球序列通常没有 $e \to 0$极限。这与 [13], 的结果一致，但与嵌入大质量球形晕中的麦克劳林旋转椭球 [19], 形成对比；对于后者，序列似乎总是延伸至 $e \to 0$。

当 ν （≤ 0.3108）较小时，类雅可比模型的 Ω 始终低于具有相同 e的 M-旋转椭球模型。然而，随着 ν 增大，似乎会出现一段 e 范围，在此范围内，J-椭球的 Ω 高于 M-旋转椭球。插图清楚地显示了这一点。

随着 ν 增大，归一化角速度 Ω^2 降低，但分岔处的偏心率变化不大。总体而言，分岔点的偏心率最多变化 3.4%。这与 [20] 的研究结果形成对比：该研究表明，当同心椭球晕的密度达到中心旋转球密度的两倍时，嵌入其中的麦克劳林旋转椭球的分岔点偏移超过 10%。

分岔的另一个显著特征是，对于$\nu > 0.6926$，M-球体与 J- 椭球体重合的分岔点消失了。对于这种情况，如图 3 所示，J-椭球体在比 M-球体更低的偏心率下出现，而且前者可以是旋转频率为零的构型。两条曲线的交点并非 M-球体序列与 J-椭球序列的分岔点。图 3 下图比较了 J-椭球体在 x-z 截面和 x-y 截面上的偏心率，由此可以看出这一点。x-y 截面上的偏心率 e_2 定义为 $e_2 = \sqrt{1-(a_2/a_1)^2}$。根据定义，对于 M-球体，$e_2 = 0$。因此，两条序列在两条曲线的交点处并不具有相同的 e_2 值，而在真正的分岔点处，两条椭球序列本应具有相同的该值。

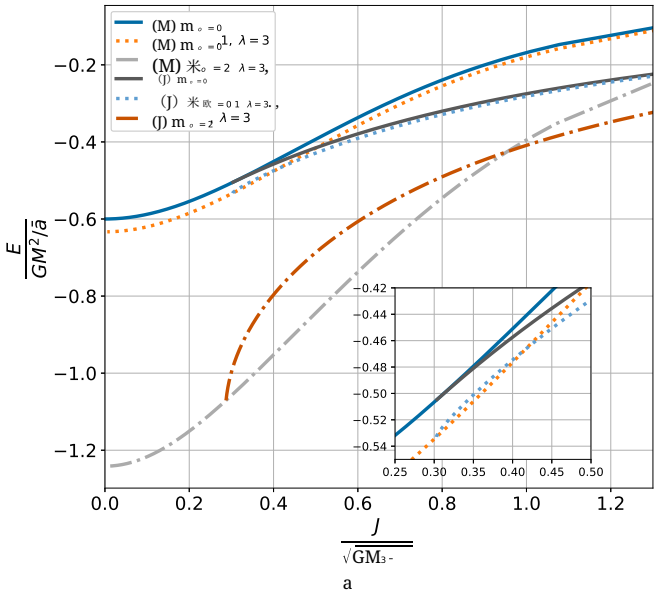


图 4：椭球体的能量随角动量变化的关系。能量 E 以 $GM^2/\bar{a}$ 为归一化基准，角动量以 $\sqrt{GM^3\bar{a}}$为归一化基准。插图放大显示了 $m_o = 0$ 和 0.1 模型的分岔点附近区域。

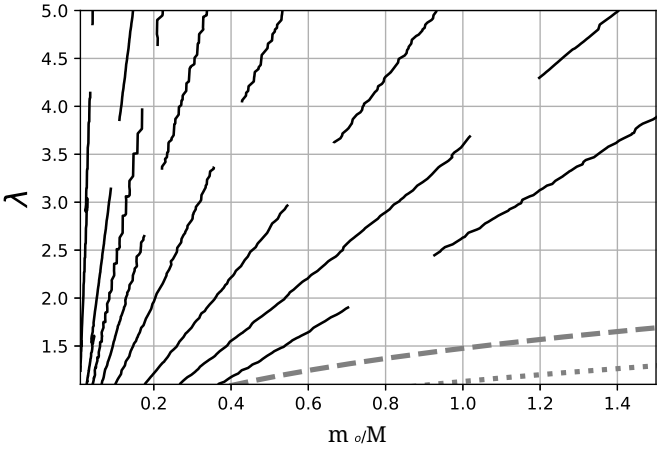


图 5：M-旋转椭球在中性稳定状态下偏心率的等值线图。虚线表示 $\nu = 0.6926$ 对应的曲线，0.3108 点线则对应 。

，尽管在真正的分岔点处，两条椭球序列本应具有相同的该值。

B. M-球体的长期稳定性

注意，在能量表达式中，参数 λ 和 m_o/M 并不简并（见式（19）），因此这些模型不能仅由单一参数ν表征，而需要同时指定 m_o/M 和 λ。在图4中，我们绘出了 M-旋转椭球序列和 J-椭球序列的能量随角动量的变化关系。参数的选取满足 $\nu < 0.6926$。插图展示了分岔点附近各序列的放大图。原始麦克劳林旋转椭球的能量始终高于具有相同角动量的雅可比椭球。因此，超过分岔点后，麦克劳林旋转椭球长期不稳定。黏性能量耗散会驱使麦克劳林旋转椭球转变为具有相同角动量、能量较低的雅可比椭球。当环的引力场开启时，在分岔点附近，J-椭球的能量可能高于 M-旋转椭球。角动量足够大时，前者的能量会低于后者。因此，至少在分岔点附近，M-旋转椭球是长期稳定的，而中性稳定点位于更高的角动量处。对于$\nu > 0.6926$的情形，J-椭球序列的能量始终高于 M-旋转椭球序列。因此，大质量环的潮汐场会使 M-旋转椭球免于发生向三轴椭球体转变的条形分岔。

图 5 中，偏心率为 e 的 M-球体，其总能量等于具有相同角动量的 J-椭球体的总能量（需要注意的是，椭球体的偏心率不一定与 M-球体相同）。在等值线以下，偏心率低于标注值的 M-球体会因黏性耗散而发生长期不稳定，因为其能量高于 J-椭球体。需要注意的是，经典的麦克劳林旋转椭球在 $e \geq 0.81267$时会变得长期不稳定。环的引力使 M-球体更加稳定，而且随着 $\nu = \lambda^{-3} m_o/M$ 增大（朝图的右下角方向），这一作用会增强。

IV. 总结与讨论

我们研究了大质量同心环引力场作用下均匀旋转的均质椭球序列。为使研究具有半解析性，环势截断于四极项。所得各种物理量的表达式中包含由环的质量和半径决定的修正项。当环的质量减为零或半径趋于无穷大时，我们恢复经典的麦克劳林椭球体和雅可比椭球体。大质量环的存在改变了椭球体的分岔和长期稳定性。由于环状质量的引力吸引，零角频率 M-球体的子午剖面具有有限偏心率 e 。因此，该序列不会延伸至 $e = 0$ 极限。如果衡量环引力场的参数 ν 小于$\nu = 0.6926$，则与经典麦克劳林序列中的情形一样，J-椭球体会在某个 e 值处分岔自 M-球体。超过这一阈值后，分岔点消失，且 J-椭球体的存在对应的 e 低于

M-球体出现时的数值。比较具有相同角动量的 M-球体和 J-椭球体的总能量可知，在分岔点附近，M-球体不会因黏性耗散而发生长期不稳定；这与经典麦克劳林旋转椭球不同，后者在雅可比椭球体的分岔点之后会失稳。以偏心率为参数时，这种稳定化发生在 J-椭球体的旋转频率超过 M-椭球体的旋转频率之前（$\nu \leq 0.3108$）。

一个非旋转物体在外部轴对称环的作用下形成三轴形状（如图4所示），这似乎有悖直觉。当环的引力与椭球的自引力相当时（$\nu > 0.6926$），便会出现这种情况。在赤道面（$z = 0$）上，环的势（式2）是柱坐标径向坐标的二次函数。因此，它实际上可以等同于式(6)中的旋转项。换言之，环绕物体的环所产生的引力会对椭球造成有效的离心效应。即使物体的旋转频率为零，也会形成类似雅可比的三轴椭球。

[1] R. A. Lyttleton, *The stability of rotating liquid masses*（剑桥大学出版社，剑桥，1953年）。[2] S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal figures of equilibrium*（Dover，纽约，1987年）。[3] J. L. Ortiz 等，《自然》550，219（2017），2006.03113。[4] E. T. Dunham、S. J. Desch 和 L. Probst，《天体物理学杂志》877，41（2019年），网址 https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ab13b3。[5] J. L. Noviello、S. J. Desch、M. Neveu、B. C. N. Proudfoot 和 S. Sonnett，《行星科学杂志》3，225（2022年）。[6] B. P. Abbott 等，《相对论综述》23，3（2020年）。[7] P. B. Rau 和 A. Sedrakian，《皇家天文学会月刊》509，1854（2022年），2108.02881。[8] G. Yim 和 D. I. Jones，《皇家天文学会月刊》511，1942（2022年），2109.05076。[9] J. A. Rueda、R. Ruffini、L. Li、R. Moradi、J. F. Ro- driguez 和 Y. Wang，《物理评论D辑》106，083004（2022年），2203.16876。[10] P. B. Ivanov 和 D. N. C. Lin，《天体物理学杂志》904，171（2020年），2009.13467。[11] B. P. Kondratyev、N. G. Trubitsyna 和 E. N. Kireeva，《波罗的海天文学》24，408（2015）。[12] B. P. Kondratyev 和 N. G. Trubitsyna，《天体物理学》53，189（2010）。[13] B. P. Kondratyev、N. G. Trubitsyna 和 E. N. Kireeva，《天文学报告》60，526（2016）。[14] P. H. Roberts 和 K. Stewartson，《天体物理学杂志》137，777（1963）。[15] W. H. Press 和 S. A. Teukolsky，《天体物理学杂志》181，513（1973）。[16] J. Selvaggi、S. Salon 和 M. V. K. Chari，Am. J. Phys. 75，724（2007）。[17] B. Carlson，Numer. Math. 33，1（1979）。[18] B. Carlson 和 N. E.，ACM Trans. Math. Software 7，398 1981( )。[19] H. Robe 和 L. Leruth，Astron. & Astrophys. 133，369（1984）。[20] M. Miyamoto，Publ. Astron. Soc. Japan 19，242（1967）。[21] https://people.math.sc.edu/Burkardt/py_src/toms577/to

ms577.ht