arXiv:2301.09814v1 [math.LO] 24 Jan 2023

弗兰克尔档案馆中的哥德尔和冯·诺伊曼未发表的信件

Paolo Mancosu加州大学伯克利分校
mancosu@socrates.berkeley.edu

Richard Zach卡尔加里大学
rzach@ucalgary.ca

1 引言

本文整理并讨论了库尔特·哥德尔和约翰（亚诺什）·冯·诺伊曼的几封信件，这些信件现藏于以色列国家图书馆的亚伯拉罕·阿道夫·弗兰克尔档案中。该档案尚未编目。

阿道夫（后改名亚伯拉罕）·弗兰克尔（1891–1975）曾任马尔堡大学数学教授，直至1928年。1928年，他迁往基尔；一年后，他接受了耶路撒冷希伯来大学的职位，并在那里度过了职业生涯的余下时光（传记回忆录见弗兰克尔 2016）。Ivor Grattan-Guinness曾提到我们刊出的部分信件确实存在；他曾

我们衷心感谢以色列国家图书馆、普林斯顿高等研究院（授权发表哥德尔的信件）以及 Marina von Neumann Whitman（授权发表冯·诺伊曼的信件）许可我们发表哥德尔和冯·诺伊曼写给弗兰克尔的信件。感谢以色列国家图书馆档案管理员 Shaul Greenstein 帮助查找弗兰克尔、哥德尔和冯·诺伊曼之间的往来信件。也感谢 Juliette Kennedy、Mark van Atten、Paola Cantù、Ulf Hashagen，尤其是 Aki Kanamori。

在这些信件仍由弗兰克尔的遗孀保管时，她曾将它们给他看过。格拉坦-吉尼斯提到冯·诺伊曼写于1923年10月26日、下文将刊出的“一封令人惊叹的14页长信”，并写道：

> 1982年，我在其遗孀位于耶路撒冷的公寓里，当着她的面看到了这封信；这封信如今收藏于他的文集之中。文集中还收有 Carnap、哥德尔和 Quine 的来信。美国国会图书馆（位于华盛顿）收藏的冯·诺伊曼文集中没有这封信的副本。（格拉坦-吉尼斯，2000，注33，第479页）

如前所述，我们在此刊出弗兰克尔档案馆中所有来自哥德尔和冯·诺伊曼的信件。尽管其中有些比其他信件更有价值，我们仍将发现的所有信件一并收录，旨在为公开更多哥德尔和冯·诺伊曼的未发表通信尽一份力，并由此加深我们对20世纪20年代和20世纪30年代数学基础发展过程中若干关键时刻的理解。

哥德尔和冯·诺伊曼都是20世纪杰出的知识巨擘。他们的重要性可从近来出版并跻身畅销书榜单的两部通俗传记中得到彰显（Bhattacharya，2021；Budiansky，2021）。学界对哥德尔思想的兴趣也在持续增长，这得益于哥德尔论文与通信五卷本这一卓越成果（通信部分参见哥德尔 2003年a，b）。近期的档案研究不断揭示哥德尔的生平与思想的发展脉络。[1] 冯·诺伊曼的早期传记也正受到历史学家应有的关注；尤其可参见Hashagen （2006a，b，2010）。

我们认为，将本文收入一部纪念 Volker Peckhaus 学术成就的文集中十分合适。他的档案研究极大地增进了我们对逻辑与数学基础史的理解，而他在我们开展相关

[1]参见过去十年间发表的其他著作，例如 Adžić 和 Došen(2016)、Crocco 和 Engelen (2016及其中收录的若干篇文章、哥德尔(2019)、Kanckos 和 Lethen (2021)、Kennedy (2020)、Lethen (2021)、vanAtten (2015)，以及 von Plato (2020)。Gabriella Crocco 研究小组对《哲学笔记》的转录稿已发布在 HAL 上，链接如下：https://hal.archives-ouvertes.fr/search/index/q/*/authIdHal_s/gabriella-crocco

课题研究期间给予我们的个人帮助也极其宝贵。正如我们将看到的，与冯·诺伊曼的通信涉及集合论史上的一个关键时刻，而集合论研究正是Volker的主要兴趣之一（Peckhaus，1990，1992，2005；Ebbinghausand Peckhaus，2015）。

2 封哥德尔的信

在弗兰克尔档案馆中发现的哥德尔书信分为两组。[2] 第一组包括三份写于1931—1932年的残片。较长的一份（四页手写稿）出自一封可确定写于1931年底的信；从现存页面左上角的编号可以看出，这份残片对应的是一封信的最后四页，而前两页已佚失。另外两份短得多的残片，来自一封可确定写于1932年的信的最后两页。在这种情况下，无法得知原信有多长。残片所出自的最后两页仅存下半部分。这些残片在历史上更具意义，因为它们涉及哥德尔不完备定理（哥德尔，1931年）与Herbrand、普雷斯伯格和策梅洛的工作之间的关系。

第二组包括三封写于1958年的完整信件。我们先简要介绍这第二组信件；它们仅具有传记方面的意义。随后，我们将更多地关注1931—1932年的残篇。第二组中的第一封信谈及迈克尔·拉宾和阿兹里埃尔·列维。拉宾和列维都曾在耶路撒冷大学师从弗兰克尔。拉宾于1956年在普林斯顿师从阿隆佐·丘奇完成博士学位；列维则于1958年在耶路撒冷大学师从弗兰克尔和亚伯拉罕·罗宾逊获得博士学位。显然，弗兰克尔曾在哥德尔提及的此前两封信——1957年12月2日和1958年1月2日的信——中征询哥德尔的意见，询问是否可以任命拉宾为助理教授。哥德尔对拉宾的工作给予了非常积极的评价，但表示无法评价他的教学能力。在信的第二部分，哥德尔回应了一项询问

[2] 在出版于哥德尔（2003年b，第469–562页）《哥德尔文献》的检索指南中，没有列出弗兰克尔与哥德尔之间的信件。

弗兰克尔询问的是是否可以为列维提供高等研究院的研究员职位。哥德尔写道，当年时间已晚，无法安排此事。在1958年5月12日的信中，哥德尔提到经费已经到位，但他得知列维与此同时已找到另一份职位，因此无法接受高等研究院的研究员职位。他提出，可以考虑在1959/60学年重新提供研究员职位。最后一封信谈及弗兰克尔访问普林斯顿一事。哥德尔提到自己通常不参加系茶会，并请弗兰克尔通过电话安排会面。

现在我们转向第一组（片段）书信，写于1931年至1932年，具有更大的科学价值。第一段书信片段以哥德尔评论某人在集合论方面的工作开篇，仿佛弗兰克尔曾在一封（可能已佚失的）前信中向他询问过相关问题。我们不知道哥德尔在此可能指的是哪篇论文或哪本书。第二段较长的段落讨论Herbrand(1931年)。弗兰克尔为Herbrand(1931年)撰写了书评，发表于数学进展年鉴 (JFM 57.0056.04)。我们没有其他哥德尔的书信，能像这封信一样详细讨论Herbrand关于算术的一致性的文章。不过，其他信件中也曾简短提及：一封是致海廷的信，写于1932年11月15日（哥德尔，2003b，第61页）；另一处见于他与范·海耶诺尔特的通信（1964年8月14日、8月27日、9月18日）（哥德尔，2003b，第316、318–319页）。这些提及晚得多，且出现在阐释Herbrand所说的严格直觉主义的语境中。诚然，哥德尔于1931年7月25日致Herbrand的信（哥德尔，2003b，第20–21页）涉及了一些正在讨论的问题。这是因为Herbrand于1931年4月7日写信给哥德尔，讨论哥德尔的结果与他此前所得结果之间的关系（他所讨论的理论名称与Herbrand1931中的名称相同）。

Herbrand 的文章（1931年）于1931年7月14日完成。期刊于1931年7月27日收到稿件，文章刊载于第166卷（1932年）第1期，该期于1931年11月12日发行。由于第2期 *Heft* 于1931年12月10日出版，而哥德尔提到了《纯粹与应用数学杂志》的“最新一期”（该刊通常以副标题克雷尔数学杂志为人所知），因此我们可以推断

这封信大约写于1931年11月中旬至12月中旬之间；考虑到该期刊物送达哥德尔或哥德尔使用的图书馆可能需要时间，日期也可能相应推迟。不过，信中有一点令人费解。信中最后提到了冯·诺伊曼："尊敬的教授，如果您曾就一致性证明的问题与冯·诺伊曼先生通信，我将十分感激您能告知我他的看法。"令人惊讶的是，哥德尔非常清楚冯·诺伊曼的立场，因为他们曾就此问题通信，而且哥德尔早在1931年1月向石里克学会报告研究成果时，就已提及冯·诺伊曼的立场（见Mancosu 1999）。冯·诺伊曼在1931年1月10日致哥德尔的信中表达了他对不完备性定理的立场（哥德尔，2003b，第338–339页）。不过，或许哥德尔想知道冯·诺伊曼的立场是否有所转变。

在致弗兰克尔的信中，哥德尔表示，他接受 Herbrand 证明的所有数学定理。尤其是，他赞同 Herbrand 的看法，即 Herbrand 的一致性证明与哥德尔不完备定理之间并不矛盾。事实上，Herbrand 对一个弱于外尔在 《连续统》(外尔，1918年) 中所提出的系统的系统所给出的一致性证明，即使从直觉主义（也就是有限主义的）观点来看无可指摘，也无法在该系统本身中形式化。[3] 这一观点。

哥德尔对 Herbrand 方法论立场的看法，与他在其他场合表达的意见相一致（参见发表于哥德尔 2003a，b中的他与伯奈斯、Herbrand 和冯·诺伊曼的通信）。哥德尔并不赞同 Herbrand 的所有猜想。尤其是，他讨论了"有限主义"范围的问题。他指出，希尔伯特及其学派以相当直观且具有实质内容（即有意义）的方式使用这一概念，而且他们的有限主义证明并未在某个特定系统中形式化。哥德尔认为，与 Herbrand 和直觉主义者的看法一致，原则上无法给"有限主义"下定义。他与 Herbrand 和冯·诺伊曼的分歧在于，他们声称所有有限主义证明都可以在经典分析的公理系统中形式化。Herbrand 曾提出以下猜想——

[3]当时，直觉主义与有限主义被视为同一概念。

在给哥德尔的一封信中（并且几乎以完全相同的措辞见于Herbrand1931）：

> 这进一步坚定了我的信念：证明每一个直觉主义证明都能在罗素系统中形式化是不可能的，但永远不会找到反例。在那里，我们或许不得不采纳某种逻辑公设。（哥德尔，2003年a，第21页）

相反，哥德尔认为，原则上有可能存在某些有限主义证明，超越经典分析的形式证明程序。因此，与Herbrand和冯·诺伊曼不同，他不认为自己的结果表明希尔伯特纲领无法实现。这是他在1931年文章中已经提出的观点。哥德尔在其1931年论文中指出，他的结果

> 并不与希尔伯特的形式主义观点相矛盾。因为这一观点只预设存在一种一致性证明，其中仅使用有限主义证明手段；而可以设想存在无法用 P的形式系统表达的有限主义证明。（哥德尔，1986年，第195页）[4]

在致弗兰克尔的信中，哥德尔承认，希尔伯特学派迄今使用的有限主义论元不足以证明分析（或算术）的一致性。然而，哥德尔仍坚持其1931年文章中的观点：仍有可能找到能够确立这一一致性结果的有限主义推理方式，并以此实施希尔伯特纲领。哥德尔还反对Herbrand猜想，声称它几乎毫无意义或难以理解，因为要使其有意义，就必须定义“有限主义证明”（他在1931年4月7日致Herbrand的信中也提出了类似观点）。[5]

[4] P 指的是对《数学原理》所用系统的修改；哥德尔哥德尔(1931年)[5]“我现在想探讨直觉主义证明在某些形式系统（例如《数学原理》的系统）中能否形式化的问题，因为对此似乎存在意见分歧。我认为，就这个问题能够得到精确

正如前文所指出的，哥德尔在这封信中对有限主义的立场，与他在同一时期其他信件中所捍卫的立场一致。从1933年起（见 齐格 2003年，第8页），哥德尔后来认为，他的不完备性定理表明，希尔伯特纲领按其最初构想无法实施。关于哥德尔对有限主义概念的认识演变，详尽讨论请参见费弗曼 (2003年)、齐格 (2003年)以及Mancosu (2004年)。

最后，让我们来谈谈剩下的两个片段。如前所述，它们出自同一封信。在这第二封信的第一个片段中，哥德尔强调，普雷斯伯格 (1930年的文章并不与他自己的不完备性结果相冲突。这是哥德尔在全部通信中唯一一次引用普雷斯伯格的结果。伯奈斯在1931年1月18日致哥德尔的信中曾引用普雷斯伯格的贡献（哥德尔，2003a，第90页）。哥德尔还在1934年的普林斯顿讲座中提到了普雷斯伯格（见哥德尔 1986，第367页）。弗兰克尔也在 JFM 56.0825.04 中评论了普雷斯伯格 (1930)。

第二封信的第二个片段几乎全文如下：

> 我想借此机会提一下，策梅洛在年度报告 第41卷，第2分册，第 87 ⟦策梅洛 1932⟧ 中对我的论文⟦哥德尔 1931⟧,提出了完全不恰当的主张。我希望适时在年度报告 中作出回应。

对策梅洛在年度报告 中所发表文章的引用，以及哥德尔表示过但未付诸行动的答复意图，使我们可以放心地将这封信定于1932年。关于哥德尔—策梅洛通信，更多内容可参见格拉坦-吉尼斯 (1979)以及Dawson (1985、2003年。

冯·诺伊曼的3封信

弗兰克尔文集中有冯·诺伊曼的六封信。第一封正是格拉坦-吉尼斯提到的那封令人“惊叹”的14页长信，日期为1923年10月26日。当时，19岁的冯·诺伊曼名义上

任何意义（由于“有限主义证明”这一概念的不可定义性，这一点确实值得怀疑），唯一正确的立场只能是承认我们对此一无所知”（哥德尔，2003b，第23页）。

正在苏黎世联邦理工学院学习化学工程。[6] 此前，他刚在柏林大学完成两年的化学学习（为苏黎世联邦理工学院入学考试做准备），同时还学习了数学和物理学。在那里，他引起了埃哈德·施密特的注意；施密特也和冯·诺伊曼一样对集合论感兴趣。1923年8月，冯·诺伊曼完成了一份集合论手稿，并寄给策梅洛（施密特的终生好友），施密特随后又将手稿转交给弗兰克尔。弗兰克尔后来回忆道：

> 1923年，埃哈德·施密特自1920年起便在柏林担任教授，也是期刊《数学杂志》的编辑之一。我当时在马尔堡，他寄给我一份篇幅很长的手稿，题为《集合论的公理化》，作者是Johann von Neumann；这个名字当时我还不熟悉。施密特一年前曾将我的一篇论文提交给普鲁士科学院。他在附信中说，柏林找不到有能力评审这份手稿的人，因此请我说明是否应考虑在《数学杂志》上发表。该文共84页印刷稿，五年后确实发表于该期刊第27卷，但早在1925年，冯·诺伊曼的博士论文便已以匈牙利语发表，内容与此文基本相同。大约在同一时期，冯·诺伊曼还附上1923年8月14日的信，直接寄给我他的作品；两个月后，他又在一封信中附上评论，将其扩充为14张大幅四开纸页。（弗兰克尔，2016，143）

8月14日的信似乎已经遗失，但其内容很可能与冯·诺伊曼寄给策梅洛的信相差不大（参见Meschkowski1967，第271–273页）。弗兰克尔档案馆中的第一封信显然是对弗兰克尔回信的答复。

正如弗兰克尔在引用上文所引段落后承认的那样："我花了相当大的力气才读完这篇论著，因为它

[6] 参见Hashagen (2006a，了解冯·诺伊曼的求学时期。

不仅偏离了迄今为止关于集合论公理化的一切已发表成果，而且还与先前的思想相矛盾。”冯·诺伊曼的方法与此前诸如策梅洛、斯科伦以及弗兰克尔本人等人的方法之间的根本差异，涉及原始概念的选择和公理的选择。冯·诺伊曼的理论并不把集合和类作为原始概念，而是区分了自变量（“I Dinge”，I类对象）和函数（“II Dinge”，II 类对象）。既是函数又是自变量的对象称为“I II Dinge”。原始运算是 $[x, y]$、将函数 x 应用于自变量 y，以及 hx, yi，即 x 和 y的有序对。[7]在这一框架中，集合（Mengen）和类（Bereiche）由函数（II 类对象） a 表示，这些函数只取两个可能值中的一个，即固定的 I类对象 A和 B：相应的类包含 x 当且仅当 $[a, x] = B$，或者等价地： $[a, x] \neq A$。因此，在冯·诺伊曼的系统中，集合和类都是 II 类对象。二者的区别在于，它们能否自身成为其他类的元素（集合可以是元素，而类不能）。所以在冯·诺伊曼的框架中，区别归结为它们能否作为自变量，即 I类对象。既是函数又是自变量的对象是 I II 类对象；因此，集合是一个只以 A 和 B 为值的 I II 类对象，而真类则是这样一个并非 I类对象的 II 类对象。

致弗兰克尔的信阐述了冯·诺伊曼采取这一方法的动机。首先，冯·诺伊曼认为，公理化集合论的成败取决于其能否发展出一套序数理论。但策梅洛的公理不足以做到这一点。康托尔的做法是将序数定义为序型。冯·诺伊曼指出，策梅洛无法采用这种做法，因为

> 在策梅洛的集合论中，没有任何东西能保证 ⟦一个集合的“序数”不会因为本身变得“过大”而失去“不过大”这一性质⟧，。毕竟，人们对这个序数唯一知道的是，它与给定集合相似（因而等势）。只有掌握了“替代公理”，才能据此断定该序数并不过大。

[7]冯·诺伊曼 (1925) 使用 (*x*, *y*) 表示有序对。关于冯·诺伊曼的记号和定义，参见 冯·诺伊曼 (1928a)。

替代公理由弗兰克尔(1922年)和斯科伦(1923年)各自独立提出。[8] 简而言之，该公理指出，若 X 是一个集合，且 f是一个将 X 的元素映射到集合的函数，那么把每个元素 a 用其 X 对应的值 $f(a)$替换后，所得结果仍是一个集合。然而，冯·诺伊曼接着说道：

> 在策梅洛公理体系中，几乎无法容纳替代公理。因为在策梅洛那里，“函数”的定义（所有序偶的集合 $x,\ f(x)$）从一开始就要求定义域和值域都“不能太大”。替代公理规定前者蕴含后者，因此确实会变得多余，甚至无法以其最强形式〚充分表达〛。因此，人们不得不以另一种方式，或独立地引入定义域任意的函数这一概念。我认为，绝对最简单的办法就是从一开始便假定存在定义域和值域任意的“函数”。

然而，冯·诺伊曼的系统并不包含替代公理。相反，它包含核心公理 IV 2：

IV 2 一个 II 对象 a 是 I II 对象，当且仅当不存在一个 II 对象 b，使得对于每个 I 对象 x，都存在一个 y，满足 $[a, y] \neq A, [b, y] = x$。

回想一下，I II 对象对应于集合，而不是 I II 对象的 II 对象对应于真类。因此，这条公理大致是说： a 是真类，当且仅当存在一个函数 b ，使得对于任意的 x ，都存在某个属于 a的“元素” y ，使得函数 b 在自变量 y 处的值为 x。换句话说，真类恰好是那些存在到全集的满射的类。

这看起来完全不像替代公理；从冯·诺伊曼的回复中，我们可以推断弗兰克尔曾要求对公理 IV2 作出论证。冯·诺伊曼在第 3–5 页给出了论证。首先，他承认可以用更直接对应替代公理和选择公理的公理来取代它，即：

[8]关于替代公理及其历史的深入讨论，请参阅Kanamori（2012年）。

IV 2^* 令 a, c 为 II 对象， b 为 I II 对象。假设对于每个 y，只要 $[a, y] \neq A$，就存在一个 x，使得 $[b, x] \neq A$, $[c, x] = y$。那么a 也是一个 I II 对象。

III 2^* 设 a 是一个 II 对象。那么存在一个 II 对象 b，使得每当存在一个 y 满足 $[a, x, y] \neq A$时， $[b, x]$ 就是这样一个 y。

在证明冯·诺伊曼(1929年，第230页及以下）时，也能看到类似的考量：冯·诺伊曼（1928a）的系统与系统 S^*等协调；后者用上述两个公理取代公理 IV2。

然而，支持公理 IV2 的理由包括：（1）它清楚地定义了何时一个集合“过大”；（2）它以拥有全局选择函数这一强形式蕴含选择公理；（3）它使得无需“无限”公理 V 2 和 V 3，也能发展有限集理论。

在第5页，冯·诺伊曼将公理 IV2 与分离公理进行比较；在冯·诺伊曼的系统中，分离公理可表述为：

IV 2^{**} 设 a 是一个 II 对象， b 是一个 I II 对象。假设 $[a, x] \neq A$蕴含 $[b, x] \neq A$。那么 a 也属于 I II 对象。

这可由公理 IV2 推出（参见 冯·诺伊曼 1928a，第 685 页）。反过来，公理 IV2 可由 IV 2^{**} 以及以下要求推出：所有 I 对象构成的类 Ω 具有一个良序 W ，且 Ω 的所有真初始段都是集合。[9]

冯·诺伊曼接着讨论了手稿第一部分和第二部分的其他一些方面，即：

1. 对公理组 V（关于无穷）的批评，

2. 为何等势（基数相同）要在相似（序型相同）之后讨论，

3. 手稿中提出的主张并不成立：不仅良序集合，而且良序类也两两可比较。

[9]参见Kanamori (2009)，了解冯·诺伊曼原始公理化与伯奈斯公理化之间的关系；后者如今称为冯·诺依曼–伯奈斯–哥德尔（NBG）系统。

4. 关于可以通过超限归纳进行定义的证明概要（手稿中缺失；参见冯·诺伊曼 1928a）。

在信的第 9–11 页，冯·诺伊曼讨论了手稿的第三部分；该部分显然涉及对集合论公理化发展的目的所作的方法论反思，以及将其与同一理论的“直觉主义”发展相比较，还涉及集合论概念（如可数性或不可数性）在斯科伦（1923年）意义上的“相对性”问题。[10] 冯·诺伊曼首先澄清，他的方法将逻辑概念视为有意义且给定的，而集合、函数和选择公理等概念则以公理方式处理——这些概念被认为是“非谓述的”，因此从布劳威尔和外尔的立场来看是令人反感的（参见 冯·诺伊曼 1925 的第 1 节）。他指出，集合论可以纳入希尔伯特的数学公理化体系（希尔伯特，1923年）。他还表示，在“系统的可数性”与“不可数集合的公理性存在”并不冲突这一点上，他赞同斯科伦（1923年）。（他指出，撰写手稿时并不知道斯科伦的论文，并感谢弗兰克尔提醒他注意该文。）他写道：

> 关于基数的“相对性”，或者如我所说的“非实在性”，我赞同斯科伦的看法。不过，我并不从中得出与他相同的结论；相反，我认为这为反对直觉主义提供了有力论据。基于直觉主义，你永远无法真正接近不可数连续统这一概念，因为观念的现实世界是可数的。连续统本质上是超限的、非谓述的，只能通过形式主义方法来把握。

他接着解释说，按照希尔伯特的观点，要以这种形式主义方式处理不可数对象，就需要证明该系统是一致的。对于包含逻辑蕴涵、否定、同一性和选择公理的系统，很容易给出一致性证明。[11] 要处理集合论，

[10] 参见哈内 (2001，其中讨论了斯科伦的论证。[11] 此处冯·诺伊曼想必指的是希尔伯特在 ε演算中对逻辑所作的一致性证明，见希尔伯特 (1923年)。关于希尔伯特的一致性证明及其与Zach (2003年、2004年的关系，参见冯·诺伊曼 (1927)；关于冯·诺伊曼的一致性证明，特别参见Bellotti (2016)。

还必须引入函数的概念，但迄今尚无法证明该系统的一致性。他将在冯·诺伊曼(1927)中尝试给出这样的一致性证明。

最后（第 11–13 页），冯·诺伊曼讨论了系统的范畴性问题，以及基数与良序的相对性。在这里，他提出了与其在 §II 中更详细阐述的相同观点冯·诺伊曼 (1925)：公理系统无法确定是否存在 I 类对象并非 I II 类对象，也无法确定非良基集合是否存在（例如，满足 $a = \{a\}$ 的集合）。[12] 这些问题可以通过附加公理来解决，但更重要的是，良序性与有限性的相对性表明，集合论本质上并非范畴的。它不仅没有极大模型，也未必存在极小模型。在给出良序性相对性的证明概要之前，他写道：

> 综上所述，我认为集合论无法被公理化为范畴系统。然而，
> 这意味着世界上根本不存在范畴公理系统（有限系统除外）。
> （看似具有范畴性的系统，例如数学，都依赖于集合论。）
> 我目前尚不确定这一事实的影响范围和重要性。

冯·诺伊曼在信的结尾提到，施密特曾答应将这份手稿发表在《数学杂志》上（但需先按冯·诺伊曼认为必要的意见修改）。他还提到，文章印出来将有40页，并询问弗兰克尔，若不作这些修改而提前发表是否合适；如果合适，应发表在哪个刊物上。最后，冯·诺伊曼想知道他提出的序数理论是否是新的。

除了冯·诺伊曼广泛讨论本身所具有的内在价值——这让我们得以一窥冯·诺伊曼理论的早期发展——这封信还揭示了冯·诺伊曼关于集合论的著作之间的关系。人们一直认为，这份手稿与冯·诺伊曼(1928a)的论文大致相同。然而，那篇论文长达84个印刷页，篇幅是

[12]冯·诺伊曼指出，这些就是Mirimanoff所说的“奇异集合”，这说明他早在1923年就已熟悉 Mirimanoff (1917)。

寄给策梅洛和弗兰克尔的手稿的两倍还多。至少，其中的超限归纳证明尚未收入这份手稿。我们还可以看到，冯·诺伊曼(1925）讨论的许多主题（集合论的直观发展与公理化发展、集合论模型、斯科伦悖论、范畴性）、冯·诺伊曼(1927）讨论的主题（函数概念的一致性证明），以及冯·诺伊曼(1929年）讨论的主题（公理 IV 2 与替代公理、分离公理和选择公理之间的关系），早在1923年就已萦绕在冯·诺伊曼心头。

第二封信的日期是1927年6月17日。此时，冯·诺伊曼刚结束在哥廷根为期一学期的访问；此前，他于1926年10月在苏黎世联邦理工学院完成化学工程学业。1927年4月26日，他还刚向柏林大学提交了数学大学任教资格申请。[13] 冯·诺伊曼证明了集合 M（$\{\omega, \wp(\omega)\ \wp(\wp(\omega)) \ldots\}$，用现代记号表示）的存在，从而回答了弗兰克尔提出的一个问题。这正是一个其存在性无法由策梅洛的原始公理推出、而需要借助替代公理的集合，正如弗兰克尔所证明的那样。然而，冯·诺伊曼（1928b）指出，弗兰克尔（1926）对“函数”的概念不足以达到这一目的。因此，他引入了“函数概念的扩展”；他说，在与弗兰克尔的通信中，他意识到了这种扩展的必要性（见 von Neumann 1928b，第376页）。这封信很可能属于这段通信，因为其中的证明表明，扩展后的函数概念足以确保 M 的存在。[14] 另见弗兰克尔对冯·诺伊曼那篇文章的回复（Fraenkel, 1928）。

接下来的三封信写于1935年和1936年，内容涉及弗兰克尔 (1937) 一书的出版事宜。弗兰克尔显然曾询问冯·诺伊曼是否可以将该书刊登在《数学年刊》上，冯·诺伊曼在1936年12月5日的信中表示同意。手稿当时尚未完成，因为冯·诺伊曼在回信中询问弗兰克尔何时

[13]这篇任教资格论文题为《集合论的公理化构造》，很可能是冯·诺伊曼(1928a)某个版本。显然有人担心这部作品的内容（提交的版本现已失传）与冯·诺伊曼1925年在布达佩斯大学完成的博士论文过于相似，因此他最终用一篇算子理论论文取代了它。参见Hashagen (2006a，2010)。[14]冯·诺伊曼(1928b)的论文早在三个月前便已被出版商收到。因此，我们可以推测，弗兰克尔曾为《数学年刊》审阅这篇论文，或者冯·诺伊曼曾将论文寄给弗兰克尔征求意见。感谢 Aki Kanamori 澄清这封信的背景。

能够寄出手稿。在1936年5月9日的信中（当时冯·诺伊曼正在横渡大西洋途中），他确认已收到手稿，并提出扩展其中一项结果。他还向弗兰克尔介绍了新创办的《符号逻辑杂志》，该刊将由阿隆佐·丘奇主编。这本新期刊有望成为发表数学基础研究成果的一流刊物，冯·诺伊曼还询问弗兰克尔是否愿意将文章刊登在该刊，而非《数学年刊》。弗兰克尔表示同意。在1936年5月下旬的最后一封回信中，冯·诺伊曼说丘奇将对此尤其感激，并希望不久能再次与弗兰克尔见面，也许是在耶路撒冷。

在1951年11月13日的最后一封信中，冯·诺伊曼（或者大概是他的秘书，因为这封信是用英语写的）表示，他可以在11月28日或29日前往普林斯顿会面。

A 附录：书信誊录文本

下文刊载哥德尔和冯·诺伊曼致弗兰克尔的存世书信誊录文本。编辑插入内容以 ⟦文本⟧ 表示。分页符和页码以 $|^{n}$ 表示。作者删去（划掉）的文字以 hh文本ii 表示。下划线以 斜体 呈现。原文中以星号标注的脚注在此按顺序连续编号。手写信件标记为“ms”，打字信件标记为“ts”。除少数例外，我们没有更正冯·诺伊曼独特且略显古旧的拼写。

A.1 哥德尔致弗兰克尔信件片段，约写于1931年末，手稿

⟦前两页已佚；现存的第一页标为第 3 页。⟧

通过连续多次使用这类定理，便能在序⟦数⟧列中不断向更高处推进。— ⟨⟨一⟩⟩ 主要的证明手段是“类型集”这一概念[15]。它指的是一个集合中那些元素的集合

[15]按通常的表述方式 = 正规函数的临界点集

即一个由序 M 数[组成的集合，其中的序数等于 M 前面各元素的序型。连续的“类-型集”序列当然可以通过取交集延伸到超限情形。证明中我没有发现错误，不过其中许多内容都是已知的。

我已经仔细读过 Herbrand 在最近一期《克雷尔期刊》上发表的论文 [Herbrand 1931]，并且在所有实质性要点上（也就是说，在一切已经证明、而非仅仅猜测的内容上）都同意他的看法。第3节中关于算术系统无矛盾性的证明，实质上已经见于《论文集》[Herbrand 1930]。顺便说一句，这个系统绝不包含经典算术或外尔《连续统》[Weyl 1918], 中的所有推理规则，因为完全归纳法只能用于递归定义的（因而是可判定的）性质。[16] Herbrand 的无矛盾性证明与我的结果并不矛盾，这一点 Herbrand 本人（第7、8页）已经解释过了。事实上，这个证明永远无法在它所证明其无矛盾性的同一系统中形式化 [，即使将它应用于第2节所描述的整个系统也是如此], ，尽管它在直觉主义意义上无懈可击。希尔伯特及其学生当然根本不在意他们的无矛盾性证明能否在某些系统中形式化，而只在意这些证明是否“有限”；“有限”这一术语在直观上大概有相当明确的含义，却没有精确定义。原则上，这样的定义甚至不可能给出；在这一点上，我与直觉主义者和 Herbrand（参见第8页）完全一致。尽管承认有限证明有这种“漫无边际”的特性，Herbrand（据我所知，冯·诺伊曼也如此）仍然猜测，所有有限证明都可以在经典分析的公理系统中形式化，因此根据我的结果，他们认为希尔伯特纲领无法实现已得到证明。在我看来，这种说法仅在以下意义上正确：形式主义学派迄今试图用来证明无矛盾性的手段，肯定不足以达到这一目的；除此之外，Herbrand 的猜想（他甚至将其作为一条新的逻辑公设提出）似乎毫无根据。

[16] 参见第5页，第3节（加粗定理）

由于缺乏对有限证明这一概念的精确定义，我认为即便是其含义也颇成问题。（顺便说一句：不能把第2节中的算术公理系统当作“有限证明”这一概念的定义，因为在提出公理时，又再次用到了待定义的术语——见C组和D组。）

尊敬的教授先生，倘若您曾就 Wid 证明的问题与冯·诺伊曼先生通信，我将非常感激您能在方便时告知我他的看法。

谨致崇高敬意

您忠实的库尔特·哥德尔

维也纳第八区约瑟夫施塔特大街43号

A.2 哥德尔致弗兰克尔信件片段，约1932年，手稿

⟦这份残页由一张纸的正反两面组成。只剩下纸张中间部分；上下各约 5 厘米被裁掉了。第一页内容如下：⟧

⟦. . .⟧ 我将按您的要求在 14 天后寄还给您，并请您届时告知您的地址。

我这篇论文与普雷斯伯格的论文《论某个系统的完备性……》之间⟦普雷斯伯格 1930⟧不存在丝毫矛盾。因为在普雷斯伯格系统中，加法是唯一的算术基本概念，而且在该系统内可以由此推出 ⟦. . .⟧

⟦上面的第一段被红铅笔斜线划掉；第二段则被黑铅笔划掉，并在左侧页边用红铅笔画了一条竖线标出。

第二面内容如下：⟧

⟦……边界？⟧可以指出——借此机会，我还想指出，策梅洛在第41卷第2分册第87页的年度报告中⟦策梅洛 1932⟧对我的工作提出了完全不实的主张

提出了这些主张，我希望今后还能在年度报告中再谈到此事。

再次致以诚挚的谢意和最美好的问候

您忠诚的库尔特·哥德尔

⟦弗兰克尔在右侧页边用红铅笔画了一个感叹号，紧挨着“完全不准确的”。⟧

A.3 哥德尔致弗兰克尔，1958年1月26日，打字稿

普林斯顿，1958年1月26日。

尊敬的同事：

谨就您12月12日和1月2日的两封信回复如下：

我通过迈克尔·拉宾博士的博士论文，以及与他讨论逻辑问题的几次交谈，对他有所了解。当然，这还不足以让我全面评判他是否适合担任助理教授 ⟦sic⟧ 。不过，我至少可以说：

拉宾博士无疑是一位才华出众的逻辑学家。他的博士论文包含非常有趣的成果，以一种出人意料的简单而极其优雅的方式证明了一个具有重大意义的一般定理。关于他的教学能力，我无法凭亲身观察作出评价。不过，我想可以从他的分析才能和思维的清晰度推断，他是一位出色的教师。也有明确的证据表明，他善于与他人合作。

关于阿兹里埃尔·列维先生，根据他寄来的手稿，我对他的能力也留下了非常好的印象。遗憾的是，他在研究所1958/59学年的职位前景非常不乐观，因为外国人的奖学金基本上已在圣诞节前决定，而迄今尚未获得资助的申请者中，甚至包括一些取得了重要原创性成果的人。不过，无论如何，我会

记下Levy先生的名字，以备在 $|^2$ 接下来的几周内万一出现某种可能性——尽管这种可能性不大。

致以最诚挚的问候

Ihr

库尔特·哥德尔

A.4 哥德尔致弗兰克尔，1958年5月12日，手稿

普林斯顿，1958年5月12日

尊敬的弗兰克尔教授：

很遗憾，今年未能及时为Levy先生争取到研究所的奖学金。最近意外地有一笔资金可供使用，并已为Levy先生预留，但Dvoretzky教授告诉我，Levy先生已经另有安排，因此无法接受高等研究院的职位。

我希望能够续发1959/1960年的奖学金；不过，这需要学院重新作出决定。

谨致最诚挚的问候

您的库尔特·哥德尔

A.5 哥德尔致弗兰克尔，1958年11月21日，手稿

[信笺抬头：高等研究院，新泽西州普林斯顿，
数学学院]

普林斯顿，1958年11月21日

尊敬的 Fränkel 教授：

非常感谢您的来信。我很高兴能在普林斯顿见到您。由于我几乎从不参加研究所茶会，或许最好通过电话商定时间。我住所的电话号码是：WA 4–0569

谨致最诚挚的问候

您的库尔特·哥德尔

A.6 冯·诺伊曼致弗兰克尔，1923年10月26日，手稿

苏黎世，1923年10月26日

尊敬的教授先生！

我刚刚收到您⟦亲笔⟧ 来信和您的论文。请原谅我直到现在才回复，但它们必须先从布达佩斯转寄到这里来。——我非常感谢您对此事的关注和批评，现在想阐述一下我的立场。读了您的回信后，我可以比在第一封信中更准确、更全面地说明这一点。

我认为，若我断言整个集合论的核心部分——检验一种方法是否实用的关键所在——就是序数理论（包括阿列夫数），并不算夸大其词。人们对（形式主义公理化）集合论的首要要求，大概是：第一，它应当以公理上无可指摘的方式，从所有等势的（或同构良序的）集合中选出一个代表；第二，应当证明“可比较性”。

但这正是“序数理论”的成就。然而，策梅洛公理体系无法用来建立序数的概念。因为它不能保证一个“并不太大”的集合的“序数”不会变得“太大”。我们对这个序数其实只知道

它与一个给定的集合相似（也就是说，等势）。但只有掌握了“替换公理”，才能由此推论出 $|^2$ 序数不会太大。因此，我始终坚信，形式主义集合论绝对离不开这个公理。[17]—

此外，我认为替代公理相当没有问题。它在避免理查德悖论方面肯定没有问题。——当然，若不考虑可定义性，只看基数（实际的，而非公理体系中的基数），那显然是错误的。毕竟，归根结底一切都是可数的，这就会导致矛盾。（也就是说，会得到理查德悖论。）

但我要求的（正如斯科伦所强调的）要少得多：集合中元素的“替换”必须以确定的方式（通过一个操作 $y = [cx]$, c 一个 II 类对象）进行。因此，关键不只是集合的大小：可定义性这一特征必须得到绝对保留。——

然而，在策梅洛公理体系中，几乎不可能纳入替代公理。⟦n⟧ 策梅洛对“函数”的定义（由所有序对 x， $f(x)$组成的集合）从一开始就假定，自变量和值域都“不太大”。因此，要求后者由前者导出的 $|^3$ 替代公理实际上是多余的，而且无法以其完整的严格程度表达。

因此，人们不得不以其他方式，或独立地引入具有任意 值域的函数。我认为，最简单的做法是立即从具有任意自变量和 值域的“函数”出发。

除此之外，为了说明该函数的原始特征为何如此，我可以指出，在表述“分离

[17]因此，您认为它只是暂时性的，这更令我惊讶，也更使我感兴趣。如果您愿意告诉我打算如何替代它，我将不胜感激。比如说，我还能设想，通过其他途径，也能确保对每个 α 都存在 $\aleph_\alpha$。但我很想知道，序数概念是否也能摆脱替代公理？我不太相信这办得到。除非您假定可以通过超限 归纳作一般定义 ⟦sic⟧。

公理”时，毕竟离不开函数（其值域可以任意）。从函数出发，可以避免这里出现繁复的复杂化。

我试图阐明促使我将替代公理纳入公理体系（显式或隐式）的理由。当然，这还不能算是公理 IV2 的动机。可以不要求公理 IV2，而直接要求替代公理，即（用我的记号）：

IV 2^* a, c 是 II 类对象， b 是 I II 类对象。对于每个 y，若有 $[ay] \neq A$, 则存在一个 x，使得 $[bx] \neq A$, $[cx] = y$。那么， a 也是一个 I II 类对象。

我承认，凭借这条定理，除了选择公理外，集合论所需的一切都能得到。若将 III2、3 替换为

III 2^* a 是一个 II 类对象。那么存在一个 II 类对象 b，使得每当存在一个满足 $[a\mathbf{h}xy\mathbf{i}] \neq A$ 的 y 时， $[bx]$ 就是这样一个 y。 $|^4$

替代了。我承认，有了这个系统，确实可以实现所有相关的目标（而 IV2 并不能由此推出）。同时，选择公理仍将保持其特殊地位。—

尽管如此，我认为自己可以迈出一步，超越不可或缺的必要范围。不过，理由确实很主观：这个公理强大的效能令我印象深刻。因为

1. 它清楚明白地说明了集合何时会变得“过大”。

2. 它无需任何额外步骤便能推出选择公理。

3. 最后，它（我想是这样）消除集合论的一个重大美学缺陷：通常，为了奠定有限 集合理论的基础，必须援引特定的“无限”公理 IV $2, 3$ ⟦此处显然指的是公理 V 2、3；见下文⟧。（也就是说，为了证明诸如 (a) 、 (a, b) 、 (a, b, c) 这样的集合并非 “ 过大 ”。）

也可以这样表述公理 IV2：我们把 IV 2 替换为在此处所能采用的最弱条件，即分离公理。它的表述如下：

IV 2^{**} a 是一个 II 类对象， b 是一个 I II 类对象。由 $[ax] \neq A$ 可推出 $[bx] \neq A$。那么 a 也是一个 I II 类对象。

那么便可以证明以下定理（与罗素[1]'
悖论完全相同）：

> 一个 II 类对象 a 肯定不是 I II 类对象，若存在一个 II 类对象，
> 使得对于每个 y，都存在一个 x，满足 $[ax] \neq A$, $[bx] = y$。

现在，IV 2 要求逆命题也成立，即这一充分条件也必须是必要条件。
也就是说：尽可能多的范围 是集合。—

IV 2^{*}（替代公理）可以如下补充为 IV 2（其中不假定选择，即 III 2^{*}）：

> 应当存在 I类对象范围 Ω 的一个良序 W，使得 Ω 的所有
> 真截段都是集合（而不只是类）。

这由公理 IV 2 推出（第39页上方：选择 W，使得 Ω $W \approx \Omega^{**}$, $\overline{\Sigma}(\Omega^{**})$ 成立）。但反过来，这与 IV 2^{*} 一起便得到公理 IV 2。

我认为，公理组 V（无穷公理）是整个系统的一个重大缺陷。它们是从策梅洛的系统中沿用过来的，而且非常复杂。它们的含义（尤其是 V 2 、 3 ）我完全不明白。不过，要想

1. 证明无限序数 ω 的存在，
2. 证明所有阿列夫数的范围 Γ不是集合，也就是说"太大"，

我还没能用其他方式确保这一点。不过，这样做非常可取，因为困难也许就源于此连续统问题 。

之所以在相似之后 讨论等价性，原因在于：即使是等价性中最简单的定理（阿列夫数的定义、可比较性、阿列夫运算），也需要完整的序数理论和良序定理。

反过来，良序理论并不以等价性为前提。把整个第二章插在伯恩斯坦定理和可比较性之间并不妥当。（按目前的安排，论述是从一般逐渐转向特殊。）

序数概念才是根本（至少在我的论述中如此），其他一切都是次要的。

我想借此机会纠正我论文中的一个错误。在第39页底部，我声称，即使良序类不再是集合（也就是"太大"），仍然可以证明它们具有可比较性。这个证明本可不借助序数来进行，例如将每一对具有相似截段的元素彼此对应。

这是错误的。所有方法都因真正的截段也可能不再是集合而失效。（不可能把一个这样的 II 类对象 c ——它将 x 和 y 的截段彼此相似地映射——表示为从 x，y 出发的函数。因为 c 不必是一个 I类对象。）

这大概又一次证明，核心概念不是良序，而是序数：|[7] 如果缺少序数，良序范围就再也没有任何优于其他范围之处。

第二部分缺少一个定理的证明；这个定理也属于这里要讨论的内容，尤其因为人们常常认为它不言自明。它讲的是超限归纳定义的可能性。最广义的表述如下：

> a 是一个 II 类对象。那么存在且仅存在一个 II 类对象 b，具有以下性质：
>
> 1.，如果 x 不是 ⟦序数⟧，那么它就是 $[bx] = A$⟦。

2.，这是 $[bx] = [a\mathbf{h}x\,|[bx]\mathbf{i}]$, 如果 x O⟦rdnungs⟧Z⟦ahl⟧ 的话。

这个证明与序数存在性的证明大体类似。（在那里， a的选取非常简单：它总是 $[a\mathbf{h}xy\mathbf{i}] = y$。这里必须考虑 a-s的一般性。由于序数概念已经存在，因此这里可以有所简化。）

关于第一、二部分，我大致只能说这些。现在我想转到第三部分。——本第三部分对这套公理化集合论与“直觉主义”之间的关系作如下设想：我们处于一个范围之中（从现在起，范围不再具有公理化意义，而只是朴素的集体概念），其中包含 I 类对象和 II 类对象。在其中，逻辑的基本运算是：

逻辑推理、否定、相等、“所有” |[8]和“存在”这两个概念

已经有意义地确定下来，这些也不会再加以分析；与此相对，仍完全缺少那些被怀疑具有“非谓述性”的概念，即

集合、函数、选择。

这些应当被公理化。

因此，这一范围并非完全“直觉主义的”，不像布劳威尔或希尔伯特所采用的那些范围。它更符合外尔最初较不激进的立场，而且他大概最早在《连续统》一书中准确地描述了这一立场。——

我知道这是一种不彻底且已过时的立场：要重建集合论，就必须像希尔伯特那样，毫无保留地站到布劳威尔最彻底的直觉主义立场上。（只要人们“进行内容推理”。）不过，我关心的并非证明无矛盾性，而只是要

至于要说明形式主义集合论究竟是什么，我还是不说为好。

公理在这样一个半直觉主义范[围]中（希尔伯特和策梅洛也曾采用这种范畴）要容易得多地表述。此外，还可以按照希尔伯特方法的思路轻松构造这一系统，以及这一范围（不含集体概念的逻辑），并证明其无矛盾性。见（希尔伯特，《数学的逻辑基础》，《数学年刊》，希尔伯特）。这里涉及的公理有：I 1–4、II 5–6、III 7–8、V 11。）这样一来，关键问题便是将集合论公理系统单独分离出来。—

此外，也可以将整个内容直接纳入希尔伯特系统。这样做会与原来的形式有一些小的偏差。

系统的可数性与（公理上）不可数集合的存在并不矛盾。正如斯科伦也指出的，公理上的不可数性并不意味着实际不可数性。—

我想在此指出如下几点：撰写这篇论文时，我还不知道斯科伦的著作。我在证明 hhUnii 可数性时引入了不必要的复杂步骤（在公理 V 1 中）：因此，我只能证明（朴素地说）范围仅与 I类对象和 II 类对象的 ω （实际上）等价。读过斯科伦的著作后（我非常感谢教授先生向我推荐了这篇著作），我才发现这一点。后来我看到，用相同的方法也可以直接证明它与“序列” 0，$F(0)$ $F(F(0))$ $F(F(F(0)))\ldots$（即 1，2，3，...；这是 ω 的一个 hhmengeii，可能是一个真正的 hhmengeii ）的等价性。为此，只需像处理其他公理那样处理公理 V 1（例如像处理 III2、3 或 IV 2 那样）。

关于基数的“相对性”，或者如我所说的“表面|[10]性”，我的立场完全与斯科伦相同。不过，我并未像他那样由此得出相同的结论：我反而认为，这是一个有力的反对直觉主义的自变量。绝不可能在直觉主义的基础上把握不可数连续统的概念——

连续统也只能接近于此，因为实际的理念世界是可数的。连续统在本质上是超限的、非谓述的，且只有形式主义方法才能把握。

如上所述，关于一切不可数对象的非谓述性，我完全赞同您的看法。直觉主义方法行不通：可以说，必须在直接的（“内容性的”、直觉主义的）推理与集合论或数学之间插入形式主义装置（希尔伯特所暗示的那种）。—

而这只有在该装置无矛盾时才是允许的。现在很容易证明，只要 ⟦n⟧ ur

推论，[18] 否定、同一性、选择[19]

出现在其中。

但若要保留集合论，就必须引入函数[20]|[11] 及相应的公理。（例如，我的公理体系很容易改造成这样。第二、三、四部分会自动取消。）然而，这种形式主义的无矛盾性尚未得到证明。—

我甚至不知道希尔伯特是否走上了这条路。也许他想“逐层”构造集合论。我认为，这种“绕开不可谓述性”的做法恐怕行不通。罗素的惨败已证明了这一点。

---

[18]推论，$a \to b$，必须与推理，$a \to b$，严格区分！[19]只要真正的非谓词元素，即函数，不存在，那么完全一般的选择也无妨~~。无矛盾~~性很容易证明至此。[20]希尔伯特引入了一个新概念——谓词 $A(a)$，使得情况相当混乱。最好避免使用这些概念，而是沿用 a 通常的表达式，并定义变量替换 Subst($\frac{b}{x}$)a。不过需要谨慎：例如，由于选择的缘故，一个变量可能并非“自由的”。）“函数”会是两个运算 f，ϕ，使得 Subst($\frac{b}{x}$) $a = \phi(f_{a,\,x},\ b)$是公理。（当然，一般来说这会导致罗素悖论。总得再次加以限制。）

至多只是形式主义集合论起步之处缺少一个无矛盾性证明。而这个缺口，恐怕正是人们通常所说的“不可谓述性”。

最后，我还想提出三点意见。——该公理系统并非范畴的。这显然如此，我甚至没有要求一切都是函数。更没有排除具有如下性质的集合：$a = (a)$、$a = (((a)))$、$a = (a((a)))$ 等。（这大概就是 Mirimanoff 先生所说的“奇异集合”吧？）然而，关键并不在于此。

因为很容易将系统限制得更严格，使得每个

1. 所有 I类对象也都是 I II 类对象，

2. 不存在“下降函数序列”（如斯科伦的情形），也就是说：不存在一个 II类对象 a，使得对于每个 N⟦aturalliche⟧Z⟦ahl⟧ $p[aF(p)]$，它都等于某个 x 或某个与 $[[ap]x] \neq A$ 相等的 $[[ap]x]$。[21] |[12]

这样就能做到，每个函数都可以通过一系列良序步骤，由 0 和 (0)[22] 构造出来。前面提到的那些繁复的集合构造便会消失。——

尽管如此，这一切都无济于事；系统仍然不是范畴性的。原因或许在于良序的“相对”性质。

综上所述，我认为集合论根本无法公理化为范畴性的理论。这样一来（撇开有限系统不谈），世界上就根本不存在范畴性的公理体系。（看似范畴性的理论，例如数学，都依赖于集合论。）我暂时完全无法估量这一事实的影响和意义。—

[21]在斯科伦那里，表述会是：.....，使得对每个 NZ p $[aF(p)]$ 都是$[ap]$ 的一个元素。也就是说：$[aF(p)]$ 等于某个满足 $[[ap]x] \neq A$ 的 x。——对于集合，情况就是如此。对于函数，除了 x 之外，还必须考虑 $[bx]$。——该定理只在某些限制条件下成立，参见以下注释。[22]人们还可以轻易地得到 $A = 0, B = (0)$。我不打算在此展开。这样，0、(0)便由以下内容刻画：0是一个 a，使得 $[ax] = a$ 始终成立。(0)是一个 b，使得 $[ba] = b$，而其他情况下 $[bx] = a$ 成立。因此，这两者都无法追溯到任何更早的事物。

顺便说一句，也不一定存在“最小”的系统。也就是说：我无法证明存在一个满足我的公理的系统，而它的任何一个子系统都不满足这些公理。（在保持 A, B, $[x, y]$, $\mathfrak{h}x,\ y\mathfrak{i}$ 不变的情况下，见第48页。）

良序的概念，或更具体地说，有限性的概念，是相对的。也就是说：

设有一个由事物构成的集合 $\mathfrak{A}$ 。 Σ 是一个满足公理的系统。现在，

1. $\mathfrak{A}$ 中的所有元素都是 Σ 中的 I类对象，
2. 存在一个 II 类对象 $\mathfrak{A}_\Sigma\mathfrak{ii}$，它是 Σ $\mathfrak{A}_\Sigma$ 中的一个范围，且其元素与 $|^{13}$ $\mathfrak{A}$ 的元素相同，

那么称 $\mathfrak{A}$ 属于 Σ 。

那么，如果 $\mathfrak{A}$ 是任意一个集合，就可能存在多个系统Σ'、 Σ''、Σ'''.....， $\mathfrak{A}$ 属于这些系统。如果 $\mathfrak{A}$ 在朴素意义上是有限的，那么 $\mathfrak{A}_{\Sigma'}$、$\mathfrak{A}_{\Sigma''}$、 $\mathfrak{A}_{\Sigma'''}$.....（在 Σ'、 Σ''、 Σ'''.....中按公理定义）也都是有限的。—

但逆命题并不成立。

因此，同一个 $\mathfrak{A}$ 在一个 Σ 中可能是有限的，而在另一个系统中则是无限的。（此处它实际上必定是无限的。）

因此，可以设想 $\mathfrak{A}_\Sigma$ 在 Σ 中虽然是无限的，但在 Σ的子系统 Σ' 中却显得有限。也就是说：将系统 Σ'细化为 Σ 时，从表面上有限的 $\mathfrak{A}$ 中会发现，它是无限的。—

如果不至于太过直觉主义，那么可以问：

是否存在一种“理想的”系统，使得无论再如何细化，都不可能发现有限集其实是无限的?

或者，无论选择什么系统，都可以继续细化，以至于能够把有限集识别为无限集?

也就是说:

是否至少有某种形式上的概念与直观的有限性概念相对应？还是说，向下延伸的“无限”也同样相对而

模糊不清，正如我们已经知道它向上延伸时的情形一样？——

我认为，尽管我尚无证明，但后者确是如此。如果能够证明这一点，那将是一个有力的论据，足以反驳针对直觉主义所倡导的有限归纳法和正整数的直观性质。

我在前文中试图阐述自己对形式主义集合论及其公理化的看法。如果您能将对此的见解告知我，我将不胜感激。——

施密特教授今年夏天在柏林答应为我发表这篇论文，而且会全文刊载（约40个印刷页），刊于《数学杂志》。在发表之前，我想再润色一遍，并作一些必要的修改。我希望能在十一月中旬前完成。教授认为先行发表也合适吗？我很乐意这样做。可以考虑刊登在哪种期刊上？——

我想请教教授先生，我所提出的序数理论是否是新的？还是策梅洛或其他人早已知晓？

再次感谢您对此事的关注，

谨致崇高敬意，

您忠实的约翰·冯·诺伊曼

目前地址：苏黎世，普拉特街52号，Degen处。我会在这里待到1924年3月，12月20日至1月5日除外。之后我将在布达佩斯，维尔莫什皇帝路62号，三楼。

A.7 冯·诺伊曼致弗兰克尔，1927年6月17日，手稿

[信笺抬头：布里斯托尔酒店 电报地址：
布里斯托尔，卡尔斯巴德]

卡尔斯巴德，1927年6月17日

尊敬的教授先生：

我刚收到您的明信片，立即赶来回答您的问题。

𝔍设为正整数的集合， $\mathfrak{A}(x)$为 x的幂集， $[x,y]$ 为 x 和 y的有序对。（当然， $\mathfrak{A}(x)$和$[x,y]$ 可以用函数表示。）

若一个集合 M 具有以下性质，我就称它为一个“初始段”：

M 的每个元素 u 都具有如下形式 m

$$u = [1, \mathfrak{J}]$$

oder

$$u = [x+1, \mathfrak{A}(y)]$$

不过， $[x,y]$ 也属于 M。〚冯·诺伊曼画了一幅
左边空白处沿上述内容的竖线。〛

容易将这一条件化为如下形式

$$f(\mathsf{M}) = 0. \qquad |^2$$

可以证明：如果 $\mathfrak{M}$ 是一个“起始”的集合，那么 $\mathfrak{M}$ 的交集也是一个“起始”；因此，如果 u 属于某个“起始”，就存在一个具有如下性质的“起始”M：

$u \varepsilon$ M；对于任何“起始”M，M′ 的真子集
是，则 $u \varepsilon$ M′。〚左边空白处的竖线。〛

这一性质也可以直接化为如下形式

$$g(u, \mathsf{M}) = 0.$$

根据其定义，对于每个 u，不存在具有这一性质的 M，或者至多存在一个这样的 M。

因此，所有满足条件的 M 构成一
个集合

$$g(u, \mathsf{M}) = 0$$

此时，我才应用所讨论的函数概念扩展：所有这些 M 构成的集合是 $= h(u)$。

$h(u)$的并集是 $k(u)$；它是空集，或者是包含u 的最小初始段。 $|^3$

hh现在，构造由 k 传递的 $\mathfrak{Z}$的像。ii 很容易证明，对于 $\mathfrak{Z}$ 的每个 x ，都存在一个包含 x 的"初始段"（归纳证明），因此 $k(x)$包含一个元素 $[x, y]$: y 显然是 $\mathfrak{Z}$迭代 x次所得的幂集。可以将它表示为 $j(x)$。

不过，最快的办法是：应用替换公理，令 Z 为由 $k(x)$传递的 $\mathfrak{Z}$的像； Z 的并集就是 Z。这个 Z 显然就是所需的集合。

$$\{\mathfrak{Z}, \mathfrak{A}\mathfrak{Z}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{Z}, \mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{Z}, \dots\}.$$

此外，我将于7月1日最终离开哥廷根；我7月2日在基尔有一场演讲，然后前往柏林。圣灵降临节前后，我在柯尼斯堡作了三场关于$|^4$矛盾性的演讲。希望能尽快再次见到您。谨致最诚挚的敬意，J. v. Neumann

A.8 冯·诺伊曼致弗兰克尔，1935年12月5日，手稿

⟦信笺抬头：高等研究所，新泽西州普林斯顿⟧

12月5日。

亲爱的弗兰克尔教授：

非常感谢您亲切的来信。得知您有意在《年刊》发表一篇论文，我们自然十分高兴；我很乐意代表编辑部向您作出所希望的原则性承诺。您什么时候能把稿件寄给我们?

夏天我在布达佩斯遇见了法卡什， $|^2$ 他又让我听说——这本来我就知道——巴勒斯坦是多么有趣、迷人。我也希望早晚能去那里看看。

我们一切都好；九个月前我当了父亲，女儿名叫玛丽娜。

难道没有机会在巴勒斯坦以外的地方再次见到您吗？您要去奥斯陆吗？

1936年5月我将在巴黎讲学，之后将在匈牙利度过两三个月的夏天。

谨致最诚挚的问候，

您忠诚的 J. v. Neumann

A.9 冯·诺伊曼致弗兰克尔，1936年5月9日

[信头：美国航运公司，船上：蒸汽船—
]

1936年5月9日

亲爱的弗兰克尔教授：

非常感谢您的来信和手稿。顺便说一句，手稿的内容也让我个人很感兴趣。

关于此事，我还想请问，是否也可以把二元素集合的情形一并解决。采用非公理化方法，这倒相当简单：

假设乘积公理对所有元素两两不相交且各含有≥ 3 个元素的有限集所组成的集合 $\mathfrak{M}$ 都成立。那么，对于元素两两不相交且各含有 ≥ 1 个元素的有限集所组成的集合 $\mathfrak{N}$，可以这样处理： $|^2$

设 1、$\bar{2}$、$\bar{\bar{3}}$是三个不同的对象 $\notin \mathfrak{S}(\mathfrak{M})$，设 $f(x)$ 是一个函数，使得

$$f((x,u)) = x$$

若 $x \neq$ T、2、3 和 $u =$ T 或 2 或 3。进一步设 $g(a)$ 是一个函数，使得 hh$g(a)$ii 若 a 是一个集合，$g(a)$ 是所有 (x, u)、$x \varepsilon a$、$u =$ T 或 2 或 3 组成的集合。（$g(a) \subset a +$ (1，2，3)。）

集合 $\mathfrak{M}$ 的 $g(a)$，$a \varepsilon \mathfrak{M}$，很容易构造，无需 替代公理，因为它是 $\subset \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{S}(\mathfrak{N}) + (1, 2, 3)))$。将乘积公理应用于 $\mathfrak{M}$，可得一个 $\mathfrak{X}$，它与 $\mathfrak{M}$ 的每个元素恰好共有一个元素。因此，$f(x)$-像 $\mathfrak{Y}$（无需替代公理，因为它是 $\subset \mathfrak{S}(\mathfrak{N})$）与 $\mathfrak{N}$ 的每个元素恰好共有一个元素。

在公理化形式化中，这种考察会变得实质上更复杂吗？— |[3]

⟦上边空白处，可能为弗兰克尔手迹：⟧
1) 单行本 2) 收稿
日期

在您第一封和第二封信之间的这几个月里，我们这里发生了如下变化：一份新的期刊《符号逻辑杂志》创办了，其编辑是普林斯顿的 A. Church。与此相关，我们决定不再将所有逻辑与集合论基础方面的论文刊登在《年刊》，而改刊于《符号逻辑杂志》。因此，借此机会我想问您，若您的论文也在该刊发表，您是否会觉得合意。Church 会很高兴收到您的论文，而且可以肯定，《符号逻辑杂志》将是一份一流期刊（顺便说一句，很可能是此类期刊中的第一份）。

《符号逻辑杂志》创刊号将在 |[4] 几周后出版。丘奇答应我，您的论文会刊登在第2期或第3期（晚3个月或6个月）。

关于校样修改，或许最好由您直接联系丘奇。（美国新泽西州普林斯顿，普林斯顿大学数学系，Fine Hall）—

如您所见，我正在前往欧洲的途中。我将在巴黎讲学两周，之后或许会去匈牙利。我的计划还相当不确定，也许会在夏末之前返回美国。我大概不会去奥斯陆。

不过，我非常希望我们不久后还能再次见面。

谨致最诚挚的问候

您最恭敬的 J. v. Neumann

⟦左侧页边注：⟧ 截至5月26日，我的地址是：巴黎亨利 ⟦原文如此⟧·庞加莱研究所。此后请寄至普林斯顿的地址，邮件会从那里转寄给我。

A.10 冯·诺伊曼致弗兰克尔，1936年5月，手稿

⟦信笺抬头：巴黎大学理学院，亨利·庞加莱研究所，皮埃尔·居里街11号（V^{e}），电话：奥德翁 42-10⟧

巴黎，1936年5月

亲爱的弗兰克尔教授：

衷心感谢您亲切的来信，信在我仍在此地时寄到了。我感谢您慷慨地愿意将您的论文也交给 J. f. S. L.，丘奇一定会特别感激您。我想单行本的事应该会一切顺利。我也衷心希望您不要忘了我们，并希望今后有机会让《年刊》也能刊登您的作品。——

我在这里（H. P. 研究所）作了几场讲座，将于6月4日返回普林斯顿，而我妻子还会在欧洲逗留一段时间。我不去 $|^2$ 奥斯陆了，错失这次重逢的机会，我实在非常遗憾。希望我们很快能在别处再见，也许是在耶路撒冷！

谨致最诚挚的问候，我妻子也在未曾谋面的情况下向您致意，

谨致敬意

J. v. Neumann

A.11 冯·诺伊曼致弗兰克尔，1951年11月13日，打字稿

[信笺抬头：新泽西州普林斯顿高等研究所数
学学院]

1951年11月13日

亲爱的同事：

感谢您11月1日的来信。我预计将于11月28日和29日在普林斯顿，并非常希望届时能与您见面。请告知您何时抵达这里。

谨致最诚挚的问候，冯·诺伊曼夫人也一同向您问好。谨此，

谨致问候，

约翰·冯·诺伊曼 Jv
N:eg

参考文献

Adžić, Miloš 和 Kosta Došen，2016年。哥德尔的圣母大学课程。《符号逻辑通报》22(4)：469–481. doi:10.1017/bsl.2016.36。Bellotti, Luca，2016年。冯·诺伊曼的一致性证明。《符号逻辑评论》9(3)：429–455. doi:10.1017/S1755020316000198。Bhattacharya, Ananyo，2021年。《来自未来的人：约翰·冯·诺伊曼的远见人生》。伦敦：企鹅兰登书屋。Budiansky, Stephen，2021年。《走向理性边缘：库尔特·哥德尔传》。纽约：诺顿出版社。Crocco, Gabriella 和 Eva-Maria Engelen 编，2016年。《库尔特·哥德尔：哲学家与科学家》。普罗旺斯大学出版社。Dawson, John W., Jr.，1985年。完成哥德尔—策梅洛通信。《数学史》12(1)：66–70.doi:10.1016/0315-0860(85)90070-9。

Dawson, John W., Jr.，2003年。哥德尔—策梅洛通信导言。载于（Gödel，2003b），419–421。Heinz Dieter Ebbinghaus 和 Volker Peckhaus，2015年。恩斯特·策梅洛。柏林：施普林格。doi:10.1007/978-3-662-47997-1。William Bragg Ewald 编，1996年。《从康德到希尔伯特：数学基础资料集》，第2卷。牛津：牛津大学出版社。Solomon Feferman，2003年。哥德尔—伯奈斯通信导言。载于（Gödel，2003a），41–78。Adolf Abraham Fraenkel，1922年。论康托尔—策梅洛集合论的基础。《数学年刊》86: 230–237。doi:10.1007/BF01457986。Adolf Abraham Fraenkel，1926年。有序集合的公理化理论。（关于集合论基础的研究。第二部分。）《纯粹与应用数学杂志》155(3): 129–158。doi:10.1515/crll.1926.155.129。Adolf Abraham Fraenkel，1928年。关于冯·诺伊曼先生上述论文的补充。《数学年刊》99(1): 392–393。doi:10.1007/BF01459103。Adolf Abraham Fraenkel，1937年。论选择公理的一个弱化版本。《符号逻辑杂志》2(1): 1–25。doi:10.1017/S002248120003944X。Abraham A. Fraenkel，2016年。《一位身处德国的犹太数学家的回忆录》，Jiska Cohen-Mansfield 编。巴塞尔：比克霍伊泽。doi:10.1007/978-3-319-30847-0。库尔特·哥德尔，1931年。论《数学原理》及相关系统中的形式不可判定命题 I。《数学与物理月刊》38: 173–198。doi:10.1007/BF01700692。重印并译载于（Gödel，1986，144–195）。库尔特·哥德尔，1986年。《1929年至1936年出版作品》，《文集》第1卷，Solomon Feferman 等编。牛津：牛津大学出版社。

哥德尔，库尔特，2003a。《A–G书信集》，《文集》第4卷，Solomon Feferman等编。牛津：牛津大学出版社。哥德尔，库尔特，2003b。《H–Z书信集》，《文集》第5卷，Solomon Feferman等编。牛津：牛津大学出版社。哥德尔，库尔特，2019。《哲学 I：格言 0》，Eva-Maria Engelen编。《哲学笔记》第1册。柏林：德格鲁伊特出版社。doi:10.1515/9783110585605。Grattan-Guinness，Ivor，1979。悼念库尔特·哥德尔：他1931年与策梅洛就其不可完备性定理的通信。《数学史》6(3)：294–304。doi:10.1016/0315-0860(79)90127-7。Grattan-Guinness，Ivor，2000。《数学根源探寻：1870–1940：从康托尔、罗素到哥德尔的逻辑学、集合论与数学基础》。新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社。Hashagen，Ulf，2006a。约翰·路德维希·诺伊曼·冯·马吉塔（1903–1957），第一部分：魏玛共和国时期一位犹太数学家的求学岁月。《信息学专题》29(2)：133–141。doi:10.1007/s00287-006-0072-1。Hashagen，Ulf，2006b。约翰·路德维希·诺伊曼·冯·马吉塔（1903–1957），第二部分：一位编外讲师从柏林走向普林斯顿。《信息学专题》29(3)：227–236。doi:10.1007/s00287-006-0084-x。Hashagen，Ulf，2010。约翰·冯·诺伊曼在柏林腓特烈·威廉大学取得大学任教资格：1927年德国对一位匈牙利裔犹太数学家的评议。《数学史》37(2)：242–280。doi:10.1016/j.hm.2009.04.002。Herbrand，Jacques，1930。《证明理论研究》。博士论文，巴黎大学。重印于（Herbrand，1968，36–153）。英文译本见（Herbrand，1971，44–202）。Herbrand，Jacques，1931。《论算术的一致性》。《纯粹与应用数学杂志》166：1–8。

doi:10.1515/crll.1932.166.1。重印于（Herbrand，1968，221–232）。英文译本见（范·海耶诺尔特，1967，618–628）及（Herbrand，1971，282–298）。Herbrand，Jacques，1968。《逻辑著作》。巴黎：法国大学出版社。Herbrand，Jacques，1971。《逻辑文集》，Warren D. Goldfarb编。哈佛大学出版社。希尔伯特，David，1923。《数学的逻辑基础》。《数学年刊》88(1–2)：151–165。doi:10.1007/BF01448445。译文见（Ewald，1996，1134–1148）。哈内，Ignacio，2001。关于斯科伦集合论概念相对性的思考。《数学哲学》9(2)：129–153。doi:10.1093/philmat/9.2.129。Kanamori，Akihiro，2009。伯奈斯与集合论。《符号逻辑通报》15(1)：43–69。doi:10.2178/bsl/1231081769。Kanamori，Akihiro，2012。赞颂替代公理。《符号逻辑公报》18(1)：46–90。doi:10.2178/bsl/1327328439。Kanckos，Annika和Tim Lethen，2021。哥德尔本体论证明的发展。《符号逻辑评论》14(4)：1011–1029。doi:10.1017/S1755020319000479。Kennedy，Juliette，2020。哥德尔、塔斯基与自然语言的诱惑：逻辑纠缠、形式主义自由性。剑桥：剑桥大学出版社。doi:10.1017/9780511998393。Lethen，Tim，2021。《谈话、演讲、降神会：库尔特·哥德尔1937/38年维也纳记录：转录与评论》。《维也纳学派研究所出版物》第31册。Cham：施普林格。doi:10.1007/978-3-030-67606-3。Mancosu，Paolo，1999。维也纳与柏林之间：哥德尔不完备定理的即时反响。《逻辑史与逻辑哲学》20：33–45。doi:10.1080/014453499298174。

Mancosu, Paolo，2004年。库尔特·哥德尔《文集》第IV卷和第V卷书评，Solomon Feferman 等编。牛津：牛津大学出版社，2003年。《圣母大学形式逻辑杂志》45：109–125。doi：10.1305/ndjfl/1095386647。

Meschkowski, Herbert，1967年。《《无穷问题》。格奥尔格·康托尔的著述与生平。不伦瑞克：Vieweg。

Mirimanoff, Dmitri，1917年。《罗素悖论与布拉利-福尔蒂悖论以及集合论的基本问题》。《数学教学》19(1–2)：37–52。doi：10.5169/seals-17315。

Peckhaus, Volker，1990年。“我很小心，没有一次就把所有子弹都打光。”恩斯特·策梅洛在哥廷根。《逻辑史与逻辑哲学》11(1)：19–58。doi：10.1080/01445349008837156。

Peckhaus, Volker, 1992年。《希尔伯特、策梅洛与德国数学逻辑的制度化》。科学史通讯15(1)：27–38. doi:10.1002/bewi.19920150107。

Peckhaus, Volker, 2005。《支持希尔伯特与反对希尔伯特：策梅洛的集合论》。《科学哲学》。科学史与科学哲学研究CS5: 199–215. doi:10.4000/philosophiascientiae.390。

普雷斯伯格，Moj˙esz，1930。《关于一个整数算术系统的完备性，该系统中加法是唯一显现的运算》。载于《第一届斯拉夫国家数学家大会会议录》，华沙，*1929*年，Franciszek Leja 编，第 92–101 页。英译本见Stansifer（1984) 及普雷斯伯格(1991)。

普雷斯伯格，莫伊谢什，1991。《关于一种仅以加法为运算的自然数算术系统的完备性》。《逻辑史与逻辑哲学》12(2)：225–233.doi:10.1080/014453409108837187。

齐格，Wilfried，2003年。《哥德尔—Herbrand通信》的导言。载于（哥德尔，2003b），第3–13页。

斯科伦，Thoralf，1923年。《关于集合论公理基础的几点意见》。载于《赫尔辛基数学家大会，*1922*年*7*月*4*日至*7*日：第五届斯堪的纳维亚数学家大会报告》，第217–232页。赫尔辛基：Akademiska Bokhandeln。重印于（斯科伦，1970，第137–152页）；英文译本见（范·海耶诺尔特，1967，第290–301页）。

斯科伦，Thoralf，1970年。逻辑学精选著作，Jens Erik Fenstad 编。奥斯陆：Universitetsforlaget。

Stansifer，Ryan，1984年。普雷斯伯格关于整数算术的文章：评注与译文。技术报告 TR84-639，康奈尔大学计算机科学系。URL https://hdl.handle.net/1813/6478。

van Atten，Mark，2015年。关于哥德尔对莱布尼茨、胡塞尔和布劳威尔的接受的论文集。第 35 卷，逻辑、认识论与科学统一性丛书。Cham：施普林格。doi：10.1007/978-3-319-10031-9。

范·海耶诺尔特，Jean，编，1967年。《从弗雷格到哥德尔：数理逻辑文献选集，*1897–1931*年》。马萨诸塞州剑桥：哈佛大学出版社。冯·诺伊曼，约翰，1925年。《集合论公理化》。《纯粹与应用数学杂志》154(4): 219–240。doi：10.1515/crll.1925.154.219。重印于（冯·诺伊曼，1961年，34–56）。英文译本见（范·海耶诺尔特，1967，393–413）。冯·诺伊曼，约翰，1927年。《论希尔伯特证明论》。《数学杂志》26(1): 1–46。doi：10.1007/BF01475439。重印于（冯·诺伊曼，1961年，256–300）。冯·诺伊曼，约翰，1928a年。《集合论的公理化》。《数学杂志》27: 669–752。doi：10.1007/BF01171122。重印于（冯·诺伊曼，1961年，339–422）。冯·诺伊曼，约翰，1928b年。《关于超限归纳定义及一般集合论相关问题》。《数学年刊》99(1): 373–391。doi：10.1007/BF01459102。重印于（冯·诺伊曼，1961年，320–338）。

冯·诺伊曼，约翰，1929年。关于公理化集合论中的一个无矛盾性问题。《纯粹与应用数学杂志》160(4): 227–241。doi: 10.1515/crll.1929.160.227。重印于（冯·诺伊曼，1961年，494–508）。

冯·诺伊曼，约翰，1961年。《逻辑、集合论与量子力学》，Abraham Haskel Taub 编。文集第1卷。牛津：Pergamon Press。

von Plato，扬，编，2020年。数学能被证明为一致吗？哥德尔的速记笔记与不完备性讲座。数学与物理科学史资料与研究。Cham：施普林格。doi：10.1007/978-3-030-50876-0_1。

外尔，赫尔曼，1918年。《连续统》。莱比锡：Veit。

Zach，理查德，2003年。有限主义的实践：希尔伯特纲领中的ε演算与一致性证明。*Synthese* 137(1/2)：211–259。doi：10.1023/A:1026247421383。

Zach，理查德，2004年。希尔伯特的“失败的证明”，第一个ε定理与一致性证明。《逻辑史与逻辑哲学》25(2)：79–94。doi: 10.1080/01445340310001606930。

策梅洛，恩斯特，1932年。《论量化层级与无穷逻辑》。德国数学家协会年度报告41：85–88。