arXiv:2301.09847v2 [math.GR] 1 Feb 2023

非退 化紧群（多重）推出的结果 S

Alexandru Chirvasitu

摘要

我们证明紧群的嵌入是等化子，并给出紧群范畴中关于推出（更一般地说，融合自由积）的若干结果。若一族紧群嵌入 $H \leqslant G_i$ 所对应的群论推出可嵌入其 Bohr 紧化，则称该族在代数上可靠。我们 (a) 证明一族正规嵌入在以下意义下是代数上可靠的： G_i 可嵌入某个紧群 $G_i \leqslant G$，且这些嵌入在 H 上一致；(b) 通过克利福德理论，从表示论角度给出正规嵌入族相干可嵌入的等价刻画；(c) 刻画所有有限族正规嵌入 $H \trianglelefteq G_i$ 均相干可嵌入的紧致连通李群 H （没有中心二维环面是充分但非必要的条件）；(d) 证明紧群的分裂嵌入族总是代数上可靠的。

关键词：紧群；推出；余积；融合积；等化子；Bohr紧化；李群；环面；庞特里亚金对偶；伪度量；Tannaka-Krein对偶

2020年数学主题分类：22C05；18A30；22A05；18A20；22E46；22D10；54A10

目录

1 预备知识 **3**

2 紧群的（多重）推出 **4**

2.1 一般性.4 2.2 正规嵌入族.10 2.3 分裂嵌入族.23

参考文献 **27**

引言

本文围绕若干与紧群有关的范畴论问题展开。为了以稍显迂回的方式引出讨论（部分原因是为了凸显这些问题之间的主题联系），回顾一下 [32, 命题 9], ，其结论是紧群范畴中的满态射恰好就是满射态射。

这里的满态射是 [1, 定义 7.39] 中的满态射： $c \xrightarrow{f} d$ 范畴中的态射，使得 $\mathrm{Hom}(d,-) \xrightarrow{\circ f} \mathrm{Hom}(c,-)$ 是单射。这是用纯粹的范畴论术语表达满射性的自然方式，而这两个概念在具体的 [1, 定义 5.1] 范畴中相互竞争（即集合与函数范畴： CGp，紧群范畴，就是一个例子）。

对于含幺 C^*-代数范畴也有类似的结果（这是另一个在范畴论上颇有意义的解析/拓扑结构示例），可由 [32, 命题2] 或 [14, 推论 4]得出。尤其是，后一来源推导出了该结果的更强表述[14, 定理 6]：对 C^*-代数的嵌入是 等化子 [1, 定义 7。51]。回到紧群，这是下面的第一个结果（定理 2.1）：

定理 在 CGP 紧群范畴中，等化子恰好是嵌入。 ■

事实上，嵌入 $\iota\colon H \leqslant G$ 将是以下泛 态射对的等化子：从 $G \to G \coprod_H G$ 到推出 [1, 定义 11。30] 的两个副本 ι。此类推出，以及实际上由 CGP 嵌入族 $H \leqslant G_i$(多重推出，以下将如此称呼)组成的图表的余极限，是本文讨论的主要主题。

这样的多重推出 $\coprod_{H,\ \mathrm{CGP}} G_i$ 在范畴 CGP 中，无非是通常的自由积 G_i 沿 H 取融合积 [34, 后的 Bohr 紧化[20, §2.10] （定理 11.66 及前文讨论], [36, §I.1.2], 等）。

对群论多重推出进行 Bohr 紧化的过程原则上可能会消去其中一部分；例如，例 2.2就表明这种情况确实偶尔会发生。另一方面，群论余积(即由平凡嵌入构成的多重推出)总能嵌入其 Bohr 紧化中：[17, 命题 1]。同样，有限族中心的嵌入也具有这一性质 [22, 定理 8]；但并非任意中心族都如此（例 2.16）。

我们在此重新探讨这个问题。为引入相关术语，称一族 CGP-嵌入$\iota_i : H \leqslant G_i$

- 代数上可靠(定义 2.11)，如果相应的代数多重推出可嵌入其 Bohr 紧化；
- 并且相干可嵌入(定义 2.7)，如果存在嵌入 $j_i\colon G_i \to G$，且它们在H 上一致（也就是说，$j_i\iota_i$ 彼此相等）。

前一性质在形式上更强（引理 2.13），可以视为后一性质的全局版本。下文的结果之一是，对于由正规嵌入 $H \trianglelefteq G_i$构成的族，上述蕴含的逆命题也成立；此外，我们还将给出这类族的其他刻画（定理 2.17 和2.21）：

定理 对于一族正规 CGP-嵌入 $\iota_i\colon H \trianglelefteq G_i$，以下条件等价：

(a) 代数上的可靠性；

（b）相干可嵌入性；

(c) 存在 CGP态射 $j_i : G_i \to G$ （不一定是单射的），且所有 $j_i\iota_i$ 均为一一对应且相等；(d) 群论余积 $\Gamma : \coprod_{\mathrm{GP}} G_i$ 在 H 上的作用可经由 $\mathrm{Aut}(H)$ 的某个紧子群分解；(e) 对每个不可约酉 H-表示 ρ，其在共轭 Γ 作用下的轨道都是有限的，并且存在 G_i 的有限维酉表示 ρ_i，使得 $\rho_i|_H$ 以在 i 中有界的重数包含 ρ。■

这一讨论的一个自然延伸，是将其用于融合积 H 本身的性质：某些 H 具有这样的性质，即每个正规 CGP-嵌入 $H \trianglelefteq G_i$ 都满足前述定理中的等价条件，而另一些则不满足。对于紧致连通李群，这一性质与自同构群在一致拓扑下的紧致性有着有趣的关联（定理 2.30）：

Th定理 考虑紧致连通李群 H满足以下条件 :

(a) H 没有中心 2-环面。(b) H 的中心的庞特里亚金对偶群 $Z(H)$ 的秩为 $\leqslant 1$。(c) 自同构群 $\mathrm{Aut}(H)$ 是紧致的。(d) 自同构群 $\mathrm{Aut}(H)$ 有一个最大紧子群。(e) $\mathrm{Aut}(H)$ 的紧子群偏序集是滤过的。

(f) 由 H 的自同构所诱导的中心 $Z(H)$ 的单位连通分支 $Z_0(H)$ 的有限阶自同构，恰好是恒等映射和取逆映射。

(g) 每个有限族的正规 CGP-嵌入 $\iota_i\colon H \trianglelefteq G_i$ 在代数上可靠。

于是我们有

$$(a) \iff (b) \iff (c) \qquad \Longrightarrow \qquad (d) \iff (e) \iff (f) \iff (g),$$

而且，通常情况下，这个单向蕴含不能反转。 ■

最后，§2.3 可以说，它反转了嵌入的正规性：它关注的是分裂嵌入 $H \leqslant G_i$，即形如 $H \leqslant H_i \rtimes H$ 的连续作用 $H \times H_i \to H_i$。主要结果表明，这类族总是代数上可靠的（定理2.44 和2.45）：

定理：一族分裂的 CGP-嵌入 $H \leqslant H_i \rtimes H$ 总是代数上可靠的。 ■

致谢

本研究部分得到美国国家科学基金会资助（项目编号 DMS-2001128）。

1 预备知识

我们需要一些范畴论背景和术语，例如[1, 24]: （余）极限[1, §11], , 尤其是（余）积 [1, 定义 10.19 和§10.63], 推出 [1, 定义 11。8]以及拉回 [1,定义 11。30], 等。

本文中，我们用“[1, §10.63] 和/或推出 [1, 定义 11.30]”符号“$\coprod$”表示余积（而非有时惯用的“$*$”）。例如，$\coprod c_i$ 是对象 c_i 的余积，而由态射 $\varphi_i\colon c \to c_i$ 构成的图表的余极限记作$\coprod_c c_i$ （通常默认这些态射已知）。我们也将形如$\coprod_c c_i$ 的余极限称为多重推出；若上下文足以避免混淆，也简称为推出。

以下是一些出现频率足够高、因而单独列出的符号：

- $Z(H)$ 是群 H的中心；
- H_0 是拓扑群 H的单位连通分支；
- 并用 $Z_0(H)$ 表示 $Z(H)_0$：中心的单位连通分支 er.

2 紧群的（多重）推出

紧致（始终为豪斯多夫）群的范畴记为 CGP，而普通群的范畴记为 GP。本节汇集了一些关于 CGP 的范畴论结果，这些结果大致属于同一思路，重点讨论推出：

- 紧致构造与纯代数版本之间的比较；
- 多重推出结构映射 $G_i \to \coprod_{H,\mathrm{CGP}} G_i$ 是否为嵌入的问题；

- 嵌入 $H_i \leqslant G_i$ 是否能粘合成在公共$H \leqslant H_i$上的 CGP-推出的一个嵌入 G_i，等等。

2.1 一般性

我们先从一个侧面入手，讨论等化子 [1, 定义 7。51]。部分动机源于 C^*-代数的类比。回顾 [14, 定理 6] 单位 C^*-代数的嵌入自动是推出；此外，由此可推出，一个嵌入

$$A \xhookrightarrow{\iota} B$$

是 ι 的自推出中两个嵌入 $B \to B \coprod_A B$ 的等化子（这两个映射确实是嵌入，是定理 4.2] 的一部分）。范畴 $\mathcal{C}_1^*$ 中含幺 C^*-代数的满态射必为满射，这一事实可作为推论 4] （或者说，作为一个共同前身——定理 3]）的应用得出。

$\mathcal{C}_1^*$-满态射的满射性也在证明方式不同的命题 2], 中得到了证明；该论文证明了紧群的对应结论（命题 9]）。鉴于这一系列相关思想，自然会提出紧群中等化子问题的对应问题：

定理 2.1 紧群的一个嵌入

$$H \xhookrightarrow{\iota} G$$

是紧群范畴 CGP 中的一个等化子。

证明 一系列简化：

(1) 对每个 $g \in G\backslash H$，只需找到一个态射

$$G \xrightarrow{\varphi_{i,g}} K_g,\ i = 0, 1$$

在 H 上相等，但在 g 处不相等，因为之后我们可以将它们粘合成一对态射

$$G \xrightarrow{\prod_{g\notin H} \varphi_{i,g}} \prod_{g\notin H} K_g,\ i = 0, 1$$

在 H 上相等，在其他任何地方都不相等。

(2) 按照 $g \in G\backslash H$，固定（1）。只需找到一个态射 $\varphi\colon\ G \to K$ 和一个元素 $k \in K$，使其中心化 $\varphi(H)$，但不中心化 $\varphi(g)$，因为随后我们便可令

$$\varphi_{0,g} := \varphi \quad \text{and} \quad \varphi_{1,g} := k \cdot \varphi \cdot k^{-1}.$$

(3) 在（2）中，我们可以假设 G 在拓扑上由 H 和 g生成，然后找到符合要求的一个 φ，其中 $K=U(n)$（酉 $n\times n$ 群，因此 φ 是一个 n 维表示）。

事实上，一旦针对包含关系 $H\leqslant G_1:=\langle H,\ x\rangle$ 在由 G和 $\overline{H}$ 生成的 x 的闭子群中成立，并配有表示 $\rho:\ G_1\to U(m)$，我们就可以取 $\varphi:\ G\to U(n)$ 为一个有限维表示，其限制回 G_1 后包含 ρ 作为直和项（例如根据 Frobenius 互反律 [33, (8.9)]，φ 可以选为 诱导表示 [33, （见 (8.7) 前文）] $\mathrm{Ind}_{G_1}^{G}\rho$的一个直和项）。

(4) 第（3）部分将问题归结为：对于一个真包含关系 $H\leqslant G$，寻找一个有限维G-表示 $\varphi:\ G\to U(n)$ 其酉交织算子群（即$C_{U(n)}(\varphi(G))$ 在 $\varphi(G)$ 中的 $U(n)$中心化子）严格包含于 $C_{U(n)}(\varphi(H))$。

由于 $H\subset G$ 是真子群，Tannaka-Krein对偶 [19, 定理 20] 表明以下情形至少有一种成立：

- 某个不可约 G 表示 φ 在限制到 H时不再保持不可约；
- 或者，G 的两个互不同构的不可约表示 φ_i、$i=0$、1 在限制到 H时变得同构。

第一种情形下，φ 就足以满足我们的需要；第二种情形下，我们可以令 $\varphi:=\varphi_0\oplus\varphi_1$。

证明至此结束。 ■

特别是，对于 C^*-代数，紧群的嵌入 $H\leqslant G$ 是其自推出的两个结构映射 $G\to G\coprod_H G$ 的等化子。此处或许值得指出，处理紧群推出时需要格外谨慎：正如 例 2.2 所示，相应的普通群论推出未必能嵌入其对应的紧群推出中。

例 2.2 我们将考察两个紧群 G_i 沿其共同的一个 2-环面副本 $\mathbb{T}^2$ 的推出 $G_0\coprod_{\mathbb{T}^2}G_1$。这两个群定义如下：

- G_0 是半直积 $\mathbb{T}^2\rtimes(\mathbb{Z}/4)$，其中 $\mathbb{Z}/4$ 的一个生成元作用于 庞特里亚金对偶 [10, §3.5] $\mathbb{Z}^2\cong\widehat{\mathbb{T}^2}$，作用矩阵为 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$；
- 类似地，G_1 是半直积 $\mathbb{T}^2\rtimes(\mathbb{Z}/6)$，第二个因子的一个生成元通过 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$作用于 $\mathbb{Z}^2$。

结果表明，推出非常小：根据 引理 2.4，它将融合积 $\mathbb{T}^2$完全压缩。因此 $G_i,\ i=1,\ 2$ 无法嵌入到一个共同的紧群 G中并在 $\mathbb{T}^2$上保持一致。特别地，群论推出 $G_0\coprod_{\mathbb{T}^2}G_1$赋予使 G_i 的嵌入连续的最细群拓扑后 [26, 定理 2.2 及其证明], 无法嵌入其 Bohr 紧化 [20, §2.10]中。♦

注 2.3 关于“Bohr 紧化”一词的提醒：在此，对于任意拓扑群 G，它仅指接收来自 G 的连续态射的泛紧群；这种用法与 [16, §1] 中的用法相容。在其他语境中（例如 [17, 命题 1.3] 之前；该论文也与后续讨论相关），这个短语的含义稍微更为严格：要求从 G 出发的态射是连续嵌入。

在更严格的意义下，这种装置并不总是存在（G 可能根本无法嵌入任何紧群中：例 2.2）。另一方面，在本文采用的更宽泛意义下，Bohr 紧化总是存在；例如，一种构造途径是借助 伴随函子定理之一，例如 [1,§18]。♦

引理 2.4 令 $G_0 = \mathbb{T}^2 \rtimes \mathbb{Z}/4$ 和 $G_1 = \mathbb{T}^2 \rtimes \mathbb{Z}/6$, 如 例 2.2所示。这里讨论的 CGP-推出 $G_0 \coprod_{\mathbb{T}^2} G_1$ 是余积 $(\mathbb{Z}/4) * (\mathbb{Z}/6)$的 Bohr 紧化。

证明 该断言等价于证明：任意一对在 $\mathbb{T}^2$ 上取值相同的连续态射 $\varphi_i : G_i \to G$ ，都必须将后者映为零。

为此，令

$$K := \mathbb{T}^2 / \ker \varphi_i|_{\mathbb{T}^2}.$$

每个特征

$$\chi \in \widehat{K} \subseteq \widehat{\mathbb{T}^2} \cong \mathbb{Z}^2$$

都包含在某个有限维 G-表示 ρ的限制表示中。该限制表示 $\rho|_H$除了包含 χ之外，还包含它的所有 $\mathbb{Z}/4$-和 $\mathbb{Z}/6$-迭代。由于这两个群生成 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ [13,由命题 1 后的方程 (3) 可知，18], 所有非零 $\chi \in \mathbb{Z}^2$ 都有无限轨道。因此， ρ 要成为有限维表示，唯一的可能就是 χ 是平凡的。由于它是紧阿贝尔群 K的任意一个特征，后者也必定是平凡的。■

注记 2.5 (1) 顺便指出，同一个 例 2.2 还表明，一般而言，在紧群范畴中，$G_i \to G_0 \coprod_H G_1$ 未必是嵌入。与此相对，在普通群推出中，相应的映射是嵌入 [34, 定理 11.67 (i)], ，或者再与 C^* 定理 4 中同一正面结果的 [30, 版本2]相比。

(2) 另一方面，在任意范畴中（只要相关的推出存在），单个映射 $\iota : H \to G$ 的自推出的典范映射$G \to G \coprod_H G$ 总是左可逆的，其公共左逆由态射给出

$$G \coprod_H G \to G \text{ with components } G \xrightarrow{\mathrm{id}} G. \tag{2-1}$$

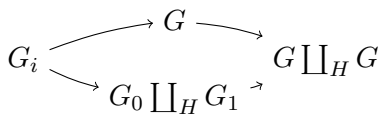
特别是，在以SET为基底的具体范畴（例如范畴 CGP）中，即对象本质上是集合、态射是这些集合之间的函数的范畴中，这类映射 $G \to G \coprod_H G$ 都是嵌入 [1, 定义 5.1]。

(3) 实际上，例 2.2 中的所有病态现象，都源于无法将两者 G_i （分别）嵌入同一个紧群中，使得这些嵌入在公共子群上相一致$H = \mathbb{T}^2 \leqslant G_i$。 引理 2.6 对此作了形式化说明，因为单态射 [1, 定义 7。32] 中的 CGP 恰好是单射态射（这很容易看出）。♦

引理 2.6 设 $\iota_i : H \to G_i, i = 0, 1$ 是具有推出的范畴中的单态射。

若 G_i 允许存在单态射 j_i ，将其映入对象 G ，使得 $j_i \iota_i : H \to G$ 重合，则结构映射 $G_i \to G_0 \coprod_H G_1$ 是单态的。

证明。结论现在可由以下事实得出：在



是单态（左侧箭头根据假设是单态，而右侧箭头是左可逆的，如注 2.5 (2) 所示。这样，底部的复合也是单态，因此底部左侧的箭头也是单态，因为单态射在左消去下保持稳定：若 fg 是单态，则 g也是单态。■

描述 引理 2.6中所讨论的这类设定，有个简便的说法：

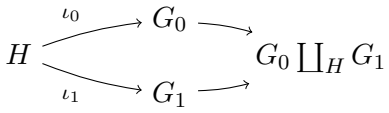
定义 2.7 对于具有推出的范畴中的单态射 $\iota_i : H \to G_i$，若存在单态射 $j_i : G_i \to G$，使得 $j_i\iota_i : H \to G$ 相等，则对象 G_i 是（ι_i）-或 H-相干可嵌入的（或者在上下文明确时，简称相干可嵌入）。

或者，我们也可以说这对 (ι_i) 本身是相干可嵌入的。 ♦

命题 2.8 大致指出，在下文应用中成立的条件下，“推出 $G_1 \coprod_H G_1$ 中的 G_i 的交等于 H”。交在一般范畴中并无定义，因此可以改用拉回来表达；为理解这一陈述，请回想单态射称为正则的 [1, （定义 7）56]，当且仅当它是等化子。

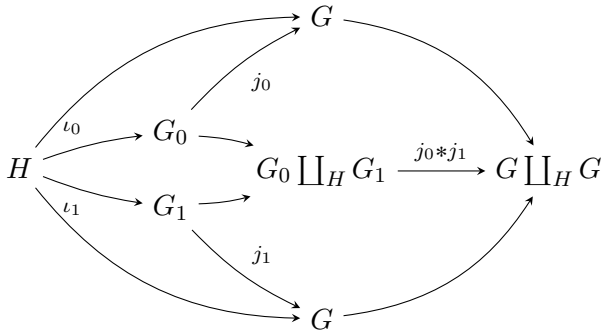
命题 2.8 设 ι_i 是范畴中一对相干可嵌入的单态射：$H \to G_i$, $i = 0, 1$，且该范畴具有推出，并且其中的单态射都是正则的。

图表



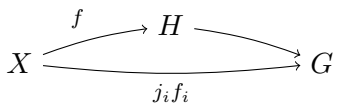
于是是一个拉回。

证明 考虑嵌入 $j_i : G_i \to G$ 如 定义 2.7所示，它们将产生一个推出 $G \coprod_H G$，并满足图表中的关系

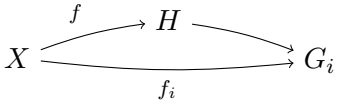


外方形是一个推出，外侧左边的映射是单态射，因此根据假设，它们是正则单态射。与 [1, 命题 11.33] 对偶的结果因此表明，该外方形是一个粘合方形，即它既是拉回也是推出。简言之，该命题的结论对成对的 相同的 单态射 $H \to G$成立。

其余部分是直接的图表追逐：若 $f_i : X \to G_i$ 与$G_i \to G_0 \coprod_H G_1$ 复合后得到指向后一个对象的相同态射，那么它们进一步给出指向 $G \coprod_H G$的相同态射，因此



对唯一的映射 f交换。但此时



也必须交换，j_i 为嵌入。 ■

推论 2.9 设 $\iota_i:\ H \leqslant G_i,\ i=0,1$ 是CGP中的一对相容可嵌入的单态射。

在 CGP-推出 $G_0 \coprod_H G_1$ 中，我们有 $G_0 \cap G_1 = H$。

证明 这是对 命题 2.8 的直接应用，因为

- $G_i \to G_0 \coprod_H G_1$ 确实是嵌入（引理 2.6）；
- 陈述中的交恰好是这些嵌入的拉回；
- 并且在 CGP 嵌入是等化子（即单态射是正则的），由 定理 m 2.1. ■

注 2.10 普通群版本的 推论 2.9 无条件成立，即对 GP [34, 定理 11.67 (ii)]中的任意推出（嵌入的推出）都成立。♦

现在考虑一个紧群（多重）推出 $\coprod_H G_i$。该映射

$$\coprod_{H,\mathrm{GP}} G_i \to \coprod_H G_i \tag{2-2}$$

从 普通群推出到紧群推出的映射有时是嵌入，有时则不是（例 2.2）；以下术语刻画了相关概念：

定义 2.11 一族 $\iota_i : H \to G_i$ 紧群嵌入称为 代数上可靠，如果从相应群论推出到其对应的紧群推出的映射（2-2）是一一映射。♦

注 2.12 (1) 用这些术语来说，[17, 命题 1] 可以表述为：每一族$\{1\} \to G_i$ 中的平凡嵌入 CGP 都是代数上可靠的。

(2) 一方面，前述观察给了我们启发；另一方面，代数也提供了类比：在代数中，作为双模映射可分裂的嵌入族 $B \to A_i$（即在 B-双模范畴中存在左逆）在描述其相应推出时表现得尤为良好 [2, 推论 8.1], 。因此，人们或许会希望 CGP 中的分裂嵌入族也同样具有良好性质。我们将在下文讨论这一问题。

一个直接的说明：

引理 2.13 紧群的代数上可靠嵌入族在 CGP 按定义 2.7的意义下具有相干可嵌入性。

证明 对于嵌入族 $H \leqslant G_i$，代数健全性特别保证了多重推出的结构映射 $G_i \to \coprod_{H,\mathrm{CGP}} G_i$ 是嵌入。它们在 H 上一致，因此这些映射可以证明相干可嵌入性。■

引理 2.14 记录了另一个有时有用的观察。回忆一下，滤过（或有向[38, 定义 11。1]）偏序集 $(P, \leqslant)$ 是指其中任意有限元素集都有另一个元素支配。

引理 2.14 设 $\iota_i : H \leqslant G_i,\ i \in I$ 是 CGP 中的嵌入族。

(1) 如果 (ι_i) 代数上可靠，那么每个子族也都代数上可靠。

(2) 反过来，如果 (ι_i) 是由代数上良好的子族 $(\iota_j)_{j\in J}$ 构成的滤过并，其中

$$\coprod_{H,\mathrm{GP}} G_j \to \coprod_{H,\mathrm{GP}} G_i$$

若分裂，则 (ι_i)在代数上可靠。

证明 （1）显然：对于一个子族 $\iota_j : H \to G_j,\ \ j \in J \subseteq I$ 我们有如下分解

$$\coprod_{\mathrm{GP}} G_j \rightrightarrows \coprod_{\mathrm{GP}} G_i \to \coprod_{\mathrm{CGP}} G_i$$
$$\coprod_{\mathrm{GP}} G_j \rightrightarrows \coprod_{\mathrm{CGP}} G_j \to \coprod_{\mathrm{CGP}} G_i$$

其中左上方的映射是单射的。如果右上方的映射也为单射（这是假设），那么左下方的态射也为单射。

对于（2），注意，代数多重推出 $\coprod_{H,\ \mathrm{GP}} G_i$ 是由有限子族 $F \subseteq I$所诱导的推出之并。因此，只需说明一个元素 x （例如$\coprod_{H,\ \mathrm{GP}} G_f$ 中的元素，其中 $f \in F$）在映射到 $\coprod_{H,\ \mathrm{CGP}} G_i$时不会被湮灭。由于假设 I 是 J的一个滤过并，对于某个这样的 J，有 $F \subset J$。

我们假设 x 在$\coprod_{H,\ \mathrm{CGP}} G_j$中非平凡，且

$$\coprod_{H,\mathrm{CGP}} G_j \to \coprod_{H,\mathrm{CGP}} G_i$$

因为其代数对应物分裂，所以它也分裂。因此它必为单射，且 x 在$\coprod_{H,\ \mathrm{CGP}} G_i$中非平凡。■

注 2.15 引理 2.14 (2) 最自然的应用，是利用从有限子族到整个族的代数嵌入能力。

或许有人会想，若不对 (ι_i)附加条件（例如要求存在分裂），引理中的这一部分是否仍然成立。即使从中心嵌入的例子中也能看出，某些条件是必需的。中心嵌入的有限族在 CGP 中代数上可靠，这由[22, 定理 8] 可知（再结合归纳法，因为该结果针对的是中心嵌入对），但无限族未必如此：参见例 2.16。♦

例 2.16 对于正整数 i，令 G_i 为海森堡群 H_{2^i} 上的 $\mathbb{Z}/2^i$, 阶数为$(2^i)^3 = 2^{3i}$ [35, §2]的幺幂 3×3 矩阵的乘法群，其元素取自 $\mathbb{Z}/2^i$。

Each G_i 的中心同构于（加法群） $\mathbb{Z}/2^i$, ，由矩阵组成 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{Z}/2^i,$$

而 $H \leqslant G_i$ 将是单个 $\mathbb{Z}/2$ 到这些循环中心的嵌入。我声称，这个族甚至不是相干可嵌入的：任意一族在 H 上相等的 CGP-态射 φ: $G_i \to K$ 都必定湮灭 H。

事实上，若非如此， H 的非平凡特征就会是 K的某个有限维表示 ρ 沿着（任意一个） φ_i的限制表示。然而， H_{2^i}[35, 定理 3] 中的表示分类清楚地表明，限制到 $\mathbb{Z}/2$ 上为非平凡特征的不可约表示只有 2^i维。因此，所需的 $\rho|_{H_{2^i}}$维数没有上限，这就产生了矛盾。♦

2.2 正规嵌入族

鉴于看似性质良好的嵌入族可能出现代数健全性失效的种种情形（例 例 2.2中的有限族正规嵌入，以及例 例 2.16中的任意中心嵌入族），似乎有必要尝试找出正规嵌入族的（必要且）充分条件，以确保其代数健全性。以下结果便做到了这一点。正规嵌入

定理 2.17 紧群的正规嵌入族 $\iota\colon H \trianglelefteqslant G_i$ 代数上可靠，当且仅当它按照 CGP 定义 2.7 的意义相干可嵌入。

证明 正向推论较为简单（引理 2.13），因此我们着重证明逆命题：对于正规嵌入，相干可嵌入性蕴含代数健全性。我们将逐步简化问题的设置。

(I) 将问题化简为相同映射族。根据假设，存在 CGP-个嵌入 $j_i\colon G_i \to K$，它们在 $H \leqslant G_i$上相合；我们将 H 与其经由公共映射 $j_i\iota_i$得到的像视为相同。由于每个 $j_iG_i \leqslant K$ 都正规化 $H \leqslant K$，我们不妨用该正规化子替换 K，并始终假设 H 是 K的正规子群。此外，由于纯代数映射

$$\coprod_{H,\mathrm{GP}} G_i \to \coprod_{H,I,\mathrm{GP}} K$$

是一个嵌入（其陪域表示 $H \leqslant K$的 I重自多重推出），只需证明由 $H \leqslant K$ 的 $|I|$ 个副本组成的族是代数健全的。

(II) 归约到相同映射的有限族。注意，对于由相同映射组成的族 (ι_i) $\iota_i = \iota\colon H \to K$，引理 2.14 (2) 的分裂假设成立：给定一个由 $J \subseteq I$ 编号的子族，我们有一个分裂

$$\coprod_{H,J,\mathrm{GP}} K \to \coprod_{H,I,\mathrm{GP}} K$$

定义为在以 J 为索引的 K 副本上取恒等映射，并且

$$i\text{-indexed } K \xmapsto{\mathrm{id}} \text{some } j\text{-indexed } K \text{ for } i \notin J.$$

由 引理 2.14 (2) 可知，只需证明有限族的代数健全性。

(III) 归约到相同映射对。根据前一点，考虑一个正规嵌入 $\iota\colon H \trianglelefteqslant K$ 和一个正整数 n。根据 引理2.14 (1)，由 $(\iota)_{[n]}$ 个 n 副本组成的族 ι 将是代数上可靠的，前提是由更多个 副本组成的族 ι 是代数上可靠的。

因此，我们可以用一个大于等于 n 的 2 的幂替代 n，然后通过归纳法利用仅涉及两个映射的结果：$(\iota)_{[2]}$ 的代数健全性蕴含 $(\iota)_{[2^2]}$的代数健全性，继而蕴含 $(\iota)_{[2^3]}$的代数健全性，依此类推。

（IV）归约为一个正规嵌入和一个中心分裂情形。现在，问题归结为证明下式具有单射性：

$$K \coprod_{H,\mathrm{GP}} K \to K \coprod_{H,\mathrm{CGP}} K \tag{2-3}$$

对于 CGp 中的正规嵌入 $H \trianglelefteq K$ 。 $\mathbb{Z}/2$ 在两个群上都有相容的作用：交换 K 的两个副本，并且在 H 上作用平凡。在这两种情况下，我们都有同构

$$(K \coprod_H K) \rtimes \mathbb{Z}/2 \cong K \coprod_H (H \times \mathbb{Z}/2)$$

（不论范畴如何）：将 K 在左侧半直积中的第二个副本，与右侧共轭的 $\sigma K \sigma$ 的 K 相认，其中 $1 \neq \sigma \in \mathbb{Z}/2$。显然，(2-3)是单射的，当且仅当

$$\left(K \coprod_{H,\mathrm{GP}} K \right) \rtimes \mathbb{Z}/2 \to \left(K \coprod_{H,\mathrm{CGP}} K \right) \rtimes \mathbb{Z}/2$$

因此，现在的问题是证明这一对的代数健全性

$$H \trianglelefteq K \quad \text{and} \quad H \leqslant H \times \mathbb{Z}/2. \tag{2-4}$$

(V) 结论。最后，我们注意到， [22, 定理 8] 的证明同样适用，也能给出这一对 (2-4) 的代数健全性：

- 属于 $K \coprod_H (H \times \mathbb{Z}/2)$ 的元素，其落在的核中

$$K \coprod_H (H \times \mathbb{Z}/2) \to K \times \mathbb{Z}/2 \tag{2-5}$$

被非平凡地映射到 $(K/H) \coprod_{H,\mathrm{GP}} (\mathbb{Z}/2)$, 中，而后者嵌入其Bohr 紧化中，依据 [17, 命题 1]。

- 另一方面，未被 (2-5) 消去的元素不成问题，因为 $K \times \mathbb{Z}/2$本身是紧致的。

证明至此结束。 ■

注 2.18 有趣的推论“⇐”定理 2.17 可以理解为将一个（至少部分的）“局部”可嵌入性条件（每个 G_I 都能分别嵌入到一个共同的 G 中，且这些嵌入在 H上相一致）逐步提升为一个“全局”条件（整个多重推出都能嵌入到一个紧群中）。

在一个略有不同的背景下，考虑一个风格相似的陈述 [23, 定理 2]：若两个含幺 C^*-代数 A 和 B 能够嵌入到某个矩阵代数乘积中，且这些嵌入在一个共同的有限维 $D \leqslant A$上相一致， B，那么在含幺$A \coprod_D B$-代数范畴中的整个推出 C^*都能嵌入到一个矩阵代数乘积中。♦

虽然定理 2.17 确实提供了一些助益，但仍不太令人满意：人们或许会期望对相干可嵌入性何时成立作出更明确的阐述。定理 2.21在介绍一些预备知识后将对此作出说明。

为理解后续内容，我们简要回顾一下克利福德理论（最初由[8] 针对有限群发展而来）的一些基础知识，以及它如何适用于紧群的正规嵌入 $H \trianglelefteq G$。此外， [6, §2], 中还回顾了有限群理论，[7, 定理 02]中则总结了量子群（即 Hopf代数）版本，该版本也涵盖普通紧群。

我们用 $\widehat{\bullet}$ 表示将紧群与其不可约酉表示（同构类）集合相对应的构造。正规 CGP嵌入 $H \trianglelefteq G$ 在 H 上诱导出一个等价关系‘$\sim\widehat{}$’，其定义如下：

$$\rho \sim \rho' \iff \exists \pi \in \widehat{G}, \quad \rho, \rho' \leqslant \pi|_H$$

（“$\leqslant$”表示“是.....的子表示（因而也是直和项）”。）此外，事实证明，对于每个 $\widehat{}$不可约 $\pi \in G$，限制表示 $\pi|_H$ 分解为若干个 ρ 的副本，其索引恰好遍历一个等价类（具体而言，是 G 在 H上的作用下的一个共轭类），且每个副本出现的重数相同，该重数取决于 π：

$$\forall \pi \in \widehat{G},\ \pi|_H \cong \bigoplus_{\rho \in C_\pi} \rho^{\oplus m_\pi} \text{ for a class } C_\pi \text{ of ‘}\sim\text{’ and some } m_\pi \in \mathbb{Z}_{>0}. \tag{2-6}$$

相干可嵌入性是对所有这些表示论数据的一种有界性假设，确保 2.2 和 2.16 中的例子分别呈现的两种定性现象不会发生：

- 等价类的大小 C_π
- 以及重数 m_π

当 π 遍历支配 $\wr H$ 中给定元素的各种 G_i 的表示时，这些量都保持有界。下面介绍一些术语，以便将这一想法形式化。

$\widehat{}$定义 2.19 (1) 设 $\iota\colon H \trianglelefteq G$ 是紧群之间的正规嵌入，且 $\rho \in H$。

- 关于 H 的 Clifford 关系 $\sim_\iota\widehat{}$，就是上述讨论中的等价关系“$\sim$”。
- ρ 的 Clifford 类 $C_\rho = C_{\rho|\iota}$（相对于嵌入 ι）由其所有 G-共轭元素组成。等价地，它是 ρ 在 Clifford 关系 $\sim_\iota$ 下的等价类。$\wr$ $\widehat{}$
- 关于Clifford π重数 $m_{\rho|\pi} = m_{\rho|\pi,\ \iota}$ 在 $\rho \in H$ 相对于 $\pi \in G$ 是 m_π（2-6）的 $\pi|_H$ 不包含 ρ时，定义为 0。$\wr$
- Clifford 重数 $m_\rho = m_{\rho|\iota}$ 是所有（严格）正的 $m_{\rho|\pi}$ 中最小的一个，其中 $\pi \in G$。

$\widehat{}$(2) 现在考虑一个族 $\iota_i\colon\ H \trianglelefteq G_i, i \in I$ 的正规嵌入，以及 $\rho \in H$。

- Clifford 关系 $\sim_{(\iota_i)}$ 是 H 上比所有 $\sim_{\iota_i}$ 都粗的最细等价关系。由于每个单独的关系 $\sim_{\iota_i}$ 不过是 G_{ι_i} 在 H 上的共轭 $\widehat{}$ 作用所诱导的轨道关系，较粗的 $\sim_{(\iota_i)}$ 同样是 $\coprod_{\mathrm{GP}} G_i$ 在 G 上的共轭作用 $\widehat{}$ 所诱导的轨道关系。无论是否存在拓扑方面的问题，这种说法都有意义：该代数余积当然通过范畴 CGP 中的自同构作用于 H，因而也作用于 $\wr H$。

- Clifford 类 $C_\rho = C_{\rho|(\iota_i)}$ 是相对于 $\sim_{(\iota_i)}$ 的 ρ 的类。或者说：ρ 在 $\coprod_{\mathrm{GP}} G_i$ 作用下的共轭类，
- Clifford 重数 $m_\rho = m_{\rho|(\iota_i)}$（正整数或 8）是所有 $m_{\rho|\iota_i}$ 在变化的 $i \in I$ 下的上确界。♦

注记 2.20 如上所述，例 2.2 的构造使得这对嵌入的 Clifford 类是无限的（或者更准确地说，其中大多数是无限的）。另一方面，在例 2.16 中，Clifford 类都是单元素集，因为 H 是中心的，但（其中一些）Clifford 重数是无限的。♦

定理 2.21 对于一族 $\iota_i\colon\ H \trianglelefteqslant G_i$ 正规紧群嵌入，定理 2.17 的两个条件也等价于以下条件：

(a) 存在 CGP 态射 $f_i\colon G_i \to G$，它们的所有 $f_i\iota_i$ 均相等且为单射的。

(b) 要求 $\mathrm{FIN}_{(\iota_i)}$：

$$\widehat{\ }\text{对每个 } \rho\in H\text{，Clifford 类 } C_{\rho|(\iota_i)} \text{ 和 Clifford 重数 } m_{\rho|(\iota_i)} \text{ 均为有限。} \tag{2-7}$$

注意，(a) 是对相干可嵌入性局部判据的一种形式化强化：其中的f_i 本身不再要求是单射的。我们将此条件称为弱相干可嵌入性，并首先单独考察较为直接的蕴含关系。

引理 2.22 若一族 $\iota_i\colon\ H \trianglelefteqslant G_i$ 正规紧群嵌入是弱相干可嵌入的，则 $\mathrm{FIN}_{(\iota_i)}$ 满足定理 2.21 中的条件。

证明 固定映射 $f_i\colon\ G_i \leqslant G$，如定理 2.21 (a) 中所述，并进一步假设由此得到的嵌入 $f_i\iota_i\colon H \leqslant G$ 是正规的（如定理 2.17的证明中所做：用H 在 G 中的正规化子替换后者）。

最后，只需注意到 $\coprod_{\mathrm{GP}} G_i$ 在 H 上的共轭作用可经由 G 上的共轭作用分解，因此

$$C_{\rho|(\iota_i)} \subseteq C_{\rho|j_i\iota_i} = \text{finite set of } G\text{-conjugates of } \rho,$$

and

$$m_{\rho|(\iota_i)} \leqslant m_{\rho|(j_i\iota_i)} < \infty.$$

因此，右侧各项取值的有限性意味着左侧各项也有限。 ■

定理 2.21 的证明 引理 2.22 使我们可以专注于一个蕴含关系：$\mathrm{FIN}_{(\iota_i)}$ 蕴含相干可嵌入性（或者，根据 定理 2.17，等价地，蕴含代数健全性）。此外，只需证明一个在形式上弱于相干可嵌入性的命题：

断言：对于固定的 $i_0 \in I$ 和一个不可约酉表示 $\pi \in \widehat{G_{i_0}}$，存在定义在同一个有限维希尔伯特空间上的酉表示 $\varphi_i,\ \pi\colon\ G_i \to U(V_\pi)$，它们在 H 上一致，且满足 $\pi \leqslant \pi_{i_0}$。

暂且假设该断言成立，我们可以如下得出结论：

- 首先，对每个 i，考虑映射

$$G_i \xrightarrow{\prod_\pi \varphi_{i,\pi}} \prod_\pi U(V_\pi); \tag{2-8}$$

这些映射（对不同的 i）在 H 上由构造可知相同，而在 i_0 处所讨论的映射是一个嵌入（因为 G_{i_0} 的不可约表示的直和是忠实的；例如，这可由 [15,推论 236]得出）。

- 然后，对每个 i重复此过程，从而得到形如（2-8）的映射的乘积，定义在 I上。这些映射将给出所需的相容嵌入。

因此只需证明该断言。为避免符号过于繁杂，我们用“0”表示“i_0”（所以G_{i_0} 变为 G_0，等等）。与（2-6）中一样，我们有

$$\pi|_H \cong \bigoplus_{\rho\in C_\pi} \rho^{\oplus m} \text{ for a Clifford class } C_\pi \text{ of } \iota_0 \text{ and some } m\in\mathbb{Z}_{>0}.$$

现在考虑可能更大、但仍然有限（根据假设）的 Clifford 类 s

$$\widetilde{C} \supseteq C_\pi \text{ associated to the entire family } (\iota_i).$$

~根据 $\mathrm{FIN}_{(\iota_i)}$ 中重数有限性这一部分，对于每个 $\rho\in C$，Clifford 重数 $m_{\rho|\iota_i}$ 都取值于某个正整数有限集。因此，我们可以构造一个有限维的 H-表示

$$\bigoplus_{\rho\in\widetilde{C}} \rho^{\oplus M},\quad M := m\cdot \mathrm{lcm}(m_{\rho|\iota_i},\ i\in I).$$

它是

- 对于每个 i，都可以作为一个 G_i-表示的限制表示得到；
- 此外，对于 G_0，可以选取该表示，使其包含原来的 $\pi\in G_0$。

在同一个空间上实现上述 G_i-表示，并通过酉共轭对它们作调整，使其在 H 上一致（因为按构造，它们在该集合上的限制表示彼此同构），便得到所需的结论。■

由此可得若干结论定理 2.21。鉴于例 2.16 （以及它与有限中心嵌入族的对比： 注 2.15），正面的结果通常对有限正规嵌入族而言更强。

在全文中，自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 上的 $G\in \mathrm{CGP}$ 拓扑均按唯一合理的方式定义（例如，参见 [15, 第 6 引理之后的段落62]）：采用

$$\mathrm{Aut}(G)\subset (\text{continuous maps } G\to G).$$

由于映射的定义域 G 本身是紧致的，这也是 [38,定义 43.1] 或 [27,定理 46 之前的定义8]所给出的紧开拓扑。

推论 2.23 一个正规嵌入有限族 $\iota_i: H\trianglelefteq G_i,\ i\in I$ 在 CGP 中代数上可靠，当且仅当这些态射的像

$$Ad_i: G_i \xrightarrow{\text{conjugation action on } H} \mathrm{Aut}(H),\ i\in I \tag{2-9}$$

都包含在 $\mathrm{Aut}(H)$的某个紧子群中。

证明 一个方向显然：代数健全性意味着，所有由 G_i 给出的共轭作用都来自 H 上的同一个作用，该作用由 $\coprod_{H,\mathrm{CGP}} G_i$诱导。

反之，由定理 2.17 和 2.21 可知，代数健全性等价于 $\mathrm{FIN}_{(\iota_i)}$；对于有限族， FIN中的重数有限性部分自动成立。因此，代数健全性归结为条件（2-7）中的 Clifford 类有限性条件。由于紧群作用于 ^上的 H 会在 H上产生有限轨道，因此该有限性条件可由 $\mathrm{Aut}(H)$ 中由所有 $Ad_i(G_i)$生成的闭子群的紧致性推出。■

一个直接由推论 2.23得到的变体：

推论 2.24 若 CGP-嵌入的有限族 $H \trianglelefteq G_i$ 在代数上可靠，且自同构群(H) 是紧致的。■

尤其是，这适用于有限 H。它还表明，在例 2.2 中，能够使用的最小环面 H是 $\mathbb{T}^2$：1-环面 $\mathbb{T}^1 \cong \mathbb{S}^1$ 的自同构群有限（Aut$(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}/2$）。

上述讨论也为紧群的以下二分分类提供了一些动机：有些紧群总能生成代数上可靠的有限族正规嵌入，而有些则不能。

Co推论 2.25 对于紧群 H，以下条件等价：

(a) E 每个 CGP-正规嵌入有限族 ι_i： $H \trianglelefteq G_i$ 代数上可靠 .

(b) Aut(H) 的紧子群偏序集是滤过的。

证明 这是对推论 2.23的一个相当直接的应用：一方面，（b）意味着（有限多个）映射（2-9）的像都包含在 Aut(H)的同一个紧子群中。另一方面，如果 $H_i \leqslant \mathrm{Aut}(H)$， $i = 0$，1 是 Aut(H) 的两个紧子群，且不存在包含它们的共同紧子群，那么这一对

$$H \trianglelefteq G_i := H \rtimes H_i,\ i = 0, 1$$

根据推论 2.23，在代数上是不可靠的。 ■

注记 2.26 (1) 给 Aut(G)赋予拓扑时，有一个微妙之处。紧接在[15,引理 6.62] 之后的讨论比上文提及的情况略为复杂。该文献来源

- 首先给 Aut(G) 赋予紧开拓扑，在那里记作 $\mathcal{O}_1$;
- 随后又将其加强为记作 $\mathcal{O}_1 \vee \mathcal{O}_2$ 的拓扑，其中 $\mathcal{O}_2$ 是 $\mathcal{O}_1$ 经逆映射拉回所得的拓扑。

这最后一步旨在确保 Aut(G) 上逆映射的连续性（因为后者理应是一个拓扑群），但我认为这似乎并非必要。换言之，紧开拓扑似乎已经使 Aut(G) 成为一个拓扑群。

复合映射的（联合）连续性已在 [15, 引理 6.62], 中指出，因此唯一的问题是逆映射的连续性。为验证这一点，考虑 Aut(G) 中一个一致收敛网 [38, 定义 11.2] $\alpha_i \to \alpha$ 。如果 α_i^{-1} 不一致收敛到 α^{-1}，那么我们就有

$$\alpha_i^{-1}(x_i) \in \alpha^{-1}(x_i)F, \quad \text{for some closed } F \subset G\backslash\{1\}$$

以及一个网 $(x_i) \in G$。令

$$y_i := \alpha_i^{-1}(x_i), \quad z_i := \alpha^{-1}(x_i).$$

如有必要，取收敛子网（网总是存在收敛子网，因为环境空间是紧致的 [38, 定理 11.5 和 17.4]），于是可假设 $y_i \to y$ 且 $z_i \to z$。但这样一来

$$\begin{aligned}\alpha_i \to \alpha \Longrightarrow & x_i = \alpha_i(y_i) \to \alpha(y) \text{ and} \\ & x_i = \alpha(z_i) \to \alpha(z).\end{aligned}$$

由此可得 $y = z$ （因为 α 是一一映射），但另一方面

$$y_i \in z_i F \Longrightarrow y \in zF;$$

这就是所需的矛盾。

(2) 一致拓扑可能看似必要的一个原因是，自同构群$(G) \subset$ 结束(G)通常并不闭于一致拓扑中：参见例 2.27。♦

例 2.27 令 $G := (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ （二进制 $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ 索引序列所构成的群），并对每个正整数 n，用 $\alpha_n \in \mathrm{Aut}(G)$ 表示这样一个自同构：将序列的前 n 项循环左移，其余项保持不变。该序列一致收敛到满射的二对一自同态

$$(t_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} \longmapsto (t_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}.$$

G 的 ♦

一般而言，推论 2.25 的等价条件并不意味着 $\mathrm{Aut}(H)$ 本身是紧致的：

例 2.28 T $\widehat{\text{取}}$ $H := \mathbb{Q}$，即离散加法群 $(\mathbb{Q}, +)$ 的庞特里亚金对偶。我们有

$$\mathrm{Aut}(H) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, +) \cong \text{ the multiplicative group } (\mathbb{Q}^\times, \cdot),$$

通过乘法作用。由于 $\mathrm{Aut}(H)$ 是离散无挠群，因此只有平凡的紧致子群，所以 H 符合推论 2.25的条件。♦

不过请注意，在 例 2.28 中，自同构群确实有一个 最大的 紧子群：平凡子群。显然，如果 $\mathrm{Aut}(H)$ 有最大的紧群，那么 推论 2.25 (b) 中的滤过条件就成立。于是可以问逆命题是否成立；例 2.29说明它并不成立。

例 2.29 [12, 引理 2.1] 给出了一个阿贝尔群 D，其自同构群 $\mathrm{Aut}(D) \cong \mathbb{Z}/2$。如果我们修改这一构造（马上就会这样做），以便对离散$(D) \cong (\mathbb{Z}/2)^{\aleph_0}$ 阿贝尔$\widehat{\text{群}}$ D得到 Aut H，那么我们可以令 $= D$:

$$\mathrm{Aut}(H) \cong \mathrm{Aut}(D) \cong (\mathbb{Z}/2)^{\aleph_0} \text{ (with the discrete topology)},$$

这意味着，$\mathrm{Aut}(H)$ 的每个紧子群都是有限的，$\mathrm{Aut}(H)$ 是这些有限子群的并集，但它本身并不紧致。

现在开始构造：首先回顾一下 [12, 引理 2.1] 中的群：对于一个集合

$$\mathcal{P} = \{p_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} \sqcup \{p_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant k\}$$

互不相同的素数以及一个由 $\mathbb{Q}$ 线性无关实数组成的集合 $\mathcal{S} = \{s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$，定义 $D_{\mathcal{S},\ \mathcal{P}}$ 为由 $(\mathbb{R},\ +)$ 生成的子群

$$\frac{s_i}{p_i^n},\ 1 \leqslant i \leqslant k \quad \text{and} \quad \frac{s_i + s_j}{p_{ij}^n},\ 1 \leqslant i < j \leqslant k \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

若要按所需方式修改该例子，取

$$D = \bigoplus_{t=1}^{\infty} D_{\mathcal{S}_t,\mathcal{P}_t}$$

对于彼此不相交的集合 $\mathcal{S}_t$，其中 $\coprod_t \mathcal{S}_t$ 仍然是 $\mathbb{Q}$-线性无关的，以及彼此不相交的素数集合 $\mathcal{P}_t$。对证明 [12, 引理21] 的论证作简单调整，便可得出 D 的自同构恰好是分别作为各个直和项的自同构作用的那些自同构$D_{\mathcal{S}_t,\ \mathcal{P}_t}$，因此确实

$$\mathrm{Aut}(D) \cong \prod_t \mathrm{Aut}(D_{\mathcal{S}_t,\mathcal{P}_t}) \cong (\mathbb{Z}/2)^{\aleph_0}.$$ ♦

对于“较小”的群，情况有所不同。按照通常的做法（例如 [15, 定义 A1。59]），定义一个（离散）阿贝尔群 D 的秩为

$$\operatorname{rank}(D) := \dim_{\mathbb{Q}} D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

定理 2.30 设 H 是一个紧致连通李群，$Z := Z(H)$ 是其中心，Z_0 是该中心的单位连通分支。考虑以下条件：

(a) H 没有中心 2-环面。

(b) H 的中心的庞特里亚金对偶群 Z 的秩为 $\leqslant 1$。

(c) 自同构群 $\mathrm{Aut}(H)$ 是紧致的。

(d) 自同构群 $\mathrm{Aut}(H)$ 有一个最大紧子群。

(e) 由 $\mathrm{Aut}(H)$ 诱导的 Z_0 的有限阶自同构恰好是恒等映射和取逆自同构 $z \mapsto z^{-1}$。

（f）推论 2.25 的等价判据。

于是我们得到以下蕴含关系

$$(a) \iff (b) \iff (c) \qquad \Longrightarrow \qquad (d) \iff (e) \iff (f).$$

下面我们先绕道证明若干预备结果。对于下述陈述，请回忆[4, §I.9.3，定义 3]：拓扑空间的子空间 $A \subseteq X$ 称为相对紧的，如果它包含于某个紧致子空间中。等价地，由于我们将处理豪斯多夫空间，这意味着闭包 $\overline{A}$ 是紧致的。

命题 2.31 设 H 为一个紧李群，$Z_0(H_0) \cong \mathbb{T}^k$ 为其单位连通分支的中心的单位连通分支。

$\mathrm{Aut}(H)$ 的子群相对紧，当且仅当它在

$$\mathrm{Aut}(Z_0(H_0)) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^k) \cong GL(k,\mathbb{Z})$$

中的像是有限的。

证明：限制态射

$$\mathrm{Aut}(H) \ni \alpha \mapsto \alpha|_{Z_0(H_0)} \in GL(k,\mathbb{Z})$$

是连续的，因此正向蕴含显然成立；所以我们着重证明反向蕴含 e.

（I）将问题归结为连通群。设 $\pi_0(H) := H/H_0$ 为 H的连通分支群。H 的一个自同构会在 H_0 和 $\pi_0(H)$上分别诱导一个自同构，因此得到一个态射

$$\mathrm{Aut}(H) \to \mathrm{Aut}(H_0) \times \mathrm{Aut}(\pi_0(H)). \tag{2-10}$$

我断言，该态射的核是紧致的，因此相对紧性可在 $\mathrm{Aut}(H)$ 与 $\mathrm{Aut}(H_0)$ 之间双向传递（因为 $\pi_0(H)$ 是有限的）；这将实现所需的约化。

为证明这一断言，考虑一个自同构 α，它属于（2-10）的核，并且 s et

$$\varphi(x) := \alpha(x)x^{-1},\ \forall x \in H. \tag{2-11}$$

该映射在每个左 H_0陪集上为常值，因此在右 H_0陪集上也为常值。这意味着 φ 可下降为一个映射（仍用同一符号表示） φ: $\pi_0(H) \to Z(H)$。此外， α 是群自同构这一事实蕴含 φ是一个1-余循环 [11, §2.3]，其对应的作用为

$$\pi_0(H) \times Z(H) \ni (x, y) \longmapsto {}^{x}y \in Z(H)$$

$\pi_0(H)$ 在 $Z(H)$ 上的作用（由共轭诱导）：

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot {}^{x}\varphi(y),\ \forall x, y.$$

反过来，每个 1-余循环 φ 都通过同一个（ α ）给出一个2-11中的核内的自同构2-11）。因此，我们可以将该核与由 1-余循环构成的空间 $Z^1(\pi_0(G)$相识别； $Z(H))$ 显然，该空间是紧致的。

(II) 连通的 H。 我们有[15, 定理 9。24]

$$H \cong H^*/\Delta, \quad H^* := Z_0 \times \prod_{i=1}^{\ell} S_i, \tag{2-12}$$

其中

- Z_0 是中心 $Z(H)$的单位连通分支；
- S_i 是紧致、连通、单连通的单李群；
- ，且 Δ 是所讨论乘积的有限中心子群。

这些 S_i 的乘积恰好是交换子群 H' [15, 的万有覆盖（推论 9.6 和定理 9.19], ），因此 H 的一个自同构也会在该乘积上诱导出一个自同构S ： $= \prod_i S_i$。当然， Z_0 也在自同构下保持不变，因此

$$\mathrm{Aut}(H) \cong \{\alpha \in \mathrm{Aut}(Z_0) \times \mathrm{Aut}(S) \mid \alpha(\Delta) = \Delta\}.$$

第二个因子 Aut(S) 总是紧致的（定理 6.61], ），因此 Aut(H) 的一个子群具有相对紧性，当且仅当它在 Aut$(Z_0) \cong GL(k$ 中的像具有相对紧性 $\mathbb{Z})$，也就是说，当且仅当它是有限的。

证明至此完成。 ■

接下来请注意，例 2.29 中起作用的现象不会出现在李群中：

命题 2.32 一个紧李群 H 满足 推论 2.25 当且仅当自同构群(H) 有一个最大紧子群。

证明 逆向蕴含是显然的，因此我们着重证明逆命题。

Z_0 ： $=$ $Z_0(H_0)$ 是某个环面，记作 $\mathbb{T}^k$。根据 命题 2.31，Aut 的闭子群(H) 是紧致的，当且仅当其在

$$\mathrm{Aut}(Z_0) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^k) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^k) \cong GL(k, \mathbb{Z})$$

中是有限的（或等价地说，是紧致的）。

作为 [25, 引理 3。1] 的有限生成子群（例如 $GL(k,\ \mathbb{C})$整数一般线性群具有一个有限指数的无挠子群[5, 第 5 章，定理 4。1]。因此，任何有限子群链都必定稳定，所以 Aut 的紧子群集合的过滤(H) 意味着该集合必定有一个最大元素（“最大”指包含意义上的最大）。■

根据 命题 2.31，$\mathrm{Aut}(H)$ 的非紧致性在施加限制表示后仍然“可见”

$$\rho : \mathrm{Aut}(H) \to \mathrm{Aut}(Z_0(H_0)). \tag{2-13}$$

这一观察也适用于拥有最大紧子群这一性质；鉴于 命题 2.32，该性质在此颇为重要。

推论 2.33 设 H 是一个紧李群，并令 $Z_0 := Z_0(H_0)$。

$\mathrm{Aut}(H)$ 有最大紧子群，当且仅当它在映射 $\rho(\mathrm{Aut}(H)) \leqslant \mathrm{Aut}(Z_0)$ 下的像*2-13*有最大有限子群。

证明 命题 命题 2.31 表明，映射 (2-13) 的核是紧致的。当然，它也是正规子群，因此，$\mathrm{Aut}(H)$ 的紧子群（按包含关系排序）的偏序集与

$$\rho(\mathrm{Aut}(H)) \leqslant \mathrm{Aut}(Z_0) \cong GL(k,\mathbb{Z}), \quad k := \dim Z_0. \qquad \blacksquare$$

命题 2.34 设 H 是一个紧致连通李群，$Z_0 := Z_0(H)$，且 $\rho : \mathrm{Aut}(H) \to \mathrm{Aut}(Z_0)$为限制映射 (*2-13*)。

$\mathrm{Aut}(H)$ 有最大紧子群，当且仅当 $\rho(\mathrm{Aut}(H))$ 的扭子包含于由生成的阶为 $(\leqslant 2)$ 的群中

$$Z_0 \ni z \mapsto z^{-1} \in Z_0. \tag{2-14}$$

证明 根据 推论 2.33，$\mathrm{Aut}(H)$ 恰当在其限制表示 $\rho(\mathrm{Aut}(H))$ 到 Z_0 具有最大有限子群时，才有最大紧子群。反过来，这等价于要求 $\rho(\mathrm{Aut}(H))$ 的所有有限阶元素构成一个子群。

特别是，逆向蕴含（$\Longleftarrow$）显而易见，因此我们重点讨论逆命题。此外，Z_0 是某个环面 $\mathbb{T}^k$；若 $k \leqslant 1$，则无需证明（因为圆唯一的非平凡自同构是（2-14）），所以我们始终假设 $k \geqslant 2$。

回顾分解（2-12）：

$$H = H^*/\Delta, \quad H^* := Z_0 \times \prod_{i=1}^{\ell} S_i,$$

其中 $S := \prod S_i$ 是交换子群 H' 的万有覆盖，该交换子群属于 H。此外，定理 9 中的识别 $\Delta \cong Z_0 \cap H'$ [15, 24] 意味着 $\Delta \leqslant H^* = Z_0 \times S$ 是如下的图

$$\{(\varphi z, z) \mid z \in \Delta_S \leqslant Z(S)\} \quad \text{of a surjection} \quad \Delta_S \to Z_0 \cap H'$$

由有限阿贝尔群构成，其中 $\Delta_S \leqslant Z(S)$ 是 S中心的某个子群。特别是，Δ 的左侧分量 $\varphi(z)$ 恰好构成有限群 $\Delta_0 := Z_0 \cap H'$。

现在，由于 Δ_0 是 k环面 Z_0的有限子群，它必包含在某个 d对应的 d扭子子群 $Z_0[d] < Z_0$ 中。记

$$T_d < GL(k,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}(Z_0) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^k)$$

由非对角线元素可被 d整除、对角线元素均为 1 的上三角幺幂矩阵构成的群。任何 $\alpha_0 \in T$作为 Z_0 的自同构，都会诱导出一个自同构$(\alpha_0,\ \mathrm{id})$，作用于 $H^* \cong Z_0 \times S$，并逐点固定 Δ （因为 α_0 逐点固定 Δ_0 ）。由此可知，$(\alpha_0,\ \mathrm{id})$ 下降为一个

$$\alpha \in \mathrm{Aut}(H) = \mathrm{Aut}(H^*/\Delta) \quad \text{with} \quad \rho(\alpha) = \alpha_0.$$

~简言之，我们现在得到了一个子群 $T_d \leqslant$ 自同构群(H)，由刚刚构造的、关于 $\alpha \in T_d$的提升 α 组成，并通过 ρ 同构地映射到 $T_d < GL(k,\mathbb{Z})$:

$$\mathrm{Aut}(H) > \widetilde{T}_d \xrightarrow[\cong]{\rho} T_d < GL(k,\mathbb{Z}).$$

如果 ρ(自同构群(H)) 有最大的有限子群，那么该子群当然必定是正规的，因此 ~被 T_d正规化。它也会被类似的群 $T_{d'}$ 中心化；就整除性而言， $d' \in \mathbb{Z}_{>0}$ 足够大（即能被 d 以及足够多素数的足够高次幂整除）。最后，注意到 $T_{d'}$ 在 $GL(k,\mathbb{Z})$ 中的中心化子（对任意 d'）恰好由数量矩阵 ± 1组成。■

尝试将命题 2.34推广到非连通的 H有两种显而易见的方式： Z_0 可以是 $Z_0(H_0)$ 也可以是 $Z_0(H)$。这两种版本都行不通。

例 2.35 设 $H := \mathbb{T}^2 \rtimes \mathbb{Z}/3,$，并带有一个 3 阶自同构

$$\alpha \in GL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^2)$$

附着于 $\mathbb{Z}/3$ 的一个生成元，其对应矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$。 的自同构群 $\mathbb{Z}/3$ 有一个有限指数子群，由逐点固定 $\mathbb{Z}/3$ 的自同构组成，且可视为 α 在自同构群$(\mathbb{T}^2)$中的中心化子。该中心化子是由 $-\alpha$ 生成的 6 阶循环群，因此自同构群(H) 本身是有限的。 的自同构会限制为 $Z_0(H_0) = \mathbb{T}^2$ 的自同构，但不包括（2-14）。

这表明，为了使自同构群命题 2.34 中关于 $Z_0 := Z_0(H_0)$ 的要求通常并非必要：即使 H不连通，自同构群(H)仍可紧致。♦

另一方面，满足命题 2.34 中关于 $Z_0 := Z_0(H)$ 的要求通常也不足以保证这一点，以下这个变体例 2.35 说明了这一点。

例 2.36 这次令 $H := \mathbb{T}^4 \rtimes \mathbb{Z}^3$，其生成自同构 α 作用为分块对角矩阵，其中两个分块与 2×2 的矩阵相同，该矩阵见 例 2.35:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in GL(4,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^4).$$

H 的中心由 α中的 $\mathbb{T}^4$-不变量组成，因此是平凡的： $Z(H) = \{1\}$。所以，$Z_0(H)$也同样平凡，且 命题 2.34 的要求显然得到满足。另一方面， 4×4矩阵

$$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

（其中符号表示 2×2 块）都与 α 交换，因此诱导出H的自同构。将前者与后者反复共轭，可知 H 有无穷多个互不相同的二阶自同构（因此 $\mathrm{Aut}(H)$没有最大紧子群）。♦

例 2.37 我们将构造一个紧致连通李群 H 作为商群 H^*/Δ，其形式为(2-12)，其中

- $Z_0 \cong \mathbb{T}^2$;
- 半单因子 $S = S_1 \times S_2$ 将具有以下形式：$SU(3^k) \times SU(3^l)$，其中 $k > l \geqslant 2$（因此，两个 S_i 就是这里所说的两个特殊酉群）；
- 而 Δ 将是一个态射的图

$$Z(S) \cong Z(S_1) \times Z(S_2) \cong \mathbb{Z}/3^k \times \mathbb{Z}/3^l \xrightarrow{\varphi} \Delta_0 < \mathbb{T}^2$$

该态射将两个因子 $\mathbb{Z}/3^k$ 和 $\mathbb{Z}/3^l$ 的 3 阶子群对应起来（因此，φ 的核是 $\mathbb{Z}/3$ 的一个副本，它以反对角线方式嵌入乘积 $\mathbb{Z}/3^k \times \mathbb{Z}/3^l$中）。

的自同构群 $SU(d)$，$d \geqslant 3$为 $PSU(d) \rtimes (\mathbb{Z}/2)$ 其中 $\mathbb{Z}/2$的作用是复共轭[18, §IX.5，定理 5]。因此，$S_i \cong SU(\bullet)$ 的自同构要么在 S_i 的中心上作用平凡，要么作用为取逆映射；而这两个 $\mathbb{Z}/3$ 中心中的副本彼此对应，确保 $\mathrm{Aut}(H)$ 中的每个元素要么将整个 Δ 取逆，要么逐点固定它。

我声称，$\mathbb{T}^2$ 由 H 的自同构诱导的有限阶自同构只有恒等映射和 $z \mapsto z^{-1}$，因此 $\mathrm{Aut}(H)$ 根据 命题 2.34有一个最大紧子群。

为验证这一说法，考虑一个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(H)$，它诱导出有限阶自同构

$$\rho\alpha \in GL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{T}^2).$$

我们有一个推出分解

$$SL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/6 \coprod_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/4$$

with

$$\mathbb{Z}/6 \text{ generated by } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{Z}/4 \text{ generated by } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[13, 方程 (3) 以及命题 1 后的脚注 2。18], 因此，$SL(2$中的任意有限子群 $\mathbb{Z})$ 都可以共轭到 $\mathbb{Z}/6$ 或 $\mathbb{Z}/4$ [36, §I.4.3，定理 8]。方框 $\rho\alpha^2$ 是 $SL(2$中的一个有限阶元素，$\mathbb{Z})$因此可以如此共轭。但 $GL(2,\mathbb{Z})$-作用

$$\mathbb{T}^2 \ni (z,w) \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} (z^a w^b,\ z^c w^d)$$

在环面上的作用具有这样的性质：$\mathbb{Z}/6$ 或 $\mathbb{Z}/4$ 中的任何非平凡元素都不会逐点固定 $\mathbb{T}^2$ 中一个足够大的子群

$$\mathrm{im}(\varphi) \cong \mathbb{Z}/3^k \times \mathbb{Z}/3^{l-1}, \tag{2-15}$$

所以 $\varphi\alpha^2 = 1$。由此可知，有限阶的 $\varphi\alpha$ 都是对合。此外，同样的论证表明，$SL(2$、$\mathbb{Z})$ 中的 $\varphi\alpha$ 只有恒等映射和 $z \mapsto z^{-1}$，因此还需要证明不存在行列式为 -1 的有限阶 $\varphi\alpha$（即特征值为 ± 1，且每个特征值的重数均为 1）。

事实上，$\mathbb{T}^2$ 上的每个具有特征值 ± 1的 $\mathbb{Z}/2$ 作用，都共轭于以下两者之一

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[9, 定理 74。3]无论哪种情况，这样的群都会（逐点）固定一个直和项 $\mathbb{S}^1 < \mathbb{T}^2$，而（2-15）并不包含在一个圆中。♦

定理 2.30 的证明 **(a)** $\iff$ **(b)** 这是基础结构理论：中心是一个紧致阿贝尔李群，因此是一个环面 $\mathbb{T}^k$ 与一个有限群的乘积 F [10, 推论 4.2。6], 因此其对偶群同构于 $\mathbb{Z}^d \cong \hat{F}$。 d 的秩 $\widehat{Z(H)}$, 于是就是最大中心环面的维数。

(b) $\implies$ **(c)** 沿用2-12的设定和记号，并参照命题 2.31的证明。于是可以类似地得出结论：整体而言，$\mathrm{Aut}(H)$ 是紧致的，如果 Z_0 是平凡群或圆；这正是当前证明分支所假设的情形。

(c) $\implies$ **(a)** 我们在命题 2.34 的证明中看到，如果 Z_0 的维数至少为 2，那么$\tilde{}\mathrm{Aut}(H)$ 包含无限多个无挠子群（在那里记作 T_d）。
这就证明了（a）、（b）和（c）彼此等价。

(c) $\implies$ **(d)** 显然，剩下的就是证明（d）、（e）和（f）彼此等价。

(d) $\iff$ **(f)** 这由命题 2.32 得出（该命题不需要连通性）。

(e) $\implies$ **(d)** 这是命题 2.34的推论。

(d) $\implies$ **(e)** 这一点也将由命题 2.34得出，只要我们证明取逆自同构 $z \mapsto z^{-1}$ 实际上可以通过限制 H 的某个自同构来实现。
为此，回想一下将2-12实现为商群的表示 H ，其中 Δ 是一个满态射的图

$$\Delta_S \xrightarrow{\varphi} Z_0 \cap H'$$

定义在 S 的中心子群 $\Delta_S := \prod_i S_i$ 上。如果 S 存在一个在 $Z(S)$ 上作用为取逆映射的自同构，那么问题就解决了： φ 会使它与 Z_0 上的取逆映射相互交织，因此所有相关对象都会下降为 $H = H^*/\Delta$ 的自同构。

由于 S 是单连通单紧李群的乘积，因此只需验证这些群具有在其中心上作用为取逆映射的自同构（实际上是有限阶的）。借助这类紧李群的分类，可以逐一验证（例如，参见 [37, 第 3 章，推论 5], 之后的表格；该表还在第二列中方便地列出了相应各群的中心）：

- 对于中心要么平凡、要么是初等阿贝尔 2-群（即由 $\mathbb{Z}/2$ 因子组成的乘积）的类型，这一结论显而易见。 B_l、 C_l、 D_{2n}、 E_7、 E_8、 F_4 和 G_2 都属于这种情况。
- 对于类型 A_l， S_i 是特殊酉群 $SU(l+1)$，其中心为 $\mathbb{Z}/(l+1)$。它确实存在一个将中心取逆的自同构，即将矩阵映射为其复共轭矩阵（等价地，映射为其逆转置）。

- 对于类型 D_{2n+1} ，其中心为 $\mathbb{Z}/4,$ ，紧群是旋量群 $Spin_{4n+2}$。关于它存在一个将中心取逆的自同构（必为外自同构），可参见 [3, 围绕方程 (8.20) 的讨论，第 72-73] 页。

- 最后，对于中心为 $\mathbb{Z}/3$ 的类型 E_6 ，一个外自同构同样会将中心取逆，例如参见 [39, 定理 3.7。1]（该定理计算出此类自同构的不变子群为类型 F_4，因此其中心平凡。）

证明完成。 ■

2.3 分裂嵌入族

（至少有 ）群论多重推出上的两个感兴趣的范畴 $G := \coprod_{H,\ \mathrm{GP}} G_i$ ：

- 使映射 $G_i \to G$ 连续的最细群拓扑，我们将其称为终（群）拓扑 类比于，例如 [4, §I.2.4];
- 由映射到 Bohr 紧化所诱导的拓扑：下文称为 Bohr拓扑。

注2.38 上面提到的两种拓扑通常并不相同。假设 H 是平凡的，例如，并且 G_i 是度量空间，其中至少一个是无限的（等价地说：非离散的），且至少另一个是非平凡的。 [28, 定理 4.4] 于是表明，终拓扑严格细于由 [29, I,§3], 通过使 G_i具有拓扑的伪度量构造出的拓扑。我们将在下文（命题 2.40）进一步证明，后者至少与 Bohr拓扑一样细。♦

对于一族紧群 $G_i,\ \ i \in I$，我们简要回顾一下在 τ 中构造的拓扑 [29, I, §3]。

构造2.39 首先， G_i 是紧致的，因此它们的拓扑由一族双不变伪度量 [21, （第6章，问题O]）诱导。在每个 G_i 上选定一个伪度量 d_i 后，我们便可在群论余积 $\coprod_{\mathrm{GP}} G_i$ 上赋予其自身的（同样是双不变的，[29, I, 引理 2]）伪度量，其定义由下式唯一确定：对于一个词

$$g_1 g_2 \cdots g_n \in \coprod_{\mathrm{GP}} G_i, \quad 1 \neq g_k \in G_{i_k}, \quad i_k \neq i_{k+1},$$

by

$$d(g_1 g_2 \cdots g_n,\ 1) = \inf_{(e_k)} \sum_{k=1}^{n} d_{i_k}(g_k, e_k), \tag{2-16}$$

其中，下确界取遍所有满足 $e_k \in G_{i_k}$ 的元组

$$e_1 e_2 \cdots e_k = 1 \in \coprod_{\mathrm{GP}} G_i.$$

Th拓扑 τ 是由所有这些伪度量 d诱导的，其中 d_i 取遍相应的对象。 ♦

现在，我们可以证明 注2.38中顺带提出的断言：

命题 2.40 对任意一族紧群 $G_i,\ i \in I$，上述在代数余积 $G := \coprod_{\mathrm{GP}} G_i$ 上的拓扑 τ 至少与Bohr拓扑一样细。

证明：我们需要证明，如果一个网

$$(g_\alpha = g_{\alpha,1} g_{\alpha,2} \cdots g_{\alpha,n_\alpha})_\alpha \subset G,\ g_{\alpha,k} \in G_{i_{\alpha,k}}$$

相对于由 G_i 上各个伪度量 d_i 所诱导的 G 上的每个伪度量 d ，都趋近于 1，那么它在 G 的每个有限维酉表示中也趋近于 1。

那么，考虑一个酉表示 ρ： $G \to U(V)$ （作用在有限维希尔伯特空间 V 上的酉群），以及它的限制表示 $\rho_i := \rho|_{G_i}$。它在 G_i 上诱导出伪度量 d_i ，例如，通过拉回 $U(V)$ 的通常度量；该度量由有限维 C^* 代数 $\mathrm{End}(V)$ 上的范数诱导。

反过来， d_i 诱导出 G 上的伪度量 d；我声称 ρ 关于伪度量 d 是连续的。事实上，考虑

$$g = g_1 \cdots g_n, \quad g' = g'_1 \cdots g'_n, \quad g_k, g'_k \in G_{i_k}, \quad \sum_k d_{i_k}(g_k, g'_k) \text{ small.}$$

于是我们可以写成

$$\rho(g'_k) = \rho(g_k) + \varepsilon_k T_k, \quad T_k \in \mathrm{End}(V) \text{ of norm } \leqslant 1, \quad \sum_k \varepsilon_k \text{ small.}$$

我们要比较的两个乘积是

$$\rho_1(g_1) \cdots \rho_n(g_n) \quad \text{and} \quad (\rho_1(g_1) + \varepsilon_1 T_1) \cdots (\rho_n(g_n) + \varepsilon_n T_n),$$

由此可得，两者之差的范数不超过

$$\delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots = \frac{\delta}{1-\delta}, \quad \delta := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k. \qquad \blacksquare$$

注 2.41 一般而言，拓扑 τ 的构造2.39 将会严格细于 Bohr拓扑。事实上，如果 G_i 是有限的，那么 τ 将是离散的。另一方面，假设至少有两个 G_i 非平凡，则余积 $G := \coprod_{\mathrm{GP}} G_i$ 在其 Bohr拓扑下不可能是离散的：

存在一个无限阶元素 $g \in G$ （例如，两个 G_i中的两个非平凡元素的乘积： [34, 定理 11。69]），而序列 $(g^n)_n$与 $\mathbb{Z}$ 在 τ 拓扑下同胚，将有一个 Bohr 收敛子序列 $(g^{n_k})_k$ [38, 定理 17。4]（收敛到其 Bohr 紧化中的某个元素），因此也有一个子序列 $(g^{n_{k+1}-n_k})_k$ Bohr 收敛到 1。 ♦

考虑一个紧群 H，它连续作用于紧群 H_i。一个自然的问题（也与上文的 注 2.12 (2) 有关，稍后便会明白原因）是，由此产生的作用

$$H \times \coprod_{\mathrm{GP}} H_i \to \coprod_{\mathrm{GP}} H_i$$

是否关于 Bohr拓扑连续；一般来说并非如此：

例 2.42 令 H 为所有素数 p 上的乘积，并对每个 p，赋予 p 维环面 $H_p := \mathbb{T}^p$ 以 H 的作用，其中指标为 p 的因子在庞特里亚金对偶上

$$\mathbb{Z}^p \cong \widehat{\mathbb{T}^p} = \widehat{H_p} \tag{2-17}$$

通过与 p 循环对应的置换矩阵作用，而其他因子则平凡作用。

现在，假设 H 确实 连续作用于带 Bohr 拓扑的余积 $F = \coprod_{\mathrm{GP}} H_p$，因此也作用于紧群的余积 $\coprod_{\mathrm{CGP}} H_p$。根据下文的 F 命题 2.43 （2-18），每个 酉表示

为导出矛盾，考虑一个特征 χ，它属于 $\coprod_{\mathrm{CGP}} H_p$，并且在每个 H_p上的限制都是一个特征，其在 H 作用下的轨道大小为 p。显然，这个表示无法扩张为在整个（2-18）上取值于有限维空间的表示：这样的表示必须包含每个 p 的H-次迭代所得到的所有 $\chi|_{H_p}$，对每个 p均如此。 ♦

至于 例 2.42 （以及它所给出的否定答案）与 注 2.12（2）的相关性，则源于以下结果。

命题 2.43 设 H 是一个紧群，它在紧群 H_i、 $i \in I$ 上连续作用。以下条件等价：

(a) H 对代数余积 $\coprod_{\mathrm{GP}} H_i$ 的作用，在某个介于最终拓扑与 Bohr拓扑之间的群拓扑下是连续的。

(b) 我们有一个分解

$$\coprod_{H,\mathrm{CGP}} (H_i \rtimes H) \cong \left(\coprod_{\mathrm{CGP}} H_i \right) \rtimes H. \tag{2-18}$$

通过显然的映射。

(c) H 对代数余积 $\coprod_{\mathrm{GP}} H_i$ 的作用在 Bohr拓扑下是连续的。

此外，它们还蕴含嵌入族 $H \leqslant H_i \rtimes H$ 的代数健全性。

证明 我们有一个分解

$$\coprod_{\mathrm{GP}} (H_i \rtimes H) \cong \left(\coprod_{\mathrm{GP}} H_i \right) \rtimes H.$$

如果最右项中的作用对于某种“中间拓扑”是连续的，如（a），那么（2-18）便可由两侧各自的泛性质推出。这证明了（a）蕴含（b），其中

$$(\mathrm{b}) \Longrightarrow (\mathrm{c}) \Longrightarrow (\mathrm{a})$$

显然易证。

至于最后一条陈述（关于代数健全性），它直接来自（2-18）以及前面引用的 Hulanicki 的 [17, 命题 1]，该命题指出， CGP 中的平凡嵌入族在代数上可靠。■

此外，所有这些情况出现得足够频繁，因而具有一定用途：

定理 2.44 命题 2.43中的等价条件在以下情形成立

（a）当 H 为 fi 限的，且 (H_i) 是配备了 H-作用的任意紧群族 *ns;*

(b) 或者当 H 任意而 (H_i) 有限时。

证明 （a）显然：离散群的作用总是连续的。至于（b），我声称对于有限族， H在群论余积 $\coprod_{\mathrm{GP}} H_i$ 上的作用关于 τ（由构造2.39 定义的）拓扑是连续的（由此根据命题 2.40即可得出结论）。

事实上，对于 H_i 上任意选取的一族伪度量 d_i， H 在 H_i 上作用是均匀 d_i-连续的，因为该族是有限的：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在一个邻域 $U \ni 1 \in H$，使得 $d_i(gx;\ x) < \varepsilon$ 只要 $g \in U$ 且 $x \in H_i$。关键在于，同一个 U 适用于所有 i。于是， H在 $\coprod_{\mathrm{GP}} H_i$ 上的作用关于该余积上的诱导伪度量 d 是连续的，这从 （2-16） 对 d的定义中很容易看出。■

定理 2.45 任意一族紧群的分裂嵌入 $\iota_i : H \leqslant G_i$ 在代数上可靠。

证明 这些分裂提供了分解

$$G_i \cong H_i \rtimes H.$$

现在，有限个子族 (ι_i) 满足命题 2.43 的要求，根据定理 2.44，并且一旦注意到引理 2.14 (2) 的假设对分裂嵌入成立，我们便可得出结论：对于子族 $(\iota_j)_{j\in J} \subseteq (\iota_i)_{i\in I}$ 映射

$$\coprod_{H,\mathrm{GP}} G_j = \coprod_{H,\mathrm{GP}} H_j \rtimes H \to \coprod_{H,\mathrm{GP}} H_i \rtimes H = \coprod_{H,\mathrm{GP}} G_i$$

有一个左逆，它在每个 H_j 和共同嵌入的副本 H 上作用为恒等映射，并在 H_i、$i \notin J$上作用为平凡态射。■

注 2.46 前面的例 2.2 表明，一般而言，一个图表

$$\begin{array}{ccccc} & & H_0 & \longrightarrow & G_0 \\ H & \nearrow & & & \\ & \searrow & & & \\ & & H_1 & \longrightarrow & G_1 \end{array}$$

中的嵌入 CGP 不会产生嵌入$H_0 \coprod_H H_1 \to G_0 \coprod_H G_1$：只需取$H_0 = H_1 = H = \mathbb{T}^2$ 和 G_i 如例 2.2所示。

另一方面，即使对于普通余积（即在平凡群上的多重推出），例 2.42 也可以用来构造这种反常行为的实例：见例 2.47。再与 [31, 定理 4。2], 比较，它表明，C^*-代数嵌入是嵌入（当然，还有熟知的纯群论类比，它可由 [34, 定理 11。66], 得出）。♦

例 2.47 对于素数 p，令 $H_p = \mathbb{T}^p$ 为 p-环面，如 例 2.42中所述，并考虑嵌入

$$H_p \subset G_p := H_p \rtimes (\mathbb{Z}/p),$$

再一次按照 $\mathbb{Z}/p$ 中的做法，赋予其 例 2.42 所述的作用（在庞特里亚金对偶（2-17）上由一个阶为p的循环置换矩阵给出）。关于其非单射性

$$\coprod_{\mathrm{CGP}} H_p \to \coprod_{\mathrm{CGP}} G_p$$

的论证与 例 2.42 完全相同：左侧的一个特征 χ，限制后成为特征$\chi|_{H_p}$，它们在 p 的相应作用下具有大小为 $\mathbb{Z}/p$ 的轨道，因此不可能是 $\coprod_{\mathrm{CGP}} G_p$ 的有限维酉表示的限制表示，因为这样的表示荒谬地必须包含每个 $(\mathbb{Z}/p)$ 的整个轨道 $\chi|_{H_p}$。♦

嵌入族 $H_p \leqslant G_p$ 的无限性对于 例 2.47 至关重要：

命题 2.48 CGP 中有限族嵌入 $H_i \leqslant G_i$ 的余积是一个嵌入。

证明：归纳法将问题化简为一对嵌入，即 $H_i \leqslant G_i$ 对应 $i = 0,1$。由于我们可以对两个指标分别对称地应用这一论证，因此只需证明

$$H \leqslant G \Longrightarrow H \coprod_{\mathrm{CGP}} K \leqslant G \coprod_{\mathrm{CGP}} K$$

对于紧群 H、G 和 K。

由于群论余积 $H\coprod_{\mathrm{GP}}K$ 上的 Bohr拓扑由该群的有限维酉表示所诱导，因此只需证明任意此类表示（例如 $\rho\colon\ H\coprod_{\mathrm{GP}}K\to U(V)$（有限维复希尔伯特空间上的酉群））都能扩张为定义在可能更大空间上的 $G\coprod_{\mathrm{GP}}K$ 的酉表示。

由于 $H\leqslant G$ 是紧群的嵌入，我们当然可以用这种方式将 $\rho|_H$ 扩张到 $\rho'\colon\ G\to U(W)$。现在让 K 像之前一样（通过 ρ）作用于 V，并在其正交补$V^{\perp}\leqslant W$ 上平凡作用，从而完成将 ρ 扩张到整个 $G\coprod_{\mathrm{GP}}K$。■

注记 2。**49** [31, 定理 4。2], 在前文讨论中提及的命题 2.48 也只处理有限推出 C^*-代数。之所以这足以在范畴 $\mathcal{C}_1^*$ 的含幺C^*-代数中确保任意嵌入的余积具有单射性，是因为在 $\mathcal{C}_1^*$ 结构映射

$$A_j\to\varinjlim_i A_i$$

进入由嵌入组成的滤过余极限后，结果仍是嵌入。在 $\mathrm{CG_P}$中显然并非如此：考虑以下链

$$SU(2)\subset SU(3)\subset\cdots\subset SU(n)\subset\cdots$$

特殊酉群的左上角嵌入，其在 $\mathrm{CG_P}$ 中的余极限是平凡的。♦

参考文献

[1] Jiˇr´ı Ad´amek、Horst Herrlich 和 George E. Strecker。《抽象范畴与具体范畴》。纯粹与应用数学（纽约）。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1990年。《范畴的乐趣》，Wiley-Interscience 出版物。

[2] George M. Bergman。《环论中的菱形引理》。Adv. in Math., 29(2):178–218, 1978年。[3] Adam M. Bincer。《李群与李代数：物理学家的视角》。牛津大学出版社，牛津，2013年。[4] N. Bourbaki。《数学原理》。拓扑学。一般拓扑学，第1至4章。Hermann，巴黎，1971年。[5] J. W. S. Cassels。《局部域》，《伦敦数学会学生教材》第3卷。剑桥大学出版社，剑桥，1986年。[6] T. Ceccherini-Silberstein、F. Scarabotti 和 F. Tolli。《克利福德理论及其应用》。第156卷，第29–43页。2009年。泛函分析。[7] Alexandru Chirvasitu。《线性约化量子群的正规子群与相对中心》，2021年。http://arxiv.org/abs/2110.08804v1。[8] A. H. Clifford。《在不变子群中诱导的表示》。Ann. of Math. (2), 38(3):533–550, 1937年。[9] Charles W. Curtis 和 Irving Reiner。《有限群与结合代数的表示论》。美国数学会切尔西出版社，罗得岛州普罗维登斯，2006年。重印1962年原版。

[10]Anton Deitmar 和 Siegfried Echterhoff。《调和分析原理》。Universitext。Springer，沙姆，第二版，2014年。[11] Leonard Evens。《群的上同调》。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1991年。牛津科学出版物。[12] Thomas A. Fournelle。有限初等阿贝尔群作为无限群的自同构群。II。休斯敦数学杂志，6(2):269–276，1980年。[13] Richard Hain。《椭圆曲线模空间讲义》。载于《变换群与曲线模空间》，高等数学讲义（ALM）第16卷，第95–166页。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2011年。[14] K. H. Hofmann 和 K.-H. Neeb。代数的满态射都是满射。巴塞尔数学档案，65(2):134–137，1995年。[15] Karl H. Hofmann 和 Sidney A. Morris。《紧群的结构——学生入门、专家手册》，德格鲁伊特数学研究第25卷。德格鲁伊特出版社，柏林，[2020] ©2020年。第四版 [。[16] Per Holm。论 Bohr 紧化。数学年刊，156:34–46，1964年。[17] A. Hulanicki。紧群自由积的同构嵌入。数学讨论会，16:235–241，1967年。[18] Nathan Jacobson。《李代数》。多佛出版社，纽约，1979年。重刊1962年原版。[19] André Joyal 和 Ross Street。田中对偶与量子群导论。载于《范畴论》（科莫，1990年），数学讲义第1488卷，第413–492页。Springer，柏林，1991年。[20] Eberhard Kaniuth。《交换巴拿赫代数教程》，数学研究生教材第246卷。Springer，纽约，2009年。[21] John L. Kelley。《一般拓扑学》。数学研究生教材第27号。施普林格出版社，纽约—柏林，1975年。重印1955年版 [范·诺斯特兰德出版社，安大略省多伦多。[22] M. S. Khan 和 Sidney A. Morris。具有中心融合的拓扑群自由积。II。美国数学会汇刊，273(2):417–432，1982年。[23] Qihui Li 和 Junhao Shen。关于 RFD 代数的含幺满 amalgamation 自由积的注记。伊利诺伊数学杂志，56(2):647–659，2012年。[24] Saunders Mac Lane。《工作数学家的范畴》，数学研究生教材第5卷。施普林格出版社，纽约，第二版，1998年。[25] John Milnor。《代数 K 理论导论》。数学年刊研究第72号。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿；东京大学出版社，东京，1971年。[26] Sidney A. Morris。拓扑群的自由积。澳大利亚数学会通报，4:17–29，1971年。

[27] James R. Munkres。《拓扑学》。Prentice Hall, Inc.，美国新泽西州上萨德尔河，2000年。[MR0464128]的第二版。[28] Edward T. Ordman。具有 k_ω-空间的拓扑群的自由积。《美国数学会汇刊》，191：61–73，1974年。[29] Edward T. Ordman。具有相同一致结构的拓扑群的自由积。I、II。《数学讨论会》，31：37–43；同上，31（1974），45–49，1974年。[30] Gert K. Pedersen。C^*-代数理论中的拉回与推出构造。《泛函分析杂志》，167(2)：243–344，1999年。[31] Gert K. Pedersen。C^*-代数及其自同构群。纯粹与应用数学（阿姆斯特丹）。学术出版社，伦敦，2018年。[MR0548006], 的第二版，由 Søren Eilers 和 Dorte Olesen 编辑并撰写序言。[32] G. A. Reid。满态射与满射性。《数学发明》，9：295–307，1969/70年。[33] Alain Robert。《紧群和局部紧群表示论导论》，伦敦数学会讲义系列第80卷。剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1983年。[34] Joseph J. Rotman。《群论导论》，数学研究生教材第148卷。施普林格出版社，纽约，第四版，1995年。[35] J. Schulte。有限海森堡群上的调和分析。《欧洲组合数学杂志》，25(3)：327–338，2004年。[36] Jean-Pierre Serre。《树》。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003年。由 John Stillwell 从法文原版翻译；1980年英文译本的修正版第二次印刷。[37] Robert Steinberg。《切瓦莱群讲义》，大学讲座系列第66卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2016年。笔记由 John Faulkner 和 Robert Wilson 整理；1968年原版的修订校正版 [MR0466335], 。Robert R. Snapp 作序。[38] Stephen Willard。《一般拓扑学》。多佛出版社，纽约州米尼奥拉，2004年。1970年原版的重印本 [Addison-Wesley，马萨诸塞州雷丁；0264581] MR[39] 。Ichiro Yokota。《例外李群》，2009年。http://arxiv.org/abs/0902.0431v1。

Department of Mathematics, University at BuffaloBuffalo,
NY 14260-2900, USA*E-mail address*: achirvas@buffalo.edu