arXiv:2301.09855v1 [math.GT] 24 Jan 2023

具有足够多扭转区域的特殊交替结没有手性美容手术

TETSUYA ITO

Abstract. 我们证明，扭转区域数量足够多（超过 63 个）的特殊交替结没有手性美容手术；手性美容手术是指一对德恩手术，其结果为反向定向同胚的 3-流形。在证明过程中，我们给出了次数为 2 和 3 的本原有限型不变量的最优上界，从而解决了 Willerton猜想。

1. Introduction

在同一个结 K 上进行的一对斜率不等价的德恩手术，若其结果为反向定向同胚的 3-流形，则称为保向手性等价。当结 K 是可镜像时，对于任意斜率 r，其 r 手术与 $-r$手术保向手性等价。更具说明性的例子是，对于每个整数 m，在 (2, p)- 环面结上进行的 $2p^2(2m+1)\ p(2m+1)+1$ 和 $2p^2(2m+1)\ p(2m+1)-1$ 手术都保向手性等价（见 [Ro], [IIS1, 附录]）。

目前尚无其他关于 S^3 中纽结的保向手性等价手术的例子。因此，自然可以预期， S^3 中的纽结不会有其他保向手性等价手术。

猜想 1. 对 S^3 中非平凡结的保向手性等价手术，要么是可镜像纽结的 $\pm r$ 手术，要么是 $2p^2\ (2m+1)\ p\ (2m+1)\ +1$ 和 $2p^2\ (\sout{2m+1)\ p\ (}2m+1)\ \sout{-1\ 的\ (2,}p)$ 环面纽结手术（$m \in \mathbb{Z}$）。

该猜想已针对若干类纽结进行了研究和验证 [IIS1、IIS2、It1、It2、Va1、Va2] （全面讨论见 [IIS2] ），并且有一些理论证据支持该猜想。

然而，我们应当指出，猜想 1 略显乐观。存在关于透镜空间中的双曲结的保向手性等价手术的例子[BHW], ，也存在关于双曲三维流形中的双曲结的保向手性等价手术的例子 [IJ]。因此，在考虑一般三维流形中纽结的保向手性等价手术时，我们不能期待存在类似的猜想。

本文研究特殊交替纽结的手性美容手术。特殊交替纽结是由特殊交替图表示的结。这里，除镜像外，特殊交替图是同时为正的交替图（所有交叉点均为正）。特别地，特殊交替结绝不会是反手征的。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：57K10、57K18、57K31。

我们证明，当特殊交替结 K 足够复杂，即其扭转数 $tw(K)$（定义见第 4.1 节）足够大时， K 不允许进行保向手性等价手术。

定理 1.1. 设 K 是一个特殊交替纽结。若 $tw(K) > 63$ ，则 K 不存在手性美容手术。

由于满足 $tw(K) = 1$ 的特殊交替纽结恰好是 $(2, p)$-环面纽结，我们的定理表明，当 K 与 $(2, p)$-环面纽结相差甚远时，它不存在手性美容手术。与以往结果相比，我们的定理处理了更复杂、更一般的纽结，因此为另一种风格的猜想 1 提供了佐证。

我们介绍本文的结构，并概述定理 1.1 的证明。

在第 2 节中，我们基于有限型不变量 $a_2(K)$、 $v_3(K)$、 $a_4(K)$ 及行列式，回顾纽结存在手性美容手术所受的限制。

在第 3 节中，我们利用高斯图公式回顾有限型不变量的若干估计。大多数结果已为人所知，但在此我们给出一些小幅改进或简化。其中，我们给出 $a_2(K)$（命题 3.6）和 $v_3(K)$（命题 3.10）的最优上界，从而解决了 Willerton 猜想 [Wi], [Oh，猜想 2.11]。

第 4 节致力于估计交替结的行列式。In[St2] Stoimenow 根据扭转数给出了交替结行列式的一个下界。我们给出了一个温和的改进，并将交叉数纳入考量。

在第 5 节中，我们结合迄今建立的不等式证明主定理。前几节得到的估计立即表明，除非大量交叉点集中在单个扭转区域内，否则特殊交替纽结 K 不可能进行保向手性等价手术。对于一个剩余的特殊情形，我们对有限型不变量有更好的估计，由此得出保向手性等价手术不存在。

第 6 节简要讨论一般交替结的情形。我们在一些附加假设下证明了类似的不存在性结果。我们还将简要讨论一种双曲几何方法，该方法同样能得出保向手性等价手术不存在的类似结果。

Acknowledgement

作者部分得到 JSPS KAKENHI 基金项目编号 19K03490、21H04428 的资助。作者谨向 Kazuhiro Ichihara 致谢，感谢他进行的诸多有益且富有启发性的讨论。

2. Chirally cosmetic surgery constraint

本节简要回顾交替结不允许存在手性美容手术的充分条件。

我们用 $a_n(K)$ 表示结 K 的康威多项式 $\nabla_K(z)$ 中 z^n 的系数。令 $v_3(K)$ 为如下定义的三次有限型不变量：

$$v_3(K) = -\frac{1}{144}V_K'''(1) - \frac{1}{48}V_K''(1) \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$$

其中 $V_K(t)$ 是 K 的 Jones 多项式。$v_3(K) \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$ 是一种非标准归一化，它源于将其解释为 Kontsevich不变量的一个系数。下文中，我们主要使用 $4v_3(K)$，使得 $4v_3(K) \in \mathbb{Z}$。在有限型不变量理论中， a_2 和 $4v_3$ 通常分别称为二次和三次本原有限型不变量。

定理 2.1. 设 K 是一个交替结，使得 $4v_3(K) \neq 0$。

(i) [IIS2，定理 1.9] 若

$$0 < \left| \frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)} \right| \leq \frac{1}{2}\left(\det(K) - |\sigma(K)| - 1\right)$$

则 K 没有手性美容手术。

(ii) [Va₂，推论 2.8] 若 $\sigma(K) = 2g(K)$，且

$$\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)} \neq \frac{1}{2}\det(K) + 3g(K) - \frac{5}{2}$$

那么 K 没有手性美容手术，除非 K 不是 $(2,p)$ 环面纽结。

这里， $\sigma(K)$表示 K的签名。

注意，对于 K的镜像 $\overline{K}$， $4v_3(K) = -4v_3(\overline{K})$。因此，假设 $4v_3(K) \neq 0$ 意味着 K 不是可镜像的。

注2.2。原始结论是在较弱的假设 K 为同调薄的条件下表述的，并使用 tau 不变量 $\tau(K)$。对于交替结，$\sigma(K) = 2\tau(K)$，因此我们采用更为熟悉且初等的不变量 $\sigma(K)$。此外， [Va₂，推论 2.8] 仅排除了斜率 r 与 r' 符号相反的保向手性等价手术（在 [IIS2] 中，我们将此类保向手性等价手术称为 $-$型）。我们的断言由 [Va₂，推论 2.8], 以及以下事实推出。

- 若结 K 允许斜率符号相同的保向手性等价手术（在[IIS2] 中，我们称此类保向手性等价手术为 $+$-型），则 K 是一个 L-空间结 [OS2，定理 9.8]。
- 交替结是 L-空间结，当且仅当它是 $(2,p)$ 环面纽结 [OS1，定理 1.5]。
- $v_3(K) \neq 0$ 意味着 r 手术和 $-r$ 手术并非保向手性等价[它1]。

3. Estimate of finite type invariants from diagrams

本节讨论定理 2.1 中出现的若干不变量 a_2、 a_4 和 $4v_3$ 的估计。特别地，我们给出关于交叉数的 a_2和 $4v_3$ 的最优上界。

3.1. 高斯图。设 $(S^1, *)$ 是一个带有基点 $*$的定向圆 S^1。

- 弦是 $S^1 \setminus \{*\}$ 中两个不同点组成的无序对 $\{u, v\}$。
- （无符号）箭头是 $S^1 \setminus \{*\}$ 中两个不同点组成的有序对 (o, u)。
- 带符号箭头 a $= ((o, u)\ \varepsilon)$ 是一个带有符号$\varepsilon \in \{\pm\}$的箭头 (o, u)。

对于箭头 (o, u)，我们分别称 o 和 u 为箭头尾和箭头头。

定义 3.1. 高斯图 G 是带基点圆 $(S^1,*)$ 上的一组带符号箭头 $\{((o_i,u_i)\ \varepsilon_i)\}$，其端点两两不同。弦图 C 的定义类似。

如果存在一个保向同态 $f\colon (S^1,*)\to(S^1,*)$，将 G 的箭头 $\mathsf{a}=((o,u)\ \varepsilon)$ 映射为 G' 的箭头 $f(\mathsf{a})=((f(o)\ f(u))\ \varepsilon)$，则两个高斯图 G and G' 相同。

下文中，我们常常通过忽略附加信息，将（带符号或不带符号的）箭头简单地视为一条弦。此外，我们有时也将某些箭头未带符号，或仅含弦的情形称为高斯图。为与定义 3.1 中定义的标准高斯图区分，我们称这类对象为弱高斯图。

按照惯例，我们将（弱）高斯图 G 表示为由一个圆和带符号箭头组成的图：对于 G 的每个带符号箭头 $((o,u)\ \varepsilon)$，从 o 到 u 画一个符号为 ε 的箭头。在图示表示中，我们总是认为圆的方向为逆时针方向。

对于纽结图 D，我们取一个基点 $*$。可以如下构造高斯图G_D。将图 D 视为一个浸入 $\gamma\colon S^1\to\mathbb{R}^2$，它将 S^1 的基点 $*$ 映到 D的基点 $*$。对于 D的每个双重点 c，我们赋予带符号箭头 $((o(c)\ u(c))\ \varepsilon(c))$，其中 $o(c)$ 和 $u(c)$ 是交叉 c处上弧／下弧的原像，而 $\varepsilon(c)$ 是交叉 c的符号。

对于弱高斯图 A 和高斯图 G，配对 $\langle A,G\rangle$ 定义为

$$\langle A,G\rangle=\sum_{G'\subset G,G'=A}\varepsilon(G')$$

其中，求和遍历 G 的所有满足 G'等于 A的子高斯图 G'，而 $\varepsilon(G')\in\{\pm1\}$ 是 G' 所有箭头的符号之积。这里，G 的子高斯图 G' 是指其带符号箭头集合为 G 的带符号箭头集合的子集的高斯图；“G' 等于 A”是指在必要时忽略 G 的附加信息（例如忽略符号，或将箭头视为弦）后，G 成为相同的弱高斯图 A。配对可自然地扩展到弱高斯图的形式线性组合 $\mathcal{C}=\sum_{i=1}a_iA_i$，定义为

$$\langle\mathcal{C},G\rangle=\sum_{i=1}a_i\langle A_i,G\rangle$$

对于每个纽结的（取整数值的）有限型不变量 v，都存在一个弱高斯图 $\mathcal{C}$ 的形式线性组合，使得

$$v(K)=\langle\mathcal{C},G_D\rangle \tag{3.1}$$

对于纽结的任意图 D，K [GPV]。我们称（3.1）为有限型不变量 v的高斯图公式。

3.2. 康威多项式系数的上界。虽然我们只需要估计 $a_2(K)$、$a_4(K)$，但我们给出了康威多项式系数$a_{2n}(K)$的上界。这是对 Polyak-Viro 关于估计 $a_2(K)$ 的论证 [PV] 的直接推广。

命题 3.2. 对于交叉数为 c的结 K ,

$$|a_{2n}(K)| \leq \frac{1}{2}\left(\binom{c}{2n} - 2\binom{\frac{c}{2}}{2n}\right)$$

成立。特别是,

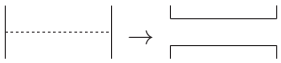
$$a_2(K) \leq \frac{c^2}{8}$$

我们还观察到以下估计

命题 3.3。若 D 是一个具有 c 个交叉点的正图,

$$a_{2n}(K) \leq \frac{1}{(2n-2)!}c^{2n-2}a_2(K)$$

为证明该定理，我们回顾 a_{2n} 的一个高斯图公式。若对每条弦进行平行加倍后得到的曲线 X_C 是连通的，则弦图C



就是连通的。对于具有 $2n$ 条弦的连通弦图 C，我们按如下方式赋予一个弱高斯图 A_C 。从基点 $*$出发，沿圆周X_C行进。首次经过圆周上对应于一条弦 $\{o,u\}$ 的部分时，我们根据 X_C 的方向赋予方向。

利用连通弦图的概念，康威多项式的系数可描述如下:

定理 3.4。 [CKR] 设 $\mathcal{C}_{2n} = \sum_C A_C$ 为无符号高斯图的线性组合，其中求和遍历所有次数为 $2n$ 的连通弦图 C。那么，对于结 K 的图 D ,

$$a_{2n}(K) = \langle \mathcal{C}_{2n}, G_D \rangle$$

因此，对于正结 K， $a_{2n}(K) \geq 0$ 。事实上，最近已证明，对于正结 K，且对于 $n = 1$，.....， $g(K)$ [是], 一个更强的不等式

$$a_{2n}(K) \geq \binom{g(K)}{n} > 0 \tag{3.2}$$

成立。

例3.5（ a_2 的高斯图公式）。这里有三个弦图

$C =$  , $C' =$  , $C'' =$ 

二阶。 C 是连通的，而 C' 和 C'' 不是。从连通弦图 C 我们得到一个弱高斯图，因此



$$a_2(K) = \langle$$  $$, G_D \rangle. \tag{3.3}$$

我们注意到，高斯图公式并非唯一。例如，利用 a_2（K）在镜像下是不变量这一事实， a_2（K）有一个不同的高斯图公式

$$a_2(K) = \langle \quad , G_D\rangle. \tag{3.4}$$



命题 3.2 的证明。对于无符号高斯图 A，将通过反转所有箭头得到的高斯图记为 $\overline{A}$ 。

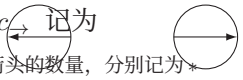
令 $\overline{D}$ 为 D 的镜像。则 $\overline{D}$ 的高斯图 $G_{\overline{D}}$ 可由 G_D 通过反转所有箭头和符号得到。因此

$$a_{2n}(K) = a_{2n}(\overline{K}) = \langle \mathcal{C}_{2n}, G_{\overline{D}}\rangle = \langle \overline{\mathcal{C}_{2n}}, G_D\rangle$$

这里 $\overline{\mathcal{C}_{2n}} = \sum_C \overline{A_C}$。因此我们得出

$$a_{2n}(K) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{C}_{2n} + \overline{\mathcal{C}_{2n}}, G_D\rangle.$$

若高斯图中的一个箭头形如（分别为 ）所示，则称其为左箭头（分别为右箭头）。将 $c_\leftarrow$ 和 $c_\rightarrow$ 记为



G_D 中左箭头和右箭头的数量，分别记为 $*$ $*$。

根据构造，由连通弦图 C 得到的无符号箭头图 A_C 具有以下性质：

(i) 与基点 $*$ 相邻的两个箭头的端点都是箭头尾。(ii) $A_C \neq A_{C'}$ 如果两个弦图 C、 C' 不同。(iii) A_C 至少包含一个左箭头和一个右箭头。

性质 (i) 表明，对于任意连通弦图 C 和 C'， $A_C \neq \overline{A_{C'}}$。因此，对于 G_D 中具有 $2n$ 条弦的每个子高斯图 G'， $|\langle \mathcal{C}_{2n} + \overline{\mathcal{C}_{2n}}、\ G'\rangle| \leq 1$。此外，性质 (iii) 表明，如果 G' 的所有箭头都是左箭头或右箭头，那么 $|\langle \mathcal{C}_{2n}、\ G'\rangle| = 0$ 。

次数为 $2n$ 且至少包含一个左箭头和一个右箭头的子高斯图的数量为 $\binom{c}{2n} - \binom{c_\leftarrow}{2n} - \binom{c_\rightarrow}{2n}$。因此

$$\begin{aligned} a_{2n}(K) &\leq \frac{1}{2}\left(\binom{c}{2n} - \binom{c_\leftarrow}{2n} - \binom{c_\rightarrow}{2n}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\binom{c}{2n} - 2\binom{\frac{c}{2}}{2n}\right) \end{aligned}$$

□

借此机会，我们指出以下最优估计[1] of $a_2(K)$，这是 Willerton [Wi] 提出的猜想（我们指出，对于 $(2,p)$-环面纽结K $a_2(K) = \frac{c^2-1}{8}$ ）。

命题 3.6（ $a_2(K)$ 的最优界）。对于非平凡结 K，

$$a_2(K) \leq \frac{c(K)^2 - 1}{8}$$

[1]这一点在 [PV，注释 1.G]，中已隐含提及，尽管他们没有明确说明。

证明。稍加仔细地重新审视命题 3.2 的证明即可得出这一点。设 D 为 K 的一个图，其有 $c = c(K)$ 个交叉点。

首先假设 $c(K)$ 为奇数。尽管在这种情况下，结论显然成立，因为 $a_2(K)$ 是整数，但这里我们给出一种略有不同的论证，它也适用于一般情况。由于 $c_\leftarrow$ 和 $c_\rightarrow$ 都是整数

$$\begin{aligned} a_2(K) &\leq \frac{1}{2}\left(\binom{c}{2} - \binom{c_\leftarrow}{2} - \binom{c_\rightarrow}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\binom{c}{2} - \binom{\frac{c+1}{2}}{2} - \binom{\frac{c-1}{2}}{2}\right) = \frac{c^2-1}{8}. \end{aligned}$$

接下来假设 $c(K)$ 为偶数。回顾一下，对于纽结图 G_D 所对应的高斯图，每个箭头 a 与之相交的箭头数都是偶数。因此，当 $c(K)$ 为偶数时， G_D 的子（弱）高斯图数量

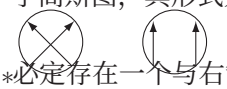
form  至多为 $\binom{c}{(c-2)/2}$。因此我们得出

$$\begin{aligned} a_2(K) &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c(c-2)}{2} - \binom{c_\leftarrow}{2} - \binom{c_\rightarrow}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{c(c-2)}{2} - 2\binom{\frac{c}{2}}{2}\right) = \frac{c^2-2c}{8} < \frac{c^2-1}{8} \end{aligned}$$

□

注 3.7. 类似的论证可用于对命题 3.2 作些许改进，但这看起来与最优上界相去甚远。尽管探究 a_4 或 a_{2n} 的最优上界本身也值得关注（参见 [Oh，问题 1.17]），但我们不再讨论此事。

命题 3.3 的证明。对于一个连通高斯图 C 及其无符号高斯图 A_C，与基点相邻的两个箭头构成一个子高斯图，其形式为 或 。对于后一种情况，由于 C 是连通的，



∗ ∗必定存在一个与右箭头相交的左箭头。因此，在这两种



∗情况下， A_C 都包含 作为其子高斯图。由于次数



∗ G_D 中等于 的两个子高斯图的数量为 $a_2(K)$，因此我们得出结论



$$a_{2n}(K) \leq \binom{c-2}{2n-2}\langle \text{}, G_D\rangle \leq \frac{1}{(2n-2)!}c^{2n-2}a_2(K).$$

□

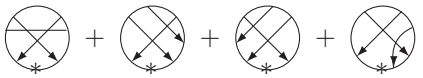
3.3. $4v_3$的界。我们回顾一下关于 $4v_3(K)$ 的一些估计。大多数结果取自 [St1][2]，但在这里，我们利用下面的高斯图公式，使论证更加简洁或略作改进。

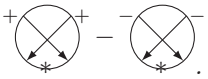
[2]我们指出，Stoimenow 的论文 [St1] 中的不变量 v_3 等于我们论文中的 $16v_3(K)$。

命题 3.8。 [CP，第 493 页，最后一行]

$$4v_3(K) = \langle \mathcal{C}_A + \mathcal{C}_B, G_D \rangle$$

其中

$\mathcal{C}_A =$  ,

$\mathcal{C}_B =$  .

该公式对 [St1，命题 7.2] 作出了小幅改进。

引理 3.9. 设 K 是由正图 D 表示的一个结，

$$a_2(K) \le 4v_3(K)$$

证明. 对于正图 D，由 (3.4) 可得 $\langle \mathcal{C}_A, G_D \rangle \ge 0$ 和 $\langle \mathcal{C}_B, G_D \rangle = a_2(K)$。因此 $4v_3(K) \ge a_2(K)$。 □

特别地，由 (3.2)，对于非平凡正结 K

$$0 < g(K) \le a_2(K) \le 4v_3(K). \tag{3.5}$$

（我们指出，$a_2(K) \ge g(K)$ 和 $4v_3(K) \ge g(K)$ 分别最早由 [St1，定理 6.2] 和 [St1，定理 5.1]，证明。）

我们指出 Willerton[Wi], [Oh，猜想 2.11] 提出的关于 $4v_3(K)$ 的以下最优估计（我们指出，对于 (2，p)-环面纽结 K，$4v_3(K) = \mathrm{sgn}(p)\, \frac{c(K)^3 - c(K)}{24}$）。

命题 3.10（$4v_3(K)$ 的最优界）。

$$-\frac{1}{24}(c(K)^3 - c(K)) \le 4v_3(K) \le \frac{1}{24}(c(K)^3 - c(K))$$

证明。对于一个图 D，令 D_+ 为通过适当改变 D 每个交叉点处的上下穿越信息得到的正图。已知 $a_2(D) \le a_2(D_+)$ 且 $v_3(D) \le v_3(D_+)$ [St1，定理 5.2]。令 D 为结 K 的最小交叉图。根据 [St1，定理 7.2]，$4v_3(K) \le \frac{c(D_+)}{3} a_2(K)$。因此，由命题 3.6 可得

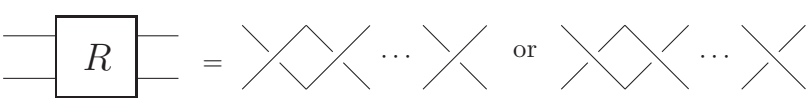
$$4v_3(K) \le 4v_3(D_+) \le \frac{c(K)}{3} a_2(D_+) \le \frac{c(K)^3 - c(K)}{24}.$$

该下界源于性质 $4v_3(\overline{K}) = -4v_3(K)$。 □

4. Determinant estimate

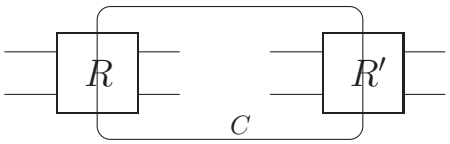
本节将推导交替结行列式的下界。

4.1. 扭转区域与扭转数。纽结图 D的扭转区域 R 是由两条平行股线的非平凡扭转构成的最大非空子图，



这里的“最大”是指 R 包含尽可能多的交叉点。我们用 $c(R)$ 表示扭转区域 R中的交叉点数。两个扭转区域 R 和

R' 等价，当且仅当投影平面 $\mathbb{R}^2$ 中存在一个圆 C，使得 C与 D不相交，但 C 穿过 R 和 R' 各一次，如

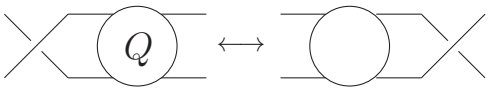


我们称这样的圆为 C R 与 R'之间的等价圆。

图 D 的扭转区域数称为扭转数，记作 $tw(D)$。我们用$\overline{tw}(D)$表示图 D中扭转区域等价类的数量。

定义 4.1. 若图 D 中任意两个不同的扭转区域都不等价，则称该图为扭转约化图。

因此，对于扭转约化图 D，有 $tw(D) = \overline{tw}(D)$。若两个扭转区域R 与 R' 等价，则它们的等价圆表明，通过飞跃变换， R 与 R' 合并为一个扭转区域



（必要时还可进行第二类 Reidemeister 变换）。特别地，每个交替图D 都可以通过应用飞跃变换化为扭转约化图。

定义 4.2。交替结 K 的扭转数定义为

$tw(K) = \min\{\overline{tw}(D) \mid D$ 是 $K\}$ 的交替图$= \min\{tw(D) \mid D$ 是 $K\}$. 的约化扭转约化交替图

4.2. 扭转数、交叉数与行列式。在 [St2 中，定理 4.3] Stoimenow 证明，对于链环 L 的约化交替图 D，不等式

$$\det(L) \geq 2\gamma^{\overline{tw}(D)-1} \tag{4.1}$$

成立。这里，$\gamma = 1.425...$是 $x^5 + 2x^4 + x^3 - 1 = 0$ 的正根的倒数。实际上，由于 $\gamma \approx \sqrt{2} = 1.412...$，可以用 $\sqrt{2}$ 作为常数 γ 的近似值。

考虑交叉数后，我们得到对（4.1）的改进。

定理 4.3. 设 D 是链环 L 的约化交替图，具有 $\overline{tw}(D) \geq 2$。那么

$$\det(L) > 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{\overline{tw}(D)} + (c(D) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2}\right).$$

此外，如果 D 包含一个扭转区域 R，其中包含 $c(R) > 2$ 个交叉点，那么

$$\det(L) > 2\gamma^{-1}\Big(\gamma^{\overline{tw}(D)} + (c(D) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2} + (c(R) - 2)(c(D) - \overline{tw}(D) - c(R))\gamma^{(\overline{tw}(D)-3)/4}\Big)$$

我们指出，当 $\overline{tw}(D) = 1$ 时，该断言并不成立，即 D 是 $(2, p)$- 环面结/链环图。

证明。 不失一般性，我们可以假设 D 是扭转约化的，因此 $\overline{tw}(D) = tw(D)$。

通过直接计算可以验证，该断言在情形$tw(D) = 2$、双扭结纽结/链环图情形或三股椒盐纽结/链环图情形下成立。下文假设 $tw(D) > 2$，且 D 不是三股椒盐纽结/链环图。

我们对（（$c(D) - tw(D)$ $c(D)$））使用归纳法证明该断言。若 $c(D) - tw(D) = 0$，则 R 恰好包含一个交叉点，因此 $c(R) = 1$。故在此情形下，所需的不等式就是（4.1）。

假设 $c(D) - tw(D) > 0$。必要时取镜像，我们可以假设扭转区域 R 由以下形式的交叉点组成 .

取 R 的一个交叉点 c，令 D_0 为将交叉点 c 按$\longrightarrow$ 方式消解后得到的图。类似地，令 D_∞ 为将交叉点 c 按$\longrightarrow$ 方式消解，并通过第一类 Reidemeister 变形移除 R中的平凡扭结后得到的图。因此，D_∞ 是将扭转区域 R 按以下方式消解后得到的图

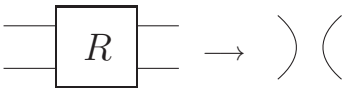


图 D_0 是约化的。图 D_∞ 也是约化的，因为如果 D_∞ 的一个交叉 c 是可约的，那么 D 中的交叉 c 必定包含在 R中的扭转区域内。至于交叉数，我们有 $c(D_0) = c(D) - 1$ 以及$c(D_\infty) = c(D) - c(R)$。

情形 1: D_0 是扭转约化的

在这种情形下，$\overline{tw}(D_0) = tw(D_0) = \overline{tw}(D) - 1$。在图 D_0中，扭转区域R 包含 $c(R) - 1$ 个交叉点，因此由归纳法

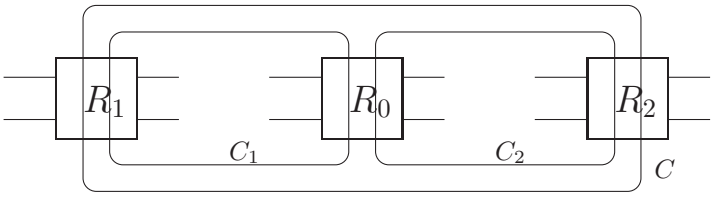
$$\det(D_0) > 2\gamma^{-1}\Big(\gamma^{\overline{tw}(D)} + ((c(D)-1) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2} + (c(R)-3)(c(D) - c(R) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-3)/4})\Big)$$

为理解 $\overline{tw}(D_\infty)$，我们注意到以下内容（需要指出的是，该命题不需要假设 D_0 是扭转约化的，而且下文情形 2 中也会用到此命题）。

命题 1. 对于 D_∞ 的每个扭转区域 R_0，D_∞ 至多有一个扭转区域 $R_1(\neq R_0)$ 与 R_0扭转等价。

命题 1 的证明。反设，在 D_∞ 中有多个扭转区域 R_1、R_2，它们与 R_0 扭转等价。设 C_i $(i = 1, 2)$ 是 R_0 与 R_i 之间的等价圆。那么，通过对 C_1

和 C_2 取适当的连通和，可在 D 中得到 R_1 与 R_2 之间的等价圆 C，其



这与假设 D 是扭转约化的相矛盾。 □

根据命题 1

$$\overline{tw}(D_\infty) > \frac{tw(D_\infty)}{2} = \frac{\overline{tw}(D)-1}{2}.$$

由于我们已假设 $tw(D) \geq 2$，$\overline{tw}(D_\infty) > 1$。因此，根据归纳法

$$\det(L_\infty) \geq 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2} + ((c(D)-c(R)) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-3)/4}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\det(L) &= \det(D_0) + \det(D_\infty) \\ &> 2\gamma^{-1}\Big(\gamma^{\overline{tw}(D)} + (c(D) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2} \\ &\qquad + (c(R)-2)(c - \overline{tw}(D) - c(R))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/4}\Big).\end{aligned}$$

情形 2： D_0 不是扭转约化的

这只有在 $c(R) = 2$时才会发生。在图 D_0中，扭转区域 R 由一个交叉组成；通过将扭转方向的观察方式改为.....，它与另一个扭转区域 R'扭转等价

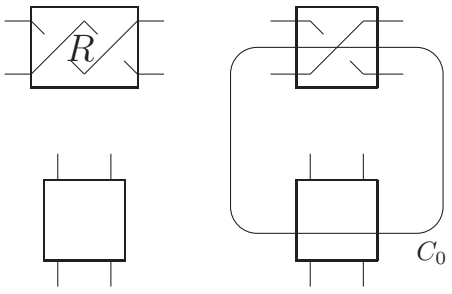


图 D 图 D_0

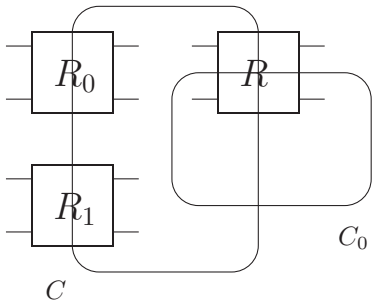
设 C_0 为 D_0中 R 与 R' 之间的等价圆。

在这种情况下，$\overline{tw}(D_0) = tw(D) - 1$，因为当 D_0 中的两个扭转区域 R_0 和 R_1 等价，且 $(R_0, R_1) \neq (R, R')$ 时，它们的等价圆 C 会在 D 中对应的扭转区域之间产生一个等价圆。特别是，$\overline{tw}(D_0) > 2$，因为我们假设 $\overline{tw}(D) > 2$。

在这种情况下，我们注意到，与情形 1 不同， $\overline{tw}(D_\infty)$ 至多减少两个。

断言 2. $\overline{tw}(D_\infty) \geq tw(D) - 2$。此外，当 D 不是三股椒盐纽结/链环图时，则 $\overline{tw}(D_\infty) > 1$。

断言 2 的证明。假设 D_∞ 中的两个扭转区域 R_0 和 R_1 等价，并令 C 为其等价圆。由于 R_0 和 R_1 在 D中不等价， C 必定穿过扭转区域 R。由于扭转区域 R 和 R' 在D_0中变得等价，这意味着要么 $R_0 = R'$，要么 $R_1 = R'$；否则，在图D_∞ 中，两个等价圆 C 和 C_0 会在扭转区域 R 相交，因此形成如下构型



这是不可能的。

根据命题 1，这意味着 D_∞中至多有一对扭转等价的扭转区域。特别是，如果发生 $\overline{tw}(D_\infty) = 1$，则意味着$D$ 必定是三股椒盐纽结/链环图。□

当 $tw(D_\infty) = tw(D) - 2$ 通过归纳法

$$\begin{aligned}\det(L) &= \det(D_0) + \det(D_\infty)\\ &> 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)-1} + (c(D) - tw(D))\gamma^{(tw(D)-2)/2}\right)\\ &\quad + 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)-2} + (c(D) - tw(D))\gamma^{(tw(D)-3)/2}\right)\\ &= 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)}(\gamma^{-1} + \gamma^{-2}) + (\gamma^{-1/2} + \gamma^{-1})(c(D) - tw(D))\gamma^{(tw(D)-1)/2}\right)\end{aligned}$$

由于 $(\gamma^{-1} + \gamma^{-2}) > 1$ 和 $\gamma^{-1/2} + \gamma^{-1} > 1$，我们得到

$$\det(L) > 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)} + (c - tw(D))\gamma^{(tw(D)-1)/2}\right).$$

类似地，当 $tw(D_\infty) = tw(D) - 1$ 通过归纳法 $tw(D_\infty) = tw(D) - 1$

$$\begin{aligned}\det(L) &= \det(D_0) + \det(D_\infty)\\ &> 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)-1} + (c(D) - tw(D))\gamma^{(tw(D)-2)/2}\right)\\ &+ 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)-1} + (c(D) - 1 - tw(D))\gamma^{(tw(D)-2)/2}\right)\\ &= 2\gamma^{-1}\left(2\gamma^{tw(D)-1} + (2\gamma^{-1/2}(c(D) - tw(D)) - \gamma^{-1/2})\gamma^{(tw(D)-1)/2}\right)\end{aligned}$$

如果 $c(D) - tw(D) > 1$，那么

$$(2\gamma^{-1/2}(c(D) - tw(D)) - \gamma^{-1/2}) > 3\gamma^{-1/2} > 1$$

因此我们得出结论

$$\det(L) > 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)} + (c(D) - tw(D))\gamma^{(tw(D)-1))/2}\right).$$

当 $c(D) - tw(D) = 1$ 时,

$$\begin{aligned}\det(L) &= 2\gamma^{-1}\left(2\gamma^{tw(D)-1} + \gamma^{(tw(D)-2)/2}\right)\\ &= 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)} + (2-\gamma)\gamma^{tw(D)-1} + \gamma^{-1/2}\gamma^{(tw(D)-1)/2}\right)\\ &= 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)} + ((2-\gamma)\gamma^{(tw(D)-1)/2} + \gamma^{-1/2})\gamma^{(tw(D)-1)/2}\right)\\ &> 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{tw(D)} + \gamma^{(tw(D)-1)/2}\right).\end{aligned}$$

□

为了表示一个扭转区域包含交叉点的程度，我们引入以下量。

定义 4.4。图 D 的密度 $d(D)$ 为

$$d(D) = \max\left\{\frac{c(R)}{c(D)} \,\middle|\, R \text{ is a twist region of } D\right\}.$$

最大扭转区域 R 是达到密度的扭转区域 R，也就是说，$c(R)$ 是 D的所有扭转区域中最大的。

我们将使用以下显然的估计，用交叉数和扭转数表示密度。

引理 4.5. 对于约化图 D,

$$\frac{1}{tw(D)} \le d(D), \text{ and, } \frac{tw(D)-1}{c(D)} \le 1 - d(D)$$

证明. 令 R 为最大扭转区域。由于每个扭转区域都至少包含一个交叉，因此我们有 $^{c}{}_{(D)\ tw(D)} \le c(R) = d(D)c(D)$ and $c(R) + (tw(D) - 1) \le c(D)$. □

利用密度，我们得到以下关于 $c(D)$ 的二次估计。

命题 4.6. 设 D 是结 K 的约化图。若 $\{v_3\}(D) > 1$，则

$$\det(K) \ge 2\frac{(1-d(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-7)/4}}{\overline{tw}(D)}c(D)^2$$

证明. 设 R 为最大扭转区域。则

$$\begin{aligned}
\det(K) &> 2\gamma^{-1}\Bigg(\gamma^{\overline{tw}(D)} + (c(D) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2} \\
&\qquad + (c(R)-2)(c(D) - \overline{tw}(D) - c(R))\gamma^{(\overline{tw}(D)-3)/4}\Bigg) \\
&> 2\gamma^{-1}\Bigg(\gamma^{\overline{tw}(D)} + (c(D) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2} \\
&\qquad + \Big(\frac{c(D)}{tw(D)} - 2\Big)\Big((1-d(D))c(D) - tw(D)\Big)\gamma^{(\overline{tw}(D)-3)/4}\Bigg) \\
&> 2\gamma^{-1}\Bigg(\gamma^{\overline{tw}(D)} + (c(D) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2} \\
&\qquad + \Big(\frac{1-d(D)}{tw(D)}c(D)^2 + (-3+2d(D))c(D) + 2tw(D)\Big)\gamma^{(\overline{tw}(D)-3)/4}\Bigg) \\
&\geq 2\frac{(1-d(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-7)/4}}{tw(D)}c(D)^2
\end{aligned}$$

□

5. Proof of Theorem 1.1

本节证明定理 1.1。由于正结 K 满足 $\sigma(K) = 2g(K)$，我们可以使用定理 2.1 (ii) 来证明不存在手性美容手术。

注 5.1。虽然我们使用定理 2.1 (ii)，但稍加努力也可以改用定理 2.1 (i)，因为我们实际上使用的是 $\det(K)$ 的一个估计；当 K 是正结时，定理 2.1 (i) 右侧的绝对值可以去掉，正如我们在 [IIS2，注 1.11] 中提到的。

作为预备观察，我们注意到，当密度不接近 1 时，不存在手性镜像余手术。

命题 5.2. 设 D 是一个约化、扭转约化的特殊交替图。若 $d(D) \leq 1 - \frac{7tw(D)}{8^{\gamma^{(7-tw(D))/4}}}$，则 K 不存在手性美容手术。

证明. 这是迄今为止建立的关于 a_2、v_3、a_4 和行列式的估计所导出的结果。

$$\begin{aligned}
&\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)} \\
&\leq \frac{7a_2^2(K)}{4v_3(K)} && (\because (3.2), (3.5)) \\
&\leq 7a_2(K) && (\because \text{Lemma } 3.9) \\
&\leq \frac{7}{8}c(D)^2 && (\because \text{命题 } 3.2) \\
&\leq \frac{(1-d)\gamma^{(\overline{tw}(D)-7)/4}}{tw(D)}c(D)^2 && (\because \text{假设}) \\
&\leq \frac{1}{2}\det(K) && (\because \text{命题 } 4.6) \\
&\leq \frac{1}{2}\det(K) + 3g(K) - \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

因此，由定理 2.1 (ii) 可知，K 不允许进行手性美容手术。 □

为便于后续使用，我们将命题 5.2 改写为关于 $c(R)$ 的条件。

推论 5.3. 设 D 是一个约化、扭转约化的特殊交替图，且 R 是其最大扭转区域。若 $c(R) \leq (tw(D)-1)\left(1 - \frac{7tw(D}{8}\gamma^{(7-tw(D))/4}\right)$，则 K 不允许进行~~手性美~~容手术。

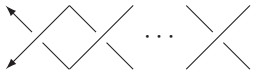
证明. 由于 $c(R) + (tw(D) - 1) \leq c(D) = \frac{c(R)d(D)}{}$，我们有 $tw(D) - 1 \leq c(R)\frac{1-d(D)}{d\ D}()$。因此，根据假设

$$d(D) < \frac{d(D)}{1-d(D)}\frac{c(R)}{tw(D)-1} \leq 1 - \frac{7tw(D)}{8}\gamma^{(7-tw(D))/4}$$

所以 K 不允许进行手性美容手术。 □

为了研究密度 $d(D)$ 接近 1 的剩余情形，我们需要对 $a_2(K)$ 和 $v_3(K)$ 作出更精细的估计。为此，我们区分两种扭转区域。我们称满足 $c(R) > 1$ 的扭转区域 R 为不相干的，如果有两个

R 的股线方向相反，如  否则，当

R 的两股线方向相同，如  we 称扭转区域 R 是相干的。

引理 5.4. 设 D 是一个正交替图，并令 $c = c(D)$ 和 $d = d(D)$。假设最大扭转区域 R 是相干的。如果

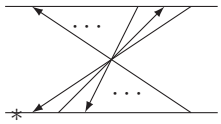
$$\frac{(c(R)-1)(c(R)^2 - 2c(R))}{24c(R)^3} \geq X$$

对于某个 $X > 0$，那么

$$\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)} \leq \frac{7c(D)}{64Xd(D)^3}$$

证明。在下文中，我们用 c'_R 表示满足 $c'_R \leq c(R)$ 的最大奇数（因此 $c(R)-1 \leq c'_R \leq c(R)$）。

我们在最大扭转区域附近取一个基点 $*$ R。当最大扭转区域 R 相干时，在高斯图 G_D中，来自 R 的箭头构成如下形式的子高斯图



特别地， G_D 包含一个子高斯图$G_{T_{2,\ c'_R}}$ 其中 $T_{2,\ c'_R}$ 是 $(2, c'_R)$ 环面纽结的标准c'_R交叉图。因此由假设

$$\begin{aligned} 4v_3(K) \geq v_3(T_{2,c'_R}) &= \frac{c'_R({c'_R}^2-1)}{24} \\ &\geq \frac{(c(R)-1)(c(R)^2-2c(R))}{24} && (\because c'_R \geq c(R)-1) \\ &\geq Xc(R)^3 && (\because \text{Assumption}) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{7a_2(K)^2-a_2(K)-10a_4(K)}{4v_3(K)} &\leq \frac{7a_2(K)^2}{4v_3(K)} && (\because (3.2),(3.5)) \\ &\leq \frac{7c(D)^4}{64Xc(R)^3} && (\because \text{Proposition 3.2}) \\ &= \frac{7c(D)}{64Xd(D)^3} && (\because c(R)=c(D)d(D)) \end{aligned}$$

□

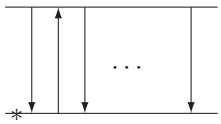
引理 5.5. 设 D 是结 K 的正交替图，并令 $c=c(D)$ 和 $d=d(D)$。假设最大扭转区域 R 不相干，且

$$\frac{16c(R)}{(c(R)-2)(c(R)-4)} \leq Y$$

对某个 $Y>0$成立。则

$$\frac{7a_2(K)^2-a_2(K)-10a_4(K)}{4v_3(K)} \leq \frac{7+Y}{2}(1-d(D))^2c(D)^2$$

证明。我们在最大扭转区域 R附近取一个基点 $*$。当最大扭转区域 R 相干时，在高斯图 G_D中，来自 R的箭头形成平行弧，如



因此，来自 R 的两个或三个箭头所构成的 G_D 的子高斯图不会对 $a_2(K)$ 或 $v_3(K)$ 作出贡献。

对于表示一个结的正交替图 D，相对于扭转区域 R 的基图 D_{base} 是具有以下性质的纽结图;

(i) D_{base} 与 D 相同，除了扭转区域 R之外。(ii) D_{base} 是扭转约化的，并表示一个结。(iii) 扭转区域 R 中的交叉点数量，在所有满足(i)和(ii)的图中最少。

粗略地说， D_{base} 是通过尽可能移除扭转区域 R 中的交叉点而从 D 得到的纽结图，同时保持扭转约化性。特别地，D_{base} 也是一个正交替图。令 K_{base} 为由 D_{base}表示的结。

令 ℓ 为与来自 R的箭头相交的左箭头数量。由于 D是约化且为正的， $\ell > 0$。

首先注意，由于来自扭转区域的所有箭头都彼此平行，在高斯图公式(3.4)中，来自扭转区域内两个箭头的子高斯图没有贡献。

构成高斯图的左箭头数量  一起

与来自扭转区域 R 中交叉点的一个右箭头组合为 ℓ，我们得到

$$a_2(K) \le a_2(K_{base}) + \ell\frac{c(R)}{2} \tag{5.1}$$

类似地，通过计算子高斯图的数量  在高斯图示公式中， $4v_3$ 使得两个平行右箭头  来自扭转区域中不属于 D_{base} 的交叉点 R （至多有一个这样的交叉点），我们得到

$$4v_3(K) \ge v_3(K_{base}) + \ell\binom{c(R)/2-1}{2} \tag{5.2}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)} \\
&\le \frac{7a_2(K)^2}{4v_3(K)} && (\because (3.2), (3.5)) \\
&\le 7\frac{(a_2(K_{base}) \text{ v}_3(R)/2)^2}{4v_3(K)} && (\because (5.1)) \\
&= 7\left(\frac{a_2(K_{base})^2}{4v_3(K)} + \frac{a_2(K)\ell c(R) + c(R)^2/4}{4v_3(K)}\right) \\
&\le 7\left(\frac{a_2(K_{base})^2}{4v_3(K_{base})} + \frac{a_2(K_{base})\ell c(R) + c(R)^2/4}{\ell\binom{c(R)/2-1}{2}}\right) && (\because (5.2)) \\
&\le 7\left(a_2(K_{base}) + a_2(K_{base})\frac{8c(R)}{(c(R)-2)(c(R)-4)} + \frac{c(R)}{\ell(c(R)-2)}\right) && (\because \text{Proposition 3.2})
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&a_2(K_{base})\frac{8c(R)}{(c(R)-2)(c(R)-4)}+\frac{c(R)}{\ell(c(R)-2)}=a_2(K)\frac{c(R)}{(c(R)-2)}\left(\frac{8}{c(R)-4}+\frac{1}{\ell a_2(K)}\right)\\
&\quad\le a_2(K_{base})\frac{c(R)}{(c(R)-2)}\left(\frac{8}{c(R)-4}+\frac{4}{c(R)}\right)\\
&\quad\le a_2(K_{base})\frac{16c(R)}{(c(R)-2)(c(R)-4)}\\
&\quad\le Ya_2(K_{base})
\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{7a_2(K)^2-a_2(K)-10a_4(K)}{4v_3(K)}\le(7+Y)a_2(K_{base})\\
&\quad\le\frac{7+Y}{8}c(D_{base})^2 && (\because \text{Proposition 3.2})\\
&\quad\le\frac{7+Y}{8}\big((1-d(D))c(D)+3\big)^2 && (\because c(D_{base})\le c(D)-c(R)+3)\\
&\quad\le\frac{7+Y}{4}(1-d(D)^2)c(D)^2
\end{aligned}$$

这里最后一个不等式由.....推出

$$3\le(\sqrt{2}-1)8\le(\sqrt{2}-1)(tw(D)-1)\le(\sqrt{2}-1)(1-d(D))c(D)$$

因为我们假设 $tw(D)\ \{v_3\}$。 □

这些估计完成了主定理的证明。

定理 1.1 的证明。设 D 是 K 的一个约化、扭转约化的正交替图，使得 $\{v_3\}(D)=\overline{tw}(D)=tw(K)$。

令 R 为最大扭转区域。根据命题 5.2 和推论 5.3，我们可以假设

$$1-d(D)<\frac{7tw(D)}{8}\gamma^{(3-tw(D))/4} \tag{5.3}$$

并且

$$c(R)>(tw(D)-1)\left(1-\frac{7tw(D)}{8}\gamma^{(7-tw(D))/4}\right) \tag{5.4}$$

由于我们假设 $tw(D)>63$，由 (5.3) 和 (5.4) 可得 $d(D)>\frac{9}{16}$, $c(R)>31$。因此，$X>\frac{1}{28}$ 以及 $Y<\frac{1}{4}$。于是，在假设 $tw(D)>63$成立的条件下，以下两个不等式成立。

$$\frac{7X}{64}\left(1-\frac{7tw(D)}{8}\gamma^{(3-tw(D))/4}\right)^{-3}\le\frac{(tw(D)-1)\gamma^{(\overline{tw}(D)-7)/4}}{tw(D)}. \tag{5.5}$$

$$\frac{7+Y}{4}\frac{7tw(D)}{8}\gamma^{(3-tw(D))/4}\le\frac{\gamma^{(\overline{tw}(D)-7)/4}}{tw(D)}. \tag{5.6}$$

如果 R 是相干的

$$\begin{aligned}
\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)} &\leq \frac{7Xc(D)}{64d(D)^3} && (\because \text{Lemma 5.4}) \\
&\leq \frac{7X}{64}\left(1 - \frac{7tw(D)}{8}\gamma^{(3-tw(D))/4}\right)^{-3} c(D) && (\because (5.3)) \\
&\leq \frac{(tw(D)-1)\gamma^{(\overline{tw}(D)-7)/4}}{tw(D)} c(D) && (\because (5.5)) \\
&\leq \frac{(1-d(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-7)/4}}{tw(D)} c(D)^2 && (\because \text{Lemma 4.5}) \\
&< \frac{1}{2}\det(K) + 3g(K) - \frac{5}{2} && (\because \text{Proposition 4.6})
\end{aligned}$$

类似地，当 R 不相干时

$$\begin{aligned}
&\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)} \\
&\leq \frac{7+Y}{4}(1-d(D))^2 c(D)^2 && (\because \text{Lemma 5.5}) \\
&\leq \frac{7+Y}{4}(1-d(D))\frac{7tw(D)}{8}\gamma^{(3-tw(D))/4} c(D)^2 && (\because (5.3)) \\
&\leq \frac{(1-d(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-7)/4}}{tw(D)} c(D)^2 && (\because (5.6)) \\
&< \frac{1}{2}\det(K) + 3g(K) - \frac{5}{2} && (\because \text{Proposition 4.6})
\end{aligned}$$

因此，根据定理 2.1 (ii)，K 不允许进行手性美容手术。 □

6. Alternating knots

6.1. 结不变量论证。在许多地方，我们的论证都用到了图 D 是正的这一点。尽管如此，如果增加额外假设，我们仍可运用类似论证，排除许多交替结的手性美容手术。

作为示例，我们注意到，当交叉数相对于扭转数并不大（因此密度较低），且 $v_3(K) \neq 0$ 时，K没有保向手性等价手术。

命题 6.1. 设 D 是结 K 的一个约化、扭转约化交替图，满足 $4v_3(K) \neq 0$。若 $c(D)^4 \leq 3\gamma^{tw(D)-1}$，则 K 不存在手性美容手术。

证明。由于 $4v_3(K) \neq 0$, $|4v_3(K)| \geq 1$，因此

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)}\right| \\
&\quad \leq |7a_2^2(K)| + |a_2(K)| + |10a_4(K)| \\
&\quad \leq 8|a_2(K)|^2 + 10|a_4(K)| \\
&\quad \leq \frac{1}{8}c(D)^4 + \frac{10}{48}c(D)^4 - 10\binom{\frac{c(D)}{2}}{4} \qquad (\because \text{ Proposition 3.2}) \\
&\quad < \frac{1}{3}c(D)^4 - \frac{c(D)}{2} \\
&\quad \leq \gamma^{tw(D)-1} - \frac{c(D)}{2} \qquad (\because \text{Assumption})
\end{aligned}$$

另一方面，由于 $|\sigma(K)| \leq 2g_4(K) \leq 2g_3(K) \leq c(D) - 1$，根据定理 4.3

$$\frac{1}{2}\left(\det(K) - |\sigma(K)| - 1\right) > \gamma^{tw(D)-1} - \frac{c(D)}{2}.$$

因此，根据定理 2.1 (i)， K 不允许进行保向手性等价手术。 □

正如证明中所清楚显示的，对于一般的交错情形， $\left|\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)}\right|$ 的阶可能为 $c(D)^4$。因此，我们在定理 4.3 中对 $\det(K)$ 的估计并不充分。不过，我们指出，如果密度较大（接近 1），且最大扭转区域 R 相干，那么我们就能得到一个类似于引理 5.4 的估计。

引理 6.2。设 D 为一个交替图。假设最大扭转区域 R 相干， $c(R) > 5$，且 $-2(1-d(D))^3 + d(D)^3 > 0$。那么 $v_3(K) \neq 0$，并且

$$\left|\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)}\right| < \frac{64}{-2(1-d(D))^3 + d(D)^3}c(D)$$

证明。必要时，通过取镜像，我们可以假设最大扭转区域由正交叉组成。令 D_{base} 为引理 5.5 的证明中所取的基图。接着，仿照引理 5.4 的论证，通过计算由 D_{base} 中的箭头以及相干扭转区域 R 中的箭头所构成的子高斯图，我们得到

$$\begin{aligned}
4v_3(K) &\geq 4v_3(K_{base}) + v_3(T_{2,c'_R}) \\
&\geq 4v_3(K_{base}) + \frac{(c(R)-1)(c(R)^2 - 2c(R))}{24} \\
&> 4v_3(K_{base}) + \frac{c(R)^3}{48} \qquad (\because c(R) > 5)^3 \\
&\geq -\frac{c(D_{base})^3}{24} + \frac{c(R)^3}{48} \qquad (\because \text{ Proposition 3.10}) \\
&\geq \frac{-2(1-d(D))^3 + d(D)^3}{48}c(D)^3 \ (> 0)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)}\right| &\leq \frac{1}{4v_3(K)}\left(|7a_2^2(K)| + |a_2(K)| + |10a_4(K)|\right)\\ &\leq \frac{1}{4v_3(K)}\left(8|a_2(K)|^2 + 10|a_4(K)|\right)\\ &< \frac{1}{4v_3(K)}\left(\frac{1}{3}c(D)^4\right)\\ &\leq \frac{64}{-2(1-d(D))^3 + d(D)^3}c(D)\end{aligned}$$

□

用此估计代替引理 5.4，类似的论证表明，当 $tw(D)$ 和 $d(D)$ 都足够大时，K 不存在手性美容手术。这里给出一个具体的充分条件。

推论 6.3. 设 D 是交替结 K 的一个约化、扭转约化图。若 D 的最大扭转区域 R 相干，$4v_3(K) \neq 0$，$tw(D) > 19$，且 $d(K) > \frac{2}{3}$，则 K 不存在手性美容手术。

证明. 根据定理 4.3，当 $tw(K) > 19$ 时，

$$\det(L) > 2\gamma^{-1}\left(\gamma^{\overline{tw}(D)} + (c(D) - \overline{tw}(D))\gamma^{(\overline{tw}(D)-1)/2}\right) > 2c(D)\gamma^{(\overline{tw}(D)-3)/2}.$$

Thus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\det(K) - |\sigma(K)| - 1\right) &> \frac{1}{2}\det(K) - \frac{1}{2}c(D)\\ &> \left(\gamma^{(tw(D)-3)/2} - \frac{1}{2}\right)c(D)\\ &> \left(\gamma^8 - \frac{1}{2}\right)c(D) > \frac{128}{9}c(D) \qquad (\because tw(D) > 19)\\ &> \frac{64}{-2(1-d(D))^3 + d(D)^3}c(D) \qquad (\because d(D) > \frac{2}{3})\\ &> \left|\frac{7a_2(K)^2 - a_2(K) - 10a_4(K)}{4v_3(K)}\right| \qquad (\because \text{Lemma 5.4})\end{aligned}$$

因此，根据定理 2.1 (i)，K 不允许进行手性美容手术。 □

6.2. 讨论及与双曲几何论证的比较。本文最后简要讨论并比较一种基于双曲几何的替代方法。

对于 K双曲结的斜率 s，令 $L(s)$ 表示由$L(s) = {}^{\ell_{(s)}}\sqrt{\text{Area}(\partial C)}$定义的归一化长度，其中 ∂C 是一个尖点环面，而 $\ell(s)$ 是 s的欧几里得长度。令 $\text{Sys}(E(K))$ 表示结补空间 $E(K)$ 的最短长度，即最短闭测地线的长度。

在 [BHW] 中指出，瑟斯顿的双曲德恩手术定理和莫斯托刚性意味着，对非镜像对称双曲结进行 s 和 s' 手术

[3]这里我们使用了相当粗略的估计。通过采用比引理 5.4 中稍微仔细一些的估计，可以改进该估计。

K 只要斜率 s 和 s' 的长度足够大，就不可能是保向手性等价的。在 [FPS] 中，他们证明了这一判据的以下有效版本。

定理 6.4. [FPS，定理 7.30] 设 K 是一个双曲结，且 s、s' 是不同的斜率。若

$$L(s), L(s') \geq \max\left\{10.1, \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{Sys}(E(K))} + 58}\right\},$$

则 s 和 s' 手术不是手性美容手术，除非 $s = -s'$ 和 K 是反手征的。

此外，他们给出了一个明确且可计算的手性美容手术有限候选集，使我们能够检验给定的双曲结是否存在手性美容手术（详情参见 [FPS，定理 1.13]）。

另一方面，对于双曲交替结，尖点面积有扭转数下界。

定理 6.5. [LP，定理 1.1] 对于除 $(2, p)$ 环面纽结之外的素交替结 K，$E(K)$ 的最大尖点 C 的面积满足

$$\mathrm{Area}(\partial C) > A(tw(K) - 2)$$

其中 A 是某个常数，$A > 2.278 \times 10^{-19}$。

由于对于每个非经向斜率 s，$\mathrm{Area}(\partial C) \leq 3\ell(s)$（见 [LP]），该定理给出了以扭转数表示的归一化长度下界

$$L(s) = \frac{\ell(s)}{\sqrt{\mathrm{Area}(\partial C)}} > \frac{\sqrt{\mathrm{Area}(\partial C)}}{3} > \frac{\sqrt{A(tw(K) - 2)}}{3}$$

因此，定理 6.4 和定理 6.5 表明，只要 $tw(K)$ 足够大且 $\mathrm{Sys}(E(K))$ 不太小，非可镜像交替结就没有手性美容手术。

推论 6.6。设 K 是一个素交替结 K。若 $tw(K) > 4 \times 10^{21}$ 且 $\mathrm{Sys}(E(K)) > 0.15$，则除非 K 是可镜像的，K 没有手性美容手术。

与定理 1.1 相比，所要求的扭转数非常大，这是由于定理 6.5 中常数 A 很小。加入额外假设后，可以改进常数 A。例如，若假设每个扭转区域最多有 N 个交叉点，则常数 A 可取为 $\frac{1.844\times10^{-4}}{3N-1}$[LP，定理 2.9]。类似地，若进一步假设 K 是一个二桥结，则常数 A 可取为 $\frac{8\sqrt{3}}{147} = 9.426 \times 10^{-2}$ [FKP，定理 4.8]。因此，对于双曲二桥结的情形，在较弱条件 $tw(K) > 9800$（且 $\mathrm{Sys}(E(K)) > 0.15$）下，推论 6.6 仍然成立。

我们强调，关于短周期的假设至关重要，因为即使我们假设 $tw(K)$很大，$\mathrm{Sys}(E(K))$也可能任意小——交叉圆（即包围扭转区域两股线的圆）R 的长度会随着交叉数 $c(R)$的增加而趋近于零。

这与推论 6.3 形成鲜明对比。推论 6.3 讨论的是交叉点集中在单个交叉区域的情形（因此短周期可以任意小），不过我们需要若干额外假设。因此，双曲几何方法与我们的纽结不变量约束方法在特点和适用范围上截然不同。

遗憾的是，这两种方法都需要额外假设，因此，要将定理 1.1 推广到一般交替结，需要更有效的新约束，或者对现有论证和估计进行大幅改进。

References

[BHW] S. Bleiler、C. Hodgson 和 J. Weeks， *Cosmetic surgery on knots*，载于《Kirbyfest 论文集》（伯克利，加利福尼亚州，1998），23–34，Geom. Topol. Monogr., 2，Geom. Topol. Publ., Coventry。[CKR] *Polyak-Viro formulas for coefficients of the Conway* S. *polynomial.* 18 2009 6, 773 783 Chmutov、M. Khoury 和 A. Rossi，J. Knot Theory Ramifications（），第 – 期。[CP] S. Chmutov 和 M. Polyak， *Elementary combinatorics of the HOMFLYPT polynomial.* Int. Math. Res. Not. IMRN 2010，第 3 期，480–495。[FKP] *Cusp areas of Farey manifolds and applications* D. Futer、*to knot theory.* 2010, 23, 4434 4497 E. Kalfagianni 和 J. Purcell，Int. Math. Res. Not. IMRN 第 – 期。[FPS] D. Futer、J. Purcell 和 S. Schleimer， *Effective bilipschitz bounds on drilling and filling*，Geom. Topol. 26（2022），第 3 期，1077–1188。[GPV] *Finite-type invariants of classical and virtual* M. *knots.* 39 2000 5, 1045 1068 Goussarov、M. Polyak 和 O. Viro，Topology（），第 – 期。[IIS1] K. Ichihara、T. Ito 和 T. Saito， *Chirally cosmetic surgeries and Casson invariants.* Tokyo J. Math, 44（2021），第 1 期，1–24。[IIS 2] *On constraints for knots to admit chirally cosmetic surg-* K. *eries and their calculations.* Ichihara、T. Ito 和 T. Saito，Pacific J. Math. 即将出版[IJ] K. Ichihara 和 I. D. Jong， *Cosmetic banding on knots and links*，Osaka J. Math. 55（2018），第 4 期，731–745。[It1] T. Ito， *On LMO invariant constraints for cosmetic surgery and other surgery problems for knots in* S^3 28 2020 349 ，

Comm. Anal. Geom.（），第 2 期，321–。[It2] T. Ito， *A note on chirally cosmetic surgery on cable knots.* Canad. Math. Bull. 64（2021），第 1 期，163–173。[IS]T. Ito 和 A. Stoimenow， *Invariants of weakly successively almost positive links.* arXiv:2208.10728。[LP] M. Lackenby 和 J. Purcell， *Cusp volumes of alternating knots.* Geom. Topol. 20（2016），第 4 期，2053–2078。[Oh] T. Ohtsuki， *Problems on invariants of knots and 3-manifolds.* J. Roberts 作序。Geom. Topol. Monogr., 4，《纽结与三维流形的不变量》（京都，2001），i-iv，377–572，Geom. Topol. Publ., Coventry，2002。[OS1] P. S. Ozsv´ath 和 Z. Szab´o，关于结 Floer 同调与透镜空间手术。Topology 44（2005），第 6 期，1281–1300。[OS2] P. S. Ozsv´ath 和 Z. Szab´o， *Knot Floer homology and rational surgeries.* Algebr. Geo m. Topol. 11（2011），第 1 期，1–68。[PV] M. Polyak 和 O. Viro， *On the Casson knot invariant*，《希腊的纽结 '98》，第 3 卷（德尔斐）。J. Knot Theory Ramifications 10（2001），第 5 期，711–738。[Ro] Y. Rong， *Some knots not determined by their complements.* 载于：《量子拓扑》，Ser. Knots Everything, 3，World Sci. Publ., River Edge, NJ，1993，第 339–353 页。[St1] A. Stoimenow， *Positive knots，closed braids and the Jones polynomial.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 2（2003），第 2 期，237–285。[St2] A. Stoimenow， *Graphs，determinants of knots and hyperbolic volume.* Pacific J. Math. 232（2007），第 2 期，423–451。[Va1] K. Varvarezos， *Alternating odd pretzel knots and chirally cosmetic surgeries*，J. Knot Theory Ramifications 31（2022），第 6 期，论文编号 2250045，共 20 页。[Va2] K. Varvarezos， *Heegaard Floer homology and chirally cosmetic surgeries*，arXiv:2112.03144v1。[Wi] 11 2002 2, S. 289 296 Willerton， *On the first two Vassiliev invariants.* Experiment. Math.（），第 – 期。

Department of Mathematics, Kyoto University,v3, JAPAN*Email address*: tetitoh@math.kyoto-u.ac.jp