arXiv:2301.09867v1 [math.CO] 24 Jan 2023

受限最优卵石化是 NP-困难的

L´aszl´o F. Papp*

2023年1月25日

摘要

考虑图上的卵石分布。一次卵石移动是从一个顶点移除两颗卵石，并在一个相邻顶点放置一颗卵石。若应用一系列卵石移动后某个顶点上有一颗卵石，则该顶点在此卵石分布下可达。若每个顶点在此卵石分布下都可达，则该卵石分布是可解的。卵石分布的大小是卵石总数。最优卵石数 $\pi^*(G)$ 是最小可解分布的大小。 t-受限卵石分布在每个顶点上至多放置 t 颗卵石。 t-受限最优卵石数$\pi_t^*(G)$ 是最小的可解 t-受限卵石分布的大小。我们证明，判定 $\pi_2^*(G) \leq k$ 是否为 NP完全是 NP完全问题。我们证明，若 $\delta(G) \geq {}^{2|V_{(G\,|}}{}_{_\,1)}$，则 $\pi_t^*(G) = \pi^*(G)$；并且我们展示了无穷多个满足 $\delta(H) \approx \frac{1}{2}|V(H)|$，但 $\pi_t^*(H) \neq \pi^*(H)$ 的图，其中 δ表示最小度。

1 引言

图卵石化是一种图上的游戏，由 Saks 和 Lagarias 提出，旨在回答 Erd˝os 和 Lemke 的一个数论问题；Chung 在 1989[4] 中成功解决了该问题。本文中的每个图都是简单图。我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集。图 G 上的卵石分布 D 是一个将顶点集映射到非负整数的函数。我们可以设想每个顶点 v 上有 $D(v)$ 个卵石。一次卵石移动是指从一个顶点 v （其上至少有两个卵石）移走两个卵石，并将其中一个放到一个相邻顶点 u上。我们将此移动记作 $(v \to u)$。

若 σ 是一个卵石移动序列，则令 $D\sigma$ 表示将 σ 应用于分布 D后得到的分布。若对 D 的任意 τ 前缀， σ $D\tau$ 都是一个卵石分布，则称卵石移动序列在 D 下可执行。换言之， σ 绝不会从一个卵石数不足两个的顶点上移走两个卵石。若存在一个可执行的卵石移动序列 σ，使得 $D\sigma(v) \geq k$，则称顶点 v 在分布 D 下是 k-可达的。当 $k = 1$ 时，我们用“可达”代替“1-可达”。若图中的每个顶点在分布D下都可达，则称分布 D 是可解的。

令 $|D|$ 表示 D在图上放置的卵石总数，因此$|D| = \sum_{v\in V(G)} D(v)$。我们称这个量为 D的大小。若图 G 上的卵石分布 D 可解，且其大小尽可能小，则称其为最优分布。这个大小称为最优卵石数，记作 $\pi^*(G)$。

若干图族的最优卵石数已为人所知。例如，路径和圈 [6] [13], 梯子图 [1], 毛毛虫树 [7]、 m元树 [8] 以及一些阶梯图 [9]的精确值均已给出。直径小于四的图，其最优卵石数也可由一些易于检验的支配条件刻画 [12]。然而，确定给定图的最优卵石数是 NP-困难的 [10]。

*计算机科学与 信息论系，布达佩斯技术与经济大学，匈牙利，lazsa@cs.bme .hu.

在 [2], Chelalli 等人提出了一种新的卵石问题版本。在这种设定下，若卵石分布中没有任何顶点拥有超过 t 个卵石，则称该分布为t受限的。 t受限最优卵石数记作π_t^*，是包含最少卵石数的可解 t受限分布的大小。显然， $\pi_2^*(G) \geq \pi_t^*(G) \geq \pi_{t+1}^*(G) \geq \pi^*(G)$。

集合 S 是图 G 的一个支配集，当且仅当 $S \subseteq V(G)$，并且 G 的每个顶点都属于 S 或与 S中的某个元素相邻。图 G 的支配数 $\gamma(G)$是 G的最小支配集的大小。函数 $f\colon V(G) \to \{0,1,2\}$ 称为罗马支配函数，若对于满足 $f(v) = 0$的每个 $v \in V(G)$，都存在一个与 v相邻的顶点 u，且 $f(u) = 2$。罗马支配函数的权重为 $\sum_{v \in V(G)} f(v)$。罗马支配数 $\gamma_R(G)$是罗马支配函数的最小权重。

Chelalli 等人利用 2-限制最优卵石问题数证明了这些支配参数的若干界。他们证明了 $\pi_2^*(G) \leq \gamma_R(G)$ [2]。这些支配参数得到了深入研究，并备受关注。计算罗马支配数是一项困难的任务。更具体地说，罗马支配数的判定版本是 NP完全 [5]

最近，Shiue 等人在 [3] 中定义了一种新的卵石问题，称为 (d,t)-卵石问题。在这一新模型中，如果经过一系列卵石移动后，每个顶点 v 都能获得 t 个卵石，且这些移动仅从与 v 距离不超过 d 的顶点移走卵石，那么卵石分布 D 就称为 (d,t)-可解。 G 的最优 (d,t)-卵石数 $\pi_{(d,t)}^*(G)$，是 G 的 (d,t)-可解分布的最小规模。Shiue 证明了 $\gamma_R(G) = \pi_{(1,1)}^*(G)$ [14], ，因此罗马支配数是这一广义卵石参数的一个特例。在 $(1,1)$-可解分布中，没有顶点拥有超过 2 个卵石，因为一个顶点上的 2 个卵石足以到达相邻顶点，而在这种设定下，我们无法将卵石移动得更远。总而言之， $\pi^*(G) \leq \pi_2^*(G) \leq \pi_{(1,1)}^* = \gamma_R(G)$。

因此， t-限制最优卵石数介于两个图参数之间，而计算这些参数是 NP-困难问题。有人可能会问：2-限制最优卵石数的计算复杂性如何?

在第2节中，我们证明，对于任意 $t \geq 2$，判定 t-限制最优卵石数是否至多为 k 是 NP完全的。注意， $t = 1$ 情形是平凡的，因为对于所有图， $\pi_1^*(G) = |V(G)|$ 。我们证明 $\pi^*(G) = \pi^*(G \cdot K_m) = \pi_t^*(G \cdot K_m)$，其中 $\cdot$ 表示字典序图积。我们利用这一结果，将最优卵石化归约到 t-限制最优卵石化。

[2] 的作者提出了以下有趣的问题：哪些图的 2-限制最优卵石数与最优卵石数相同？我们还可以问，什么样的性质会导致这两个参数相等？在第3节中，我们探讨最小度在这一问题中的作用，并给出一些部分结果。

我们证明，若 $\delta(G) \geq {}^{2|V(G|}__1$, 其中 $\delta(G)$ 表示 G 的最小度，则$\pi_2^*(G) = \pi^*(G)$。对于任意满足 $n \equiv 1 \mod 4$ 且满足 $n \geq 9$ 的 ${}^3n$ ，我们给出一个 n 阶图 H ，使得 $\delta(H) = {}^{|V(H)_2|-3}$ ，但 $\pi_2^*(H) \neq \pi^*(H)$。

2 受限最优卵石化数的复杂性

引理 2.1 设 G 是一个阶至少为 2 的连通图。 G 存在一个最优分布 D，使得对于每个在 D 下不可 2-可达的顶点 v ，都有 $D(v) = 0$。

Proof: 如果一个顶点不可 2-可达，但它上面有卵石，那么它恰好有一个卵石。设D 为图 G 上的一个最优分布，令 $S(D)$ 为在 D 下不可 2-可达且各自有一个卵石的顶点集合。

考虑一个顶点 $v \in S(D)$。由于该图是连通的，因此它有一个邻点 u。无需使用放在 v 处的石子，该顶点也能接收一颗石子。若移走放在 v 处的石子并将其放在 u 处，那么在所得分布 u 下， v 是 2-可达的，因此 D 是可达的。根据 k，这颗移位后的石子无法移动，因此若某个顶点在 D 下是 k-可达的，那么它在所得分布 D' 下也同样是 D' -可达的。因此， S 是最优的，且 $D'(\subseteq S)D(v)$。由于 S 不在 $D'()$ 中

我们有 $|S(D')| < |S(D)|$。若重复此过程，最终会得到一个分布 D^*，使得 $S(D^*) = \emptyset$。□

$G \cdot H$ 表示图 G 与 H的字典积，这是众所周知的。其定义如下： $V(G \cdot H) = V(G) \times V(H)$，且 (g_1, h_1) 与 (g_2, h_2) 相邻，当且仅当 $\{g_1, g_2\} \in E(G)$，或者$g_1 = g_2$ 且 $\{h_1, h_2\} \in E(H)$。

为证明我们的第一个定理，我们将采用一种称为塌缩的技巧。该技巧由 [1]提出，并已用于多篇卵石问题论文中。

设 G 和 H 是简单图。若存在一个满射ϕ： $V(G) \to V(H)$，使得 $\{h_1, h_2\} \in E(H)$ 当且仅当 $h_1 = \phi(g_1)$，且对于某个$\{g_1, g_2\} \in E(G)$有 $h_2 = \phi(g_2)$，则称图 H 是 G 的商图。我们称 ϕ 塌缩 G 到 H；若 D 是 G上的一个卵石分布，则 H 上的塌缩分布 $\phi(D)$定义为 $\phi(D)(h) = \sum_{g \in V(G) | \phi(g) = h} D(g)$。

引理 2.2（塌缩 [1]）若 H 是 G 的商图，则 $\pi^*(G) \geq \pi^*(H)$。

已知任意连通的 n阶图的最优卵石数至多为 $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ [1]。有趣的是，2-限制最优卵石数 [15]也满足相同的上界。现在我们已准备好陈述并证明第一个定理。

定理 2.3 若 G是一个连通的 n 阶图， $m \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ 且 $t \geq 2$，则：

$$\pi^*(G) = \pi^*(G \cdot K_m) = \pi_t^*(G \cdot K_m).$$

Proof: 令 D 为 G 的一个最优卵石分布，并满足：若某个顶点上有一颗卵石，则该顶点在 D下是 2-可达的。引理 2.1 保证这样的卵石分布存在。

由于 $|D| \leq \lceil \frac{2n}{3} \rceil$ 且 $m \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$，我们有 $|D| \leq 2m$。 $D(g) = 2m$ 意味着所有卵石都放置在 g。假设情况并非如此，那么对每个 g $D(g) < 2m$。

将 K_m 的顶点记为 $(0, 1, 2, \ldots, m-1)$。令 Q 为 $G \cdot K_m$ 上如下的卵石分布：

$$Q((g,i)) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0 \text{ and } D(g) \text{ is odd} \\ 2 & \text{if } 1 \leq i \leq \frac{D(g)}{2} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于每个 g，都有 $\sum_{l=0}^{m-1} Q((g,l)) = D(g)$。因此 $|D| = |Q|$。现在我们证明 Q 是 $G \cdot K_m$ 上的一个可解分布。为此，我们证明任意顶点 (g^*, j) 在 Q 下都是可达的。

若 $D(g^*) \geq 2$，则 $Q((g^*, 1)) = 2$，因此 (g^*, j) 在 Q 下可达。

当 $D(g^*) = 1$ 时，我们可以利用 g^* 在 D 下是 2-可达这一事实。因此，在 $D(g^*) \leq 1$ 的情形下，存在一个可执行的卵石移动序列 σ，其最后一步将一个卵石放置在 g^* 上。我们可以假设 σ 不包含不必要的步骤，因此它不会从 g^* 移除卵石，并且恰好将一个卵石移动到 g^*。

我们构造 τ，它是在图 $G \cdot K_m$ 上的一条卵石移动可执行序列，且其最后一次移动在 (g^*, j) 处放置一个卵石。 σ 和 τ 的长度相同。如果 $g' \neq g^*, \sigma_i = (g \to g')$，并且这次卵石移动在 σ 的前 i 个元素中恰好出现 k 次，那么令

$$\tau_i = \begin{cases} ((g,k) \to (g',0)) \text{ if } k \leq \frac{D(g)}{2} \\ ((g,0) \to (g',0)) \text{ otherwise.} \end{cases}$$

最后，如果 σ 的最后一步是 $\sigma_i = (g \to g^*)$，那么令

$$\tau_i = \begin{cases} ((g,k) \to (g^*, j)) \text{ if } k \le \frac{D(g)}{2} \\ ((g,0) \to (g^*, j)) \text{ otherwise.} \end{cases}$$

τ 按以下方式模拟 σ：它收集在 $(g, 0)$ 处收到的卵石。如果 σ 执行了一个 $(g \to g')$ 操作，那么 τ 最初会从顶点 (g, k) 移除卵石，$k \ge 1$ 中 g 的卵石曾分布于这些顶点上。所有这些卵石用完后，τ 会使用收集到 $(g, 0)$ 的卵石。

对于任意 l，很容易看出 $D\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_l(g) = \sum_{i=0}^{m-1} Q\tau_1\tau_2 \dots \tau_l((g,i))$。这些保证了$\tau$ 永远不会想要从卵石数不足两个的顶点移除卵石，因此它是可执行的。

如果 $|D| = D(g) = 2m$，那么令 Q' 为 $G \cdot K_m$ 上的分布，它在 (g, i) 的每个顶点上放置 2 个卵石，并且在其余顶点上不放置任何卵石。用与前一种情况相同的推理，很容易证明 Q' 是 $G \cdot K_m$ 和 $|Q'| = |D|$的可解 2-受限分布。

因此，在这两种情况下，我们都证明了 $G \cdot K_m$ 上存在可解的 2-受限分布，且这些分布的大小为 $|D|$。因此 $\pi^*(G) \ge \pi_2^*(G \cdot K_m)$。我们知道 $\pi_2^*(G \cdot K_m) \ge \pi_t^*(G \cdot K_m) \ge \pi^*(G \cdot K_m)$。$G$ 是 $G \cdot K_m$ 的商图，因为 $\phi((g,i)) = g$ 是一个真满射。因此，由引理 2.2 可得 $\pi^*(G \cdot K_m) \ge \pi^*(G)$。

综合以上结果可得，$\pi^*(G) \ge \pi_2^*(G \cdot K_m) \ge \pi_t^*(G \cdot K_m) \ge \pi^*(G \cdot K_m) \ge \pi^*(G)$。由于最左端和最右端的量相同，因此所有这些量都相等。□

我们考虑以下两个判定问题：

OPN：给定 G, k：$\pi^*(G) \le k$ 是否成立?

ROPN：给定 $G, t \ge 2, k$：$\pi_t^*(G) \le k$ 是否成立?

Milans 和 Clark 证明了 OPN 是 NP完全 [10]。利用前面的定理，我们将证明 ROPN 是 NP-困难。我们不详细证明 ROPN 属于 NP，因为证明过程与证明 OPN 属于 NP 完全相同。下一段将概述证明思路。若读者想了解细节，可参见 [10]。

$\pi^*(G) \le k$ 的证据如下：大小为 k的可解二限制卵石分布 D，以及对于每个顶点 v，一份可执行卵石移动序列 σ_v的紧凑记录，并且它们满足$D\sigma_v(v) \ge 1$。这份记录不包含卵石移动的阶，只记录每种可能移动的总次数。根据这份记录，可以在多项式时间内判断是否存在与之相容的可执行卵石移动序列。

引理 2.4 OPN$\prec$ROPN。

Proof: 设 f 是将 G 映射到 $G \cdot K_{|V(G)|}$的函数。若 G 是 OPN 的输入，则令 ROPN 对应的输入为 $f(G)$。f 可以在多项式时间内计算。根据引理 2.3 $\pi^*(G)$，当且仅当 $\pi_t^*(f(G)) \le k$时，$\le k$成立。□

OPN 是 NP 完全问题，而 ROPN 属于 NP，因此由引理 2.4 可得我们的主要复杂性结果：

定理 2.5 ROPN 是 NP 完全问题。

3 较大的最小度迫使 $\pi^*(G) = \pi_t^*(G)$

[2] 的作者要求刻画最优卵石数与 2-限制最优卵石数相同的图。我们认为，这样的刻画相当复杂。请注意，有许多图具有这一性质，例如路径、圈和完全图。

引理 2.3 给出了无穷多个例子。当 $k \ge \left\lceil \frac{|V(G)|}{3} \right\rceil$ 时，图 $G \cdot K_k$ 属于所研究的图族。$G \cdot K_k$ 中的顶点数为 $\overline{|V(G)|} \cdot k$，最小度 δ 至少为 $2k-1$。因此，$G \cdot K_k$ 的最小度与顶点数之比至少为 $\frac{|V(G)|}{2}$。

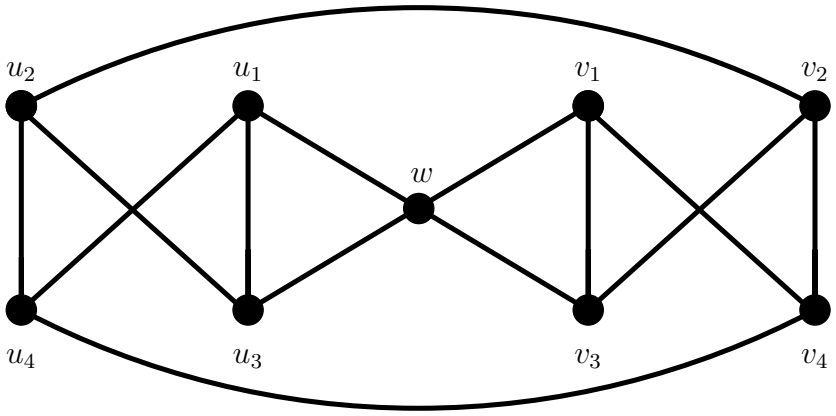


图1：图 H_4。

有人可能会问，高最小度是否能保证 $\pi_2^* = \pi^*$? 答案是肯定的。我们需要一个简短的引理来证明这一点。

引理 3.1 设 G 是一个图。若 D 是 G 上的一个卵石分布，使得对某个顶点 v 有 $D(v) = 3$，且对任意其他顶点 u有 $D(u) \leq 1$，则 D 不是最优的。

Proof:
要到达一个顶点，并不需要 v 的第三颗卵石。任何可应用于 D的非空卵石移动序列，都会在第一步从 v 移走两颗卵石。此后每一步中，只有一个顶点拥有多于一颗卵石，而其他每个顶点上的卵石数都不超过初始数量。当使用 v 的第三颗卵石时，每个顶点上的卵石数都不超过其在 D下的数量。因此，以移走 v 第三颗卵石为第一步且包含其后所有移动的子序列，可以在 D 下执行，并到达与原卵石化移动序列相同的顶点。但它只从 v移走两颗卵石，因此那里还剩下一颗无用的卵石。□

这个引理立即给出了一个新的图类，在该类中，所考察的两个参数相等。

推论 3.2 若 $\pi^*(G) \leq 3$，则 $\pi_2^*(G) = \pi^*(G)$。

命题 3.3 设 G 是一个阶为 n 的图。若 $\delta(G) \geq \frac{2}{3}n - 1$，则 $\pi_2^*(G) = \pi^*(G)$。

在证明中，我们将使用一个众所周知的事实：直径为二的图的最优卵石数至多为 4[12]。顶点 u 的邻域是与 u 相邻的顶点集合。我们将此集合记为 $N(u)$。

Proof: 我们证明 D 存在一个 2-限制的最优分布。G 的直径至多为二，因为任意两个不相邻的顶点都有一个共同邻点。若 D 是一个最优分布且 $|D| \leq 3$，则根据引理 3.1 D，它是 2-限制的。

如果 $\pi^*(G) = 4$，那么我们选择两个不相邻的顶点 u 和 v，并在每个顶点上放置两颗卵石。$N(u) \cap N(v)$ 的顶点都是 2-可达的。因此，每个与$\{u, v\} \cup (N(u) \cap N(v))$相邻的顶点都是可达的。该集合的大小至少为 $\frac{1}{3}n + 2$。因此，G中的任意顶点要么属于该集合，要么与该集合相邻。所以，构造的分布是最优的，并且是 2-限制的。□

现在我们给出无穷多个图，它们的最优卵石数与 2-限制最优卵石数不同，但最小度很大；这里的“大”是指最小度几乎达到图的阶的一半。

构造如下：考虑两个阶为 m 的完全图，其中 m 为偶数。将这两个完全图的顶点分别记为 $u_1, u_2, \ldots, u_m$ 和 $v_1, v_2, \ldots v_m$。对所有奇数 i，删除边 $\{u_i, u_{i+1}\}$ 和 $\{v_i, v_{i+1}\}$。注意，我们删除了一个完美匹配。添加一个顶点 w，并添加所有边 $\{w, u_i\}$ 和 $\{w, v_i\}$，其中 i 为奇数。对每个偶数i，添加边 $\{u_i, v_i\}$。将此图记为 H_m。示例见图1。此图的最小度为 $m-1$，顶点数为 $2m+1$。

命题 3.4 若 $m \geq 4$，则 $\pi_2^*(H_m) = 5$，但 $\pi^*(H_m) = 4$。

Chelalli 等人刻画了2-限制最优卵石数不超过4的图。$\pi_2^*(G) \leq 4$ 当且仅当 G 有顶点 u 和 v，使得 $u \cup v \cup N(v)$是 G [2]的支配集。此外，虽然这可用于证明 $\pi_2^*(H_m) > 5$，但仍有许多情况需要处理。为缩短证明，我们将采用另一个引理以及由Moews提出的权重论证 [11]。

卵石分布 D 的权函数定义在 G 的顶点集上，为 $W_D(u) = \sum_{v \in V(G)} D(v) 2^{-d(u,v)}$。如果上下文已明确分布，我们就简写为 $W(u)$。权重论证指出，若 $W_D(u) < 1$，则在 D 下，u 不可达。

引理 3.5 若 $\pi_2^*(G) \leq 4$，且 G 连通，则 G 有两个顶点 x 和 y，使得分布

$$D(v) = \begin{cases} 2 & \text{if } v \in \{x, y\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

是可解的。

Proof: 由于 $\pi_2^*(G) \leq 4$，G 有一个大小为 4 的可解卵石分布 D'，且其卵石放置在多个顶点上。若 D' 将卵石放在恰好两个顶点上，则由于限制，D' 会在这两个顶点上各放置 2 个卵石，因此结论成立。

若 D' 将卵石放在三个顶点 u、v、w 上，则可设 $D'(u) = 2$ 且 $D(v) = D(w) = 1$。由引理 2.1 可设 u、v 和 w 是 2-可达顶点。在 D' 下，没有其他顶点是 2-可达的。由于 D' 可解，G 的任何其他顶点都必须与 u、v、w 中至少一个相邻。u 上的卵石在任何卵石序列中都是必需的，而 v 和 w 可以接收一个卵石，因此 u、v、w 中必有一个与另外两个相邻。若 v、$w \in N(u)$，则令

$$D(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \in \{v, w\} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

在另一种情况下，不失一般性地，我们可以假设 $v \in N\{u, w\}$，并令

$$D(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \in \{u, w\} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于 u、v、w 在 D 下是二步可达顶点，且其他每个顶点都与其中一个相邻，因此 D 是一个可解分布。

如果在 D' 下有 4 个顶点上放有卵石，那么每个顶点都恰好有一颗卵石，且不允许进行卵石移动，因此 $|V(G)| = 4$。考虑 G 中的一条最长路径，并在其两个端点上各放 2 颗卵石。这是一个可解分布。其余两个顶点要么都包含在一条路径中，并且可以从一个邻点获得一颗卵石；要么这条路径由 3 个顶点组成，而第四个顶点与中间顶点相邻，后者是 2-可达的。□

我们已经具备证明命题 3.4 所需的全部工具。在证明中，我们使用顶点标记 u_i、v_i 和 w 的方式，与我们定义 H_m 时完全相同。

Proof of Claim 3.4:

令 D^* 为如下卵石分布：

$$D^*(x) = \begin{cases} 2 & \text{if } x \in \{v_1, u_1\} \\ 1 & \text{if } x = w \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

显然，除 u_2 和 v_2 之外的任何顶点都可以通过一次卵石移动到达。序列 ($(u_1 \to u_3)$,$(v_1 \to w)$,$(w \to u_3)$,$(u_3 \to u_2)$) 在 u_2 处放置了一颗卵石。类似地，顶点 v_2 也可以获得一颗卵石，因此 D^* 可解且为 2-限制，故 $\pi_2^*(H_m) \leq 5$。

反设 $\pi_2^*(H_m) \leq 4$。根据引理 3.5，H_m 中存在顶点 x 和 y，使得若 $z \notin \{x, y\}$ 可解，则分布 $D(x) = D(y) = 2$, $D(z) = 0$ 。我们逐一分析各种情形，证明不存在这样的顶点。不失一般性，假设 $\sum_{i=1}^{m} D(u_i) \leq \sum_{i=1}^{m} D(v_i)$。令 h, k, l, i 为介于 1 和 $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ 之间的整数，并计算这些顶点的指标模 m。

情况 1. $D(w) = 2$: 如果 $D(v_{2k+1}) = 2$，那么 $W(u_{2k+2}) = \frac{3}{4}$，因此 u_{2k+2} 不可达。如果 $D(v_{2k}) = 2$，那么 $W(u_{2k+2}) = 1$。假设存在卵石化移动序列 σ，可将一个卵石移至u_{2k+2}，因此 $D\sigma(u_{2k+2}) = 1$。由于一次卵石移动不会增加 $W(u_{2k+2})$，且其值已经是 1，因此 σ 中包含的任何移动都不能使 $W(u_{2k+2})$ 减小。满足此条件的卵石移动只有 $(v_{2k} \to u_{2k})$ 和 $(w \to u_{2j+1})$。但执行这些移动后，便没有其他可执行的移动，且 u_{2k+2} 仍没有卵石，因此不存在这样的 σ。所以 u_{2k+2} 不可达。

情形 2。 $D(w) + \sum_{i=1}^{m} D(u_i) = 0$: 如果 $D(v_{2k}) = D(v_{2l}) = 2$和 $k \neq l$，那么 $W(u_{2k-1}) = \frac{3}{4}$，因此不可达。如果 $D(v_{2k+1}) = D(v_{2l+1}) = 2$ 和 $k \neq l$，那么 $W(u_{2k+2}) = \frac{3}{4}$。如果 $D(v_{2k+1}) = D(v_{2l}) = 2$，那么 $W(u_{2l-1}) = \frac{3}{4}$。

情形 3。 $\sum_{i=1}^{m} D(u_i) = 2$: 如果 $D(v_{2k+1}) = D(u_{2l+1}) = 2$，那么 $W(u_{2k+2}) \leq \frac{3}{4}$。

如果 $D(v_{2k}) = D(u_{2l}) = 2$，那么 $W(w) = 1$。唯一不会使 $W(w)$ 减小的移动是 $(v_{2k} \to v_{2h+1})$ 和 $(u_{2l} \to u_{2i+1})$。但执行这些移动后，已无可用的卵石移动，且 w 没有卵石，因此在这种情况下 w 不可达。

如果 $D(v_{2k+1}) = D(u_{2l}) = 2$，那么 $W(u_{2l-1}) = 1$。对 v_{2k+1} 的卵石进行的唯一不会使 $W(u_{2l-1})$ 减少的移动是 ($v_{2k+1} \to w$)。然而，$W(w) < 2$，因此到达 w 的卵石无法继续移动，而 u_{2l} 的卵石不足以到达 u_{2l-1}，所以 u_{2l-1} 不可达。

The 子情况 $D(u_{2k+1}) = D(v_{2l}) = 2$ 由于对称性，与前一个子情况等价 y.

我们在每种情况下都找到了一个不可达顶点，因此不存在这样的 D。这与引理 3.5 矛盾，因此 $\pi_2^*(H_m) \geq 5$。 D^* 是一个可解的 2-受限分布，并且 $|D^*| = 5$，因此 $\pi^*(H_m) = 5$。

若 i 为奇数，则 u_i 和 v_i 是 w 的邻点。当 i 为偶数时，u_i 有一个邻点 u_j，其中 j为奇数。因此，任意顶点到 w 的距离至多为 2。于是，在 w 放置 4 个卵石便构成一个大小为 4 的可解分布。因此 $\pi^*(H_m) \leq 4$。

反设 $\pi^*(H_m) < 4$，并令 D' 为 G的一个最优分布，因此 $|D'| \leq 3$。根据引理 3.1 D' 不会在同一个顶点放置 3 个卵石，因此它是一个 2-限制可解分布，这与假设矛盾。□

$\delta(H_m) = \frac{|V_{(H_m)_2}|-3}{}$ 且 $\pi_2^*(H_m) \neq \pi^*(H_m)$。这一结果与命题 3.3 一起蕴含了以下常数 c的存在性：若 $\delta(G) \geq c|V(G)|$，则 $\pi_2^*(G) = \pi^*(G)$；但对任意 $\epsilon > 0$，都存在一个图H，使得 $\delta(H) \geq (c - \epsilon)|V(G)|$ 且 $\pi_2^*(H) \neq \pi^*(H)$。我们一直试图确定这个常数，但至今未能成功。我们的研究促使我们提出下一个猜想。

猜想：如果 $\delta(G) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$，那么 $\pi_2^*(G) = \pi^*(G)$。

注意，最小度至少为其阶一半的图，其直径至多为二。由推论 3.2 可知，只需证明这些图中的每一个都存在一个可解的 2-限制

卵石分布，且其大小为 4。我们可以利用 [2] 或引理 3.5 的结果，将前述猜想改写为一个支配问题。

猜想：如果 $\delta(G) \geq \frac{1}{2}|V(G)|$，那么在 G 中存在顶点 u 和 v，使得 $\{u, v\} \cup (N(u) \cap N(v))$ 是一个支配集。

开放问题：

1. 如果 T 是一棵树，能否在多项式时间内计算 $\pi_2^*(T)$?
2. 如果 T 是一棵树，能否在多项式时间内计算 $\pi^*(T)$?
3. 满足 $\delta(G) \geq c|V(G)|$ 强制 $\pi^*(G) = \pi_2^*(G)$ 的 c 最大值是多少?

致谢

本研究得到创新与技术部和国家研究、发展与创新办公室在匈牙利人工智能国家实验室框架内的支持。

参考文献

[1] D. Bunde, E. Chambers, D. Cranston, K. Milans, and D. West, 图的卵石问题与最优卵石化 《图论杂志》 (2008) 57 第3期 215–238.[2] M. Chellali, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, T. M. Lewis, 图中的受限最优卵石化与支配 《离散应用数学》 (2017) 221 46–53.[3] C. Chen, C. Shiue, 保卫岛屿游戏研究 《国际计算机游戏协会》 40 (2018) 330–340.
[4] F. Chung, 超立方体中的卵石问题 《工业与应用数学学会离散数学杂志》 (1989年) 2 第4期 467–472.[5] E.J. Cockayne, P.M. Dreyer Sr., S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, 图中的罗马支配 《离散数学》 278 (2004), 11–22.[6] T. Friedman, C.Wyels, 路径与圈的最优卵石化 arXiv:math/*0506076* [math.CO][7] H. Fu, C. Shiue, 毛毛虫树的最优卵石数，《台湾数学期刊》 (2009) 13 第2A期 419–429.[8] H. Fu, C. Shiue, 完全 m 叉树的最优卵石数，《离散数学》 (2000) 222 第1–3期 89–100.[9] E. Győri, G. Y. Katona, L. F. Papp, C. Tompkins, 阶梯图的最优卵石数 《离散数学》 (2019 年) 342，第 7 期，2148–2157.[10] K. Milans, B. Clark, 图卵石问题的复杂性 《工业与应用数学学会离散数学杂志》 (2006) 20，第3期，769–798.[11] D. Moews, 图的卵石问题，《组合理论杂志（B辑）》 55 (1992) 244–252.[12] J. Muntz, S. Narayan, N. Streib, K. V. Ochten, 图的最优卵石化 《离散数学》 (2007) 307，2315–2321。

[13] L. Pachter, H. Snevily, and B. Voxman, 图的卵石问题 《Congr. Numer.》 107 (1995年), 65–80.[14] C. Shiue, 保卫岛屿游戏研究 《离散应用数学》 279 (2020年), 125–133.[15] C. Shiue, 图中的容量限制最优卵石问题 《离散应用数学》 260 (2019年) 284–288。