arXiv:2301.09883v1 [math.NT] 24 Jan 2023

利用 Pfaffian 函数定义的集合的有效 Pila–Wilkie定理及若干丢番图应用

GAL BINYAMINI、GARETH O. JONES、HARRY SCHMIDT 和 MARGARET E. M. THOMAS

Abstract. 我们证明了 Pila–Wilkie定理 [34]的一个有效版本，适用于利用 Pfaffian 函数定义的集合，并为位于此类集合上、次数有界且高度有界的代数点数量给出了有效估计。我们还证明了 Pila [35]和 Habegger–Pila [23]提出的这一结果的推广版本的有效形式。为证明这些计数结果，我们针对利用受限 Pfaffian 函数定义的集合，获得了 Yomdin–Gromov参数化的一个有效版本。此外，对于在受限情形下定义的集合，以及不受限的子 Pfaffian 集，我们的有效估计对给定集合的次数（衡量复杂度的一项指标）呈多项式依赖。所有估计中所具有的一致性使我们得以获得若干丢番图应用。其中包括具有复乘的椭圆曲线乘积的 Manin–Mumford 猜想的一个有效且一致的版本，以及 Habegger[22] 一项结果的有效且一致的版本。该结果刻画了包含在椭圆曲面纤维幂中的代数簇上所出现的特殊点集合。我们还证明，如果 Andr´e– Oort 猜想对于 $Y(2)^g$ 可以得到有效证明，那么椭圆曲线族上的 Andr´e–Oort 猜想对于 $Y(2)^g$ 也可以得到有效证明。

1. 引言

假设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 在实数域的某个 o-极小扩张中可定义。那么，Pila–Wilkie定理 [34] 的一个基本版本断言：对所有 $\varepsilon > 0$，存在一个常数 c，使得集合 X^{tr} 中高度至多为 H 的有理点不超过 cH^{ε} 个。这里，X^{tr} 是 $X \setminus X^{alg}$，其中 X^{alg} 是 X 的所有连通无限半代数子集的并集；而 $q = (q_1, \ldots\ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ 的高度为 $\max_{1\le i\le n}\{H(q_i)\}$，其中，对每个 $i = 1, \ldots\ldots, n$，$H(q_i)$ 是 $\max\{|a|, |b|\}$，其中 $q_i = a/b$，且 a 和 b 是互素整数。

在此我们证明，对于以 Pfaffian 函数扩张实数域的情形，Pila–Wilkie定理中的常数可根据 ε 以及与集合 X 的定义相关的某些参数有效地计算。对于可定义的集合

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03C64, 11G15, 11G18, 11U09.

Key words and phrases. Pfaffian 函数、有效性、Gromov–Yomdin参数化、o-极小性、Pila–Wilkie定理、Manin–Mumford 猜想、复乘椭圆曲线、不太可能的交、Andr´e–Oort 猜想。第一作者获得以色列科学基金会（资助编号 1167/17）的资助，并获得欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线2020研究与创新计划下的资助（资助协议编号 802107）。第二作者感谢菲尔兹研究所在其撰写本文期间提供的热情接待，当时他参加了主题项目“驯性几何、超渐近级数及其在分析与几何中的应用”。第三作者感谢巴塞尔大学数学与信息学系。第四作者获得美国国家科学基金会资助，项目编号 DMS-2154328。

若集合是利用受限 Pfaffian 函数定义的，或具有以 Pfaffian 函数为条件的存在性定义，则我们可以给出更精确的结论。在这些情形下，我们证明这种依赖关系关于其中一个参数是多项式的；这一特点使我们能够得到若干丢番图应用。为了陈述这一结果，我们简要回顾一些定义。若开区间乘积 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的解析函数序列 $f_1, \dots, f_l$：$U \to \mathbb{R}$ 满足：存在多项式$P_{i,j} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_i]$，对于 $i = 1, \dots, l$ 和 $j = 1, \dots, n$，使得

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = P_{i,j}(x, f_1(x), \dots, f_i(x)), \tag{1.1}$$

对所有 i、j 以及所有 $x \in U$ 均成立。于是我们称函数 $f\colon U \to \mathbb{R}$ 是具有链 $f_1, \dots, f_l$ 的 Pfaffian 函数，如果对所有 $x \in U$，都有 $f(x) = P(x, f_1(x) \dots, f_l(x))$，其中某个多项式为 $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_l]$。我们将此类 Pfaffian 函数的格式定义为 $n + l$，其次数定义为 $\Sigma_{i,j} \deg(P_{i,j}) + \deg(P)$。

半 Pfaffian 集是某个 n 的集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，它由形如 $g = 0$ 的方程和形如 $h > 0$ 的不等式的布尔组合定义，其中涉及的所有函数 g 和 h 均为 Pfaffian 函数，并且定义在上述某个共同的U 上。X 的格式是其定义中出现的所有函数 g 和 h 的格式的最大值，而 X 的次数是所有这些 g 和 h 的次数之和。

子 Pfaffian 集是一个集合 $Y \subseteq \mathbb{R}^k$，其中 k，且存在一个半 Pfaffian 集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，其中 $n \geq k$，使得 $Y = \pi(X)$，其中 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 是到前 k 个坐标的自然坐标投影。Y 的格式和次数定义为 X的格式和次数。

尽管我们的主要结果针对由受限 Pfaffian 函数定义的集合（我们稍后会讨论），但它立即推出以下结果；其中，我们用$X(\mathbb{Q}, H)$表示集合 X上高度至多为 H 的有理点集合。

定理 1.1. 设 X 是一个格式至多为 k 、次数至多为 d的子 Pfaffian 集。那么，对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在正实数 c 和 γ，它们可由 k 和 ε有效计算得到，使得

$$\#X^{tr}(\mathbb{Q}, H) \leq cd^{\gamma} H^{\varepsilon},$$

对所有 $H \geq 1$均成立。

我们稍后将讨论针对由受限 Pfaffian 函数定义的集合所得到的主要计数结果。不过现在指出，在这种情形下，我们得到了 Pila [35] 以及 Habegger 和 Pila [23]，分别提出的 Pila–Wilkie定理的块计数版本和半有理版本的有效形式。请注意，根据我们的结果，我们也可以立即推出上述定理 1.1 的一个版本，其中计数的是次数有界的代数点（在 $\mathbb{Q}$上），此时 c 和 γ 也取决于所计数点的次数上界。

近期，关于 Pila–Wilkie定理有效形式的研究颇多。尤其是，第一作者针对半诺特集合给出了 Pila–Wilkie定理的一个有效版本 [4]；我们下文考虑的受限半 Pfaffian 集就属于这类集合。此外，最近他在与 [4]相关的环境中建立了有效的多对数界 [5], 。与这些结果相比，我们主要结果所考虑的集合类（想必）更小；与 [5], 的结果相比，我们的界则较弱。不过，我们的结果具有更强的一致性，正是这一点使我们得以超越受限环境。我们的结果大幅改进了第二作者和第四作者近期的工作 [25], ：将其工作推广到任意维数，并改进了对所考虑 Pfaffian 集次数的依赖。我们还针对一般可定义集，在

非受限环境中获得了有效结果，但不具备对次数的多项式依赖。本文即将完成之际，第一作者、Novikov 和 Zack 的论文 [7] 被发布在 arXiv 上，证明了受限 Pfaffian 结构及 $\mathbb{R}_{\exp}$ 中的 Wilkie 猜想。虽然 [7] 在光滑参数化步骤中采用了不同的方法，但它借鉴了许多最初在本文中提出的技术思路，用以证明关于复杂度参数的多项式界。我们指出， [7], 的光滑参数化引理虽然在 r方面更精确，却不能推出我们的光滑参数化结果（定理 3.8），因为它仅对 X 的“大部分”进行参数化，这与 Yomdin 最初的表述 [39, 40], 一致；而本文的定理 3.8 则对整个集合进行参数化，这与 Gromov 的版本 [19] （代数情形）以及 Pila 和 Wilkie 的方法 [34] （一般 o-极小环境）一致。

我们所获得的一致性水平具有一些丢番图应用。假设 A 是复数域上的 g 个椭圆曲线的乘积。第二位和第三位作者的工作 [24] 表明，由这些椭圆曲线的 Weierstrass 函数之积所给出的 A 的指数函数的图，在限制到某个基本域后，是一个由 Pfaffian 函数定义的集合，其复杂度有一个有效上界，且该上界仅依赖于 g。通过复分析方法实现这种跨格的一致性似乎颇为困难，参见 [4, 5]。在处理非预期交问题的 Pila–Zannier 策略中，我们在这一情形下的结果可导出有效的一致计数结果，其对所考虑簇的次数呈多项式依赖。

对于我们关于 Manin–Mumford 和混合 Andr´e–Oort 的主要应用，我们假设 A 的所有椭圆因子都具有复乘，并且由某个固定数域 K 上的魏尔斯特拉斯方程给出。

定理 1.2. 设 $V \subseteq A$ 是定义在扩张 K 的数域 L 上的不可约子簇。假设 V 不包含 A 中正维阿贝尔子簇的任何挠平移。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在可由 g 和 ε 有效计算的 c 和 m ，使得若 $P \in V(\mathbb{C})$ 是确切阶为 N 的扭点，则

$$N \leq c[L : K]^{1+\varepsilon} \deg(V)^m.$$

一个与一致 Manin–Mumford 陈述精神相近的有效结果是 Dill 的命题 3.3] ，结合 [14, 定理 4.2], 得出；后者又综合了 Lombardo 关于非复乘情形的结果[29] ，以及 Bourdon 和 Clark 关于复乘情形的结果 [11]。如果 A 是复乘椭圆曲线的幂，则可用他的方法证明定理 1.2（但 [L 的指数更大： K]）。我们还在第 5 节中证明了一个一致且有效的界，限制了 V 中正维挠平移的阶和数量（定理 5.13）。我们未能在文献中找到可比的结果。对于一般的阿贝尔A，不一定是椭圆曲线的乘积，由 Peterzil 和 Starchenko 的可定义性结果可知，存在仅依赖于 g 的复杂度界[33]。然而，目前尚不清楚其有效性。

定理 1.2 的新意在于，它在复乘情形下给出了一个有效的 Manin–Mumford 陈述，其对簇的次数 V呈多项式依赖，并且只依赖于维数 g ，除此之外与所涉及的椭圆曲线无关。此外，该结果适用于任意维数的簇。请注意，若不假设存在复乘，就无法达到这种程度的一致性。例如，取勒让德曲线的纤维积中的一个曲线族，Habegger [22]的工作表明，贝蒂映射是开映射，因此该曲线族包含阶任意高的挠点。

在其他情形下，人们也得到了关于 Manin–Mumford 中挠点数量（但非其阶）的更一般一致性界。DeMarco、Krieger 和 Ye [13] 针对那些存在到椭圆曲线的二次映射、且嵌入其雅可比簇中的亏格为二的曲线，证明了一个结果；该界与曲线的定义域无关。Dimitrov、Gao 和 Habegger [15] 证明了一个关于嵌入其雅可比簇中的曲线上挠点的界，该界只依赖于曲线的亏格和定义域的次数。K¨uhne [27] 的工作，以及 Gao、Ge 和 K¨uhne [18] 的工作，消除了对定义域的依赖，并将结果推广到了更高维数。

我们的 Manin–Mumford 结果具有高度一致性，可应用于一个混合型 Andr´e–Oort 问题。为陈述我们的结果，我们先引入一些术语（更一般情形下的进一步细节见第 5 节）。令 $\mathcal{E}^{(g)}$ 为勒让德族 $Y^2 = X(X-1)(X-\lambda)$ 的 g 重纤维幂，其中 $\lambda \neq 0, 1$。若一点 $P \in \mathcal{E}^{(g)}(\mathbb{C})$ 是其所在纤维中的挠点，且该纤维具有复乘，则称其为特殊点。我们用 $P_{\mathcal{E}^{(g)}}$ 表示 $\mathcal{E}^{(g)}$ 的特殊点集合。若一个簇 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}^{(g)}$ 是代数子群 $\mathcal{E}_\lambda^{(g)}$ 的一个不可约分支，且 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ 满足 $\mathcal{E}_\lambda^{(g)}$ 具有复乘；或者 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{E}^{(g)}$ 的某个平坦子群概形的不可约分支，则称该簇为特殊簇。我们还需要定义特殊子簇的复杂度；在此情形下，可如下定义。设 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}^{(g)}$ 为特殊子簇。若 $\mathcal{S}$ 属于定义中的第一种情形，则将 $\mathcal{S}$ 的复杂度定义为 $\mathcal{E}_\lambda^{(g)}$ 的代数子群的次数与 $\mathcal{E}_\lambda$ 的自同态环的判别式二者中的较大者。若 $\mathcal{S}$ 属于第二种情形，则将 $\mathcal{S}$ 的复杂度定义为使 $\mathcal{S}$ 成为其不可约分支的最小平坦子群概形的次数。给定一个固定的代数簇 $V \subseteq \mathcal{E}^{(g)}$，若任意满足 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \subseteq V$ 的特殊子簇 $\mathcal{S}'$ 都等于 $\mathcal{S}$，则称特殊子簇 $\mathcal{S} \subseteq V$ 为极大的。我们证明如下结果（见定理 5.10）。

定理 1.3。存在可有效计算的常数 c 和 m，它们仅依赖于 g，并具有如下性质。若 $V \subseteq \mathcal{E}^{(g)}$ 是定义在数域 K 上的簇，则任意极大特殊子簇 $\mathcal{S} \subseteq V$ 的复杂度至多为

$$\exp(c([K:\mathbb{Q}]\deg(V))^m).$$

若不要求有效性，且常数也依赖于该簇的高度，则这一结论归功于 Habegger（见 [22]中的定理 1.1）。它也可由 Gao 关于混合 Andr´e–Oort [17], 的结果推出，但这些结果同样是无效的。我们给出另一种证明，将其归结为我们的 Manin–Mumford 结果，从而同时得到有效性和一致性。这一策略可推广为一般的归约论证；我们证明，若 $Y(2)^g$ 的 Andr´e–Oort 定理能够做到有效，则勒让德族的纤维幂乘积的 Andr´e–Oort 定理也能做到有效，具体如下（见定理 5.8）。

定理 1.4. 假设存在针对 $Y(2)^g$ 的 Andr´e–Oort 猜想的有效证明。那么就存在针对 $\mathcal{E}^{(n_1)}\times$ 的 Andr´e–Oort 猜想的有效证明。
$\cdots \times \mathcal{E}_{(n_g)}$ $(n_i \geq 1, i = 1, \ldots, g)$.

与 Pila 和 Wilkie 原始证明一样， [34], 我们的计数结果的主要组成部分是一个参数化结果。我们没有尝试使 Pila 和 Wilkie 给出的证明在我们的情形下变得有效，而是采用了第一作者和 Novikov [6]近期给出的表述。我们的工作很大程度上依赖第一作者和 Vorobjov [9], 的研究，他们证明了对我们的方法至关重要的细胞分解结果。这些结果与 [6], 更高效的证明结构相结合，使我们得以在受限情形下获得对次数的多项式依赖

。定理 1.1 可直接由这些结果推出，并用到了第二作者和第四作者在 [25]中的穷尽思想。

对于丢番图应用定理 1.3 和 1.4，我们不在勒让德族的统一化上使用 Pila–Wilkie 式计数，而只逐纤维进行计数，这使我们能够获得高度的一致有效性。我们将勒让德族的 Andr´e–Oort 猜想归约为基底（纯部分）的 Andr´e–Oort 猜想。虽然 Andr´e–Oort 猜想如今已在完全一般的情形下得到证明 [8], [37] ，因此严格来说，我们给出了勒让德族乘积的 Andr´e–Oort 猜想的新证明。

本文的组织结构如下。第 2 节介绍我们主要采用的受限 Pfaffian 框架，回顾 [9]的预备知识，并概述我们将要利用的一些推论。第3节证明我们在这一受限框架下的有效参数化结果。第 4 节给出受限框架下的计数结果（由此可立即推出关于非受限子 Pfaffian 集的结果，尤其是定理 1.1）。第 5 节介绍若干丢番图应用，包括定理 1.2、1.3 和 1.4。最后，第 6 节讨论一般非受限 Pfaffian 设定下的有效计数结果。

2. Setting and Preliminaries

本节将介绍本文主要采用的受限 Pfaffian 框架，并给出这一框架下后文所需的一些定义、术语和预备结果。

2.1. 受限 Pfaffian 框架。回顾引言中 Pfaffian 函数 $f: U \to \mathbb{R}$ 的定义，它由多项式 $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_l]$ 和 Pfaffian 链 $f_1, \dots, f_l$: $U \to \mathbb{R}$定义，其中 $U \subseteq \mathbb{R}^n$是若干开区间的乘积。

给定一个开盒 $B \subseteq U$，其闭包包含于 U中，我们称 $f|_B$为受限 Pfaffian 函数。与非受限情形一样，我们将此类函数 $f|_B$的格式定义为 $n+l$，并将 $f|_B$的次数定义为 $\Sigma_{i,\ j}\deg(P_{i,\ j})+\deg(P)$，其中定义 $f_1, \dots, f_l$的微分方程组由多项式 $P_{i,\ j} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_i]$ 给出（见 (1.1)）。

类比于非受限情形（见第 1 节），受限半 Pfaffian 集是一个集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，其中 n，由形如 $g = 0$ 的方程和形如 $h > 0$的不等式的布尔组合定义；其中涉及的所有函数 g 和h 都是定义在上述同一个开盒 $B \subseteq U$上的受限 Pfaffian 函数。与非受限情形一样，此类集合 X 的格式是其定义中出现的所有函数 g 和 h 的格式的最大值，而 X的次数是这些函数 X 和 g 的次数之和。类似地，受限子 Pfaffian 集是一个集合 h，其中 $Y \subseteq \mathbb{R}^k$，且存在一个受限半 Pfaffian 集 k，其中 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，满足 $n \geq k$($Y = \pi$)，其中X: π是投影到前 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 个坐标的自然坐标投影。同样，与非受限情形一样， k 的格式和次数定义为 Y 的格式和次数。若映射 X: f 的图是受限子 Pfaffian 集，则称其为受限子 Pfaffian 映射。

2.2. 受限 Pfaffian 框架中的有效性。现在我们回顾若干定义和术语，它们最初由第一作者和 Vorobjov [9]提出。

首先，我们回顾以下简写，用于描述某些量之间有效依赖的性质。给定一个正实数 a 以及正实数元组 $b=(b_1,\dots,b_m)$ 和 $c=(c_1,\dots,c_n)$，我们写作“a 是 const(b)”，意指存在一个可有效计算函数 $\gamma\colon \mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$，使得 $a\le\gamma(\lceil b_1\rceil,\dots,\lceil b_m\rceil)$（也就是说，$a$ 可关于 b有效地有界）；我们写作“a 是 poly$_b$(c)”，意指存在一个可有效计算函数 $\gamma\colon \mathbb{N}^m\to\mathbb{N}$，使得 $a\le(c_1+\ldots+c_n+1)^{\gamma(\lceil b_1\rceil,\dots,\lceil b_m\rceil)}$（也就是说，$a$ 有一个关于 c 的多项式上界，其次数有效地依赖于 b）。

现在我们回顾 [9] 中受限子 Pfaffian 集的 *-格式和 *-次数。这些概念在我们的工作中起着关键作用；尤其是，它们对于 [9], 中得到的细胞分解结果十分重要，我们很快就会回顾这些结果。以下我们将 [9] 所需的定义和陈述改写为以底层全集 $\mathbb{R}$为基础，而非 $[0,1]$, ；这项修改完全是例行的。（不过请注意，$[0,1]$ 在 [9] 中记作 I，而本文将用 I 表示开区间 (0, 1)，与 [6]中的用法相同。）

定义 2.1（[9, 定义 3]）。若存在有限多个受限半 Pfaffian 集 $X_i\subseteq\mathbb{R}^{k_i}$ 以及 X_i 的连通分支 X_i'，使得

$$Y=\bigcup_i \pi_i(X_i'), \tag{2.1}$$

其中半 Pfaffian 集 X_i 的格式最大值为 $\mathcal{F}$，次数总和为 D。（这里 $\pi_i:\mathbb{R}^{k_i}\to\mathbb{R}^n$ 是自然坐标投影。）受限子 Pfaffian 映射 $f\colon X\to X'$ 从其图继承其 *-格式 $\mathcal{F}$ 和 *-次数。

正如 [9], 所述，受限子 Pfaffian 集 Y的 *-格式和 *-次数的上述定义取决于 Y在（2.1）中的表示方式。因此，给定实数 $\mathcal{F}$和 D，当我们说 Y具有（至多）$\mathcal{F}$的 *-格式和（至多） D的 *-次数时，我们的意思是，存在某种 Y 在（2.1）中的表示方式，证明 Y具有（至多） $\mathcal{F}$ 的 *-格式和（至多） D的 *-次数。

注 2.2。我们在此指出 [9, 注 10], 中的以下观察，它涉及此处定义的 *-格式和 *-次数的概念与第 2.1 小节定义的格式和次数的概念之间的关系：格式为 $\mathcal{F}$、次数为 D 的受限子 Pfaffian 集，其 *-格式为 $\mathcal{F}$，*-次数为 poly$_{\mathcal{F}}$(D)。

现在我们回顾 [9] 中所需的细胞分解结果。

定理 2.3（[9, 定理 1]）。设 k 和 n 为正整数，$\mathcal{F}$ 和 D 为正实数。设 X_1、...、$X_k\subseteq\mathbb{R}^n$ 为 *- 格式至多为 $\mathcal{F}$ 且 *- 次数至多为 D 的受限子 Pfaffian 集。存在一个 $\mathbb{R}^n$ 的受限子 Pfaffian 细胞分解 $\mathcal{D}$，与 X_1、...、X_k 相容，使得 #$\mathcal{D}$ 为 poly$_{\mathcal{F}}$(k, D)，且每个细胞 $C\in\mathcal{D}$ 的 *-格式为 const($\mathcal{F}$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F}}$(D)。

注 2.4。在定理 2.3 中，可以假设分解中的每个细胞都是实解析的，也就是说，每个细胞壁都由一个实解析函数给出。这可由定理 2.3 的证明得出。更具体地说，证明中将细胞壁构造为一组图细胞$\pi_n(X_\alpha)$的截面，其中 $\pi_n:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是自然坐标投影，而 $X_\alpha\subseteq\mathbb{R}^n$是一个半 Pfaffian 光滑流形。证明中指出，由于 X_α 淹没地映射到基底细胞，每个图都是一个连续函数的图。事实上，由于集合 X_α 在局部由受限 Pfaffian 方程定义（而这类方程特别是实解析的），应用实解析隐函数定理进行同样的论证，还可得出这些图也是实解析的。

˜令 $\mathbb{R}$ 为实数域的扩张，其中对每个受限子 Pfaffian 集的每一种如 (2.1) 所示的表示，都添加一个相应的关系。与这些关系之一对应的原子公式，其 *-格式和 *-次数定义为与之对应的表示所对应的受限子 Pfaffian 集的 *-格式和 *-次数（定义见定义 2.1）。随后，按照 [9, 定义 7]中的方式，将此定义扩展到公式 ϕ （在 $\mathbb{R}$的语言中）的 *-格式和 *-次数。基于这一设定，第一作者和 Vorobjov 证明了以下结果。

定理 2.5（[9, 定理 2]）。设 $\mathcal{F}$ 和 D 为正实数，并设 $\tilde{\phi}$是 $\mathbb{R}$ 语言中的一个公式，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，且 *-次数至多为D。该公式在 $\mathbb{R}$ 中定义的集合是受限子 Pfaffian 集，其 *-格式为 const($\mathcal{F}$)，且 *-次数为 poly$_{\mathcal{F}}$(D)。

我们将频繁使用此定理，且通常不明确引用。以下是此定理的一些用法示例。设 f 和 g 是受限子 Pfaffian 函数，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，且 *-次数至多为 D，并且复合$f \circ g$ 有定义。那么，根据定理 2.5，该复合的 *-格式为 const($\mathcal{F}$)，且 *-次数为 poly$_{\mathcal{F}}$(D)。现在设 F 是一个具有ℓ 个变量的 C^r 受限子 Pfaffian 函数，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，且 *-次数至多为 D。那么，根据定理 2.5，对于任意由非负整数 α 组成的 ℓ 元组，若 $|\alpha| \leq r$，则F的定义域中满足 $||F^{(\alpha)}|| \leq 1$ 的子集是一个受限子 Pfaffian 集，其 *-格式为 const($\mathcal{F}, r$)，且 *-次数为 poly$_{\mathcal{F},\ r}$(D)（关于多重指标记号的说明，见第3节）。

从现在起，直到第 5 节结束，我们用“可定义的”表示“在 $\mathbb{R}$ 中可定义的˜”。

以下是上述结果的一些推论。如上所述，我们用记号 I 表示开区间 (0, 1)。我们经常处理可定义集合族和映射族，并通过将可定义集合族 $\{X_a\colon\ a \in A\}$ 与可定义集 $X = \bigcup_{a\in A} (\{a\} \times X_a)$对应，以及将定义在 X 上的可定义映射族 $\{F_a\colon\ X_a \to \mathbb{R}^\ell\colon\ a \in A\}$ 与可定义映射 $F\colon\ X \to \mathbb{R}^\ell$对应，来定义它们的 *-格式和 *-次数。

推论 2.6。设 r 为一个非负整数，$\mathcal{F}$ 和 D 为正实数。设 $X = \{X_a\colon\ a \in A\}$ 为 I 的可定义子集族，且 $F = \{F_a\colon\ X_a \to I\colon\ a \in A\}$ 为定义在 X 上的可定义函数族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，*-次数至多为 D。存在一个正整数 k、对 A 的一个可定义集划分 $A_1, \ldots, A_k$，以及对每个 $i = 1, \ldots, k$，一个正整数 K_i 和可定义函数 $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}\colon\ A_i \to I$，其中 $j = 1, \ldots, K_i$，使得以下结论成立。

首先，对于每个 $i = 1$、.....、k 和 $a \in A_i$，区间 $(\alpha_{i,\ j}(a)\ \ \beta_{i,\ j}(a))$，其中 j =1.....、K_i，两两不相交，且它们的闭包之并是 X_a 的闭包。此外，对于每个 $i = 1$、.....、k 和 $j = 1$、.....、K_i，以下性质恰有一项成立：

(1) F_a 是 C^r，且对所有 $a \in A_i$，$F(r)_a$ 在 $(\alpha_{i,\ j}(a)\ \ \beta_{i,\ j}(a))$ 上严格递增；
(2) F_a 是 C^r，且对所有 $a \in A_i$，$F(r)_a$ 在 $(\alpha_{i,\ j}(a)\ \ \beta_{i,\ j}(a))$ 上严格递减；
(3) F_a 是 C^r，且对所有 $a \in A_i$，$F(r)_a$ 在 $(\alpha_{i,\ j}(a)\ \ \beta_{i,\ j}(a))$ 上为常数。

最后，对于每个 $i = 1$、.....、k，k 和 K_i 都是多项式$_{\mathcal{F},\ r}(D)$；并且对于每个 $i = 1$、.....、k，每个集合 A_i 以及函数 $\alpha_{i,\ j}$ 和 $\beta_{i,\ j}$（其中 $j = 1$、.....、K_i）的 *-格式均为 const（$\mathcal{F}$，r），且 *-次数为多项式$_{\mathcal{F},\ r}(D)$。

我们还需要上述结果的一个版本，以适用于多变量函数。

推论 2.7。设 ℓ 和 ℓ' 为正整数，r 为非负整数，且 $\mathcal{F}$ 和 D 为正实数。设 $F = \{F_a : I^\ell \to I^{\ell'} : a \in A\}$ 是一个 *-格式至多为 $\mathcal{F}$、*-次数至多为 D的可定义映射族。存在一个正整数 k 和一个可定义族 $V = \{V_a : a \in A\}$，其成员是I^ℓ 的子集，并且对每个 $a \in A$，均有 $\dim(V_a) < \ell$，且 F_a 在 $I^\ell \setminus V_a$上为 C^r。此外，k 是多项式$_{\mathcal{F},\, r}(D)$，集合族 V 的 *-格式为常数$(\mathcal{F}, r)$，*-次数为多项式$_{\mathcal{F},\, r}(D)$。

最后，我们需要以下版本的可定义选择。

引理 2.8. 设 ℓ 为正整数，$\mathcal{F}$ 和 D 为正实数。设 $X = \{X_a : a \in A\}$ 是 I^ℓ 的非空子集构成的可定义族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，且 *-次数至多为 D。则存在一个可定义映射 $F : A \to I^\ell$，其 *-格式为 const$(\mathcal{F})$，且 *-次数为 poly$_{\mathcal{F}}(D)$，使得对每个 $a \in A$，都有 $F(a) \in X_a$。

3. 参数化

本节中，除非另有说明，ℓ、ℓ' 和 k 均表示正整数，r 表示非负整数，而 B、$\mathcal{F}$ 和 D 均表示正实数。

我们首先介绍若干关键定义和记号。特别地，我们将用本文的记号给出我们所需的、出自 [6] 的定义。回忆一下，我们用 I 表示开区间 $(0, 1)$。

定义 3.1（[6, 定义 4 和 6]）。长度为 ℓ 的基本胞腔 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^\ell$ 是 ℓ 个集合的乘积，其中每个集合要么是 I，要么是 $\{0\}$。给定一个基本胞腔 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^\ell$ 和 $i = 1, \dots, \ell$，用 $\mathcal{C}_{\leq i}$ 表示将 $\mathcal{C}$ 投影到前 i 个坐标所得的投影。若连续映射 $f = (f_1, \dots, f_\ell) : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^\ell$ 定义在长度为 ℓ 的基本胞腔 $\mathcal{C}$ 上，且对于所有 $i = 1, \dots, \ell$，函数 $f_i(x_1, \dots, x_\ell)$ 不依赖于 $x_{i+1}, \dots, x_\ell$，并且 f_1 严格递增，且对于所有 $i = 2, \dots, \ell$ 以及每个 $(x_1, \dots, x_{i-1}) \in \mathcal{C}_{\leq i-1}$，函数 $x_i \mapsto f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i)$ 严格递增，则称该映射为胞腔的。

以下内容是这些定义的直接推论。

引理 3.2（[6], 第 422 页）。如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是长度为 ℓ 和 ϕ 的基本胞腔：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 和 $\psi : \mathcal{C}' \to \mathbb{R}^\ell$ 是胞腔的，那么 $\psi \circ \phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^\ell$ 是胞腔的。

给定一个集合 $X \subseteq \mathbb{R}^\ell$ 和一个映射 $f = (f_1, \dots, f_{\ell'}) : X \to \mathbb{R}^{\ell'}$，我们令 $\|f\| := \sup\{|f_1(x)|, \dots, |f_{\ell'}(x)| : x \in X\}$。如果 f 还是 C^r，那么，给定一个由非负整数 α 组成的 ℓ-元组，且满足 $|\alpha| \leq r$，我们将 f 的 α 阶导数记为

$$f^{(\alpha)} = \left(\frac{\partial^{|\alpha|} f_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_\ell^{\alpha_\ell}}, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|} f_{\ell'}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_\ell^{\alpha_\ell}} \right).$$

然后我们令 $\|f\|_r := \max\{\|f^{(\alpha)}\| : \alpha \in \mathbb{N}^\ell, |\alpha| \leq r\}$。我们使用这一范数，而不是 [6] 中所使用的范数，是因为丢番图应用（见第 5 节）需要用到它。

定义 3.3（[6, 定义 7]）。集合 $X \subseteq \mathbb{R}^\ell$的胞腔式 r-参数化是由有限集 Φ 个胞腔 C^r-映射 ϕ: $\mathcal{C}_\phi \to \mathbb{R}^\ell$组成的有限集，这些映射来自长度为 ℓ的各种基本胞腔 $\mathcal{C}_\phi \subseteq I^\ell$，满足 $\|\phi\|_r \leq 1$，对每个 $\phi \in \Phi$，并且

$$X = \bigcup_{\phi \in \Phi} \phi(\mathcal{C}_\phi).$$

映射 F: $X \to Y$ 的胞腔式 r-重参数化（其中 $X \subseteq \mathbb{R}^\ell, Y \subseteq \mathbb{R}^{\ell'}$）是指一个胞腔式 r-参数化 Φ，满足以下条件：对每个 $\phi \in \Phi$，$\|F \circ \phi\|_r \leq 1$。

注 3.4。请注意，这对 [34] 中定义的 r-参数化和 r-重参数化概念作了两处修改：此处的参数化映射必须是胞腔的，且每个参数化映射的定义域是 I^ℓ 中长度为 ℓ 的一个（可能不同的）基本胞腔，而非每种情形下都取基本胞腔 $I^{\dim(X)}$。胞腔性对于证明方法至关重要；显然，可以很容易地从胞腔式 r-参数化（分别从胞腔式 r-重参数化）得到 [34] 意义下的 r-参数化（分别得到 r-重参数化）。

定义 3.5。若胞腔的 r-参数化或胞腔的 r-再参数化 Φ 中的映射 Φ 均为可定义的，则称其为可定义的。在此情形下，此类 Φ 的 *-格式定义为$\phi \in \Phi$的 *-格式的最大值，而此类 Φ 的 *-次数定义为$\phi \in \Phi$的 *-次数之和。

我们还需要集合与函数（可定义）族的相应定义。

定义 3.6。给定集合 A，我们使用记号 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$表示如下内容：对 $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$作有限划分，并对每个 $i = 1, \ldots, k$，指定一个正整数 K_i 以及一个有限映射集

$$\Phi^{(i)} = \{\phi_{i,j} : A_i \times \mathcal{C}_{i,j} \to \mathbb{R}^\ell : j = 1, \ldots, K_i\},$$

~其中 $\mathcal{C}_{i,\,j}$ 是一个基本胞腔。若映射$\phi_{i,\,j}$均为可定义的（对每个 $i = 1$、……、k、 $j = 1$、……、 K_i），则称这样的集合 Φ 是可定义的；并称这样的集合Φ 具有 *- 格式和 *- 次数，其值分别为所有 $\phi_{i,\,j}$ 的 *- 格式的最大值，以及所有 $\phi_{i,\,j}$ 的 *-次数之和，其中遍历所有 $i = 1$、……、 k 以及$j = 1$、……、 K_i。

~注意，若这样的映射集 Φ 是可定义的，则 k 的值（即 A 的划分中的集合数）以及所有 $\Phi^{(i)}$ 中映射的总数，都必然受 $\tilde{\Phi}$ 的 *-次数约束。

定义 3.7. 设 $X = \{X_a : a \in A\}$ 是 $\mathbb{R}^\ell$ 的子集族。若对每个 $a \in A_i$，集合 $\Phi_a^{(i)} = \{\phi_{i,j}(a, \cdot) : j = 1$、……、 $K_i\}$ 都是 X_a 的胞腔式 r-参数化，则称 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1$、……、 $k\}$ 是 X 的胞腔式 r-参数化。

设 $F = \{F_a : X_a \to \mathbb{R}^{\ell'} : a \in A\}$ 是如上所述的定义在 X 上的映射族。我们称 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$ 是 F的胞腔式 r重参数化，若它是 X的胞腔式 r参数化，且对于每个 $i = 1, \ldots, k$和$a \in A_i$，都有 $\|F_a(\phi_{i,\,j}(a, \cdot))\| \leq 1$，即对于每个 $i = 1, \ldots, k$和 $a \in A_i$，集合 $\Phi_a^{(i)} = \{\phi_{i,j}(a, \cdot) : j = 1, \ldots, K_i\}$ 是$F_a : X_a \to \mathbb{R}^{\ell'}$的胞腔式 r重参数化。

本节旨在证明以下定理。

定理 3.8. 对于任意正整数 ℓ，以下陈述成立。

(i)$_\ell$ 对于任意非负整数 r 以及正实数 $\mathcal{F}$ 和 D，若 $X = \{X_a : a \in A\}$ 是 I^ℓ 的一个可定义子集族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$且 *-次数至多为 D，则存在一个 X 的可定义胞腔的 r-参数化，其 *-格式为 const($\mathcal{F}, r$)，*次次数为 poly$_{\mathcal{F},r}$(D)。

(ii)$_\ell$ 对于任意非负整数 r、正整数 ℓ' 以及正实数 $\mathcal{F}$ 和 D，若 $X = \{X_a : a \in A\}$ 是 I^ℓ的一个可定义子集族，且 $F = \{F_a : X_a \to I^{\ell'} : a \in A\}$ 是 X 上的一个可定义映射族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$ 且 *-次数至多为 D，则存在一个 F 的可定义胞腔的 r-重新参数化，其 *-格式为 const($\mathcal{F}, r$)，*次数为 poly$_{\mathcal{F},r}$(D)。

注 3.9。在本定理的设定下， $\mathcal{F}$ 的值必须至少与 ℓ一样大。因此，本定理所断言的可定义胞腔的 r-参数化或可定义胞腔的 r-重新参数化的 *-格式和 *-次数界，间接依赖于 ℓ。

定理 3.8 是第一作者与 Novikov 在 [6] 中证明的细胞 Yomdin–Gromov 代数引理的一个有效版本。我们证明定理 3.8 的策略在很大程度上将沿用 [6] 中采用的方法。不过，为了得到有效界，我们将在此直接证明该结果，并始终处理可定义族，而不依赖（无效的）模型论紧致性，从单个可定义集或函数的类似结论推出适用于可定义族的结论。我们还将在此提供证明的许多细节，以明确所得界不仅是有效的，而且关于 *-次数是多项式的。

我们将对 ℓ 进行归纳法来证明定理 3.8。首先给出一系列引理。我们将经常用到以下结论，或其证明中通过线性代换来抑制导数这一核心思想。

引理 3.10. 设 ℓ 为正整数， r 为非负整数，且 B、$\mathcal{F}$ 和 D 为正实数。设 $X = \{X_a : a \in A\}$ 为 $\mathbb{R}^\ell$ 的可定义子集族，且 $F = \{F_a : X_a \to \mathbb{R}^{\ell'} : a \in A\}$ 为 X上的可定义映射族。

假设 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \dots, k\}$ 满足作为 X 的可定义胞腔 r-参数化的定义，且其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$ 、*-次数至多为 D（其中 $\Phi^{(i)} = \{\phi_{i,j} : A_i \times \mathcal{C}_{i,j} \to \mathbb{R}^\ell : j = 1, \dots, K_i\}$），但$\|\phi_{i,j}(a,\cdot)\|_r$和 $\|F_a(\phi_{i,j}(a,\cdot))\|_r$不一定受 1 限制，而是对每个 $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, K_i$和 $a \in A_i$均受 B限制。存在 F的可定义胞腔r-重参数化，其 *-格式为 const($\mathcal{F}$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F}}$(B, D)。

证明。不失一般性，我们可以假设 B 是一个整数。对于每个 $i = 1, \dots, k$ 和 $j = 1, \dots, K_i$，定义

$$N_{i,j} = \{(n_1, \dots, n_\ell) \in \{0, \dots, 2B-2\}^\ell : \\ n_s = 0 \text{ for all } s = 1, \dots, \ell \text{ such that } (\mathcal{C}_{i,j})_s = \{0\}\},$$

其中 $(\mathcal{C}_{i,j})_s$ 是 $\mathcal{C}_{i,j}$ 在第 s 个坐标上的投影，其中 $s = 1, \dots, \ell$。

对于每个 $n = (n_1, \dots, n_\ell) \in N_{i,j}$，定义 $\psi_{i,j,n} : A_i \times \mathcal{C}_{i,j} \to \mathbb{R}^\ell$，使得 $\psi_{i,j,n}(a, x) = \phi_{i,j}\left(a, \frac{2x+n}{2B}\right)$。令

$$\Psi^{(i)} = \{\psi_{i,j,n} : A_i \times \mathcal{C}_{i,j} \to \mathbb{R}^\ell : j = 1, \dots, K_i, n \in N_{i,j}\},$$

对于 $i = 1, \dots, k$。那么 $\tilde{\Psi} = \{(\Psi^{(i)}, A_i) : i = 1, \dots, k\}$ 是 F 的可定义胞腔 r-重参数化。每个 $\psi_{i,j,n}$ 的 *-格式为 const($\mathcal{F}$)，*-次数为 poly(D)；因此，由于对于任意 $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, K_i$, $N_{i,j}$ 的大小为 poly$_{\mathcal{F}}$(B)，我们有~: Ψ 的 *-格式为 const($\mathcal{F}$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F}}$(B, D)，如所需。□

下面的引理表明，为了证明 $(ii)_\ell$，对于给定的正整数 ℓ，只需证明 $(ii)_\ell$ 中 $\ell' = 1$ 这一特定情形。

引理 3.11. 设 ℓ 为正整数， r 为非负整数，且 $\mathcal{F}$ 和 D 为正实数。

假设对于每个可定义族 $X = \{X_a : a \in A\}$，其元素是 I^ℓ 的子集，都有：每个定义在

X 上的可定义函数族 r: $\mathcal{F}$: r，若其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$ 且 *-次数至多为 D，则存在一个可定义的胞腔式r-重参数化，其 *-格式为常数$(\mathcal{F}, r)$，*-次数为多项式$_{\mathcal{F},\ r}(D)$。

设 $Y = \{Y_{a'} : a' \in A'\}$ 是 I^{ℓ}的一个可定义子集族。任意一个在 Y上的可定义映射族 $G = \{G_{a'} : Y_{a'} \to I^{\ell'} : a' \in A'\}$，若其 *-格式至多为 $\mathcal{F}'$ 且 *-次数至多为 D'，则存在一个可定义的胞腔 r-重参数化，其 *-格式为 const$(\mathcal{F}', r)$，且 *-次数为 poly$_{\mathcal{F}',r}(D')$。

证明。设 $Y = \{Y_{a'} : a' \in A'\}$ 如引理陈述所述。我们对 l'进行归纳。情形 $l' = 1$ 由引理的假设立即得出，因此我们假设该陈述对 l'成立，并令 $G = \{G_{a'} : Y_{a'} \to I^{\ell'+1} : a' \in A'\}$ 为定义在 Y 上的可定义映射族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}'$ 且 *-次数至多为 D'。

将 $G_{a'}$ 的坐标函数对每个 $a' \in A'$ 写作 $(G_{a'})_1, \ldots, (G_{a'})_{\ell'+1}$，令

$$\hat{G} := \{((G_{a'})_1, \ldots, (G_{a'})_{\ell'}) : Y_{a'} \to I^{\ell'} : a' \in A'\}.$$

该族的 *-格式和 *-次数均不超过 G 的相应值。因此，根据^ ˜归纳假设，G 存在一个可定义的胞腔 r-重参数化 $\Phi = \{(\Phi^{(i)}, A'_i) : i = 1, \ldots, k\}$，其 *-格式至多为 const$(\mathcal{F}', r)$，且 *-次数至多为 poly$_{\mathcal{F}',r}(D')$，其中 $A' = A'_1 \cup \ldots \cup A'_k$，并且对每个 $i = 1, \ldots, k$，$\Phi^{(i)} = \{\phi_{i,j} : A'_i \times \mathcal{C}_{i,j} \to I^{\ell} : j = 1, \ldots, K_i\}$，其中 K_i 为某个正整数。

现在，对每个 $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, K_i$，考虑定义在 $A'_i \times \mathcal{C}_{i,j}$ 上的可定义映射族，其定义如下:

$$G_{i,j} = \{(G_{a'})_{\ell'+1}(\phi_{i,j}(a', \cdot)) : \mathcal{C}_{i,j} \to I : a' \in A'_i\}.$$

其 *-格式为 const$(\mathcal{F}', r)$，*-次数为 poly$_{\mathcal{F}',r}(D')$。根据˜引理的假设，又存在一个可定义的胞腔 r-重参数化 $\Psi_{i,j}$，将$G_{i,j}$ 重参数化为 *-格式为 const$(\mathcal{F}', r)$、*-次数为 poly$_{\mathcal{F}',r}(D')$ 的形式。此外，给定 $i = 1, \ldots, k$，必要时我们可以进一步细分，并运用定理 2.3，假设由每个 $\Psi_{i,j}$ 给出的 A'_i划分在所有 $j = 1, \ldots, K_i$ 中都是相同的；也就是说，对于每个 $j = 1, \ldots, K_i$，我们都有一个可定义的胞腔 r-重参数化，将$G_{i,j}$ 重参数化为以下形式: $\tilde{\Psi}_{i,j} = \{(\Psi_i^{(p)}{}_{,j}, A'_{i,p}) : p = 1, \ldots, k_i\}$，其中 $A'_i = A'_{i,1} \cup \ldots \cup A'_{i,k_i}$，并且对于每个$p = 1, \ldots, k_i$，我们有

$$\Psi_{i,j}^{(p)} = \{\psi_{i,j,p,q} : A'_{i,p} \times \mathcal{C}'_{i,j,p,q} \to I^{\ell} : q = 1, \ldots, K_{i,p}\},$$

˜对于某个正整数 $K_{i,\ p}$，此外我们还有 $\Psi_{i,\ j}$ 具有 *-格式 const$(\mathcal{F}', r)$ 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F}',\ r}(D')$。

现在，对于每个 $i = 1$、.....、k 和 $p = 1$、.....、k_i，令

$$\Theta^{(i,p)} = \{\theta_{i,j,p,q} : A'_{i,p} \times \mathcal{C}'_{i,j,p,q} \to I^{\ell} : j = 1, \ldots, K_i, q = 1, \ldots, K_{i,p}\},$$

其中 $\theta_{i,j,p,q}(a', \cdot) = \phi_{i,j}(a', \psi_{i,j,p,q}(a', \cdot))$，对每个 $a' \in A'_{i,p}$ 都成立。集合 $\tilde{\Theta} = \{(\Theta^{i}{}_{,p}, A'_{i,p}) : i = 1$、.....、$k$, $p = 1$、.....、$k_i\}$ 的形式是 G 的可定义胞腔 r-重参数化，其 *-格式为 const$(\mathcal{F}', r)$，*-次数为 poly$_{\mathcal{F}',r}(D')$；但$\|\theta_{i,j,p,q}(a', \cdot)\|_r, \|G_{a'}(\theta_{i,j,p,q}(a', \cdot))\|_r \leq B$ 除外，其中 B 是一个正实数，对于每个 $i = 1$、.....、k, $j = 1$、.....、K_i, $p = 1$、.....、k_i,$q = 1$、.....、$K_{i,p}$ 和 $a' \in A_{i,p}$，它都是 const(r)。因此，我们可以应用引理 3.10 得出结论，获得 G 的可定义胞腔 r-重参数化，其 *-格式为 const$(\mathcal{F}', r)$，次数为 poly$_{\mathcal{F}',r}(D')$，如所需。□

以下是一个关键引理，它使我们能够抑制单变量函数可定义族的导数，其核心思想源自 Gromov [19]。

引理 3.12. 设 r 是一个满足 $r \geq 2$ 的整数，且 $\mathcal{F}$ 和 D 是正实数。设 $F = \{F_a : I \to I : a \in A\}$ 是一个由 C^{r-1}- 映射组成的可定义族，其 *- 格式至多为 $\mathcal{F}$，且 *-次数至多为 D，并满足 $\|F_a\|_{r-1} \leq 1$，对每个 $a \in A$ 均成立。族 F 有一个可定义的胞腔 r-重参数化，其 *-格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$，且 *-次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$。

证明。我们首先对 F（阶分别为 $r-1$ 和 r）两次应用推论 2.6，从而得到一个正整数 k、A 的一个划分 $A_1, \ldots, A_k$，以及对每个 $i = 1, \ldots, k$，一个正整数 K_i；此外，对每个 $i = 1, \ldots, k$ 和 $j = 1, \ldots, K_i$，有函数 $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j} : A_i \to I$，满足以下性质：对每个 $i = 1, \ldots, k$ 和 $a \in A_i$，当 $j = 1 \ldots, K_i$ 时，区间 $(\alpha_{i,j}(a), \beta_{i,j}(a))$ 两两不相交，且它们的闭包之并为 $[0,1]$；此外，对每个 $i = 1, \ldots, k$ 和 $j = 1, \ldots, K_i$，以下性质恰有一项成立：

(a) F_a 是 C^r，且对所有 $a \in A_i$，$_a(r)$在 $(\alpha_{i,j}(a), _j(a))$ 上为正；(b) F_a 是 C^r，且对所有 $a \in A_i$，$_a(r)$在 $(\alpha_{i,j}(a), _j(a))$ 上为负；(c) F_a 是 C^r，且对所有 $a \in A_i$，$_a(r)$在 $(\alpha_{i,j}(a), _j(a))$ 上恒为零。

首先考虑情形 (a)，即对于所有 $a \in A_i$，使得 $F_a^{(r)}$在 $(\alpha_{i,j}(a), \beta_{i,j}(a))$ 上为正的那些 $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, K_i$。

对于每个这样的 i, j，定义函数 $\chi_{i,j} : A_i \times I \to I$ 如下。若 $F_a^{(r)}$在 $(\alpha_{i,j}(a), _j(a))$ 上严格递减或为常数，则令 $\chi_{i,j}(a,x) = (\beta_{i,j}(a) - \alpha_{i,j}(a))x + \alpha_{i,j}(a)$。然而，若 $_a$ 在 $(\alpha_{i,j}(a), _j(a))$ 上严格递增，则令 $\chi_{i,j}(a,x) = (\alpha_{i,j}(a) - \beta_{i,j}(a))x + \beta_{i,j}(a)$。

接下来，定义函数 $G_{i,j} : A_i \times I \to I$，使其满足 $G_{i,j}(a,x) = F_a(\chi_{i,j}(a,x))$。注意，在这种情形下，对每个这样的 $a \in A_i$，都有 $\|G_{i,j,a}\|_{r-1} \leq 1$；并且，如果 $F_a^{(r)}$ 在 $(\alpha_{i,j}(a), \beta_{i,j}(a))$ 上为正且严格单调（分别为常数），那么 $G_{i,j,a}^{(r)}$ 在 I 上为正且严格递减（分别为常数）。

现在，对于每个这样的 i、j 和 $a \in A_i$，以及任意 $x \in I$，由中值定理可知，存在某个 $c_x \in [\frac{x}{2}, x]$，使得

$$\frac{4}{x} \geq \frac{G_{i,j,a}^{(r-1)}(x) - G_{i,j,a}^{(r-1)}(x/2)}{(x/2)} = G_{i,j,a}^{(r)}(c_x) \geq G_{i,j,a}^{(r)}(x).$$

情形 (b)，也就是对所有 $a \in A_i$，$F_a^{(r)}$ 在 $(\alpha_{i,j}(a), \beta_{i,j}(a))$ 上为负的那些 $i = 1$、...、k、$j = 1$、...、K_i，处理方式类似；相对于上述定义，我们根据 $F_a^{(r)}$ 是递增还是递减，交换 $\chi_{i,j}$ 的定义方式，然后以同样的方式定义 $G_{i,j}$。由此，对于属于情形 (b) 的那些 i、j，任意给定 $x \in I$ 和 $a \in A_i$，都有 $\frac{4}{x} \geq -G_{ij}^{(r)}{}_{,a}(x)$。

因此我们有

$$|G_{i,j,a}^{(r)}(x)| = |(F_a(\chi(a,x))^{(r)}| \leq \frac{4}{x}, \tag{3.1}$$

对于所有的 $x \in I$ 和 $a \in A_i$，以及属于情形 (a) 和 (b) 的那些 i, j。

现在，对于这些情形中的每个 $i = 1, \ldots, k$ 和 $j = 1, \ldots, K_i$，我们定义函数 $\phi_{i,j} : A_i \times I \to I$，使得 $\phi_{i,j}(a,x) = \chi_{i,j}(a,x^2)$，并考虑由 $\Phi^{(i)} = \{\phi_{i,j} : A_i \times I \to I : j = 1, \ldots, K_i\}$ 给出的可定义族 $\{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$。对于每个 $i = 1, \ldots, k$ 和 $j = 1, \ldots, K_i$，我们有 $\|(\phi_{i,j}(a,\cdot))\|_r \leq 2$，以及 $\|F_a(\phi_{i,j}(a,\cdot))\|_{r-1} \leq 1$；并且对于每个 $x \in I$，$|(F_a(\phi_{i,j}(a,x))^{(r)}|$ 有界于一个表达式，该表达式等于 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$ 加上项 $|2^r x^r (F_a(\chi_{i,j}(a,\cdot))^{(r)}(x^2)|$。根据 (3.1)，后者有界于 $2^{r+2}x^{r-2}$，而

这又是 const($\mathcal{F}, r$)，因为 $r \geq 2$。因此，事实上，对于那些属于情形 (a) 和 (b) 的 i, j 以及每个 $a \in A_i$，$\|F_a(\phi_{i,j}(a,\cdot))\|_r$ 是 const($\mathcal{F}, r$)。

至于情形 (c)，注意，对于这样的 $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, K_i$，如果我们直接将 $\phi_{i,j}$: $A_i \times I \to I$ 定义为 $\phi_{i,j}(a,x) = (\beta_{i,j}(a) - \alpha_{i,j}(a))x + \alpha_{i,j}(a)$，那么对于所有 $a \in A_i$，都有 $\|(\phi_{i,j}(a,\cdot))\|_r, \|F_a(\phi_{i,j}(a,\cdot))\|_r \leq 1$，因此，对于属于情形 (c) 的那些 i, j，将所有这类函数 $\phi_{i,j}$ 添加到 $\Phi^{(i)}$ 中。

最后，对每个 $i = 1, \ldots, k$，定义

$$\Psi^{(i)} = \Phi^{(i)} \cup \{\hat{\alpha}_{i,j} : A_i \times \{0\} \to I : j = 2, \ldots, K_i\},$$

其中，$\hat{\alpha}_{i,j}: A_i \times \{0\} \to I$ 由 $\hat{\alpha}_{i,j}(a, 0) = \alpha_{i,j}(a)$ 定义。将 $\Psi^{(i)}$ 的元素重新标记为 $\psi_{i,j}$，其中 $j = 1, \ldots, 2K_i + 1$。

这个函数族集合 $\tilde{\Psi} = \{(\Psi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$ 满足作为 F 的可定义胞腔 r-重参数化的定义，但有一点例外：存在一个正实数 B，它是 const($\mathcal{F}, r$)，使得对于每个 $i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, 2K_i+1$ 和 $a \in A_i$，都有 $\|\psi_{i,j}(a,\cdot)\|_r, \|F_a(\psi_{i,j}(a,\cdot))\|_r \leq B$。此外，这个集合的 *-格式为 const($\mathcal{F}, r$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$。因此，通过应用引理 3.10，我们得到 F 的一个可定义胞腔 r-重参数化，其 *-格式为 const($\mathcal{F}, r$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$，如所需。□

现在我们利用引理 3.12，证明一个关于定义在 I 子集上的可定义函数族之图的覆盖结果，该结果将作为证明 $(ii)_1$ 的基础。

引理 3.13. 设 r 为非负整数，$\mathcal{F}$ 和 D 为正实数。设 $X = \{X_a : a \in A\}$ 是 I^2 的可定义子集族，使得对每个 $a \in A$，X_a 的维数至多为 1，且 X 的 *-格式至多为 $\mathcal{F}$、*-次数至多为 D。存在正整数 k、将 A 划分为 A_1、……、A_k的可定义集，以及对每个 $i = 1$、……、k，存在正整数 K_i、可定义映射族 $\Phi^{(i)} = \{\phi_{i,j}: A_i \times I \to I^2 : j = 1$、……、$K_i\}$ 和可定义集 $\Sigma_i \subseteq A_i \times I^2$，它们共同满足以下性质（对每个 $a \in A_i$）：

(i) $\bigcup_{j=1}^{K_i} \phi_{i,j}(a, I) = X_a \setminus (\Sigma_i)_a$；(ii) $\#(\Sigma_i)_a$ 是多项式$_{\mathcal{F},r}(D)$；(iii) $\|\phi_{i,j}(a,\cdot)\|_r \leq 1$，对每个 $j = 1$、……、K_i均成立；(iv) 对每个 $j = 1$、……、K_i，$\phi_{i,j}(a,\cdot)$ 的第一坐标函数严格递增（因此是胞腔的）或为常数，而$\phi_{i,j}(a,\cdot)$的第二坐标函数严格单调或为常数。

此外，

(v) the collection $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$ *has* *-*format* const$(\mathcal{F}, r)$ *and* *-*degree* poly$_{\mathcal{F},r}(D)$.

证明。首先请注意，只需证明 $r \geq 2$ 的情形即可，因此从现在起我们假设 $r \geq 2$。

根据定理 2.3，我们有 $\mathcal{D}$ 的一个细胞分解 X，使得其细胞数 $\#\mathcal{D}$ 为 poly$_{\mathcal{F}}(D)$，且 $\mathcal{D}$ 中每个（不一定是基本的）细胞的 *-格式为 const($\mathcal{F}$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F}}(D)$。首先注意到，这样的细胞分解会导出 $A_1, \ldots, A_k$ 的一个细胞分解 A，其细胞数也为 poly$_{\mathcal{F}}(D)$，且 $\mathcal{D}$ 中的每个细胞 C 都满足：对于某些 $i = 1, \ldots, k$，有 $\pi(C) = A_i$，其中 π 是将 $\mathcal{D}$ 投影到 A 上所得的投影。如有必要，进一步将定理 2.3 和推论 2.6（取 $r = 1$）应用于 $\mathcal{D}$ 中的细胞及其定义函数（注意，这不会改变 $*$-格式、$*$-次数及细胞数的界的类型），此外还可假设，对于每个 $i = 1, \ldots, k$，每个满足 $C \subseteq X$ 且 $\pi(C) = A_i$ 的细胞 $C \in \mathcal{D}$ 都具有以下五种形式之一：

(1) $C =$ 是 graph$(F|_{(g,h)_{A_i}})$，其中 g 和 h 是定义在 A_i 上的连续可定义函数；g 的值域包含于 I，或者 g 是取值为 0 的常值函数；h 的值域包含于 I，或者 h 是取值为 1 的常值函数；我们有 $g < h$；$F\colon (g,h)_{A_i} \to I$ 是一个连续可定义函数；此外，以下三种性质恰有一种成立：

(a) 对所有 $a \in A_i$，函数 F_a 在 $(g(a)\ h(a))$ 上 C^1 且严格单调，并且在 $(g(a)\ h(a))$ 上 $\|F_a'\| \leq 1$；(b) 对所有 $a \in A_i$，函数 F_a 在 $(g(a)\ h(a))$ 上 C^1 且严格单调，并且在 $(g(a)\ h(a))$ 上 $\|F_a'\| > 1$；(c) 对所有 $a \in A_i$，函数 F_a 在 $(g(a)\ h(a))$ 上为常数；

(2) $C = (F,H)^{\mathrm{graph}(g)}$，其中 $g\colon\ A_i \to I$ 是连续的可定义函数；F 和 H 是定义在 graph(g) 上的连续可定义函数；F 的值域包含于 I，或者 F 是取值为 0 的常值函数；H 的值域包含于 I，或者 H 是取值为 1 的常值函数；并且有 $F < H$；(3) $C =$ graph$(F|_{\mathrm{graph}(g)})$，其中连续可定义函数 $g\colon\ A_i \to I$ 和 $F\colon$ graph$(g) \to I$。

现在我们依次考虑这些形式的细胞。

首先，令 $i \in \{1,\dots,k\}$，并令 $C =$ graph$(F|_{(g,h)_{A_i}})$ 为 $\mathcal{D}$ 中一个形式为 (1a) 且具有 $C \subseteq X$ 的细胞。我们定义族 $F_C := \{(F_C)_a\colon\ I \to I\colon\ a \in A_i\}$，其中

$$(F_C)_a(x) = F_a((h(a) - g(a))x + g(a)),$$

对每个 $a \in A_i$ 均如此。该族 F_C 具有 *-格式 const$(\mathcal{F})$ 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F}}(D)$，此外，对所有 $a \in A_i$，都有 $\|(F_C)_a\|_1 \leq 1$。我们可以应用引理 3.12，取 $r = 2$，从而得到一个可定义胞腔 2-重参数化 $\tilde{\Psi}_{2,C} = \{(\Psi^{(i,i_2)})_C, A_{i,i_2,C})\colon\ i_2 = 1,\dots,k_{2,C}\}$，其作用于 F_C，具有 *-格式 const$(\mathcal{F},r)$ 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$。若 $r = 2$，则停止。若 $r > 2$，则分别处理每个 $\Psi^{(i,i_2)}{}_C$，再次应用引理 3.12，这次取 $r = 3$，作用于 $F_{i_2,C} := \{(F_C)_a(\psi(a,\cdot))\colon\ a \in A_{i,i_2,C}\}$，对每个 $\psi \in \Psi^{(i,i_2)}{}_C$ 均如此。如此继续，按需重复任意多次（总计至多 $r-1$ 次），我们便得到一个可定义胞腔 r-重参数化 $\tilde{\Psi}_C = \{(\Psi^{(i,i')}{}_C, A_{i,i',C})\colon\ i' = 1,\dots,k_C\}$，其作用于 F_C，具有 *-格式 const$(\mathcal{F},r)$ 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$，其中 $A_i = A_{i,1,C} \cup \ldots \cup A_{i,k_C,C}$。

注意，对于每个 $i' = 1$、...、k_C，每个 $\psi \in \Psi_C^{(i,i')}$ 的定义域要么是 $A_{i,\ i',\ C} \times I$，要么是 $A_{i,\ i',\ C} \times \{0\}$。对于那些定义域为 $A_{i,\ i',\ C} \times I$ 的 $\psi \in \Psi_C^{(i,i')}$，我们定义相应的映射 $\phi\colon\ A_{i,\ i',\ C} \times I \to I^2$ 如下：

$$\phi(a,x) = ((h(a) - g(a))\psi(a,x) + g(a), F_a((h(a) - g(a))\psi(a,x) + g(a))),$$

并令 $\Phi^{(i,i')}{}_C$ 为所有此类映射 ϕ 构成的集合。该集合具有如下性质：对于每个 $i' = 1$、...、k_C 以及 $a \in A_{i,\ i',\ C}$，映射 $(\Phi^{(i,i')}{}_C)_a = \{\phi(a,\cdot)\colon\ \phi \in \Phi^{(i,i')}{}_C\}$ 的像覆盖 C_a，即 C 在 a 上方的纤维；但可能有一个大小为 poly$_{\mathcal{F},\ r}(D)$ 的有限集除外，该有限集可以明确描述为以下集合在 a 上方的纤维：

$$\Sigma_{i,i',C} = \{(a,\psi(a,0),F_a(\psi(a,0)) \in A \times I^2\colon \psi \in \Psi_C^{(i,i')} \text{ with } \mathrm{dom}(\psi) = A_{i,i',C} \times \{0\}\}.$$

此外，对于所有 $\phi \in \Phi_C^{(i,i')}$ 以及 $a \in A_{i,i',C}$，首先根据构造可知 $\|\phi(a,\cdot)\|_r \leq 1$；此外，$\phi(a,\cdot)$ 的第一坐标函数严格递增（因此是胞腔的），而 $\phi(a,\cdot)$ 的第二坐标函数严格单调，因为相应的映射 $\psi(a,\cdot)$ 是胞腔的，且 F_a 严格单调。令 $\tilde{\Phi}_C = \{(\Phi^{(i,i')}{}_C, A_{i,i',C})\colon\ i' = 1,\dots,k_C\}$。

对于情形 (1b)，我们可以仿照情形 (1a) 进行论证，因此省略细节，只说明所需的修改。对于 $i \in \{1,\dots,k\}$ 以及一个细胞 $C = \mathrm{graph}(F|_{(g,h)_{A_i}})$（属于 $\mathcal{D}$，且 $C \subseteq X$ 具有 (1b) 的形式），我们在此情形下通过如下设定来定义族 F_C

$$(F_C)_a(x) = F_a^{-1}((\hat{h}(a) - \hat{g}(a))x + \hat{g}(a)),$$

对每个 $a \in A_i$，其中 $\hat{g}(a) := \lim_{x\to g(a)+} F_a(x)$ 且 $h(a) := \lim_{x\to h(a)-} F_a(x)$，对每个 $a \in A_i$。得到划分 $A_i = A_{i,1,C} \cup \ldots \cup A_{i,k_C,C}$ 以及可定义的胞腔 r-重参数化 $\tilde{\Psi}_C = \{(\Psi^{(i,i')})_C, A_{i,i',C}) : i' = 1,\dots,k_C\}$ of F_C of *-格式 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$ 且 *-次数 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$ 后，通过如上使用引理 3.12 进行论证，我们对每个 $i' = 1,\dots,k_C$ 及每个 $\psi \in \Psi^{(i,i')}_C$，其定义域为 $A_{i,i',C} \times I$，定义映射 $\phi: A_{i,i',C} \times I \to I^2$ 如下：

$$\phi(a,x) = (F_a^{-1}((\hat{h}(a) - \hat{g}(a))\psi(a,x) + \hat{g}(a)), (\hat{h}(a) - \hat{g}(a))\psi(a,x) + \hat{g}(a)).$$

于是，对于每个 $i' = 1,\dots,k_C$，我们设定

$$\Sigma_{i,i',C} = \{(a, F_a^{-1}(\psi(a,0)), \psi(a,0)) \in A \times I^2 : \psi \in \Psi_C^{(i,i')} \text{ with } \mathrm{dom}(\psi) = A_{i,i',C} \times \{0\}\}.$$

集合 $\tilde{\Phi}_C = \{(\Phi^{(i,i')})_C, A_{i,i',C}) : i' = 1,\dots,k_C\}$ 随后以类似方式定义，而这一设置具有与情形 (1a) 相同的性质。

此时，我们再次应用定理 2.3，以进一步细化我们的细胞分解 $\mathcal{D}$，从而迄今构造的一切都可视为相对于同一个划分 $A_i = A_{i,1} \cup \ldots \cup A_{i,n_i}$ 定义，其中每个 $i = 1,\dots,k$ 都如此。根据定理 2.3，这一新的细胞分解的大小仍为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$。对于每个 $i = 1,\dots,k$, $i' = 1,\dots,n_i$，我们通过对所有满足 $C \subseteq X$ 且 $\pi(C) = A_i$ 为形式 (1a) 或 (1b) 的细胞 $C \in \mathcal{D}$，取集合 $\Phi^{(i,i')}_C$（分别为集合 $\Sigma_{i,i',C}$）的并，来定义 $\Phi^{(i,i')}$（分别为 $\Sigma_{i,i'}$）。可定义族的集合 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i,i')}, A_{i,i'}) : i = 1,\dots,k, i' = 1,\dots,n_i\}$ 的 *- 格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$，*- 次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$。此外，对于每个 $i = 1,\dots,k$, $i' = 1,\dots,n_i$ 以及 $a \in A_{i,i'}$，$\Phi^{(i,i')}_a$ 中的映射覆盖了上述那些满足 $C \subseteq X$ 且 $\pi(C) = A_{i,i'}$ 为形式 (1a) 或 (1b) 的细胞 $C \in \mathcal{D}$ 在 a 上方的纤维之并，但不包括大小为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$ 的有限集 $(\Sigma_{i,i'})_a$。

现在我们采用对 $\mathcal{D}$ 的这一细化，并将划分重新标记为 $A = A_1 \cup \ldots A_k$，因此目前已得到一组可定义族 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1,\dots,k\}$，以及一组可定义集 $\Sigma_i \subseteq A_i \times I^2$，其中 $i = 1,\dots,k$，定义如上。（注意，尽管我们进一步细化了 $\mathcal{D}$，但这并未引入任何新的 (1a) 或 (1b) 形式的细胞。）

对于每个 $i = 1,\dots,k$，以及 $\mathcal{D}$ 中每个满足 $C \subseteq X$ 且 $\pi(C) = A_i$ 为 (1c) 形式的细胞 $C = \mathrm{graph}(F|_{(g,h)_{A_i}})$，我们定义 $\chi_C: A_i \times I \to I^2$ 为

$$\chi_C(a,x) = ((h(a) - g(a))x + g(a), F_a((h(a) - g(a))x + g(a))),$$

并将 χ_C 加入 $\Phi^{(i)}$，这不会改变 $\tilde{\Phi}$ 的 *-格式和 *-次数。显然，对于所有 $a \in A_i$，都有 $\|\chi_C(a,\cdot)\|_r \le 1$；$\chi_C(a,\cdot)$ 的第一坐标函数严格递增（因而是胞腔的），而 $\chi_C(a,\cdot)$ 的第二坐标函数为常数。

对于每个 $i = 1$、...、k，以及 $\mathcal{D}$ 中满足 $C \subseteq X$ 且 $\pi(C) = A_i$ 具有形式 (2) 的每个细胞 $C = (F,H)^{\mathrm{graph}(g)}$，我们定义 $\theta_C: A_i \times I \to I^2$ 为

$$\theta_C(a,x) = (g(a), (H_a(g(a)) - F_a(g(a)))x + F_a(g(a))),$$

并将 θ_C 加到 $\Phi^{(i)}$ 上，这同样不会改变 $\tilde{\Phi}$ 的 *-格式和 *-次数。显然，对所有 $a \in A_i$，都有 $\|\theta_C(a,\cdot)\|_r \leq 1$； $\theta_C(a,\cdot)$ 的第一坐标函数是常数，而 $\theta_C(a,\cdot)$ 的第二坐标函数严格递增。

最后，对于每个 $i = 1, \ldots, k$，以及 $\mathcal{D}$ 中满足 $C \subseteq X$ 和 $\pi(C) = A_i$ 具有形式 (3) 的每个细胞 $C = \text{图}(F|_{\text{graph}(g)})$，我们用集合 $C_{A_i} = \{(a, g(a)\ F_a(g(a))) \in A_i \times I^2 : a \in A_i\}$ 扩充 Σ_i。由于 $\#\mathcal{D}$ 是多项式 $_{\mathcal{F},\ r}(D)$，我们显然也有，对于每个 $i = 1, \ldots, k$ 和 $a \in A_i$，$\#(\Sigma_i)_a$ 仍是多项式 $_{\mathcal{F},\ r}(D)$。

最后，我们注意到，如此构造的集合 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$ 与集合 Σ_i（其中 $i = 1, \ldots, k$）满足引理陈述中的所有性质 (i)–(v)。□

现在我们可以证明定理 3.8 的基例 $(i)_1$ 和 $(ii)_1$。

$(i)_1$ 的证明。这个情形很直接，但为了说明可以得到所需的有效界，我们仍给出详细证明。设 $X = \{X_a : a \in A\}$ 是 I 的一个可定义子集族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，*-次数至多为D。由定理 2.3，存在 X 的一个细胞分解 $\mathcal{D}$，其大小为 $\text{poly}_{\mathcal{F}}(D)$，且其中各细胞的 *-格式为 $\text{const}(\mathcal{F})$，*-次数为 $\text{poly}_{\mathcal{F}}(D)$。由此又可得到 $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ 的一个细胞分解；对于每个 $i = 1, \ldots, k$，我们可以将 $\mathcal{D}$ 中投影到 A_i 的（不一定是基本的）细胞标记为 $C_{i,j}$，其中 $j = 1, \ldots, K_i$，某个正整数 K_i。这些细胞 $C_{i,j}$ 的形式为 $\text{graph}(f)$，其中 $f : A_i \to I$；或者形式为 $(f, g)_{A_i}$，其中 f 和 g 的定义域为 A_i，f 的值域包含于 I，或为取值 0 的常值函数，而 h 的值域包含于 I，或为取值 1 的常值函数。若 $C_{i,j}$ 的形式为 $\text{graph}(f)$，则定义 $\phi_{i,j} : A_i \times \{0\} \to I$ 为 $\phi_{i,j}(a, x) = f(a)$；若 $C_{i,j}$ 的形式为 $(f, g)_{A_i}$，则定义 $\phi_{i,j} : A_i \times I \to I$ 为 $\phi_{i,j}(a, x) = (g(a) - f(a))x + g(a)$。令 $\Phi^{(i)} := \{\phi_{i,j} : j = 1, \ldots, K_i\}$，对每个 $i = 1, \ldots, k$，便得到所需的 X 的可定义胞腔 r-参数化，其 *-格式为 $\text{const}(\mathcal{F})$，*-次数为 $\text{poly}_{\mathcal{F}}(D)$。□

$(ii)_1$的证明。我们将由引理 3.13 推导出 $(ii)_1$。设 $X = \{X_a : a \in A\}$ 是 I 的可定义子集族，且设 $F = \{F_a : X_a \to I^{\ell'} : a \in A\}$ 是定义在 X 上的可定义映射族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，*-次数至多为 D。根据引理 3.11，只需在 $\ell' = 1$ 的情形下证明该命题，因此从现在起我们假设这一情形成立。这意味着 $\Gamma := \{\text{graph}(F_a) : a \in A\}$ 是一个可定义集合族，我们可以对其应用引理 3.13；由此得到一个可定义族的集合 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$，其中 $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$，以及一个可定义集的集合 Σ_i，其中 $i = 1, \ldots, k$，这些对象都具有引理 3.13 陈述中给出的性质。

此外，回顾引理 3.13 的证明可知，对于每个 $i = 1$，....., k，Σ_i 是 $\text{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$ 个下列形式之一的集合之并：

(a) $\{(a, g(a, 0)\ F_a(g(a, 0))) \in A \times I^2 : a \in A_i\}$，其中 $g : A_i \times \{0\} \to I$ 可定义的；(b) $\{(a, g(a)\ F_a(g(a))) \in A \times I^2 : a \in A_i\}$，其中 $g : A_i \to I$ 可定义的。

显然，只需假设构成每个 Σ_i 的所有集合实际上都属于第一种形式；在后一种情形下，只需平凡地扩展 g 的定义域即可。对于每个 $i = 1, \ldots, k$，将 Σ_i 定义中涉及的函数 $g : A_i \times \{0\} \to I$ 标记为 $g_{i,\ 1}, \ldots, g_{i,\ L_i}$，其中 L_i 为某个正整数。

现在，对于每个 $i = 1, \ldots, k$，令

$$\Psi^{(i)} = \{\phi_1 \colon A_i \times I \to I \colon \phi = (\phi_1, \phi_2) \in \Phi^{(i)}\} \cup \{g_{i,j} : A_i \times \{0\} \to I : j = 1, \ldots, L_i\},$$

并且集合 $\tilde{\Psi} = \{(\Psi^{(i)}, A_i) \colon i = 1, \ldots, k\}$。

由引理 3.13（i）、（iii）和（iv），可知 Ψ 是 F 的可定义胞腔式 r 重参数化（特别地，在（iv）中，对于所有 $\phi \in \Phi^{(i)}$，$i = 1, \ldots, k$，ϕ_1 都是胞腔的，因为 Γ 的胞腔分解中不存在形如 (2) 的胞腔）；并且由（ii）和（v），其 *-格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$，*-次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},\, r}(D)$。□

此外，我们已经具备证明定理 3.8 的第一个归纳步骤的条件。

（i）$_{\ell+1}$ 的证明。假设（ii）$_\ell$ 成立，并且 $X = \{X_a \colon a \in A\}$ 是 $I^{\ell+1}$ 的一个可定义子集族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，*-次数至多为 D，如（i）$_{\ell+1}$ 所述。由定理 2.3，我们可以假设每个 X_a 都是一个细胞。此外，分别处理以下各情形后，我们可以假设存在一个可定义细胞族 $Y = \{Y_a \colon a \in A\}$，使得对每个 $a \in A$，$Y_a \subseteq I^\ell$ 成立，并且所有细胞 X_a 要么都具有 $X_a = \mathrm{graph}(f_a)$ 的形式，其中 $f = \{f_a \colon Y_a \to I \colon a \in A\}$ 是定义在 Y 上的可定义函数族；要么所有 X_a 都具有 $X_a = (f_a, g_a)_{Y_a}$ 的形式，其中 f 和 g 是定义在 Y 上的可定义函数族，而 f 要么具有 $\{f_a \colon Y_a \to I \colon a \in A\}$ 的形式，要么对于每个 $a \in A$，f_a 都是取值为 0 的常值函数，定义在 Y_a 上；并且 g 要么具有 $\{g_a \colon Y_a \to I \colon a \in A\}$ 的形式，要么对于每个 $a \in A$，g_a 都是取值为 1 的常值函数，定义在 Y_a 上。此外，在每种情形下，族 Y、f 以及（若适用）g 的 *-格式均为 $\mathrm{const}(\mathcal{F})$，*-次数均为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F}}(D)$。我们将考虑情形 $X_a = (f_a, g_a)_{Y_a}$，而将类似的情形 $X_a = \mathrm{graph}(f_a)$ 留给读者。

假设对所有 $a \in A$，$X_a = (f_a, g_a)_{Y_a}$。若 $f = \{f_a \colon Y_a \to I \colon a \in A\}$ 和 $g = \{g_a \colon Y_a \to I \colon a \in A\}$，则我们可以将（$ii$）$_\ell$ 应用于族 $H := \{(f_a, g_a) : Y_a \to I^2 : a \in A\}$，从而得到一个可定义的胞腔 r-重参数化 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) \colon i = 1, \ldots, k\}$，其对应于 H，且 *-格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$，*-次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$。若 f 或 g 具有上一段所列的其他形式之一，则我们改为酌情将（ii）$_\ell$ 应用于 f，将（ii）$_\ell$ 应用于 g，或将（i）$_\ell$ 应用于 Y，以得到一个合适的集合 Φ。

对于每个 $i = 1, \ldots, k$ 和 $\phi_{i,\, j} \colon A_i \times \mathcal{C}_{i,\, j} \to Y_a \in \Phi^{(i)}$，我们定义 $\psi_{i,\, j} \colon A_i \times (\mathcal{C}_{i,\, j} \times I) \to X_a$ 如下：

$$\psi_{i,j}(a, x_1, \ldots, x_{\ell+1}) = (\phi_{i,j}(a, x_1, \ldots, x_\ell), (g_a(\phi_{i,j}(a, x_1, \ldots, x_\ell)) - f_a(\phi_{i,j}(a, x_1, \ldots, x_\ell)))x_{\ell+1} + f_a(\phi_{i,j}(a, x_1, \ldots, x_\ell))).$$

对于每个 $i = 1, \ldots, k$，令 $\Psi^{(i)}$ 为所有此类映射 $\psi_{i,j}$ 的集合。于是 $\tilde{\Psi} = \{(\Psi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$ 构成 X 的可定义胞腔 r- 参数化，不过，对于每个 $i = 1, \ldots, k$，对于映射 $\psi_{i,j} \in \Psi^{(i)}$ 中的每一个以及每个 $a \in A_i$，我们有 $\|\psi_{i,j}(a, \cdot)\|_r$ 不一定以 1 为界，而是以一个有效常数 B 为界，该常数仅取决于 ℓ；由注 3.9 可知，它等于 $\mathrm{const}(\mathcal{F})$。因此，我们可以应用引理 3.10 得出结论。□

现在我们来到了本节最后一个引理。它将使我们能够证明定理 3.8 的最后一个归纳步骤，即 $(ii)_{\ell+1}$：将问题化归为第一变量被视为参数时，具有有界导数的可定义函数族这一情形。

为了证明这个引理，我们将使用 [6], 中的以下结果，这里不加证明地引用。

事实 3.14（[6, 引理 16]）。设 ℓ 为正整数。设 $f\colon I^\ell \to I$ 可定义的，并假设对所有 $j = 2, \ldots, \ell$，都有 $\left|\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|\right| \leq 1$。使函数 $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdot)$ 无界的 $x_1 \in I$ 只有有限多个。

引理 3.15。设 ℓ 为正整数，设 r 为非负整数，设 $\mathcal{F}$和 D为正实数。假设 $(ii)_1, \ldots, (ii)_\ell$ 成立。设 $X = \{X_a : a \in A\}$ 为 $I^{\ell+1}$ 的可定义子集族，并设 $F = \{F_a : X_a \to I : a \in A\}$为定义在 X 上的可定义函数族，其 *-格式至多为 $\mathcal{F}$，且 *-次数至多为D。假设对于每个 $a \in A$，函数 F_a 都是 C^r，并且对于每个 $x_1 \in I$，我们有

$$\|F_a(x_1, \cdot)\|_r \leq 1. \tag{3.2}$$

存在一个 F 的可定义胞腔 r-重参数化，其 *-格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$，*-次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$。

证明。我们采用 $\mathbb{N}^{\ell+1}$ 上的次数字典序，即 $\prec$ 在 $\mathbb{N}^{\ell+1}$ 上的良序，使得对于所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$，当且仅当 $|\beta| < |\alpha|$，或者 $|\beta| = |\alpha|$ 且 β 在字典序下严格小于 α 时，$\beta \prec \alpha$ 成立。

在此序下，对于所有满足 $|\alpha| \leq r$ 的 $\alpha \in \mathbb{N}^{\ell+1}$，我们通过对 α 进行归纳法，证明以下命题，从而证明该引理：

设 F 是引理 3.15 的陈述中所述的一个可定义族。那么，F 存在一个可定义细胞 0-重参数化 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$，其 *-格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$，*-次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$，使得对于所有 $i = 1, \ldots, k$、所有 $\phi_{i,j} \in \Phi^{(i)}$ 以及所有 $a \in A_i$，映射 $\phi_{i,j}(a, \cdot)$ 是 C^r，且满足 $\|\phi_{i,j}(a, \cdot)\|_r \leq 1$；并且，如果 $\beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$ 且满足 $\beta \preceq \alpha$，那么 $\|(F_a(\phi_{i,j}(a, \cdot)))^{(\beta)}\| \leq 1$。

设 $\alpha \in \mathbb{N}^{\ell+1}$。若 $\alpha = 0$，则取 $A_1 = A$，并令 $\Phi^{(1)}$ 仅由映射 ϕ_1: $A_1 \times I^{\ell+1} \to I^{\ell+1}$ 构成，该映射由 $\phi_1(a, x) = x$ 给出。我们有，$\{(\Phi^{(1)}, A_1)\}$ 是 F 的可定义细胞 0-重参数化，且具有基例 $(\dagger_0)$ 中所述的性质。

现在假设 $\alpha \succ 0$，因此 $|\alpha| > 0$，并且对于所有满足 $\beta \prec \alpha$ 的 $\beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$，$(\dagger_\beta)$ 均成立。特别地，$(\dagger_{\alpha'})$ 对 α 的直接前驱 $\alpha' \in \mathbb{N}^{\ell+1}$ 成立。令 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, A_i) : i = 1, \ldots, k\}$ 为此情形下由 $(\dagger_{\alpha'})$ 给出的 F 的可定义细胞 0- 重参数化。

我们的目标是证明 $(\dagger_\alpha)$。由以下论证可见，只需对每个族 $\{F_a(\phi_{i,j}(a, \cdot))$ 证明 $(\dagger_\alpha)$ 的结论：$a \in A_i\}$其中 $i = 1、\ldots、k$ 以及 $\phi_{i,j} \in \Phi^{(i)}$。假设对于每个 $i = 1、\ldots、k$ 以及 $\phi_{i,j} \in \Phi^{(i)}$，存在一个可定义细胞 0-重参数化 $\tilde{\Psi}_{i,j} = \{(\Psi_i^{(p)}, A_{i,p}) : p = 1、\ldots、k_i\}$，将 $\{F_a(\phi_{i,j}(a, \cdot)) : a \in A_i\}$ 重参数化，并具有 $(\dagger_\alpha)$ 结论所给出的性质。必要时进一步细分后，由定理 2.3，我们可以假设，对于每个 $i = 1、\ldots、k$，由每个 $\Psi_{i,j}$ 给出的 $A_i = A_{i,1} \cup \ldots \cup A_{i,k_i}$ 的划分在所有 $\phi_{i,j} \in \Phi^{(i)}$中都是相同的。于是，我们可以通过令 $\Theta^{(i,p)}$来定义映射集 $\tilde{\Theta} = \{(\Theta^{(i,p)}, A_{i,p}) : i = 1、\ldots、k,\ p = 1、\ldots、k_i\}$；对于每个 $i = 1、\ldots、k$ 以及 $p = 1、\ldots、k_i$，令其包含所有形如 $\theta(a, \cdot) = \phi_{i,j}(a, \psi(a, \cdot))$ 的映射，其中 $\phi_{i,j} \in \Phi^{(i)}$ 以及 $\psi \in \Psi_i^{(p)}$。该集合 $\tilde{\Theta}$ 是 F的一个可定义细胞 0-重参数化，并且具有 $(\dagger_\alpha)$ 中陈述的所有性质，但对于每个 $i = 1、\ldots、k$、$p = 1、\ldots、k_i$、$\theta \in \Theta^{(i,p)}$ 以及 $a \in A_{i,p}$，我们无法保证 $\|\theta(a, \cdot)\|_r$ 必然有界于

1. 然而，计算表明，存在某个正实数 B，它是 const($\mathcal{F}, r$)，使得 $\|\theta(a,\cdot)\|_r \le B$。随后，我们可以类比引理 3.10 的证明，通过与线性函数复合，得到一个 F 的可定义细胞 0-重参数化，并具有 ($\dagger_\alpha$) 中陈述的性质。

因此，我们固定 $i = 1,\dots,k$，并省略下标以简化记号。也就是说，在本证明的其余部分中，我们用 A 和 Φ 代替 A_i 和 $\Phi^{(i)}$，并令 $\phi\colon A \times C_j \to \mathbb{R}^{\ell+1}$ 为 Φ的一个固定元素，$_j$。对于每个 $a \in A$，我们设$G_a := F_a(\phi(a,\cdot))$，并针对族 $G := \{G_a : I^{\ell+1} \to I\colon a \in A\}$，证明与 ($\dagger_\alpha$) 类似的结论，其中该族取代 F。由归纳假设，我们已经知道，对于每个 $a \in A$, $\|G_a^{(\beta)}\| \le 1$，对所有满足 $\beta \preceq \alpha'$的 $\beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$，结论成立。注意，可定义族 G 具有 *-格式 const($\mathcal{F}, r$) 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F},\ r}(D)$。

首先假设 $\alpha_1 = 0$。由于对所有 $a \in A$，$\|\phi(a,\cdot)\|_r \le 1$，利用 (3.2) 以及 $\phi(a,\cdot)$ 的细胞性进行计算可得，对所有 $a \in A$，$\|G_a^{(\alpha)}\| \le B$，其中某个正实数 B 仅依赖于 $\mathcal{F}, r$。因此，按照引理 3.10 的证明，我们可以利用有限个线性映射得到所需的 G 的细胞 0-重参数化。

因此，我们可以假设 $\alpha_1 > 0$。再次对 A 进行划分，酌情应用定理 2.3 和定理 2.5，并重新编号后，我们可以假设：要么对所有 $a \in A$，$\|G_a^{(\alpha)}\| \le 1$；要么对所有 $a \in A$，$\|G_a^{(\alpha)}\| > 1$。在前一种情形下，无需进一步证明，因此假设对所有 $a \in A$，$\|G_a^{(\alpha)}\| > 1$。

令 $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{\ell+1}$ 表示 $\mathbb{R}^{\ell+1}$ 中的标准基。将事实 3.14 应用于 $G^{(\alpha-\varepsilon_1)a}$，可知对每个 $a \in A$，使得 $G_a^{(\alpha)}(x_1,\cdot)$ 无界的 x_1 只有有限多个。由定理 2.5，集合

$$\hat{A} = \{(a,x_1) \in A \times I\colon G_a^{(\alpha)}(x_1,\cdot) \text{ is unbounded}\}$$

具有 *-格式 const($\mathcal{F}, r$) 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$。由定理 2.3，必要时进一步分解 A，我们可以假设这类有序对的集合由 graph(f_1)$\cup\ldots\cup$graph(f_N) 给出，其中 N 是某个正整数，且函数 $f_t\colon A \to I$（ t =1,…,N）具有 *-格式 const($\mathcal{F}, r$) 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$。

对每个 $t = 1,\dots,N$，我们可以将 $(ii)_\ell$ 应用于可定义族 $\{G_{(a,f_t(a))} : I^\ell \to I : (a, f_t(a)) \in \text{graph}(f_t)\}$，从而得到该族的一个可定义胞腔 r- 重参数化 $\tilde{\Psi} = \{(\Psi^{(i')}, \hat{}A_{i'})\colon i' = 1,\dots,\hat{}k\}$，其 *-格式为 $\tilde{}$const($\mathcal{F}, r$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$。我们可以轻易地调整 Ψ，得到 $\hat{}\{(G|_{(\text{graph}(f_t))\times I^\ell})_a\colon a \in \pi(A_{i'})\}$ 的一个可定义胞腔 r-重参数化 $\tilde{\Psi}_+ = \{(\Psi^{(i')}+, \pi(\hat{}A_{i'}))\colon i' = 1,\dots,\hat{}k\}$（其中 π 是从 A 到 A 的投影），且其 *-格式和 *-次数具有相同的界。对每个 $i' = 1,\dots,\hat{}k$，$\psi \in \Psi^{(i')}+$ 和 $a \in \pi(\hat{}A_{i'})$，我们有 $\|G_a(\psi(a,\cdot))\|_r \le 1$。这个集合 $\tilde{\Psi}_+$ 将有助于构造我们所需的 G 的可定义细胞 0-重参数化。

为完成所需的 0-重新参数化，还需考虑 $G_a^{(\alpha)}(x_1,\cdot)$ 有界的情形（其中 $(a,x_1) \in \hat{}A$）。如有需要，我们可以在第一坐标上用一个线性映射对 G_a 进行前复合，从而将定义域中的 I 的一个子区间替换为 I 本身，因此从现在起可假设，对于所有 $a \in A$ 和所有 $x_1 \in I$，$G_a^{(\alpha)}(x_1,\cdot)$ 都是有界的。

对每个 $a \in A$，令

$$S_a = \left\{x \in I^{\ell+1} : |G_a^{(\alpha)}(x)| \ge \frac{1}{2}\|G_a^{(\alpha)}(x_1,\cdot)\|\right\}.$$

由定理 2.5，可定义族 $S = \{S_a : a \in A\}$ 具有 *-格式 const($\mathcal{F}, r$)，且 *-次数为 poly$_{\mathcal{F},\ r}$(D)。由可定义选择（推论 2.8），存在可定义映射族 $\gamma = \{\gamma_a : I \to S_a : a \in A\}$，使得每个 γ_a 的第一坐标函数都是单位元。此外，γ 具有 *-格式 const($\mathcal{F}, r$)，且 *-次数为 poly$_{\mathcal{F},\ r}$(D)。

考虑映射的可定义族

$$\{(\gamma_a, G_a^{(\alpha-\varepsilon_1)} \circ \gamma_a) : I \to I^{\ell+2} : a \in A\}.$$

根据 (ii)$_1$, ，存在该族的可定义胞腔的 r-重参数化 $\tilde{\Lambda} = \{(\Lambda^{(i')}, \check{}A_{i'}) : i' = \check{}1, \dots, \check{}k\}$，其 *-格式为 const($\mathcal{F}, r$)，* 次数为 poly$_{\mathcal{F},r}$($D$)。注意，这尤其是该族 γ 的可定义胞腔的 r-重参数化。对于每个 $i' = 1, \dots, \check{}k$ 和 $\lambda : \check{} A_{i'} \times \check{}\mathcal{C}_\lambda \to I$ 属于 $\Lambda^{(i')}$，考虑由将 $(a, x_1, x_2, \dots, x_{\ell+1})$ 映射到 $(\lambda(a, x_1)\ x_2, \dots, x_{\ell+1})$ 所定义的可定义映射 $(\lambda, id) : \check{} A_{i'} \times \check{}\mathcal{C}_\lambda \times I^\ell \to I^{\ell+1}$。显然，对于每个 $a \in A$，每个这样的映射 (λ, id) 都满足 $\|(\lambda, id)_a\|_r = \|(\lambda_a, id)\|_r \leq 1$。此外，对于每个 $a \in A$ 以及每个满足 $|\beta| \leq r$ 的 $\beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$，我们有

$$(3.3)\quad (G_a \circ (\lambda_a, id))^{(\beta)} = P_\beta\left(\left\{G_a^{(\beta')} \circ (\lambda_a, id) : \beta' \in \mathbb{N}^{\ell+1}, \beta' \prec \beta\right\}, \left\{\lambda_a^{(j)} : j \in \mathbb{N}, j \leq |\beta|\right\}\right) + (G_a^{(\beta)} \circ (\lambda_a, id)) \cdot (\lambda_a')^{\beta_1},$$

其中，P_β 是一个仅依赖于 β的多项式。

由 (3.3) 可得，存在一个正实数 B，它是$\mathcal{F}$和 r的常数，使得以下结论成立。

首先，对每个 $a \in A$ 以及满足$\beta \prec \alpha$的 $\beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$，$B$满足 $\|(G_a \circ (\lambda_a, id))^{(\beta)}\| \leq B$; 这里用到了：对所有 $a \in A$、$\|\lambda_a\|_r \leq 1$ 和 $\|G_a^{(\beta)}\| \leq 1$，以及所有满足$\beta \prec \alpha$的 $\beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$。

此外，对每个 $a \in A$，B 满足：

$$\|(G_a \circ (\lambda_a, id))^{(\alpha)}\| \leq B + \|(G_a^{(\alpha)} \circ (\lambda_a, id)) \cdot (\lambda_a')^{\alpha_1}\|,$$

因此也满足：

$$\begin{aligned}\|(G_a \circ (\lambda_a, id))^{(\alpha)}\| &\leq B + \|(G_a^{(\alpha)}(\lambda_a(x_1), \cdot))\|\|\lambda_a'\|^{\alpha_1} \\ &\leq B + 2\|G_a^{(\alpha)} \circ \gamma_a \circ \lambda_a\|\|\lambda_a'\|, \qquad (3.4)\end{aligned}$$

根据 S_a 和 γ_a的定义，以及 $\alpha_1 > 0$ 和 $\|\lambda_a'\| \leq 1$这一事实。

于是，对每个 $a \in A$,

$$\left(G_a^{(\alpha-\varepsilon_1)} \circ \gamma_a \circ \lambda_a\right)' = (G_a^{(\alpha)} \circ \gamma_a \circ \lambda_a) \cdot \lambda_a' + \sum_{j=2}^{\ell+1}\left[\left(G_a^{(\alpha-\varepsilon_1+\varepsilon_j)} \circ \gamma_a \circ \lambda_a\right) \cdot ((\gamma_j)_a \circ \lambda_a)'\right].$$

由于 λ 是 γ 的 r-参数化映射，因此对所有 $a \in A$，都有 $\|\lambda_a\|_r$, $\|\gamma_a \circ \lambda_a\|_r \leq 1$。此外，回想一下，对所有满足 $\beta \prec \alpha$ 的 $\beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$ 以及所有 $a \in A$，都有 $\|G_a^{(\beta)}\| \leq 1$。因此，$\|(G_a^{(\alpha)} \circ \gamma_a \circ \lambda_a) \cdot \lambda_a'\|$ 是常数($\mathcal{F}$)，故由 (3.4) 可知，$\|(G_a \circ (\lambda_a, id))^{(\alpha)}\|$ 是常数 ($\mathcal{F}, r$)。

令 $\Lambda^{(i')}{}_+$ 对每个 $i' = 1,\dots, \check{}k$ 都是满足 $\lambda \in \Lambda^{(i')}$ 的所有映射 (λ, id) 的集合，并令 $\tilde{\Lambda}_+ = \{(\Lambda^{(i')}\ A_{i'}) : i' = 1, \dots, \check{}k\}$。按照引理 3.10 的证明中的相同思路，我们可以用一个映射族的集合 Λ_+ 替换 Λ_+，其 *-格式为 const($\mathcal{F}, r$)，* 次数为 poly$_{\mathcal{F},r}$(D)，并且该集合不仅具有以下性质：

对于所有 $i' = 1, \dots, \check{k}$, $\lambda \in \Lambda^{(i')}+$ 以及 $a \in \check{A}_{i'}$，我们有 λ_a 是带有 $\|\lambda_a\|_r \le 1$ 的 $\tilde{C}^r$，而且，对于所有满足 $\beta \preceq \alpha$ 的 $\beta \in \mathbb{N}^{\ell+1}$，$\|(G_a \circ (\lambda_a, id))^{(\beta)}\| \le 1$。

$\tilde{}$所有以这种方式构造的 Λ_+，连同所有如上所述构造的 Ψ_+，构成了族 G 的一个可定义细胞 0-重参数化，并满足 $(\dagger_\alpha)$ 中列出的条件。因此，通过归纳法即可得出引理的结论。□

现在我们可以完成定理 3.8 的证明。

$(ii)_{\ell+1}$ 的证明。现在我们假设 $(i)_1$、……、$(i)_{\ell+1}$ 和 $(ii)_1$、……、$(ii)_\ell$ 均成立。

设 $X = \{X_a : a \in A\}$ 是 $I^{\ell+1}$ 的一个可定义子集族，并设 $F = \{F_a : X_a \to I^{\ell'} : a \in A\}$ 是定义在 X 上、* 格式至多为 $\mathcal{F}$ 且 * 次数至多为 D 的可定义映射族。根据引理 3.11，只需证明在 $\ell' = 1$ 的情形下该命题成立，因此从现在起我们假设这一点。

根据 $(i)_{\ell+1}$，存在一个对 X 的胞腔式 r 参数化，其 *-格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$，* -次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},\, r}(D)$。分别处理每个映射族 $F_a(\phi(a, \cdot))$，其中 ϕ 是固定的 r 参数化映射，而 a 遍历 A 的某个划分集，我们可以假设 X 是长度为 $\ell + 1$ 的基本胞腔的可定义族，例如 $X = \{\mathcal{C}_a : a \in A\}$。此外，应用定理 2.3 后，我们可以进一步划分 A，从而假设对所有 $a \in A$，基本胞腔 $\mathcal{C}_a$ 的维数相同。如果该维数不等于 $\ell+1$（对所有$a \in A$），那么我们可以将每个胞腔视为长度至多为 ℓ 的基本胞腔，并对相应的函数族应用 $(ii)_1$、……、$(ii)_\ell$ 中适当的结论，并相应调整所得的参数化映射。因此，我们可以假设对每个 $a \in A$，$\mathcal{C}_a = I^{\ell+1}$。作出这一约化并按此重新标记后，只需在可定义族 $F = \{F_a : I^{\ell+1} \to I : a \in A\}$ 的情形下，找到一个可定义的胞腔式 r 重参数化。

于是我们将 F 视为一个函数族

$$F^* = \{F_{(a,x_1)} : I^\ell \to I : a \in A, x_1 \in I\}$$

由 $F_{(a,x_1)}(x_2, \dots, x_{\ell+1}) = F_a(x_1, \dots, x_{\ell+1})$ 给出。将 $(ii)_\ell$ 应用于 F^*，我们得到一个可定义的胞腔式 r-重参数化 $\tilde{\Phi} = \{(\Phi^{(i)}, \check{A}_i) : i = 1, \dots, k\}$，其对应于 F^*，*-格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, r)$，*-次数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},r}(D)$，其中 $\check{A}_1 \cup \ldots \cup \check{A}_k = A \times I$。

根据定理 2.3，我们可以假设每个 $\check{A}_i$ 都是一个细胞。如果 $\check{A}_i =$ 是函数 $f : A_i \to I$ 的图（其中 A_i 是 $\check{A}_i$ 在 A上的投影），那么对于每个参数化映射 ϕ_i，我们都可以轻易定义一个新的参数化映射 $\hat{\phi}_{i,j} : \check{A}_i \times \mathcal{C}_{i,j} \to I^\ell$，其中 $\Phi^{(i)}$ 中的$\mathcal{C}_{i,j}$是长度为 ℓ的基本胞腔。该新映射定义为 $\hat{\phi}_{i,j}(a, 0, x) = (f(a), \phi_{i,j}(a, f(a), x))$。对于每个 $a \in A_i$，显然它具备属于 F_a的可定义胞腔式 r-重参数化所需的性质。

剩下的情形是 $\check{A}_i = (f, g)_{A_i}$，其中 f 和 g 是定义在 A_i 上的可定义连续函数（这里 A_i 仍是 $\check{A}_i$ 到 A的投影），且 f 的值域包含于 I，或者 f 是取值为 0 的常值函数；并且 g 的值域包含于 I，或者 g 是取值为 1 的常值函数。将映射 $x \mapsto ((g(a) - f(a))x_1 + f(a), x_2, \dots, x_{\ell+1})$ 与 F_a 复合后，对每个 $a \in A_i$，我们可以假设 $\check{A}_i = A_i \times I$，因此对每个 ϕ_i和 $_j \in \Phi^{(i)}$，$\|\phi_{i,j}(a, x_1, \cdot)\|_r, \|F_a(x_1, \phi_{i,j}(a, x_1, \cdot))\|_r \le 1$ 对所有 $a \in A_i$及所有 $x_1 \in I$均成立。

再次分别处理每个参数化映射 $\phi_{i,\ j}$ 属于 $\Psi^{(i)}$的情形，我们在证明余下部分只关注其中一个，记为 ϕ（从现在起省略指标 i、j，因此 ϕ 是从 $A \times (I \times \mathcal{C})$到 I^ℓ的映射）。我们定义映射族 $G := \{G_a : I^{\ell+1} \to I^{\ell+2} : a \in A\}$ 如下：

$$G_a(x_1, \dots, x_{\ell+1}) = (x_1, \phi(a, x_1, \dots, x_{\ell+1}), F_a(x_1, \phi(a, x_1, \dots, x_{\ell+1}))).$$

这个族 G 具有如下性质：对于所有 $a \in A$ 和 $x_1 \in I$，都有$\|G_a(x_1,\cdot)\|_r \leq 1$。此外，它具有 *-格式 const$(\mathcal{F},r)$ 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F},\,r}(D)$。注意，为了完成证明，只需找到 G 的一个可定义的胞腔r-重参数化，并满足所需的复杂度界。

由推论 2.7 可知，存在一个可定义集合族 $V = \{V_a : a \in A\}$，对每个 $a \in A$，其维数至多为 ℓ，且 V 的 *-格式为 const$(\mathcal{F},r)$、*-次数为 poly$_{\mathcal{F},\,r}(D)$，并且对每个 $a \in A$，G_a 在 $I^{\ell+1} \setminus V_a$ 上是 C^r。

由 $(i)_{\ell+1}$，存在一个可定义的胞腔 r-参数化 $\tilde{\Omega} = \{(\Omega^{(i)}, A_i) : i = 1,\dots,k\}$，它对应于 V，其 *-格式为 const$(\mathcal{F},r)$，*-次数为 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$。同样，对每个族 $G_{i,j} := \{G_a(\omega_{i,j}(a,\cdot)) : a \in A_i\}$，其中 $i = 1,\dots,k$ 和 $\omega_{i,j} \in \Omega^{(i)}$，分别进行处理后，我们可以假设所处理的是一个定义在长度至多为 ℓ 的基本胞腔族上的可定义映射族。根据需要应用 $(ii)1,\dots,(ii)_\ell$ 中任一项，我们可以得到每个 $G_{i,j}$ 的可定义胞腔 r-重参数化，随后很容易将其调整为函数 G 在 V 上的可定义胞腔 r-重参数化，且具有所需的 *-格式和 *-次数。

为了完成证明，现在只需找到族 $\{(G_a)|_{I^{\ell+1}\setminus V_a} : a \in A\}$ 的一个可定义的胞腔 r-再参数化。随后，我们可以将其与上文得到的族 $\{(G_a)|_{V_a} : a \in A\}$ 的可定义胞腔 r-再参数化结合起来；必要时使用定理 2.3 进一步划分，从而得到 G 的一个可定义的胞腔 r-再参数化。

再次应用 $(i)_{\ell+1}$，族 $I^{\ell+1} \setminus V_a$ 有一个可定义的胞腔 r-参数化 $\tilde{\Theta} = \{(\Theta^{(i)}, \hat{A}_i) : i = 1,\dots,\hat{k}\}$，其 *- 格式为 const$(\mathcal{F},r)$，*- 次数为 poly$_{\mathcal{F},r}(D)$。最后，只需对每个 $i = 1,\dots,\hat{k}$ 以及 $\theta_{i,j} \in \Theta^{(i)}$, $\hat{}$，找到族 $G_{i,j} := \{G_a(\theta_{i,j}(a,\cdot)) : a \in \hat{A}_i\}$ 的一个可定义的胞腔 r-再参数化，使其满足所需的 *-格式和 *-次数界。仿照上文将 G 限制到 V 的情形进行论证，根据归纳假设 $(ii)1,\dots,(ii)_\ell$，只需考虑对所有 $a \in \hat{A}_i$，均有 dom$(\theta_{i,j}(a,\cdot)) = I^{\ell+1}$ 的情形。

现在，我们可以充分利用 $\theta_{i,j}$ 的细胞性。此外，我们还有 $\hat{}\,\hat{}\|\theta_{i,j}(a,\cdot)\|_r \leq 1$，对每个 $a \in A_i$ 都成立；并且 $\|G_a(x_1,\cdot)\|_r \leq 1$，对所有 $a \in A_i$ 和 $x_1 \in I$ 都成立。利用 $\theta_{i,j}$ 的许多偏导数因细胞性而为零这一事实进行计算，可知存在一个正实数 B，它是 const$(\mathcal{F},r)$，使得对所有 $a \in \hat{A}_i$ 和 $x_1 \in I$，均有 $\|G_a(\theta_{i,j}(x_1,\cdot))\|_r \leq B$。再应用引理 3.10 后，我们可以假设对所有 $\hat{}\,\hat{}a \in A_i$ 和 $x_1 \in I$，均有 $\|G_a(\theta_{i,j}(x_1,\cdot))\|_r \leq 1$。然后，我们可以对族 $G_{i,j}$ 应用引理 3.15，从而完成证明。□

4. 有效 Pila–Wilkie 定理

本节将证明 Pila–Wilkie 计数结果的有效形式。这些结果包括 Pila [35]（见定理 4.4）和 Habegger–Pila [23]（见推论 4.6）结果的有效版本，并由前者推导出定理 1.1。

给定一个集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$、一个正整数 g 和一个正实数 H，记

$$X(g,H) := \{x \in X : [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] \leq g, H(x) \leq H\},$$

其中 $H(x)$ 是通常的乘法 Weil 高度。

我们称可定义集 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 为基本块，若其连通且正则，维数为 k，并且包含于一个连通且正则的半代数集 S 中，该半代数集的维数为 k。该基本块的次数为 S的次数。注意，一个点

是一个基本块。我们称可定义族 X 为基本块族，若其每个纤维都是一个基本块。

备注 4.1。基本块这一概念由 Pila [35], 提出，他还引入了一种稍为一般的块的概念。相关文献中的主要结果都是以块的形式表述的。在 [35, 备注 3.3], 中提到，主要论述或许可以加强，要求结论中的块实际上都是基本块。本文证明了这一更强的形式，因此无需引入一般的块。另见 Pila 最近出版的著作[36] ，其中有类似的表述（在一般情形下）。

我们需要以下辅助多项式构造，该构造归功于 Habegger（可从 [21], 中的论证中提取；该文沿用了 Wilkie 在 [38]中对计数定理的阐述）。

命题 4.2。设 k、n 和 d 为非负整数， g 为正整数，且满足 $k < n$ 和 $d \geq (g+1)n$。存在非负整数 r 和c，以及正实数 ε，它们全都是 const(g,k,n,d)，并具有如下性质。设 $\phi\colon I^k \to \mathbb{R}^n$ 是满足 $\|\phi\|_r \leq 1$的 C^r 。设 X 为 ϕ的像。那么，若 H 是满足 $H \geq 1$的实数，则集合 $X(g,H)$包含于至多 cH^ε 个次数至多为 d的代数超曲面的并集中。此外，当$d \to \infty$时， $\varepsilon \to 0$ 。

证明。该论证可从 [21, 引理 22]的证明中提取。首先，我们借用 [21]中的以下记号：对于任意非负整数 n 和d，令 $D_n(d)=\binom{n+d}{n}$ 表示 n 个变量中次数至多为 d的单项式的数量。然后选取 r 为满足以下性质的唯一正整数：$(g+1)D_k(r-1) \leq D_d(n) < (g+1)D_k(r)$，并令 $\varepsilon = (k+1)ng\left(\frac{d}{r-1}\right)$。注意， r和 ε均为const(g,k,n,d)。计算表明（参见 [21], 第1664页，不等式 (38)），当 $d \to \infty$时， $\frac{d}{r-1} \to 0$ ，因此当 $d \to \infty$时， $\varepsilon \to 0$ 。现在将 $b = r-1$ 和 $B = 1$用于 [21,命题 16] ，得到一个非负整数 c，它是const(g,k,n,d)，使得该命题的结论成立。□

下面的命题给出了主要的归纳步骤。

命题 4.3。设 m 和 n 为非负整数， g 为正整数，且 $\mathcal{F}$、D 和 ε 为正实数。假设 $X \subseteq I^{m+n}$ 是一个 *-格式至多为 $\mathcal{F}$ 、*-次数至多为 D 的可定义族。存在一个非负整数 $M \geq m$ 以及可定义族 $X^<$、$X^{bl} \subseteq I^M \times I^n$ ，其 *-格式为 const$(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$，*-次数为 poly$_{\mathcal{F},\ g,\ \varepsilon}(D)$，使得以下结论成立。

(1) X^{bl} 在 I^n 中的每个非空纤维都是次数为 const$(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$ 的基本块。(2) 对每个 $a \in I^m$ 和实数 $H \geq 1$，存在一个有限集 $\Lambda_a \subseteq I^M$，使得：(a) $\#\Lambda_a$ 为 poly$_{\mathcal{F},\ g,\ \varepsilon}(D)H^\varepsilon$，并且，如果 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M) \in \Lambda_a$，那么 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = a$；(b) 如果 $\alpha \in \Lambda_a$，那么 $X_\alpha^< \cup X_\alpha^{bl} \subseteq X_a$；(c) 如果 $\alpha \in \Lambda_a$，那么 $\dim X_\alpha^< < \dim X_a$；(d) $X_a(g,H) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda_a}\left(X_\alpha^< \cup X_\alpha^{bl}\right)$。

证明。我们首先注意到，若 Y、$Z \subseteq I^m \times I^n$ 是具有 *-格式 const$(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$ 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F},\ g,\ \varepsilon}(D)$ 的可定义族，并且结论对它们成立；此外，若它们满足对每个 $a \in I^m$ 都有 $X_a = Y_a \cup Z_a$ ，那么结论对 X 也成立。为此，设 $Y^<$、$Y^{bl} \subseteq I^{M_Y} \times I^n$ 以及 $Z^<$、$Z^{bl} \subseteq I^{M_Z} \times I^n$ 满足

分别关于 Y 和 Z 的结论；对每个 $a \in I^m$，有限集 $\Lambda_a^Y \subseteq I^{M_Y}$ 和 $\Lambda_a^Z \subseteq I^{M_Z}$ 也满足该结论。不失一般性，设 $M_Y \geq M_Z$ 且 set$M = M_Y + 1$。对于每个 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{M_Y}) \in I^{M_Y}$，令 $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{M_Z}) \in I^{M_Z}$ 为 α 在前 M_Z 个坐标上的投影。于是，对于每个 $(\alpha, \alpha_M) \in I^M$，令

$$X^{<}_{(\alpha,\alpha_M)} = \begin{cases} Y^{<}_{\alpha} & \text{if } \alpha_M = \frac{1}{3} \\ Z^{<}_{\alpha'} & \text{if } \alpha_M = \frac{2}{3} \\ \emptyset & \text{otherwise;} \end{cases} \qquad X^{bl}_{(\alpha,\alpha_M)} = \begin{cases} Y^{bl}_{\alpha} & \text{if } \alpha_M = \frac{1}{3} \\ Z^{bl}_{\alpha'} & \text{if } \alpha_M = \frac{2}{3} \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

最后，对每个 $a \in I^m$，令 $\Lambda_a^X = \{(\alpha, 1, 2, 3) \in I^M : \alpha \in \Lambda_a^Y\} \cup \{(\alpha', 2, 3, \ldots, 2, 3) \in I^M : \alpha' \in \Lambda_a^Z\}$。作出这些选择后，结论对 X 成立。

由细胞分解（定理 2.3），我们可以假设 X 的每个纤维都是非空细胞，且这些细胞的维数相同，记为 k。设 $k = 0$，则可以取 $X^{<} = \emptyset$ 和 $X^{bl} = (I^m \times I^n) \times I^n$，将其视为以 $I^m \times I^n$ 为底的族。因此我们可以假设 $k > 0$。若 $k = n$，则可以取 $X^{<} = \emptyset$ 和 $X^{bl} = X$（因为此时 X 是开细胞族）。因此我们还可以假设 $k < n$。

设 $\varepsilon > 0$。设 d 为一个非负整数，它是关于 k、n、g、ε 的常数，且足够大，使得若 $\varepsilon(k, n, g, d)$ 取自命题 4.2，则 $\varepsilon(k, n, g, d) < \varepsilon$；再令 r、c 如命题 4.2 中所述，因此它们也都是关于 k、n、g、ε 的常数。根据我们的参数化结果（定理 3.8；另见注 3.4 末尾），我们可以假设每个纤维 X_a 都是命题 4.2 中所述某个映射 ϕ 的像。由该命题可知，若 $\Pi \subseteq \{1, \ldots, n\}$ 的大小为 $k+1$，则对于每个 $a \in I^m$ 和每个 $H \geq 1$，集合 $(\rho_\Pi(X_a))(g, H)$ 包含于至多 cH^ε 个次数至多为 d 的超曲面的并集中，其中 ρ_Π 是对应于 Π 的坐标投影。现在，若 $a \in I^m$，则要么存在某个 Π，使得 $\rho_\Pi(X_a)$ 的余维为 1，且 $\rho_\Pi(X_a)$ 不属于任何次数至多为 d 的超曲面；要么，对于每个满足$\rho_\Pi(X_a)$ 的余维为 1 的 Π，都有一个次数至多为 d 的超曲面包含$\rho_\Pi(X_a)$。在后一种情况下，便存在一个维数为 k 的半代数集 $S_a \subseteq I^n$，以及一个次数 d'，该次数是关于 k、n、g、ε 的常数，使得 $X_a \subseteq S_a$（集合 S_a 是通过对包含各个余维为 1 的 $\rho_\Pi(X_a)$ 的超曲面的原像求交而得到的）。

我们将通过给出纤维来定义族 $X^{<}$ 和 X^{bl}，有时还会划分参数空间，并且可能让 M 随划分而变化。最后，可以轻松地将它们合并成一个具有单个 M的族。

首先考虑

$$\Sigma = \{a \in I^m : \text{对于某个维数为 } k\text{的半代数集 } S_a, \text{ 有 } X_a \subseteq S_a \text{ 且次数为 } d'\}.$$

注意，Σ是可定义的，其 *-格式为 const($\mathcal{F}, g, \varepsilon$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F},g,\varepsilon}(D)$。根据可定义选择（推论 2.8），我们可以用一个可定义族 S来见证 S_a，其 *-格式同样为 const($\mathcal{F}, g, \varepsilon$)，*-次数为 poly$_{\mathcal{F},g,\varepsilon}(D)$。令

$$X^{\Sigma,\mathrm{reg}} = \{(a, x) : a \in \Sigma, x \in \mathrm{reg} X_a \cap \mathrm{reg} S_a\}$$

and

$$X^{\Sigma,\mathrm{sing}} = \{(a, x) : a \in \Sigma, x \in X_a \cap (\mathrm{sing} X_a \cup \mathrm{sing} S_a)\}.$$

注意到，这两者都是可定义的，且复杂度界与Σ的类似。若 $a \in \Sigma$，则 dim $X^{\Sigma,}_{a}{}^{\mathrm{sing}} < k =$ dim X_a，因此我们将 X^{Σ}的所有纤维，$_{\mathrm{sing}}$都加入 $X^{<}$。接下来，我们对 $X^{\Sigma,}{}^{\mathrm{reg}}$应用细胞分解（定理 2.3），得到 poly$_{\mathcal{F},\ g,\ \varepsilon}(D)$ 个细胞。纤维维数小于 k 的细胞族归入$X^{<}$。这样剩下的就是纤维维数为 k的细胞族。将它们加入

X^{bl}，扩展参数集合的维数（即陈述中的 M），以确保 X^{bl} 的纤维就是纤维维数为 k的各个细胞族的纤维。对于 $a \in \Sigma$，我们有 $\#\Lambda_a$，其上界为细胞数，而细胞数为 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},\, g,\, \varepsilon}(D)$。

最后，我们考虑不属于 Σ 的 a。对于每个这样的 a，都存在一个大小为 $k+1$ 的 $\Pi \subseteq \{1, \dots n\}$，使得 $\rho_\Pi(X_a)$ 的余维为 1，且 $\rho_\Pi(X_a)$ 不包含于任何次数为 d 的超曲面中。对参数空间进行划分后，我们可以假定同一个 Π 对所有参数都适用。接着记 $\pi : I^n \to I^{k+1}$ 为相应的投影。于是，对每个 $a \notin \Sigma$，我们知道集合 $\pi(X_a(g,H))$ 包含于至多 cH^ε 个次数至多为 d 的代数超曲面的并集中，这些超曲面位于 $\mathbb{R}^{k+1}$ 中；并且投影 $\pi(X_a)$ 不包含于任何这样的超曲面中。根据细胞分解（定理 2.3）和注 2.4，我们可以假设每个 X_a 都是解析胞腔。由此可知，X_a 与任意此类超曲面在 I^n 中的原像的交，其维数严格小于 k。因此，我们可以将以下内容加入 $X^<$:

$$\{(a, P, x) : a \notin \Sigma, x \in X_a, P(\pi(x)) = 0\},$$

其中 P遍历 $k+1$ 个变量、次数至多为 d的多项式。（若 $a \notin \Sigma$，则我们不对 X^{bl} 作任何添加。）注意，对于 $a \notin \Sigma$， Λ_a的大小至多为 cH^ε。证明至此完成。□

有了这些准备，我们便可证明第一个计数结果。这是 Pila 关于受限子 Pfaffian 集的结果在 [35] 中的有效版本。

定理 4.4. 设 m 和 n 为非负整数， g 为正整数，且 $\mathcal{F}$、D 和 ε 为正实数。假设 $X \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ 是一个 *- 格式至多为 $\mathcal{F}$ 且 *- 次数至多为 D 的可定义族。则存在一个非负整数 $M \geq m$ 以及一个可定义族 $Y \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^n$，其 *-格式为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$，*-次数为 $\mathrm{poly}(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$，并满足以下性质。

(1) Y中的每个非空纤维都是次数为 $\mathrm{const}(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$ 的基本块。(2) 对于每个 $a \in \mathbb{R}^m$ 和实数 $H \geq 1$，都存在一个有限集 $\Lambda_a \subseteq \mathbb{R}^M$，使得：(a) $\#\Lambda_a$ 是 $\mathrm{poly}_{\mathcal{F},\, g,\, \varepsilon}(D)H^\varepsilon$，并且，如果 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \Lambda_a$，那么 $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = a$；(b) 如果 $\alpha \in \Lambda_a$，那么 $Y_\alpha \subseteq X_a$；(c) $X_a(g,H) \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda_a} Y_\alpha$。

证明。首先，我们可以假设 $X \subseteq I^m \times \mathbb{R}^n$。接下来，利用映射 $x \mapsto \pm x^{\pm 1}$，我们可以假设 $X \subseteq I^m \times [0,1]^n$。然后通过归纳，我们可以假设 $X \subseteq I^m \times I^n$。我们将命题 4.3 应用于 X，并以 ε/n 替代 ε。随后，我们再次将其应用于 $X^<$，然后应用于 $X^{<<}$，依此类推，直到得到的 $<$-集合为空，因此至多需要应用 n 次。然后我们调整得到的族 $X^{bl}, X^{<bl}, \dots$，使它们具有相同的参数空间维数，并令 Y 为一个族，其纤维是 $X^{bl}, X^{<bl}, \dots, X^{<\cdots<bl}$ 的纤维（必要时调整参数空间的维数，以确保每个纤维都是基本块）。□

我们剩下的计数结果，是 Habegger 和 Pila [23] 所证明的那种计数定理的有效版本。我们首先需要一些定义。假设$X \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$。对于 g 正整数以及 $H \geq 1$ 实数，我们定义

$$X^\sim(g,H) = \{(x,y) \in X : [\mathbb{Q}(x), \mathbb{Q}] \leq g, H(x) \leq H\}$$

and

$$X^{\sim,iso}(g,H) = \{(x,y) \in X^\sim(g,H) : y \text{ is isolated in } X_x\}.$$

定理 4.5. 设 ℓ、 m 和 n 为非负整数，设 g 为正整数，且设 $\mathcal{F}$、D 和 ε 为正实数。假设 $X \subseteq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 是一个 *-格式至多为 $\mathcal{F}$ 且 *-次数至多为 D的可定义族。则存在一个正整数 J，其为关于$\mathcal{F}$、g、ε的多项式 D；正整数 k_j，其中 $j = 1, \ldots\ldots, J$；基本块族 $W^{(j)} \subseteq \mathbb{R}^{k_j} \times \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$，其中 $j = 1, \ldots\ldots, J$，其 *-格式为常数 const($\mathcal{F}, g, \varepsilon$)，且 *-次数为多项式 poly$_{\mathcal{F},g,\varepsilon}$($D$)；连续可定义映射 $\phi^{(j)} \colon W^{(j)} \to \mathbb{R}^n$，其 *-格式为常数 const($\mathcal{F}, g, \varepsilon$)，且 *-次数为多项式 poly$_{\mathcal{F},g,\varepsilon}$($D$)，其中 $j = 1, \ldots\ldots, J$；以及一个正实数 C，其为关于$\mathcal{F}$、g、ε的多项式 D，使得以下结论成立。

(i) 对所有 $j = 1$、……、J 以及 $(a', a) \in \mathbb{R}^{k_j} \times \mathbb{R}^\ell$，我们有

$$\Gamma(\phi^{(j)})_{(a',a)} \subseteq \left\{(x, y) \in X_a : y \textit{ is isolated in } X_{(a,x)}\right\}.$$

(ii) 假设 $a \in \mathbb{R}^\ell$。对于任意实数 $H \geq 1$，集合 $X^{\sim, \, iso}_a(g, H)$ 包含于至多 CH^ε 个图 $\Gamma(\phi^{(j)})_{(a',a)}$ 的并集中，其中 $j \in \{1, \ldots, J\}$ 且 $a' \in \mathbb{R}^{k_j}$。

证明。我们沿用 Habegger 和 Pila [23]，的原始证明，使用我们的块计数结果定理 4.4，并稍作调整以得到复杂度界。首先注意到

$$X' = \left\{(a, x, y) \in X : y \text{ is isolated in } X_{(a,x)}\right\}$$

根据定理 2.5，它是可定义的，具有 *-格式 const($\mathcal{F}$) 和 *-次数 poly$_{\mathcal{F}}$(D)。因此，我们可以假设 $X' = X$。于是，由细胞分解（定理 2.3），我们有 poly$_{\mathcal{F}}$(D) 个细胞 $E^{(i)} \subseteq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m$ 以及可定义的连续函数 $f_{(i)} \colon E^{(i)} \to \mathbb{R}^n$，其中 $E^{(i)}$ 和 $f^{(i)}$ 的 *-格式均为 const($\mathcal{F}$)，*-次数均为 poly$_{\mathcal{F}}$(D)，使得

$$\bigcup_i \Gamma(f^{(i)}) = X.$$

现在，我们可以完全按照 [23, 定理 7.1], 中的做法，在他们援引 [23, 定理7.3]时使用我们的定理 4.4。□

推论 4.6. 假设 X、g 和 ε与定理 4.5 中的条件相同。令 $\pi_1 \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 和 $\pi_2 \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为自然投影。存在一个正实数 c，它是关于 $\mathcal{F}, g, \varepsilon$($D$) 的多项式，并具有如下性质。假设 $a \in \mathbb{R}^\ell$，且实数 $H \geq 1$ 和集合 $\Sigma \subseteq X^{\sim}_a(g, H)$ 满足

$$\#\pi_2(\Sigma) > cH^\varepsilon.$$

存在一个连续的可定义映射 $\beta \colon [0, 1] \to X_a$，具有以下性质。

(i) 映射 $\pi_1 \circ \beta \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ 是半代数的。(ii) 映射 $\pi_2 \circ \beta \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ 不是常数。(iii) 我们有 $\pi_2(\beta(0)) \in \pi_2(\Sigma)$。(iv) 限制 $\beta|_{(0,1)}$ 是解析的（特别地，$\pi_1 \circ \beta|_{(0,1)}$ 是解析的）。

证明。证明与 [23], 中的完全相同，只需用定理 4.5 替代其中的定理 7.1。注意，我们并未对β的复杂度作出任何断言。□

本节最后讨论如何建立一些相关的计数结果，尤其是在非受限子 Pfaffian 环境中。具体而言，我们概述定理 1.1 如何由定理 4.4 和[25]的穷尽思想推出。

首先注意，可定义集（即受限子 Pfaffian 集）的定理 1.1 类比结论可直接由定理 4.4 得出，以下论证即可说明这一点。

设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个格式至多为 k、次数至多为 d 的可定义集。注意，根据注 2.2，X 的 *-格式至多为 k，且 *-次数为 $\mathrm{poly}_k(d)$。将定理 4.4 应用于 X，并取 $g = 1$，可得某个非负整数 M、一个可定义族 $Y \subseteq \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^n$，以及对每个 $H \geq 1$，一个大小为 $\mathrm{poly}_{k,\varepsilon}(d)H^{\varepsilon}$ 的有限集 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^M$，使得 $X(\mathbb{Q}, H) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$。此外，对于每个 $\alpha \in \Lambda$，纤维 Y_α 是一个基本块（其次数为 $\mathrm{const}(k,\varepsilon)$），且包含于 X 中，因此它要么是一个点，要么位于 X^{alg} 中。因此，$X^{tr}(\mathbb{Q}, H)$ 至多包含 $\mathrm{poly}_{k,\varepsilon}(d)H^{\varepsilon}$ 个点；也就是说，存在正实数 c, γ，可由 k 和 ε 有效计算得到（且与 H 无关），使得对所有 $H \geq 1$，$\#X^{tr}(\mathbb{Q}, H) \leq cd^{\gamma}H^{\varepsilon}$。

现在我们由这个受限类比结果推出定理 1.1。这里令 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 为一个（非受限）子 Pfaffian 集，其格式至多为 k，次数至多为 d。对于任意给定的 $H \geq 1$，存在一个开盒 B_H，使得若我们通过将 X 的定义中所有 Pfaffian 函数替换为它们在 B_H 上的限制，从 X 定义集合 $X_H \subseteq \mathbb{R}^n$，则集合 X_H 是受限子 Pfaffian 集（即可定义的），并且 $\#X_H^{tr}(\mathbb{Q}, H) = \#X^{tr}(\mathbb{Q}, H)$。特别要注意，$X_H$ 的格式和次数与 X 相同（也就是说，分别为 k 和 d），因此与 H 无关。将上述定理 1.1 的受限类比结果应用于 X_H，可得正实数 c、γ，它们可由 k 和 ε 有效计算，且与 H 无关，从而有 $\#X^{tr}(\mathbb{Q}, H) = \#X_H^{tr}(\mathbb{Q}, H) \leq cd^{\gamma}H^{\varepsilon}$，正如所需。显然，引言中讨论的定理 1.1 的更一般版本——其中计数的是次数有界且定义在 $\mathbb{Q}$ 上的代数点——可通过类似论证推出。

最后，我们指出，这种穷竭论证也可以直接用于推导出适用于（不受限制的）子 Pfaffian 集的一般类比推论 4.6。

5. 应用

5.1. 一般设定。我们先描述一般设定。设 $g \geq 1$ 和$A = E_1 \times \cdots \times E_g$，其中 $E_1, \ldots, E_g$ 是定义在复数上的椭圆曲线。对于每个 $i = 1, \ldots, g$，我们用 O 表示 E_i 上充当单位元的标记点，并用 $\mathcal{L}_i$ 表示 E_i 上除子为 (O) 的线丛。我们可以利用这些将 $A = E_1 \times \cdots \times E_g \hookrightarrow \mathbb{P}_2^g$嵌入，其中，对每个 $i = 1, \ldots, g$，E_i通过魏尔斯特拉斯方程（如下所述）嵌入到 $\mathbb{P}_2$ 中，并令

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{g} \pi_i^* \mathcal{L}_i, \tag{5.1}$$

这是 A 上的一个丰沛线丛，其除子为 $D_g = \sum_{i=1}^{g} [\pi_i^* O]$。这里，$\pi_i \colon A \to E_i$是到第 i 个椭圆曲线的投影，其中 $i = 1, \ldots, g$。在下文中，我们将由 $\mathcal{L}$给出的次数函数记为 $\deg = \deg_{\mathcal{L}}$。

下文中，所有常数都取决于线丛的选择（因为它决定了次数），但我们不会对此作明确说明。

对于每个 $i = 1, \ldots, g$，令 $\omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}$ 为与 E_i 的魏尔斯特拉斯方程相对应的格 Ω_i 的一组基，使得 $\omega_2^{(i)}/\omega_1^{(i)}$ 位于标准基本域中。

令 $\mathrm{Exp}_A \colon \mathbb{C}^g \to A$ 为 A 的指数映射，它将满足 $z_i \notin \Omega_i$ 的$(z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{C}^g$映至仿射图 $A \setminus D_g$，其中 $i = 1, \ldots, g$通过以下方式给出

$$(z_1, \ldots, z_g) \to (\wp_1(z_1), \wp_1'(z_1), \ldots, \wp_g(z_g), \wp_g'(z_g)),$$

其中 $\wp_i$ 是由格Ω_i确定的 $\wp$-函数， $i = 1, \dots, g$。我们设

$$(\omega_1, \dots, \omega_{2g}) = (\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \dots, \omega_1^{(g)}, \omega_2^{(g)}).$$

根据 [24, 定理 1], , Exp_A 在以下范围内的图

$$F_A = \left\{ \sum_{i=1}^{2g} t_i \omega_i : t_i \in [0,1), i = 1, \dots, 2g, \text{ with } t_i t_{i+1} \neq 0 \right. \\ \left. \text{for } i = 2j-1 \text{ where } j = 1, \dots g \right\}$$

是一个半 Pfaffian 集，其格式有 c_1 上界，次数有 c_2 上界，并且有效的 c_1 和 c_2 取决于 g。我们可以将这一结果直接应用于椭圆曲线乘积的几何。下述结果或许可以通过其他方式得到，但我们没有在文献中找到相关参考。

引理 5.1. 设 $V \subseteq A$ 是一个次数为 $\deg(V)$ 的严格代数子簇。存在仅取决于 g 的实数且可有效计算的常数 c 和 m，使得包含在 V 中的极大连通子群的数量 N_A 满足

$$N_A \leq c \deg(V)^m.$$

在证明引理 5.1 之前，我们先回顾一个关于 $\mathbb{Z}^n$ 的子群的一般事实。

引理5.2. 设 $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ 是一个子群，且 $W = L \otimes \mathbb{R}$ 是由 L 张成的实向量空间。此外，设 vol_W 为将 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得度量限制在 W 上所得到的测度；最后，设 $\mathrm{covol}(L)$ 为 W 中 L 的一个基本域的体积。存在一个仅取决于 n 而不取决于 L 的可有效计算常数 c_n，使得 L 由 $2\dim(W)$ 个向量 $v_1, \dots, v_{2\dim(W)}$ 生成，这些向量的欧几里得长度满足

$$|v_i| \leq c_n \operatorname{covol}(L).$$

证明。应用闵可夫斯基第二定理，可得 $\dim(W)$ 个线性无关向量 $v_1, \dots, v_{\dim(W)}$ satisfying

$$|v_1| \cdot \ldots \cdot |v_{\dim W}| \leq c_n \operatorname{covol}(L).$$

现在固定 L 的一个基。 L 的每个基元素模由 $v_1, \dots, v_{\dim(W)}$ 生成的格 L'，在定义域 $F = \{\sum_{i=1}^n t_i v_i \colon t_i \in [0,1)\}$ 中都有一个代表元。于是， $v_1, \dots, v_n$ 连同这些代表元满足引理的条件。□

引理5.1的证明。在 [10], 中，Bombieri 和 Zannier 在引理 2 中证明，包含于 V 中的极大陪集的次数有界于 $c\deg(V)^m$，其中有效的 c 和 m 仅依赖于 g。根据引理 5.2，只需对包含于 V 中的子群 H 的格 L 的余体积给出界。为此，我们考虑集合

$$\tilde{F} = \{(b_1, \dots, b_{2g}) \in [0,1)^{2g} : \mathrm{Exp}_A(b_1\omega_1 + \cdots + b_{2g}\omega_{2g}) \in H\}.$$

$\tilde{}$ F 的连通分支数关于 $\deg(H)$ 以多项式增长为界，该多项式仅取决于 g。每个连通分支都是仿射空间 $\tilde{W}$ 与超立方体 $[0,1)^{2g}$ 的交集。现在，每个这样的交集的体积都被一个常数 c_{vol} 所界，该常数仅取决于 g；这里的体积$\tilde{}$形式仍是将欧几里得度量限制到仿射空间 W 上得到的。因此我们得到

$$\operatorname{covol}(L) \leq \#\{\text{connected components of } \tilde{F}\} \times c_{\mathrm{vol}}$$

以及该断言。 □

这里我们确立了将在全文中应用的计数结果。

引理 5.3. 设 $V \subseteq A$ 是次数为 $\deg(V)$ 的严格代数子簇。设 V^*是从包含在 V 中的 A 的（正维）阿贝尔子簇的所有平移中剔除后的 V。对于所有 $\delta > 0$，存在可有效计算的常数 c_δ 和m，它们仅依赖于 δ 和 g，使得对于所有正整数 N，我们有

$$\#\{P \in V^*(\mathbb{C}) : P \text{ has order at most } N\} \leq c_\delta \deg(V)^m N^\delta.$$

证明。回顾一下，我们有按上述方式定义的 $\mathrm{Exp}_A\colon \mathbb{C}^g \to A$。令 $V_1 = V^* \setminus D_g \subseteq A \setminus D_g$，其中我们选取了如上所述的仿射图。我们考虑

$$Z = \big\{(b_1, \dots, b_{2g}) \in \big([0,1)^2 \setminus \{0\}\big)^g : \\ \mathrm{Exp}_A\left(b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \dots, b_{2g-1}\omega_{2g-1} + b_{2g}\omega_{2g}\right) \in V_1\big\}.$$

根据 [24, 定理 1]，，集合 Z 是一个半 Pfaffian 集，其格式至多为c_1，次数至多为 $c_2 \deg(V)$，并且 c_1 和 c_2 可有效计算，且仅依赖于 g。$V(\mathbb{C})$ 上一个阶不超过 N 的挠点 P，对应于 Z 上一个高度不超过 N 的有理点。由于 Z 的代数部分为空，我们的定理 1.1 给出

$$\#\{P \in V_1(\mathbb{C}) : P \text{ is torsion of order at most } N\} \leq c_\delta \deg(V)^m N^\delta, \tag{5.2}$$

其中 c_δ 和 m 可有效计算，且仅取决于 δ 和 g。现在考虑由下式给出的簇$V_{(2^i} \subseteq \prod_{j=1}^{i-1} E_j \times \prod_{j=i+1}^{g} E_j)$

$$V_2^{(i)} = \pi^{(i)}\left(V^* \cap \prod_{j=1}^{i-1} E_j \times O \times \prod_{j=i+1}^{g} E_j\right),$$

对于 $i = 1, \dots, g.$，这里 $\pi^{(i)}$是 $A \to \prod_{j=1}^{i-1} E_j \times \prod_{j=i+1}^{g} E_j$ 的典范投影，其中 $i = 1, \dots, g$。由于 V^*不包含陪集，因此对于$i = 1, \dots, g$，有 $\dim(V_{(i)\,2}) < \dim(V)$。我们继续归纳，直到维数达到 0。这个过程显然至多经过 $g-1$ 步便会终止，并且每一步都应用定理 1.1。经过可能的常数调整后，即得所述结论。□

引理 5.4. 设 $V \subseteq A$ 是一个不可约代数子簇，且不是阿贝尔子簇的平移。设 $H \subseteq A$ 是一个连通代数子群，设 H^T 是相对于由 $\mathcal{L}$给出的黎曼型与 H 正交的阿贝尔簇。对于所有 $\delta > 0$，存在可有效计算的常数 c_δ 和m，它们仅取决于 δ 和 g，使得对于所有正整数 N，我们有

$$\#\{P \in H^T(\mathbb{C})\colon\ P\text{的阶至多为 } N,\ P + H \subseteq V\text{是极大的}\} \\ \leq c_\delta \deg(V)^m N^\delta.$$

证明。下文 c 和 m 表示仅依赖于 g的有效常数，在不同位置可能取不同值。我们首先假设 H 不包含于 D_g中。固定一个辅助点 $P_a \in H \setminus D_g$，并令 $z_a \in F_A$ 为 P_a的对数。类似于引理 5.3，我们接着考虑

$$Z_a = \big\{(b_1, \dots, b_{2g}) \in \big([0,1)^2 \setminus \{0\}\big)^g : \\ P = \mathrm{Exp}_A\left(b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \dots, b_{2g-1}\omega_{2g-1} + b_{2g}\omega_{2g} - z_a\right) \in H^T(\mathbb{C}), \\ P + (H \setminus D_g) \subseteq V_1\big\}$$

and

$$Z = \big\{(b_1,\dots,b_{2g}) \in \big([0,1)^2 \setminus \{0\}\big)^g : \\ P = \mathrm{Exp}_A\left(b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \dots, b_{2g-1}\omega_{2g-1} + b_{2g}\omega_{2g}\right) \in H^T(\mathbb{C}), \\ P + (H \setminus D_g) \subseteq V_1\big\},$$

这里 $V_1 = V \setminus D_g$。由 [32, 引理 1.3] 可知，$\deg(H^T) \leq c_1 \deg(H)$，其中 c_1 仅依赖于 g。根据 [24, 定理 1], , 集合 Z 和 Z_a 是次 Pfaffian 集，其格式分别有界于 c_1，次数有界于 $c(\deg(H)\deg(V))^m$。回顾一下，在 [10], Bombieri 和 Zannier 的引理 2 中，他们证明了包含于 V 中的极大陪集的次数有界于 $c\deg(V)^m$，因此 Z 和 Z_a 的次数有界于 $c(\deg(V))^m$。我们首先注意到，由于 $H^T + H = A$，包含映射 $H^T \hookrightarrow A$ 诱导了一个满射态射 $H^T \to A/H$，其核 $H \cap H^T$ 有限。若 Z 包含一条半代数曲线 S，则我们考虑

$$S_{\exp} = \{\mathrm{Exp}_A\left(b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \dots, b_{2g-1}\omega_{2g-1} + b_{2g}\omega_{2g}\right) : (b_1,\dots,b_{2g}) \in S\},$$

并且根据 Ax–Lindemann [1], , $S_{\exp} + H$ 的扎里斯基闭包是一个陪集 H'，且包含于 V 中。若 S 含有一个有理点 $(b_1,\dots,b_{2g})$，使得 $\mathrm{Exp}_A(b_1\omega_1 + \cdots + b_{2g}\omega_{2g}) + H$ 在 V 中是极大的，那么 $H' \subseteq V$ 就是一个扭陪集，它包含一个极大的扭陪集，这就产生了矛盾。因此，每个满足 $\mathrm{Exp}_A(b_1\omega_1 + \cdots + b_{2g}\omega_{2g}) + H$ 在 V 中极大的 $(b_1,\dots,b_{2g}) \in \mathbb{Q}^{2g} \cap Z$，都包含在 Z 的超越部分中。对于 Z_a，我们也可以完全类似地论证。

对于每个挠平移 $P + H$，其中 $P \in H^T$ 的阶至多为 N，我们可以在 Z 或 Z_a 中找到一个高度至多为 N 的有理点。因此，如果 H 不包含在 D_g 中，那么当前引理由定理 1.1 得出。若 $H \subseteq D_g$，则 $H \cap D_g = H$ 在 $V \cap D_g$ 中是极大的，我们可以像引理 5.3 的证明那样进行归纳论证。□

5.2. 椭圆曲线族与混合 André–Oort 猜想。在本小节中，我们假设所有簇都定义在代数数上。为了阐述本小节的主要结果，我们先补充一些背景知识。设 $\mathcal{A}$ 是基底簇 B 上的椭圆曲线乘积族，也就是说，$\mathcal{A}$ 是定义在某个数域上的代数簇，并且我们有一个映射

$$\pi : \mathcal{A} \to B$$

该映射支配 B，且具有如下性质：π 的每个纤维都是椭圆曲线的乘积。对于每个子簇 $B' \subseteq B$，通过基变换，我们得到 B' 上的群概形 $\mathcal{A}_{B'}$。若 $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ 是基底 $\pi(\mathcal{G})$ 上的群概形，我们就称其为子群概形。

在一个通用对象中进行研究很有用。我们令 $\mathcal{E}$ 为模曲线 $Y(2) = \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty, 0, 1\}$ 上的椭圆曲线勒让德族。它是一个混合 Shimura 簇，我们将简要描述欧几里得乘积 $\mathcal{E}^g$ 的特殊子簇。我们将 $J : Y(2)^g \to \mathbb{A}^g$ 上的 $\lambda \mapsto 256(\lambda^2 - \lambda + 1)^3/(\lambda^2(1-\lambda^2))$ 逐坐标作用记为 J。$Y(2)^g$ 的特殊子簇是模曲线与复乘点的乘积，而 $Y(2)^g$ 中一个特殊子簇在 $\mathbb{A}^g$ 下的像，是 [23] 中定义的特殊子簇。

$\mathcal{E}^g$ 的特殊子簇是 $\mathcal{E}^g$ 的子群概形的不可约分支，其基底是 $Y(2)^g$ 的特殊子簇。对我们而言，$\mathcal{E}^g$ 的一个重要特殊子簇示例如下：

$$\mathcal{E}^{(g)} = \mathcal{E} \times_{Y(2)} \cdots \times_{Y(2)} \mathcal{E},$$

g 次纤维幂的 $\mathcal{E}$。

现在我们在族情形下定义次数。对于子簇 $B \subseteq Y(2)^g$，我们定义 $\mathcal{L}_B$ 为 $\mathbb{Q}(B)$ 上的 $\mathcal{E}_B^g$ 上如 (5.1) 所示的线丛。这为 $\mathcal{E}^g$ 的每个子群概形赋予一个次数函数，我们也将其记为 deg。

定义 5.5. 设 $\pi : \mathcal{E}^g \to Y(2)^g$ 如上，且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{E}^g$ 的一个特殊子簇。我们将 $\pi(\mathcal{S})$ 的复杂度定义为 $J(\pi(\mathcal{S}))$ 的复杂度，其中复杂度按定义 3.8] [23, 给出。记为 $\mathbf{cl}(\pi(\mathcal{S}))$。现在，$\mathcal{S}$ 包含在 $\pi(\mathcal{S})$ 上的一个平坦子群概形中。记 $\mathcal{H}$ 为包含 $\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{E}_{\pi(\mathcal{S})}^g$ 的最小子群概形。随后，我们将 $\mathcal{S}$ 的复杂度定义为

$$\mathbf{cl}(\mathcal{S}) = \max\{\deg(\mathcal{H}), \mathbf{cl}(\pi(\mathcal{S}))\}.$$

我们指出，复杂度有界的特殊子簇集合是有限的。此外，给定一个可有效计算的界，就可以有效地确定这个集合。

定义 5.6. 对于一个阿贝尔簇族（即一个子群概形）$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}^g$，令

$$P_{\mathcal{A}} = \{P \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{Q}}) : P \text{ special}\}.$$

这里，特殊点就是维数为 0 的特殊子簇。我们也可以不明确提及特殊子簇来描述特殊点：点 P 属于 $\mathcal{E}^g$，当且仅当 $\pi(P)$ 是 $Y(2)^g$ 中的特殊点，且 P 是 $\mathcal{E}_{\pi(P)}^g$ 中的扭点。

给定一个代数子簇 $V \subseteq \mathcal{A}$，若 $\mathcal{S}$ 是特殊子簇，且每个满足 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \subseteq V$ 的特殊子簇 $\mathcal{S}'$ 也满足 $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$，则称 $\mathcal{S} \subseteq V$ 为极大特殊子簇。

有了这些预备知识，我们可以陈述本小节的主定理。

定理 5.7. 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}^g$ 如上。设 $V \subsetneq \mathcal{A}$ 是一个余维为正的子簇，它支配基底 B，并假设 V 和 $\mathcal{A}$ 都定义在数域 K 上。存在可有效计算的常数 c 和 m，它们仅依赖于 g，使得

$$V \cap P_{\mathcal{A}} \subseteq \bigcup \mathcal{S} \cap \mathcal{A}, \tag{5.3}$$

其中并集遍历 $\mathcal{E}^g$ 的所有满足 $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{A}) < \dim(\mathcal{A})$ 且复杂度满足以下条件的特殊子簇 $\mathcal{S}$

$$\mathbf{cl}(\mathcal{S}) \leq c([K : \mathbb{Q}] \deg(V))^m.$$

定理 5.7（其证明将在第 5.4 小节给出）与针对 $\mathcal{E}^g$ 的（混合）Andr´e–Oort 猜想有直接联系。下文中，若对于给定的混合 Shimura 簇 S，对任意代数簇 $V \subseteq S$，都存在一个有效过程来确定 V 中 S 的特殊点的 Zariski 闭包，我们就称 Andr´e–Oort 猜想（省略“混合”一词）有一个有效证明。

利用定理 5.7 并通过归纳法论证（论证见第 5.4 小节），我们得到以下结果。

定理 5.8. 假设存在关于 $Y(2)^g$ 的 Andr´e–Oort 猜想的有效证明。那么存在关于 $\mathcal{E}^{(n_1)} \times \cdots \times \mathcal{E}^{(n_g)}$ $(n_i \geq 0,\ i = 1, \ldots\ldots, g)$ 的 Andr´e–Oort 猜想的有效证明。

根据 K¨uhne [26], 以及 Bilu、Masser 和 Zannier [3], 各自的工作，我们可以立即推出以下推论。

推论 5.9. 对于 $\mathcal{E}^{(n_1)} \times \mathcal{E}^{(n_2)}$ $(n_1, n_2 \geq 0)$，Andr´e–Oort 猜想有一个有效证明。

我们没有明确说明推论 5.9 的有效性具体如何，因为这取决于 K¨uhne 的一些结果，而这些结果的表述颇为复杂。不过，从定理 5.7 和 5.8 的证明中，可以清楚地看出他的结果是如何发挥作用的。在上述情形下，我们可以给出更为精确的说明，如下所示。

定理 5.10。存在可有效计算的常数 c 和 m，它们仅依赖于 n，并具有以下性质。设 $V \subseteq \mathcal{E}^{(n)}$ 是定义在数域 K上的不可约簇。令 $\mathcal{S} \subseteq V$ 为一个极大特殊子簇。那么

$$\mathbf{cl}(\pi(\mathcal{S})) \leq \exp(c([K:\mathbb{Q}]\deg(V))^m)$$

并且，如果 $\mathcal{H}$ 是包含 $\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{E}^n$ 的最小子群概形，那么

$$\deg(\mathcal{H}) \leq c([K:\mathbb{Q}]\deg(V))^m.$$

请注意，上述结果是定理 1.3 的一个稍微更精确的版本，并且 V上的任何孤立特殊点都是阶至多为 $c([K:\mathbb{Q}]\deg(V))^m$的挠点。

5.3. 具有复乘的椭圆曲线乘积。为证明定理 5.7，我们证明具有复乘的椭圆曲线乘积的 Manin–Mumford 猜想的一个一致版本。除了我们的计数之外，主要工具是 Gao 给出的以下伽罗瓦界。

定理 5.11（[17, 推论 13.4]）。设 A 是一个具有复乘的阿贝尔簇，K 是定义 A 的最小数域。设 $P \in A(\mathbb{C})$是一个确切阶为 N的挠点。对于每个 $\theta < 1$，存在一个有效的 $c > 0$，仅依赖于 θ 和 A 的维数，使得

$$[K(P):K] \geq cN^{\theta}.$$

我们还需要下面这个简单的推论。

推论 5.12。设 A 和 K 如定理 5.11 中所述。设 $H' \subseteq A$ 是 A 中连通代数子群 H 的一个挠平移，且 K' 是定义 H' 的最小数域。对于每个 $\theta < 1$，存在一个有效的 $c > 0$，仅依赖于 θ 和 A 的维数，使得

$$[K':K] \geq cN^{\theta},$$

其中，N 是满足以下条件的最小正整数：对于一个阶为 N的点 P，有 $H' = H + P$。

证明。由 [32], 中的引理 2.2 可知，存在一个有效常数 c'，它仅取决于 A 的维数 g，使得 A 的所有连通代数子群都定义在一个域扩张上，该域扩张相对于 K 的次数至多为 c'。因此，阿贝尔簇 $A^* = A/H$ 定义在域扩张 K^* 上，该域扩张相对于 K 的次数至多为 c'。约化 H'/H 是一个阶为 N 的挠点 $P^* \in A^*$（$\mathbb{C}$），并且由定理 5.11 可知，$[K^*(P):K^*] \geq c^*N^{\theta}$，其中 c^* 是有效的，且仅取决于 θ 和 g。现在应用伽罗瓦理论即可得出，H' 在伽罗瓦群 Gal（$\overline{\mathbb{Q}}/K$）作用下的轨道至少包含 cN^{θ} 个代数子群的平移，其中 c 仅取决于 θ 和 g。□

注意，如果没有复乘这一条件，前两个陈述就不成立（因为如果它们成立，我们就能得到不带这一条件的定理 1.2；但正如引言中所讨论的，这不可能）。因此，本小节中我们假设椭圆曲线 $E_1, \ldots, E_g$ 具有复乘。回顾一下，我们令 $A = E_1 \times \cdots \times E_g$。令 $K = \mathbb{Q}(j(E_1) \ldots, j(E_g))$，并假设对于 $i = 1, \ldots, g$，曲线 E_i 由定义在 K 上的魏尔斯特拉斯方程给出。

定理 5.13. 假设 $V \subseteq A$ 是定义在扩张 K 的数域 L 上的不可约子簇。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在可由 g 和 ε 有效计算的 c_ε 和 m，并且存在 N，使得

$$\overline{V \cap A_{tors}}^{Zariski} = \bigcup_{i=1}^{N} T_i + H_i$$

其中

$$N \leq c_\varepsilon [L:K]^{2g+\varepsilon} \deg(V)^m,$$

且对于 $i = 1$、.....、N、T_i，它们是满足以下条件的挠点

$$ord(T_i) \leq c_\varepsilon [L:K]^{1+\varepsilon} \deg(V)^m$$

且 H_i 是次数至多为 $c_\varepsilon \deg(V)^m$ 的连通子群。

证明。作为热身，我们先处理孤立挠点。固定 L 的一个复嵌入。按照惯例，记 V^* 为从 V 中去除包含于 V 的阿贝尔子簇的所有平移后得到的簇。由定理 5.11 可知，若 $P \in V^*(\mathbb{C})$ 的阶为 N_*，则 V^* 上至少有 $c_\varepsilon N_*^{1-\varepsilon}/[L:K]$ 个阶为 N_* 的点。结合引理 5.3，我们得到关于阶的界；再取 $2g$ 次幂，便得到孤立挠点数量 N 及其阶的界。

现在设 $H \subseteq A$ 是一个连通代数群，存在一个挠点 P，满足 $P+H \subseteq V$ 是 V 中的极大陪集。令 N 为 $P+H$ 在 A/H 中的阶。根据 [32, 引理 1.2], ，存在一个有效的 c，仅依赖于 g，使得 $\#(H \cap H^T) \leq c(\deg(H))^2$。因此，对于每个阶为 N 的 $P+H$，我们都能找到一个阶至多为 $cN(\deg(H))^2$ 的 $P' \in H^T$，使得 $P'+H = P+H$。由引理 5.4 可知，对于任意 $\delta > 0$，H^T 中此类挠点至多有 $c'_\delta \deg(V)^m N^\delta$ 个。由推论 5.12 可知，每个 $P+H$ 至少对应 $c_\varepsilon N^{1-\varepsilon}/[L:K]$ 个共轭。适当选取 δ 后，我们便可像处理孤立挠点那样得出结论。□

为了将定理 5.7 约化为定理 5.13，我们首先介绍椭圆曲线乘积的子群的一些背景知识。

引理 5.14. 设 $A = E_1 \times \cdots \times E_g$ 是椭圆曲线的乘积，H 是 A 的连通代数子群。则存在一个仅依赖于 g 的有效 c，以及 $\{1,\ldots,g\}$ 的一个划分 $I_0,\ldots,I_n$，使得下述结论成立。对于 $i = 1,\ldots,n$ 和 $j,k \in I_i$，椭圆曲线 E_j 和 E_k 通过次数至多为 $c(\deg(H))^2$，的同源相互同源，并且存在 $\prod_{j\in I_i} E_j$ 的连通代数子群 H_i，使得

$$H \cong \left(\prod_{i\in I_0} E_i\right) \times H_1 \times \cdots \times H_n,$$

其中 I_0 取满足该条件的最大值。

证明。在没有同源次数上界的情况下，这是标准结果。对于这个上界，我们可以假设 $n = 1$ and that $I_0 = \{0\}$，从而 H 是 A 的非分裂子群，其含义是，不存在将 A 分解为 $A_1 \times A_2$ 且满足 $H = H_1 \times H_2$ 的分解，其中 H_j 是 A_j 的连通代数子群。为证明这个上界，我们先假设 $\dim H = g-1$。那么，若 $1 \leq i < j \leq g$，令 $H_{i,\,j}$ 为 A 的子群，它由将 E_k 中除 i 和 j 以外的 k 个坐标设为单位元 O 得到。根据我们的假设，便有

$$\dim(H \cap H_{i,j}) = 1.$$

于是，我们可以将 $H \cap H_{i,\ j}$ 识别为 $E_i \times E_j$ 的一个非分裂子群，因此，根据同源引理（ [31] 第 5 页），E_i 与 E_j 之间存在一个次数至多为 $c\deg(H \cap H_{i,\ j})^2$ 的同源。由于 $\deg(H \cap H_{i,\ j}) \leq \deg(H)$，这就完成了此情形下的证明。

若 $\dim H < g-1$，则我们考虑 H 到乘积 $\prod_{i \in I} E_i$ 的所有投影，其中 $I \subseteq \{1, \ldots, g\}$ 的大小为 $\dim\ H + 1$。每个这样的投影都是相应乘积的连通子群，且其维数为 $\dim H$。并且每个投影都是非分裂的。因此，我们可以应用上述论证得出结论。□

下面的引理给出了簇在同源映射下的像的次数界。

引理 5.15. 设 $\Phi\colon A \to A'$ 是椭圆曲线乘积之间的一个同源映射，且 $V \subseteq A$ 是一个代数子簇。那么

$$\deg(\Phi(V)) \leq \deg(\Phi)^{\dim(V)} \deg(V).$$

证明. 设 $\mathcal{L}$ 是 (5.1) 中所述的 A 上的线丛，且设 $\mathcal{L}'$ 是 A' 上的同一线丛。那么 $\Phi^*\mathcal{L}' = \deg(\Phi)\mathcal{L}$，引理由投影公式即得。□

最后，我们需要估计定义子群的 A 切空间中某个关系的高度。我们先讨论椭圆曲线的幂这一情形。设 E 是一条椭圆曲线，其复乘由阶 $\mathcal{O} \subseteq O_K$ 给出，其中 K 是一个二次虚数域。于是 $E = \mathbb{C}/J$，其中 J 是 $\mathcal{O}$ 中的某个理想。我们考虑一个连通子群 $G \subseteq E^g$。回顾一下，我们在 E^g 上考虑典范线丛 $\mathcal{L}$ （5.1）及其对应的次数 deg。我们固定一个从 $\mathcal{O}$ 到 $\mathbb{C}$ 的嵌入，并注意到 E 的自同态环中的每个元素 α 的范数为 $|\alpha|^2$，其中我们只取相对于该嵌入的绝对值。对于一个 $r \times n$ 矩阵 M，我们定义其高度如下：

$$\mathbf{Ht}(M) = \max_{i,j}\{|\alpha_{ij}|\},$$

其中 α_{ij} 遍历 M 的各个元素。对于余维为 r 的子群 G，存在 r 个关于 E^g 的线性无关关系，它们在 G 上消失；我们将由这些关系确定的 $r \times g$ 矩阵的最小高度记为 $\mathrm{Ht}(G)$。

引理 5.16。存在一个仅依赖于 g 的有效常数 c，使得

$$\mathbf{Ht}(G) \leq c \deg(G).$$

我们将先证明余维 1 子群的情形，然后注意到以下事实即可得出一般情形

$$\deg(G_1 \cap G_2) \leq c \deg(G_1) \deg(G_2),$$

其中 c 是一个仅依赖于 g [32, 的常数，引理 1.2]。设 G 是一个余维 1 的连通子群。G 在单位元处的切空间 T_G 是 E^g 的切空间的线性子空间，我们将后者与 $\mathbb{C}^g$ 视为同一空间。它由一个关系定义

$$\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_g z_g = 0,$$

其中 α_1、……、$\alpha_g \in \mathcal{O}$。我们将 N 记为一个理想的范数，并首先证明以下结论。

引理 5.17. 对于 $I = (\alpha_1) + \cdots + (\alpha_g) \subseteq \mathcal{O}$，我们有

$$N(I) \leq \mathbf{Ht}(G).$$

证明。假设我们选取了一个极小关系，且 $|\alpha_1| = \mathrm{Ht}(G)$。我们首先注意到，对于 $j = 1, \ldots, g$，每个理想 $(\overline{\alpha}_1\alpha_j)$ 都可被 $N(I)$ 整除。这是因为，作为理想，$N(I) = I\overline{I}$。若 $N(I) > \mathrm{Ht}(G)$，则这意味着

$$\mathbf{Ht}(\overline{\alpha}_1\alpha_1/N(I), \ldots, \overline{\alpha}_1\alpha_g/N(I)) < \mathbf{Ht}(G),$$

但对于每个 $j = 1$，……，g，$\overline{\alpha}_1\alpha_j/N(I) \in \mathcal{O}$，并且这些构成了一个在 O 处 G 的切空间上消失的形式，这与我们关于 $\max_{i=1,\ldots,g} |\alpha_i|$ 最小性的假设相矛盾。□

现在我们可以转而证明引理 5.16。

引理5.16的证明。我们假设 G 由 E^g 的切空间 $\mathbb{C}^g$ 上的关系 $\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_g z_g = 0$ 定义。我们继续沿用引理 5.17 证明中的假设。现在令 z_2，……，$z_g \in J$。于是

$$\alpha_1 z_1 \in (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_g),$$

这意味着

$$z_1 \in \frac{1}{\alpha_1}((\alpha_2) + \cdots + (\alpha_g)) \cap J,$$

并且模 J 后，至少有

$$[I \cap J : \alpha_1 J]$$

这样的元素，其中 $I = (\alpha_1) + \cdots + (\alpha_g)$。我们有

$$[I \cap J : \alpha_1 J] = N(\alpha_1)/N(I) \geq \mathbf{Ht}(G),$$

其中最后一个不等式由引理 5.17 得出，因此我们推知 G 与簇 $E \times O^{g-1}$ 的交集至少有 $\mathrm{Ht}(G)$ 个元素。□

我们记录一个简单的观察。

引理 5.18. 具有复乘的椭圆曲线 E 的自同态环是如下形式的一个阶

$$\begin{cases} \mathbb{Z} + f\sqrt{-D}\mathbb{Z} \text{ if } D \not\equiv 1 \mod 4, \\ \mathbb{Z} + \frac{1+f\sqrt{-D}}{2}\mathbb{Z} \text{ if } D \equiv 1 \mod 4, \end{cases}$$

其中 D 是 E 的判别式，f 是 E的导子。若 $\alpha \in \mathrm{End}(E)$ 不是整数，则 $|\alpha| \geq f|D|^{\frac{1}{2}}/2$。

证明. 第一部分是经典结果。对于第二部分，若 $\alpha \notin \mathbb{Z}$，则 α的虚部满足 $\Im(\alpha) \geq f|D|^{\frac{1}{2}}/2$，结论随即得出。□

下面，我们称 $H \subseteq E^g$ 定义在 $\mathbb{Z}$ 上，如果存在 $n_{ij} \in \mathbb{Z}$，对于 $i = 1, \ldots, r$，$j = 1, \ldots, g$，使得 H在由 $(P_1, \ldots, P_g) \in E^g$ 构成的群 H中具有有限指数，其中

$$\sum_{j=1}^{g} n_{ij} P_j = O, i = 1, \ldots r.$$

否则，我们称 H 未定义在 $\mathbb{Z}$上。

引理 5.19. 设 $A = E_1 \times \cdots \times E_g$是由具有复乘的椭圆曲线构成的乘积，且 $H \subseteq A$ 是一个代数子群。如果 H 未定义在 $\mathbb{Z}$上，那么

$$\mathbf{cl}(A) \leq c(\deg(H))^m,$$

其中 c、m 仅取决于 g。

证明。我们可以假设 H 是连通的。由引理 5.14 和 5.15，我们可以找到椭圆曲线 A_1、……、A_n，以及一个同源

$$\Phi : A \to A' \times A_1^{\ell_1} \times \cdots \times A_n^{\ell_n},$$

其中 A' 是椭圆曲线的乘积，使得

$$\deg(\Phi) \leq c \deg(V)^m,$$

with

$$\Phi(H) = A' \times H_1 \times \cdots \times H_n,$$

其中，对于每个 $i = 1$，……，n 都是次数为 $c\deg(V)^m$ 的连通代数子群。因此，只需考虑连通代数子群 $H \subseteq E^g$ 的情形，其中 E 是具有复乘的椭圆曲线。回顾引理 5.16 之前对 $\mathrm{Ht}(M)$ 的定义。若 H 不是在 $\mathbb{Z}$ 上定义的，则由引理 5.18 可知 $\mathrm{Ht}(H) \geq f|D|^{\frac{1}{2}}/2$。所需的界便由引理 5.16 得出。□

5.4. 完成证明。

由定理 5.13 证明定理 5.7。设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}^g$ 是定义在基底簇 $B \subseteq Y(2)^g$ 上的椭圆曲线乘积族，并设 $V \subseteq \mathcal{A}$。令 $p \in B(\overline{\mathbb{Q}})$ 满足 $\mathcal{A}_p$ 是具有复乘的椭圆曲线的乘积。由定理 5.13 可知，$V_p = V \cap \mathcal{A}_p$ 中的每个挠点都包含在某个连通子群的平移中，该连通子群的次数为 $c\deg(V_p)^m$，平移量是一个阶至多为 $c([K\colon \mathbb{Q}]\deg(V_p))^m$ 的挠点；其中 c 和 m 是仅依赖于 g 的常数。注意，V_p 定义在 $K(p)$ 上，这一点对本论证至关重要；并且 $\deg(V_p) \leq c_{\mathcal{L}}\deg(V)$，其中 $c_{\mathcal{L}}$ 是依赖于 $\mathcal{L}_B$ 的常数。若这些连通子群由 $\mathbb{Z} \subseteq \mathrm{End}(\mathcal{E})$ 中的关系定义，则这些子群是群概形 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ 的纤维，该群概形定义在基底 B 的一个子簇 B' 上，其次数由 $c([K\colon \mathbb{Q}]\deg(V_p))^m$ 界定。该子簇 B' 具有 $B' = B \cap S'$ 的形式，其中 $S' \subseteq Y(1)^g$ 由模关系定义。由引理 5.14，这些模关系的次数由 $c([K\colon \mathbb{Q}]\deg(V))^m$ 界定。

如果这样的子群不是定义在 $\mathbb{Z}$上的，那么它就不可能是正维基底上某个子群概形的纤维。在这种情形下，引理 5.19 给出了包含该子群的阿贝尔簇的复杂度上界。证明至此完成。□

现在我们将把定理 5.8 化归为定理 5.7。

由定理 5.7 证明定理 5.8。我们对 V 的维数使用归纳法来证明该定理。设 $V \subseteq \mathcal{E}^{(n_1)} \times \cdots \times \mathcal{E}^{(n_g)}$ 是一个不可约簇，并设 $\mathcal{A}$ 是 $\pi(V)$ 上包含 V 的最小群概形。如果 $\dim(V) = \dim(\mathcal{A})$，那么 $\pi(V)$ 在 $Y(2)^g$ 中的每个极大特殊子簇 S 都提升为 $\pi^{-1}(S) \cap V$ 中的一个极大特殊子簇。因此，如果 V 是 $\mathcal{A}$ 的一个不可约分支，并且我们能够确定 $Y(2)^g$ 的某个子簇的极大特殊子簇，那么我们也能确定 V 的极大特殊子簇。如果 $\dim(V) < \mathcal{A}$，定理 5.7 告诉我们，$V \cap P_{\mathcal{A}}$ 包含于一个可有效确定的有限个特殊子簇 $\mathcal{S}$ 的并集中，且这些子簇满足 $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{A}) < \dim(\mathcal{A})$。如果这样的特殊子簇满足 $V \cap \mathcal{S} = V$，那么 V 将包含于一个真包含于 $\mathcal{A}$ 的群概形中，这与我们关于 $\mathcal{A}$ 的假设矛盾。由于 V 不可约，我们推得每个不可约分支 $V' \subseteq V \cap \mathcal{S}$ 都满足 $\dim(V') < \dim(V)$。于是我们可以用 V' 替换 V，并通过归纳法完成证明。□

引理 5.20。设 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{E}^{(n)}$ 是一个定义在 K 上的特殊子簇，并设 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{E}^{(n)}$ 是包含 $\mathcal{S}$ 的最小子群概形。存在一个绝对可有效计算的常数 $c > 0$，使得

$$\deg(\mathcal{H}) \leq c(\deg(\mathcal{S})[K : \mathbb{Q}])^2.$$

证明。下文中，我们用 λ 表示 $Y(2)$ 的泛点，用 j 表示泛纤维的 j-不变量。我们将用到这样一个事实：泛纤维的连通子群定义在 $\mathcal{E}^{(n)}$ 上；挠点的坐标属于 $\mathbb{Q}(\lambda)$ 的一个有限扩张，且其次数有一个下界。现在回忆一下，特殊子簇 $\mathcal{S}$ 是群概形 $\mathcal{H}$ 的一个连通分支（其维数与 $\mathcal{S}$相同）。首先，假设 $\dim(\pi(\mathcal{S})) = 1$。由 [30, 引理 10.1], （这是经典理论 [28], 的一个推论）可知，伽罗瓦群 $\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}(j)$ 在确切阶为 N 的点上传递作用。此外，$[\mathbb{Q}(\lambda) : \mathbb{Q}(j)] = 2$，且伽罗瓦群 $\mathbb{Q}(j)/\mathbb{Q}(j)$ 在确切阶为 N 的点 $\frown$ 上传递作用。现在，令 $\mathcal{E}^{(n)}$ 为 $\mathcal{E}^{(n)}$ 的基扩张，使得确切阶为 N 的挠点 $\frown$ 是 $\mathcal{E}^{(n)}$ 中基曲线 B （$Y(2)$ 的扩张）的截面。该扩张带有一个典范投影

$$p : \widetilde{\mathcal{E}^{(n)}} \to \mathcal{E}^{(n)}.$$

现在，平移 $P + \mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ 的伽罗瓦轨道（其中 P 是确切阶为 N 的点， $\mathcal{H}'$ 是 $\mathcal{H}$ 中的连通子群（定义在 $\mathbb{Q}(\lambda)$ 上）），在 $K(\lambda)/K(\lambda)$ 的伽罗瓦群作用下，至少有 $N/(2[K : \mathbb{Q}])$ 个元素。因此， $p^{-1}(\mathcal{S})$ 至少包含这么多个平移。相对于线丛 $^{1}\ ^{\deg(p)}$ $p^*\mathcal{L}$，每个平移的次数至少为 $\deg(\mathcal{H}')$。现在我们可以运用投影公式，推出 $\mathcal{S}$ 的次数至少为 $\deg(\mathcal{H}')N/(2[K : \mathbb{Q}])$；又由于 $\mathcal{H}$ 的次数至多为 $cN\deg(\mathcal{H}')$，结论得证。

现在假设 $\dim(\pi(\mathcal{S})) = 0$。那么 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{E}^{(n)}_{\pi\ \mathcal{S}\ ()}$ 的一个连通阿贝尔子簇的平移。按照上文的论证，但使用来自定理 5.11 的伽罗瓦界，我们便可推出该引理。□

现在我们可以完成定理 5.10 的证明。

定理 5.10 的证明。我们对 $\dim(V)$ 使用归纳法来证明该定理。设 $V \subseteq \mathcal{E}^{(n)}$ 是定义在数域 K 上的不可约代数簇。下文中，我们用 c 和 m 表示仅依赖于 n 的正的、可有效计算的常数；它们在不同出现处可以取不同值。

设 $\dim(V) = 0$。若 V 不是特殊点，则无需证明。因此，设 V 是特殊点。由于 V 定义在 K 上，根据 [20, 定理 8.1, 第 232] 页（取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$），可得

$$\mathbf{cl}(\pi(V)) \leq \exp(c[K : \mathbb{Q}]^2).$$

由定理 5.11， V 的阶被 $c[K$ 所界： $\mathbb{Q}]^2$，因此包含 V 的最小子群概形的次数至多为 $c[K$： $\mathbb{Q}]^2$。

现在设 $\dim(V) > 0$。令 $\mathcal{A}$ 为包含 V 的、定义在 $\pi(V)$ 上的最小群概形。先设 $\dim(V) = \dim(\mathcal{A})$。若 $\dim(\pi(V)) = 0$，则要么 $\pi(V)$ 是 $Y(2)$ 的特殊点，要么 V 不含特殊点。因此，我们可以假设 $\pi(V)$ 是特殊点，此时 V 也是特殊点。如上所述，我们利用 [20, 定理 8.1, 第 232] 页（取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$），得到 $\mathrm{cl}(\pi(V)) \leq \exp(c[K : \mathbb{Q}]^2)$。随后应用引理 5.20 来界定 $\mathcal{A}$ 的次数，从而完成这一情形。

若 $\dim(\pi(V)) = 1$（并仍假设 $\dim(V) = \dim(\mathcal{A})$），则 V 是特殊的，我们可以应用引理 5.20 来界定 $\mathcal{A}$ 的次数，从而完成这一情形。

剩下需要考虑的是 $\dim(V) < \dim(\mathcal{A})$ 的情形。在此情形下，定理 5.7 表明

$$V \cap P_{\mathcal{A}} \subseteq \bigcup \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$$

其中并集遍历所有满足 $\dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{A}) < \dim(\mathcal{A})$ 且 $\mathrm{cl}(\mathcal{S}) \leq c([K\colon \mathbb{Q}]\deg(V))^m$ 的 $\mathcal{E}^{(n)}$ 的特殊子簇 $\mathcal{S}$。（注意，我们可以假设该并集遍历 $\mathcal{E}^{(n)}$ 中的特殊子簇，而非 $\mathcal{E}^n$ 中的，因为 $\mathcal{E}^{(n)}$ 本身是 $\mathcal{E}^n$ 的特殊子簇，而我们是在 $\mathcal{E}^{(n)}$ 中进行研究。）注意，V 不包含于任何这样的 $\mathcal{S}$ 中（因为 $\mathcal{A}$ 是包含 V 的、定义在 $\pi(V)$ 上的最小群概形）。因此，$V \cap \mathcal{S}$ 由维数小于 $\dim V$ 的不可约簇之并组成。根据贝祖定理，对于每个这样的 $\mathcal{S}$，交集 $V \cap \mathcal{S}$ 至多有 $c([K:\mathbb{Q}]\deg(V))^m$ 个不可约分支。固定这样一个 $\mathcal{S}$。由于伽罗瓦群 $\overline{\mathbb{Q}}/K$ 会置换这些不可约分支，每个不可约分支 $V' \subseteq V \cap \mathcal{S}$ 都定义在一个数域 K' 上，并满足 $[K'\colon \mathbb{Q}] \leq c([K\colon \mathbb{Q}]\deg(V))^m$。根据归纳假设，该定理的结论对每个这样的不可约分支都成立，因此对 V 也成立。□

假设与定理 5.10 中一样，V 是定义在数域 K 上的 $\mathcal{E}^{(n)}$ 的不可约子簇，并且进一步假设 V 不包含正维的特殊子簇。在这种情形下，该定理给出 c 和 m，它们可以由 n 有效地计算得到；若 $P \in V(\mathbb{C})$ 是特殊点，则 P 的阶至多为$c([K\colon \mathbb{Q}]\deg(V))^m$，且 $\pi(P)$ 的复杂度至多为 $\exp(c([K\colon \mathbb{Q}]\deg(V))^m)$。如果我们有关于 n 的 c 和 m 的显式取值，就可以得到一个算法，计算这类 V 上的所有特殊点。例如，我们只需计算 $\mathcal{E}^{(n)}$ 中满足这些界的所有特殊点，然后检查其中哪些点确实位于 V 上。然而，该定理的证明还导出了另一种算法。它只需要给出 c 和 m 的显式取值，使得若 $P \in V(\mathbb{C})$ 是扭点，则 P的阶至多为 $N = c([K\colon \mathbb{Q}]\deg(V))^m$。$V$与阶至多为 N 的扭截面的交由有限个点组成，记为 X。我们计算这些点，然后对每个 $P \in X$，检查 $\mathcal{E}_{\pi(P)}$ 是否具有复乘（例如，可以使用 Zannier 在 [41] 第 104 页注释 4.2.1 中讨论的算法）。

5.5. 具有良好约化的椭圆曲线。以下是 S. David 定理 [12] 的一个特例。

引理 5.21. 假设 E 是定义在数域 L 上的椭圆曲线，且 $P \in E(\overline{L})$ 是确切阶为 N 的挠点。设 S 为 E 在 L 上乘法坏约化的素点数。则存在一个有效的绝对常数 $c > 0$，使得

$$N \leq cS[L(P) : \mathbb{Q}](1 + \log[L(P) : \mathbb{Q}]).$$

证明。设 S_P 为 E 在 $L(P)$ 上乘法坏约化的素点数。则

$$S_P \leq S[L(P) : \mathbb{Q}].$$

令 $k = L(P)$。点 P、$[2]P$、.....、$[N]P \in E(k)$ 彼此不同，且典范高度为 0。由此，结论可由 David 的 [12, 定理 1.2 (ii)]，推出，其中 $S'_{E/k}$ 等于我们的 S_P（并且 $h \geq 1$）。□

定理 5.22. 假设 A 是由 $g \geq 2$ 条椭圆曲线的乘积构成，这些椭圆曲线由数域 L 上的魏尔斯特拉斯方程给出，且每条曲线至多有 S 个乘法型坏约化素点。假设 $V \subseteq E_1 \times \cdots \times E_g$ 是一个不可约簇

定义在 L 上。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 c 和 m，可由 g 和 ε 有效计算得到，并且存在 N，使得

$$\overline{V \cap A_{tors}}^{Zariski} = \bigcup_{i=1}^{N} T_i + H_i,$$

其中

$$N \leq cS^{g^2+\varepsilon}[L:\mathbb{Q}]^{g^2+\varepsilon}(\deg(V))^m$$

并且，对于 $i = 1$，....., N， T_i 是挠点，使得

$$ord(T_i) \leq cS^{g+\varepsilon}[L:\mathbb{Q}]^{g+\varepsilon}(\deg(V))^m,$$

且 H_i 是次数至多为 $c\deg(V)^m$ 的连通子群。

证明。由引理 5.21 可知，对于任意 $\theta > 0$，存在一个仅依赖于 g 和 θ 的有效 $c' > 0$，使得若 $P \in A(\mathbb{C})$ 的阶恰为 N，则

$$[L(P):L] \geq c' \frac{1}{S^{1-\theta}[L:\mathbb{Q}]} N^{\frac{1}{g}-\theta}. \tag{5.4}$$

将此结果与 (5.2) 结合，并选取 θ 和 δ，即可得到 V 中孤立挠点的阶的上界。现在，由引理 5.1 可知，包含于 V 中的极大陪集的数量可由 $\deg(V)$ 的多项式所界定。若这样的陪集不是扭陪集，则其中不含任何挠点，因此我们只需考虑经过挠点 T、对应于子群 H 的扭陪集 $T + H \subseteq V$。每个连通子群都定义在 L 上，因此应用界 (5.4)，并与引理 5.1 中的界比较，即可得到结论。□

5.6. 最终应用。在陈述最后一个应用之前，我们还指出，利用 Bombieri 和 Zannier 的方法 [10], , 可以消除定理 5.13 中对定义域 L 的依赖。不过，我们失去了对簇次数的多项式依赖。

定理 5.23. 设 A 是 g 条椭圆曲线的乘积，且 K 是如第 5.1 小节所述的 A 的定义域。设 $V \subseteq A$ 是定义在扩张 K的数域 L 上的代数子簇。

(i) 设 S 如定理 5.22 所述。对每个 $\varepsilon > 0$，存在可有效计算的常数 c 和 m，它们依赖于 ε 和 g，使得 V 上的孤立挠点的个数 N_{iso}满足

$$N_{iso} \leq c\deg(V)^m(S[L:\mathbb{Q}])^{\varepsilon}.$$

(ii) 现在假设 A是 g 条具有复乘的椭圆曲线的乘积。存在一个有效常数 C，它仅依赖于 V 的次数和 A的维数，并且存在 N，使得

$$\overline{V \cap A_{tors}}^{Zariski} = \bigcup_{i=1}^{N} T_i + H_i$$

其中， $i = 1$，....., N， T_i是挠点， H_i是 A的连通子群，并且

$$N \leq C.$$

(iii) 再次假设 A 是由 g 个具有复乘的椭圆曲线的乘积。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在可有效计算的常数 c和 m，它们取决于 ε 和 g，使得 V 中孤立挠点的数量 N_{iso} 满足

$$N_{iso} \leq c\deg(V)^m[L:K]^{\varepsilon}.$$

证明。对于 (i) 和 (iii)，我们再次将计数结果（定理 1.1）应用于引理 5.3 中的集合 Z，同时分别使用定理 5.22 和 5.13 给出的孤立挠点阶的上界。对于 (ii)，我们可以紧密沿用 [10, 定理 1] 的证明中的论证。细节留给读者。□

在最后一项应用中，我们给出 Barroero 和 Sha [2] 的一项结果的有效形式。在 [2], 中，他们给出了一项一般但非有效的结果，并通过其他方法使其在某些特殊情形下变为有效。我们给出其一般结果的有效形式。为此，我们继续假设椭圆曲线由射影平面中的魏尔斯特拉斯模型给出，并使用仿射坐标（P, Q），使无穷远点为原点。

定理 5.24. 设 E 是数域 K 上的一条椭圆曲线，并假设 $V \subseteq E \times \mathbb{G}_m^n$ 是定义在 K 上的一条不可约曲线，其坐标为（$P, Q, R_1, \ldots, R_n$）。假设（P, Q）不是 E 的挠点，且 $R_1, \ldots, R_n$ 乘法独立。那么存在一个有效的 N（依赖于 E, V 和 K），使得至多有 N 个点 $c \in V(\mathbb{C})$ 满足（$P(c)$ $Q(c)$）是 E 上的挠点，且 $R_1(c) \ldots, R_n(c)$ 乘法相关。

如 [2], 引言所述，Barroero 和 Sha 给出的证明中，唯一无效之处在于应用了 Habegger 和 Pila 证明的计数定理（[23, 推论 7.2]）。利用 [24], ，很容易验证 [2] 第 811 页所描述的曲面 S 是可定义的，进而 [2] 第 811 页稍后定义的集合 W 也是可定义的。因此，用我们的推论 4.6 代替 [23, 推论 7.2], 后， [2] 引理 2.3 中的隐含常数就是有效的。这足以使 [2] 中的证明具有有效性。

6. Sets definable from unrestricted Pfaffian functions

本节中，我们考虑由所有全定义 Pfaffian 函数扩张实数域所得的结构，即

$$\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaff}} = (\bar{\mathbb{R}}, \{f : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ is Pfaffian}, n \in \mathbb{N}\}).$$

在 [16], 中，Gabrielov 证明了该结构是“有效o-极小”的。更确切地说，结合 [16], 的定理 3.10、6.1 和 3.13，语言 $\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaff}}$ 中的每个公式 ϕ 都赋有一种格式 $\mathcal{F}$（ϕ），并且满足以下性质。

事实 6.1。若 ϕ 和 ψ 是 $\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaff}}$语言中的公式，则

- $\mathcal{F}(\phi \vee \psi)$ = 常数($\mathcal{F}(\phi)$ $\mathcal{F}(\psi)$);
- $\mathcal{F}(\neg\phi)$ =常数($\mathcal{F}(\phi)$);
- $\mathcal{F}(\exists x\phi)$ =常数($\mathcal{F}(\phi)$).

此外，由 ϕ 定义的集合的连通分支数为常数($\mathcal{F}(\phi)$).

Furthermore, $\mathcal{F}(x = a) = \mathcal{F}(x > a) = 1$, *for all* $a \in \mathbb{R}$.

我们称在 $\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaff}}$ 中可定义的集合 X 具有格式 $\mathcal{F}$，若存在一个公式 ϕ定义 X 且 $\mathcal{F}(\phi) \leq \mathcal{F}$。此后，可定义性均相对于 $\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaff}}$而言。

命题 6.2. 设 n 为非负整数， N 为正整数，$\mathcal{F}$和 ε为正实数。设 $X_1, \ldots, X_N \subseteq \mathbb{R}^n$ 为格式由 $\mathcal{F}$界定的可定义集。存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个细胞分解，使其与每个 X_j相容，其中 $j = 1, \ldots, N$，并且细胞的数量及其格式均为 const($N, \mathcal{F}$)。

证明. 我们将对 n 进行归纳，并且不失一般性地假设 $N \leq \mathcal{F}$。情形 $n = 0$ 是平凡的，因此令 $n > 0$。设 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$，并令 $F_j(x) \subseteq \mathbb{R}$ 表示 X_j 在 x上方的纤维。用 $E_j(x)$表示 $\mathbb{R}$ 中所有属于 $F_j(x)$孤立点或属于 $F_j(x)$区间端点的点的集合；用 $E(x)$表示对所有 $j = 1, \ldots, N$，集合 $E_j(x)$的并集。x 的组合类型是这样一个映射：它为每个 j以及每个点 $y \in E(x)$（分别地，相邻端点 $y, y' \in E(x) \cup \{\pm\infty\}$）赋值 1 或 0，具体取决于 $y \in F_j(x)$（分别地，$(y, y') \subseteq F_j(x)$）是否成立。

由于每个 $F_j(x)$ 中孤立点和区间的数量都是 const($\mathcal{F}$)，不同组合类型的数量是某个正整数 M，且该数为 const($\mathcal{F}$)。容易验证，族 $F_j(x)$ $E(x)$ $\subseteq \mathbb{R}^n$ 是格式为 const($\mathcal{F}$) 的可定义族，而由具有给定组合类型的那些 x 组成的 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的子集，其格式为 const($\mathcal{F}$) 的可定义集合。这样，我们便将 $\mathbb{R}^{n-1}$ 分解为集合 T_1、……、T_M。只需对每个 i、j 构造 $(T_i \times \mathbb{R}) \cap X_j$ 的细胞分解。固定 i 并将每个 X_j 替换为 $(T_i \times \mathbb{R}) \cap X_j$ 后，只需在原有记号下证明该结论；不妨假设组合类型在 $x \in T$ 上已经统一固定，其中 $T := \bigcup_{j=1}^{N} \pi_{n-1}(X_j)$，且 $\pi_{n-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ 是自然坐标投影。

我们在此假设下继续推导。由此可知，对于 $x \in T$， $E(x)$ 中点的数量是某个常数 K，且该常数为 const($\mathcal{F}$)；我们可以定义 K 个函数$y_1, \ldots, y_K\colon T \to \mathbb{R}$，使得对每个 $x \in T$，都有 $E(x) = \{y_1(x) \ldots, y_K(x)\}$，并且 $y_1(x) < \cdots < y_K(x)$。这些函数是格式为 const($\mathcal{F}$) 的可定义函数；每个 $y_j(x)$ 都定义为 $E(x)$ 中满足 $E(x)$ 恰好包含 $j - 1$ 个更小元素的那个元素。根据一般的 o-极小性，这些函数在 T 上（赋予诱导拓扑）除一个维数严格小于 dim T 的可定义集 $T' \subseteq T$ 外均连续，而且 T' 的格式也是 const($\mathcal{F}$)——例如，可以为 T' 写出一个ε-δ-定义。

根据归纳假设，存在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的一个细胞分解，与 $T, T' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ 相容，并满足所需的界。若 $C \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ 是一个与 T, T' 不相交的细胞，则 $C \times \mathbb{R}$ 是一个与每个 X_j 相容的细胞。若 $C \subseteq T \setminus T'$，则函数 y_j 限制在 C 上后是连续函数，并且根据构造，集合

$$\{(x, y) \in C \times \mathbb{R}\colon y = y_j(x)\} \qquad j = 1 \ldots, K$$
$$\{(x, y) \in C \times \mathbb{R}\colon y_j(x) < y < y_{j+1}(x)\} \qquad j = 0, \ldots, K$$

构成与每个 X_j 兼容的 $C \times \mathbb{R}$ 的细胞分解（其中我们令 $y_0 = -\infty$和 $y_{K+1} = +\infty$）。事实上，常数组合类型决定了这些细胞中的每一个要么包含于每个 X_j中，要么与其严格不相交。这些 const($\mathcal{F}$) 个细胞的格式均为 const($\mathcal{F}$)，并且它们共同覆盖 $(T \setminus T') \times \mathbb{R}$。

最后，我们需要构造覆盖 $T' \times \mathbb{R}$的细胞。为此，我们注意到y_1、……、y_K又在某个维数严格小于 dim T' 的集合 $T'' \subseteq T'$上给出了连续函数；利用相同的构造，我们得到 const($\mathcal{F}$) 个格式为 const($\mathcal{F}$) 的细胞，覆盖 $(T' \setminus T'') \times \mathbb{R}$。重复此过程至多 dim$T$ 次，即可完成证明。□

有了这一有效细胞分解结果，我们可以在无约束 Pfaffian 函数的情形下，重复第3节中有效参数化的证明。我们不再具有关于次数的多项式依赖，但仍保留有效性，因此可以证明有效计数结果。我们仅陈述最一般的结果。

定理6.3。设 ℓ、m 和 n 为非负整数，g 为正整数，$\mathcal{F}$ 和 ε 为正实数。假设 $X \subseteq \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 是格式为 $\mathcal{F}$ 的可定义族。存在一个正整数 J，其为 const($\mathcal{F}, g, \varepsilon$),

正整数 k_j，其中 $j = 1, \ldots, J$，以及格式为 const$(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$ 的基本块族 $W^{(j)} \subseteq \mathbb{R}^{k_j} \times \mathbb{R}^{\ell} \times \mathbb{R}^{m}$，其中 $j = 1, \ldots, J$，还有格式为 const$(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$ 的连续可定义映射 $\phi^{(j)} \colon W^{(j)} \to \mathbb{R}^{n}$，其中 $j = 1, \ldots, J$，以及一个正实数 C，其为 const$(\mathcal{F}, g, \varepsilon)$，使得下列结论成立。

(i) 对所有的 $j = 1$、. . .、J 和 $(a', a) \in \mathbb{R}^{k_j} \times \mathbb{R}^{\ell}$，我们有

$$\Gamma(\phi^{(j)})_{(a',a)} \subseteq \left\{(x, y) \in X_a : y \text{ is isolated in } X_{(a,x)}\right\}.$$

(ii) 假设 $a \in \mathbb{R}^{\ell}$。对于任意实数 $H \geq 1$，集合 $X^{\sim,\ a}{}^{iso}(g, H)$ 包含于至多 CH^{ε} 个图 $\Gamma(\phi^{(j)})_{(a',a)}$ 的并集中，其中 $j \in \{1, \ldots, J\}$ 且 $a' \in \mathbb{R}^{k_j}$。

References

1. James Ax, *Some topics in differential algebraic geometry. I. Analytic subgroups of algebraic groups*, American J. Math. **94** (1972), 1195–1204. 2. Fabrizio Barroero 和 Min Sha, *Torsion points with multiplicatively dependent coordinates on elliptic curves*, Bull. Lond. Math. Soc. **52** (2020), no. 5, 807–815. 3. Yuri Bilu、David Masser 和 Umberto Zannier, *An effective "Theorem of André" for CM-points on a plane curve*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 154 (2013), no. 1, 145–152. 4. Gal Binyamini, *Density of algebraic points on Noetherian varieties*, Geom. Funct. Anal. 29 (2019), no. 1, 72–118. 5. , *Point counting for foliations over number fields*, Forum Math. Pi 10 (2022), e6, 1–39. 6. Gal Binyamini 和 Dmitry Novikov, *The Yomdin–Gromov Algebraic Lemma Revisited*, Arnold Math. J. 7 (2021), no. 3, 419–430. 7. Gal Binyamini、Dmitry Novikov 和 Benny Zack, *Wilkie's conjecture for Pfaffian structures*, 2022, https://arxiv.org/abs/2202.05305. 8. Gal Binyamini、Harry Schmidt 和 Andrei Yafaev, *Lower bounds for Galois orbits of special points on Shimura varieties: a point-counting approach*, 2022, Math. Ann. (). 9. Gal Binyamini 和 Nicolai Vorobjov, *Effective Cylindrical Cell Decompositions for Restricted Sub-Pfaffian Sets*, Int. Math. Res. Not. (2022), no. 5, 3493–3510. 10. E. Bombieri 和 U. Zannier, *Heights of algebraic points on subvarieties of abelian varieties*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 23 (1996), no. 4, 779–792. 11. Abbey Bourdon 和 Pete L. Clark, *Torsion points and Galois representations on CM elliptic curves*, Pacific J. Math. **305** (2020), no. 1, 43–88. 12. Sinnou David, *Points de petite hauteur sur les courbes elliptiques*, J. Number Theory 64 (1997), no. 1, 104–129. 13. Laura DeMarco、Holly Krieger 和 Hexi Ye, *Uniform Manin–Mumford for a family of genus2 curves*, Ann. of Math. (2) 191 (2020), no. 3, 949–1001. 14. Gabriel A. Dill, *Torsion points on isogenous abelian varieties*, Compos. Math. 158 (2022), no. 5, 1020–1051. 15. Vesselin Dimitrov、Ziyang Gao 和 Philipp Habegger, *Uniformity in Mordell–Lang for curves*, Ann. of Math. (2) 194 (2021), no. 1, 237–298. 16. Andrei Gabrielov, *Relative Closure and the Complexity of Pfaffian Elimination*, 离散与计算几何、算法与组合学，第25卷，Springer，柏林、海德堡，2003年，第441–460页。 17. Ziyang Gao, *Towards the Andre–Oort conjecture for mixed Shimura varieties: The Ax–Lindemann theorem and lower bounds for Galois orbits of special points*, J. Reine Angew. Math. 732 (2017), 85–146. 18. Ziyang Gao、Tangli Ge 和 Lars K¨uhne, *The Uniform Mordell–Lang Conjecture*, 2021, https://arxiv.org/abs/2105.15085. 19. M. Gromov, *Entropy homology and semialgebraic geometry* (after Y. Yomdin), Astérisque (1987), no. 145–146, 225–240, Séminaire Bourbaki, Vol. 1985/86,

24. Gareth Jones 和 Harry Schmidt, *Pfaffian definitions of Weierstrass elliptic functions*, Math. Ann. 379 (2021), no. 1-2, 825–864. 25. Gareth O. Jones 和 Margaret E. M. Thomas, *Effective Pila–Wilkie bounds for unrestricted Pfaffian surfaces* **381** 2021 1 2, 729 767

Math. Ann. ( ), no. - – . 26. Lars K

2 **176** 2012 1, 651 671

uhne, *An effective result of André–Oort type*, Ann. of Math. ( ) ( ), no. – . 27. , *Equidistribution in Families of Abelian Varieties and Uniformity*, 2021, https://arxiv.org/abs/2101.10272. 28. Serge Lang, *Elliptic Functions*, 第2版，数学研究生教材，第112卷，Springer-Verlag，纽约，1987年，附有 J. Tate 撰写的附录。 29. Davide Lombardo, *Bounds for Serre's open image theorem for elliptic curves over numberfields*, Algebra Number Theory 9 (2015), no. 10, 2347–2395. 30. D. Masser 和 U. Zannier, *Torsion points on families of squares of elliptic curves*, Math. Ann. 352 (2012), no. 2, 453–484. 31. D. W. Masser 和 G. W¨ustholz, *Estimating isogenies on elliptic curves*, Invent. Math. 100 (1990), no. 1, 1–24. 32. David Masser 和 Gisbert W¨ustholz, *Periods and minimal abelian subvarieties*, Ann. of Math. (2) 137 (1993), no. 2, 407–458. 33. Ya'acov Peterzil 和 Sergei Starchenko, *Definability of restricted theta functions and families of abelian varieties* **162** 2013 4, 731 765 ,

Duke Math. J. ( ), no. – . 34. J. Pila 和 A. J. Wilkie, *The rational points of a definable set*, Duke Math. J. 133 (2006), no. 3, 591–616. 35. Jonathan Pila, *On the algebraic points of a definable set*, Selecta Math. (N.S.) 15 (2009), no. 1, 151–170. 36. , *Point-Counting and the Zilber–Pink Conjecture*, 剑桥数学专著，第228卷，剑桥大学出版社，剑桥，2022年。 37. Jonathan Pila、Ananth N. Shankar 和 Jacob Tsimerman, *Canonical Heights on Shimura Varieties and the André–Oort conjecture* 2022 , , 附有 Helene Esnault 和 Michael Groechenig 撰写的附录，https://arxiv.org/abs/2109.08788。 38. A. J. Wilkie, *Rational points on definable sets*,《o-极小性与丢番图几何》，伦敦数学会讲义系列，第421卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015年，第41–65页。 39. Y. Yomdin, *C^k-resolution of semialgebraic mappings. Addendum to: "Volume growth and entropy"* **57** 1987 3, 301 317

Israel J. Math. ( ), no. – . 40. , *Volume growth and entropy*, Israel J. Math. 57 (1987), no. 3, 285–300. 41. Umberto Zannier, *Some Problems of Unlikely Intersections in Arithmetic and Geometry*, 数学年刊研究丛书，第181卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012年，附有 David Masser 撰写的附录。

Department of Mathematics, Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel
Email address: gal.binyamini@weizmann.ac.ilSchool of Mathematics, University of Manchester, Oxford Road, Manchester M139PL, UK*Email address*: gareth.jones-3@manchester.ac.ukDepartement Mathematik und Informatik, Spiegelgasse 1, 4051 Basel, Schweiz*Email address*: harry.schmidt@unibas.ch
Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Street, West Lafayette, Indiana 47907-2067, USA,*Email address*: memthomas@purdue.edu