arXiv:2301.09904v1 [math.LO] 24 Jan 2023

度量空间的动态缠绕导数逻辑

David Fern´andez-Duque[§] 和 Yo`av Montacute[†]

[§]根特大学数学系，捷克科学院计算机科学研究所david.fernandezduque@ugent.be

[†]剑桥大学计算机实验室
yoav.montacute@cl.cam.ac.uk

2023年6月1日

摘要

动力系统是描述空间与时间相互作用的抽象模型。它们常用于物理学和工程学等领域，以理解复杂过程；但由于其普遍性，也被应用于研究计算过程、多智能体系统中的交互、机器学习算法以及其他与计算机科学相关的现象。在绝大多数应用中，动力系统由度量空间上的连续“转移函数”作用构成。在这项工作中，我们研究用于推理此类结构的可判定形式系统。

空间逻辑可追溯至 20 世纪 40 年代，但我们的工作沿着这些逻辑近来呈现的更具动态性的方向展开，这一转向源于两项近期进展：对拓扑 μ-演算的研究，以及将线性时序逻辑与基于康托尔导数的逻辑相结合。本文将基于康托尔导数和“下一时刻的点”算子的动态拓扑逻辑，与表达能力完备的不动点算子相结合，从而将拓扑 μ-演算与线性时序逻辑结合起来。我们证明，所得逻辑是可判定的，并且具有自然的公理化体系。此外，我们证明，这些逻辑对于在康托尔空间、有理数以及它们的子空间上的解释都是完备的。

1 引言

我们的行星周围环绕着数以万计的人造卫星，必须预测并控制它们的运动，例如避免与其他物体发生碰撞。为此，我们利用已知的物理学知识对它们随时间的位置进行建模，而支配这种行为的数学结构称为*动力系统*（图 1）。给定卫星的初始位置和动量，我们便可以预测它将沿何种路径运行：它可能作周期性运动、飞向太空，或坠毁在地球上。在这类模型中，空间和时间都是连续的，也就是说，它们由欧几里得空间表示；不过，为了便于计算，也可以用离散方式近似，甚至通过有限关系结构来表示（例 4.1 和 5.5）。因此，我们可以设想卫星以适当短的时间间隔，每次移动“一个时钟刻度”；这种观点通常更适合我们的目的。

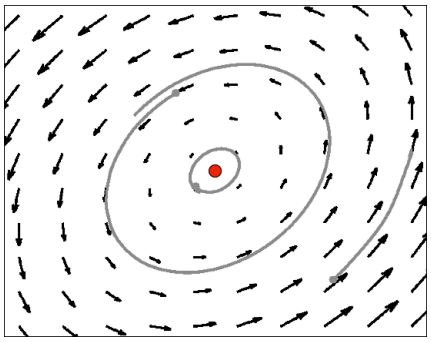


图 1：重心周围的轨道

不过，为了便于计算，也可以用离散方式近似，甚至通过有限关系结构来表示（例 4.1 和 5.5）。因此，我们可以设想卫星以适当短的时间间隔，每次移动“一个时钟刻度”；这种观点通常更适合我们的目的。

一般而言，离散时间动力系统定义为配备转移函数（表示运动）的拓扑空间。然而，对于涉及物理空间的应用，使用度量空间比使用任意拓扑空间更为方便。对逻辑学家而言，度量空间具有一些技术优势，因为它们所提供的逻辑“性质更好”，但也带来了额外的挑战：必须格外谨慎，确保所构造的结构是可度量化的。最近的两项进展使空间逻辑朝着更具“动态性”的方向发展。第一项是拓扑 μ-演算 [2,19], 的发展，它通过引入不动点（包括康托尔完美核）扩充了通常的拓扑算子，并应用于形式认识论 [3]。第二项是遵循 Saveliev 的建议，将线性时序逻辑与基于康托尔导数的空间逻辑相结合 [14], ，从而得到表达能力更强的动态拓扑逻辑版本 [1]。这使我们能够对例如自稠密空间进行推理；这类空间与混沌理论 [10] 和微分方程等领域相关。我们的目标是结合这两种方案的表达能力，并构建具有拓扑不动点的动态拓扑逻辑。我们尤其关注基于度量空间的动力系统，因为大多数应用中使用的都是这类空间。

本文以 Fern´andez-Duque 和 Montacute [14], 的工作为基础。他们研究了一种双模态语言，其中 $\Diamond$ 被解释为康托尔导数，而 $\bigcirc$ 则表示“时间中的下一个点”。为了在这一逻辑中加入拓扑不动点，我们遵循 Goldblatt 和 Hodkinson [19], 的做法；他们利用 Dawar 和 Otto [9]的结果，通过相对简单但表达能力完备的纠缠片段 [12, 13]来表示拓扑 μ-演算。后者通过多元模态 $\Diamond^\infty$扩展了模态逻辑；在最大的子空间中，$\Diamond^\infty\Gamma$ 成立，并且其中每个$\varphi \in \Gamma$ 都是稠密的。这使我们能够发挥拓扑 μ-演算的全部能力，同时又使用一种从组合视角来看相对简明的形式语言。因此，我们得到逻辑$\mathbf{K4C}^\infty$ （以及其他各种扩展），它发挥着标准动态拓扑逻辑$\mathbf{S4C}$的作用。

尽管康托尔导数和拓扑不动点的可定义性增强了表达能力，我们证明$\mathbf{K4C}^{\infty}$仍具有**S4C**同样理想的性质：它在所有度量空间构成的类上自然地可公理化且可判定。此外，我们扩展了 Mints 和 Zhang [26] 的一项结果：该结果指出**S4C** 在康托尔空间上是完备的。我们证明$\mathbf{K4DC}^{\infty}$（在$\mathbf{K4C}^{\infty}$ 中加入“串行性”公理所得的扩展）对于康托尔集和有理数集均可靠且完备。除了上述逻辑，我们还研究了$\mathbf{K4I}^{\infty}$ 和$\mathbf{K4DI}^{\infty}$，它们适用于转移函数为浸入（即保持康托尔导数）的动力系统。所有这些逻辑都是可判定的；我们证明，含有D公理的每种逻辑在康托尔空间和有理数集上都是完备的，而不含这些公理的逻辑则在这两个度量空间的子空间上完备。

使用 μ-演算众所周知颇具挑战，尽管在纠缠片段中工作简化了问题，仍有许多不容小觑的难关需要克服。为了处理不动点，我们沿用 Fine [18] 开创的、基于终点的技术；Bezhan [2] ishvili 等人已证明，这些技术对处理拓扑 μ-演算很有用。在我们的工作中，我们进一步改进这些技术，以处理拓扑与转移函数之间的相互作用。借助动态 *p*-态射技术，我们证明了康托尔空间和有理数集的完备性。为了将其应用于我们的情形，我们采用了带极限的 Kripke 框架；Kremer 和 Mints [22], 曾使用过这类框架，并结合了导数模态逻辑中的世界复制构造（例如见 [2]）。我们的一般方法以统一的方式给出了这两个度量空间及其闭子空间的结果。本工作对于采用康托尔导数公理化**DTL** 至关重要；目前，这一目标仅在散布空间的情形下实现过，参见 Fern´ández-Duque 和 Montacute [17]。

1.1 计算机科学中的动力系统

动力系统是描述运动的数学模型，常用于包括计算机科学在内的许多纯科学和应用科学领域。举例来说，正如 Brunton 和 Kutz [7] 最近指出的，在数据驱动动力系统中，许多问题可以通过动力系统领域的技术加以解决。近年来，基于动力系统理论的方法在机器学习中也日益受到重视。Weinan [31] 提出的一种方法便是其中一例，它利用动力系统对机器学习中使用的非线性函数进行建模。Lin 和 Antsaklis 的 [23] 混合动力系统一直是控制理论、人工智能和计算机辅助验证领域的研究重点。动力系统也应用于人形机器人领域，例如 Ijspeert 等人 [21] 利用非线性动力学研究运动学习。Mortveit 和 Reidys [27] 提出了序列动力系统，这是一类离散动力系统，推广了元胞自动机等概念，并提供了一个研究图中动力过程的框架。计算机科学中动力系统的另一个例子是线性动力系统，即由线性变换构成的动力系统（见例 4.3）。这类系统在计算机科学中的例子包括马尔可夫链、线性递推序列和线性微分方程。此外，动力系统与算法之间还存在着密切的既有

关系。例如，Hanrot、Pujol 和 Stehl´e [20]，的研究以及 Chu [8] 的研究都体现了这一点。

1.2 概要。

第二节给出理解本文所需的定义和记号。第三节介绍动态拓扑逻辑主题的背景。第四节讨论动态拓扑逻辑在动力系统中的动机和应用，尤其是在度量空间和计算机科学背景下的动机和应用。第五节介绍基于动力系统的模型之间的态射，并为这类模型的不同实例给出一些刻画结果。第六节呈现基础逻辑的典范模型，第七节构造一种有限可及关系，用于证明不同逻辑的完备性。第八节引入故事和 Φ-态射的概念，并利用前述结果证明不同语言在$\mathbf{K4C}^{\infty}$之上的有限模型性质和克里普克 d-完备性。第九节证明若干$\mathbf{K4C}^{\infty}$ 之上的逻辑关于 $\mathbb{Q}$ 和康托尔集的拓扑 d-完备性。第十节以一些总结性评论作结。

2 预备知识

本节介绍理解本文所需的符号和定义。我们采用导数空间这一一般框架，以统一逻辑的度量空间语义和 Kripke语义。

定义 2.1（度量空间）。 度量空间是一个有序对 $\mathfrak{X} = \langle X, \delta \rangle$，其中 X是一个集合，δ: $X \times X \to [0, \infty)$ 是一个度量，即满足以下条件的映射：对所有 x， y， $z \in X$:

- $\delta(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$
- $\delta(x, y) + \delta(y, z) \leq \delta(y, z)$。

我们感兴趣的度量空间上的主要运算是康托尔导数。

定义 2.2（康托尔导数）。 设 $\mathfrak{X} = \langle X, \delta \rangle$ 为一个度量空间。给定$S \subseteq X$， S 的康托尔导数 是由 S的所有极限点构成的集合 $d(S)$，即

$$x \in d(S) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists y \in X (0 < \delta(x, y) < \varepsilon).$$

我们可以不加区分地写作 $d(S)$ 或 dS 。

当涉及多个度量空间时，我们可以用 d_X 表示空间 $\langle X, \delta \rangle$ 的康托尔导数。给定子集 A， $B \subseteq X$，不难验证 d 满足以下性质：

1. $d(\varnothing) = \varnothing$;

2. $d(A \cup B) = d(A) \cup d(B)$;
3. $dd(A) \subseteq d(A)$】【。

事实上，这些条件导出了更一般的导数空间概念：[1]

定义 2.3。导数空间 是一个有序对 $\mathfrak{X} = \langle X, \rho \rangle$，其中 X 是一个集合，且ρ: $\wp(X) \to \wp(X)$ 是一个映射，满足上述性质 1–3，其中 $d = \rho$。

相应地，若 $\mathfrak{X} = \langle X, \delta \rangle$ 是一个度量空间，且 d 是 $\mathfrak{X}$上的康托尔导数，那么 $\langle X, d \rangle$ 就是一个导数空间。不过，导数空间还有其他例子。在拓扑空间中，点的子集 A 的标准闭包 可定义为 $c(A) = A \cup d(A)$。因此，$\langle X, c \rangle$ 也是一个导数空间，并满足附加性质 $A \subseteq c(A)$；我们称这类导数空间为闭包空间。更一般地，若 $\langle X, \rho \rangle$ 是任意一个导数空间，我们定义 $\dot{\rho}(A) := A \cup \rho(A)$；那么，$\langle X, \dot{\rho} \rangle$ 就是一个闭包空间。

导数空间的另一个例子来自传递克里普克框架。为简洁起见，我们将这些框架称为导数框架。下文及全文中，我们用 $\exists x \sqsupset y \, \varphi$ 代替 $\exists x(y \sqsubset x \wedge \varphi)$，并对全称量词及其他关系符号采用类似约定。

定义 2.4。一个导数框架是一个二元组 $\mathfrak{F} = \langle W, \sqsubset \rangle$，其中 W 是一个非空集合，$\sqsubset$ 是 W上的传递关系。我们用 $\sqsubseteq$表示 $\sqsubset$ 的自反闭包。

我们选择记号 $\sqsubset$，因为它让人联想到传递关系，但在自反性方面仍有歧义，因为可能存在非自反点和自反点。若 $w \sqsubseteq v$ 且 $v \sqsubseteq w$，我们也写作 $w \equiv v$； w 在 $\equiv$ 下的等价类称为 w 的簇，记作 $C(w)$。

给定 $A \subseteq W$，我们定义 $\downarrow_{\sqsubset}$为一个映射 $\downarrow_{\sqsubset}$: $\wp(W) \to \wp(W)$，使得

$$\downarrow_{\sqsubset}(A) = \{w \in W : \exists v \sqsupset w (v \in A)\}.$$

接下来很容易验证。

引理 2.5. 如果 $\langle W, \sqsubset \rangle$ 是一个导数框架，那么 $\langle W, \downarrow_{\sqsubset} \rangle$ 是一个导数空间。

动力导数系统由一个配备了连续 函数的导数空间构成。回顾一下，如果 $\langle X, \delta_X \rangle$ 和 $\langle Y, \delta_X \rangle$ 是度量空间，且f: $X \to Y$，那么对于每个 $x \in X$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在$\eta > 0$，使得 $\delta_X(x, x') < \eta$蕴含 $\delta_Y(f(x) \; f(x')) < \varepsilon$，此时称 f是连续 的。众所周知（而且不难验证），当且仅当对所有 $A \subseteq Y$， f连续时，$c_X f^{-1}(A) \subseteq f^{-1} c_Y(A)$。由此我们得到以下一般定义。

定义 2.6。设 $\langle X, \rho_X \rangle$ 和 $\langle Y, \rho_Y \rangle$ 是导数空间。若对所有 $A \subseteq Y$，都有 $\dot{\rho}_X f^{-1}(A) \subseteq f^{-1} \dot{\rho}_Y(A)$，则称$f$: $X \to Y$为连续。若f满足更强的条件 $\rho_X f^{-1}(A) \subseteq f^{-1} \rho_Y(A)$，则称其为浸入[2]。最后，若 f是满足 $\rho_X f^{-1}(A) = f^{-1} \rho_Y(A)$ 的双射，则称其为同胚 .

[1]导数空间是 Esakia [11], 提出的 *derivative algebras* 的一种特殊情形，其中任意布尔代数取代了$\wp(X)$。此外，我们研究“传递的”导数代数，因此其定义比例如 [2] 的定义更强。[2]通常，浸入被定义为局部单射的连续映射。我们的定义稍微更一般，但我们稍后构造的浸入确实是局部单射。

我们主要关注连续函数和浸入，但同胚也值得一提，因为它是导数空间适用的同构概念。我们尤其感兴趣的是 $X = Y$ 的情形，这引出了动态导数系统。

定义 2.7. 动态导数系统 是一个三元组 $\mathfrak{S} = \langle X, \rho, f\rangle$，其中$\langle X, \rho\rangle$ 是导数空间，且 $f\colon X \to X$ 是连续映射。

如果 $\mathfrak{S} = \langle X, \rho, f\rangle$ 满足： ρ 是与度量 δ相关联的康托尔导数，我们就称 $\mathfrak{S}$ 为动态度量系统，并将其视为三元组 $\langle X, \delta, f\rangle$。如果 $\rho = \downarrow_{\sqsubset}$ 对于某个传递关系 $\sqsubset$成立，我们就称 $\mathfrak{S}$ 为动态 *Kripke* 框架，并将其视为三元组 $\langle X, \sqsubset, f\rangle$。

用关系 $\sqsubset$来刻画动态 Kripke 框架将会很方便。

定义 2.8（单调性与严格单调性）。设 $\langle W, \sqsubset\rangle$ 为导数框架。若函数 $f\colon W \to W$ 满足：$w \sqsubseteq v$ 蕴含 $f(w) \sqsubseteq f(v)$，则称其为单调；若 $w \sqsubset v$ 蕴含 $f(w) \sqsubset f(v)$，则称其为严格单调。

引理 2.9。若 $\langle W, \sqsubset\rangle$ 是一个导数框架，且 $f\colon W \to W$，则

1. 若 f 是单调的，则它关于 $\downarrow_{\sqsubset}$连续；并且
2. 若 f 是严格单调的，则它关于 $\downarrow_{\sqsubset}$是一个浸入。

接下来我们将讨论缠结算子。它们在空间模态逻辑中十分重要，因为如 Dawar 和 Otto [9]所示，在传递克里普克框架类上，它们在表达能力上等价于 μ- 演算。在拓扑语境中，Fern´andez-Duque [13] 引入了缠结闭包，Goldblatt 和 Hodkinson [19], 则引入了缠结导数，并指出 Dawar 和 Otto 的结果对度量空间同样成立。

定义 2.10（缠结导数）。设 $\langle X, \rho\rangle$ 是一个导数空间，且令$\mathcal{S} \subseteq \wp(X)$。给定 $A \subseteq X$，若对所有 $S \in \mathcal{S}$，$A \subseteq \rho(S \cap A)$，则称 $\mathcal{S}$ 在 中纠缠。我们将 $\mathcal{S}$ 的缠结导数 定义为

$$\rho^{\infty}(\mathcal{S}) := \bigcup\{A \subseteq X : \mathcal{S} \text{ is tangled in } A\}.$$

缠结闭包 是纠缠导数的一个特例，其中ρ 是闭包算子；我们用 $\dot{\rho}^{\infty}$ （或在度量空间中用 c^{∞} ）表示它。

例 2.11. 设 $\langle W, \sqsubset\rangle$ 是一个导数框架，且 $S_1, \ldots, S_n \subseteq W$。那么，$w \in \downarrow_{\sqsubset}^{\infty}(\{S_1, \ldots, S_n\})$当且仅当存在一个无限序列

$$w = w_0 \sqsubset w_1 \sqsubset \ldots$$

使得对于每个 $k = 1, \ldots, n$， $w_i \in S_k$对无穷多个 i [19]值成立。

当 W 有限时，情况尤其清晰。在这种情况下，序列 $w_0 \sqsubset w_1 \sqsubset \ldots$最终会稳定在单个簇中；也就是说，对于某个 j ，当 $i > m$时，我们有 $w_{i+1} \sqsubset w_i$ 。根据传递性，所有这样的 w_i 都必须是自反的，因此得到如下刻画：$w \in \rho^{\infty}(\{S_1, \ldots, S_n\})$当且仅当存在一个自反簇 $C(v)$（即其中所有点都是自反的簇），满足 $w \sqsubset v$ ，且对于所有$k = 1, \ldots, n$， $S_k \cap C(v) \neq \varnothing$。

例 2.12。设 $A = \mathbb{Q}$ 为有理数集， $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 为其补集。那么， $d^\infty(\{A, B\})$ $= \mathbb{R}$，这一点很容易验证，因为A， B 都稠密，因此 $\{A, B\}$ 在 $\mathbb{R}$中是纠缠的。

如果改为定义 $A = (-\infty,\ 0]$ 和 $B = [0, \infty)$，我们就得到 $d^\infty(\{A, B\})$ $= \varnothing$。这是因为，如果 $D \subseteq \mathbb{R}$，那么我们不可能有 $\{A, B\}$ 纠缠于 D：如果D 包含一个负数，那么 $D \not\subseteq d(B \cap D)$；如果它包含一个正数，那么 $D \not\subseteq d(A \cap D)$。因此剩下的情况是 $D = \{0\}$。但此时 $d(D) = \varnothing$，所以 $d(A \cap D) = \varnothing$。相反，请注意在这种情况下，我们有 $c^\infty(\{A, B\}) = \{0\}$，因为 $c(\{0\}) = \{0\}$。

我们的目标是利用下一节中定义的逻辑框架，对动态导数系统的各种类进行推理。

3 动态拓扑逻辑

本节将在动态导数系统的一般设定下讨论动态拓扑逻辑。给定一个由命题变元构成的非空集合 PV，语言 $\mathcal{L}^\circ_{\Diamond\Diamond^\infty}$ 递归定义如下：

$$\varphi ::= p \mid \varphi \wedge \varphi \mid \neg\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \Diamond^\infty\Phi \mid \bigcirc\varphi,$$

其中 $p \in$ PV，且 Φ 是 $\mathcal{L}^\circ_{\Diamond\Diamond^\infty}$ 中的有限公式序列。它由布尔联结词 $\wedge$ 和 $\neg$、时态模态 $\bigcirc$ 以及模态
$\Diamond$（表示导数算子）和纠缠导数模态 $\Diamond^\infty$ 组成。与通常一样， $\Box := \neg\Diamond\neg$ 是 $\Diamond$ 的对偶。闭包和内部模态可分别定义为 $\circledcirc\varphi := \varphi \vee \Diamond\varphi$ 和 $\boxdot\varphi :$
$= \varphi \wedge \Box\varphi$。遵循 [19], ，我们定义$\circledcirc^\infty\Phi := \circledcirc \bigwedge \Phi \vee \Diamond^\infty\Phi$。

定义 3.1（语义）。一个动态导数模型（DDM）是一个四元组 $\mathfrak{M} = \langle X, \rho, f, \nu\rangle$，其中 $\langle X, \rho, f\rangle$ 是一个动态导数系统，且 ν: PV $\to \wp(X)$ 是赋值函数，它为 PV 中的每个命题字母赋予 X 的一个子集。给定 φ, $\psi \in \mathcal{L}^\circ_{\Diamond\Diamond^\infty}$，我们按如下方式归纳定义 φ 的真值集 $\|\varphi\| \subseteq X$：

- $\|p\| = \nu(p)$;
- $\|\neg\varphi\| = X \setminus \|\varphi\|$;
- $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \cap \|\psi\|$;
- $\|\Diamond\varphi\| = \rho(\|\varphi\|)$;
- $\|\Diamond^\infty\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}\| = \rho^\infty(\{\|\varphi_1\|, \ldots, \|\varphi_n\|\})$;
- $\|\bigcirc\varphi\| = f^{-1}(\|\varphi\|)$.

我们用 $\mathfrak{M}, x \models \varphi$ 表示 $x \in \|\varphi\|$，用 $\mathfrak{M} \models \varphi$ 表示 $\|\varphi\| = X$。在处理多个模型或赋值时，也可以用 $\|\cdot\|_\mathfrak{M}$或 $\|\cdot\|_\nu$ 代替 $\|\cdot\|$。

有效性的概念按通常方式定义；如果 $\mathfrak{X}$ 是一个动态导数系统，且 φ 是一个公式，那么如果 $\langle\mathfrak{X}, \nu\rangle \models \varphi$ 对 $\mathfrak{X}$上的每个赋值 ν 都成立，我们记作 $\mathfrak{X} \models \varphi$。类似地，如果 Ω 是动力系统或模型的一个类，我们记作 $\Omega \models \varphi$，并称 φ 在 Ω 上有效，如果 $\mathfrak{A} \models \varphi$ 对每个 $\mathfrak{A} \in$ Ω都成立。

我们按通常方式将其他联结词（例如 $\vee$, $\rightarrow$）定义为缩写。仅包含 $\Diamond$ 的 $\mathcal{L}^{\circ}_{\Diamond}$ 片段记作 $\mathcal{L}_{\Diamond}$。为了与模态逻辑中熟悉的公理保持一致，讨论 $\Box$的语义会比较方便。因此，我们定义导数的对偶，称为余导数。

定义 3.2（余导数）。设 $\langle X, \rho\rangle$ 为一个导数空间。对于每个$S \subseteq X$，我们定义 $\hat{}\rho(S) := X\backslash\rho(X\backslash S)$ 为 S的余导数 。

余导数满足以下性质，其中 A, $B \subseteq X$:

1. $\hat{}\rho(X) = X$; 2. $A \cap \hat{}\rho(A) \subseteq \hat{}\rho\hat{}\rho(A)$; 3. $\hat{}\rho(A \cap B) = \hat{}\rho(A) \cap \hat{}\rho(B)$。

很容易验证，对于每个动态导数模型 $\langle X, \rho, f, \nu\rangle$和每个公式 φ, $\|\Box\varphi\| = \hat{}\rho(\|\varphi\|)$。余导数可用于定义集合的标准内部，其定义为：对于每个 $A \subseteq X$, $i(A) = A \cap \hat{}\rho(A)$。这意味着，对于每个开集 U, $U \subseteq \hat{}\rho(U)$，但不一定有 $\hat{}\rho(U) \subseteq U$。接下来，我们讨论一些我们感兴趣的公理系统。

下面列出本文将要考察的公理模式和规则。下文中，若 $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ 是公式的集合，则 $\bigcirc\Phi := \{\bigcirc\varphi_1, \ldots, \bigcirc\varphi_n\}$，且 $\oplus \in \{\Diamond\ \odot\}$。

重言式：=所有命题重言式

$\mathrm{K} := \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

$4 := \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

$\mathrm{D} := \Diamond\top$

$\mathrm{Next}_{\neg} := \neg\bigcirc\varphi \leftrightarrow \bigcirc\neg\varphi$

$\mathrm{Next}_{\wedge} := \bigcirc(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \bigcirc\varphi \wedge \bigcirc\psi$

$\mathrm{C}_{\oplus} := \oplus\bigcirc\varphi \rightarrow \bigcirc\oplus\varphi$

$\mathrm{MP} := \dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$

$\mathrm{Nec}_{\Box} := \dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

$\mathrm{Nec}_{\bigcirc} := \dfrac{\varphi}{\bigcirc\varphi}$

$\mathrm{Fix}_{\Diamond^{\infty}} := \Diamond^{\infty}\Phi \rightarrow \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \Diamond(\varphi \wedge \Diamond^{\infty}\Phi)$

$\mathrm{Ind}_{\Diamond^{\infty}} := \boxdot\big(\theta \rightarrow \bigwedge_{\varphi\in\Phi} \Diamond(\varphi \wedge \theta)\big) \rightarrow (\theta \rightarrow \Diamond^{\infty}\Phi)$

$\mathrm{CTan}_{\oplus}:= \oplus^{\infty}\bigcirc\Phi \rightarrow \bigcirc\oplus^{\infty}\Phi$

$\mathcal{L}_\Diamond$ 上的“基础模态逻辑”定义如下

$$\mathbf{K} := \mathrm{Taut} + \mathrm{K} + \mathrm{MP} + \mathrm{Nec}_\Box.$$

不过，我们主要关注 $\mathbf{K}$ 的真扩张。设 Λ，Λ' 是基于语言 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}'$ 的逻辑。若 $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ 且 Λ' 的所有公理和规则都可在 Λ 中推导，则称 Λ 扩张了 Λ'。基于 $\mathcal{L}_\Diamond$ 的逻辑若扩张了 $\mathbf{K}$，则称为 正规 。若 Λ 是一个逻辑，φ 是一个公式，则用 $\Lambda + \varphi$ 表示 Λ 的最小扩张，其中包含 φ 的每个代换实例作为公理。

当 φ 是 Λ 的定理时，我们记作 $\vdash_\Lambda \varphi$；或者在上下文清楚时，简记为 $\vdash \varphi$，其中 Λ。回顾一下，若逻辑 Λ 的每个定理在 Ω 上都有效，则称其在 Ω 上是可靠 的；若 $\Omega \models \varphi$ 时总有 $\vdash_\Lambda \varphi$，则称其是完备 的。

接着定义 $\mathbf{K4} := \mathbf{K} + 4$，$\mathbf{K4D} = \mathbf{K4} + \mathrm{D}$，以及 $\mathbf{S4} := \mathbf{K4} + \mathrm{T}$。这些逻辑众所周知，并刻画了某些类的空间和 Kripke 框架，我们将在下文回顾。对于逻辑 Λ，Λ^∞ 表示基于 $\mathcal{L}_{\Diamond\Diamond^\infty}$ 的逻辑 $\Lambda + \mathrm{Fix}_{\Diamond^\infty} + \mathrm{Ind}_{\Diamond^\infty}$。

引理 3.3。设 Γ、Δ 是公式的集合，φ 是一个公式。

1. *If* $\Gamma \subseteq \Delta$, *then* $\mathbf{K4}^\infty \vdash \Diamond^\infty \Delta \to \Diamond^\infty \Gamma$.
2. $\mathbf{K4}^\infty \vdash \circledcirc^\infty(\Gamma \cup \{\varphi, \neg\varphi\}) \to \Diamond^\infty \Gamma$.

证明。第一项可由使用 $\mathrm{Fix}_{\Diamond^\infty}$ 得出：$\Diamond^\infty \Delta$ 满足将 $\mathrm{Ind}_{\Diamond^\infty}$ 应用于 Γ 时的前提。第二项由定义得出 $\circledcirc^\infty \Gamma := \circledcirc(\bigwedge \Gamma \wedge \varphi \wedge \neg\varphi) \vee \Diamond^\infty(\Gamma \cup \{\varphi, \neg\varphi\})$；由于 $\varphi \wedge \neg\varphi$ 不一致，这等价于 $\Diamond^\infty(\Gamma \cup \{\varphi, \neg\varphi\})$，根据第一项可推出 $\Diamond^\infty \Gamma$。 □

此外，对于定义在 $\mathcal{L}_\Diamond$ 上的逻辑 Λ，$\Lambda\mathbf{F}$ 是定义在 $\mathcal{L}^\circ_\Diamond$ 上的逻辑，由下式给出

$$\Lambda\mathbf{F} := \Lambda + \mathrm{Next}_\neg + \mathrm{Next}_\wedge + \mathrm{Nec}_\bigcirc.^3$$

这只是在 Λ 中加入线性时序逻辑的公理；当使用一个函数解释 $\bigcirc$ 时，这些公理成立。

对于连续函数，我们定义

$$\begin{array}{rclcrcl} \Lambda\mathbf{C} & := & \Lambda\mathbf{F} + \mathrm{C}_\circledcirc & \qquad & \Lambda\mathbf{C}^\infty & := & \Lambda^\infty\mathbf{C} + \mathrm{CTan}_\circledcirc \\ \Lambda\mathbf{I} & := & \Lambda\mathbf{F} + \mathrm{C}_\Diamond & & \Lambda\mathbf{I}^\infty & := & \Lambda^\infty\mathbf{I} + \mathrm{CTan}_\Diamond. \end{array}$$

正如我们将看到的，这些分别对应于带有连续函数或浸入的导数空间；因此，我们称包含 $\mathsf{C}_\Diamond$ 的逻辑为浸入的。以下结果众所周知，其渊源可追溯至 McKinsey 和 Tarski[25]。

定理3.4. S4 是所有闭包空间、所有传递自反导数框架以及配备标准闭包的实数直线的逻辑。

众所周知，$\mathbf{K4}$ 是传递的导数框架的逻辑（例如，参见 [6]）；Bezhanishvili 和 Lucero-Bryan [5]证明了它是所有可数度量空间的逻辑。

[3]形如 $\Lambda\mathbf{F}$ 的逻辑对应于函数可能不连续的动力系统。本文不讨论不连续系统；更多信息请参见 [1] 。

定理 3.5. K4 是所有（有限）导数框架（即传递克里普克框架）以及所有（可数）度量空间的逻辑。

带有 C 公理的逻辑对应于动力系统的类。

引理 3.6. 如果 Λ 对于导数空间类 Ω 是可靠的，那么：

1. $\Lambda\mathbf{C}$ 对于动态导数系统类 $\langle X, \rho, f\rangle$ 是可靠的，其中$\langle X, \rho\rangle \in \Omega$ 且 f 连续。
2. $\Lambda\mathbf{I}$ 对于动态导数系统类 $\langle X, \rho, f\rangle$ 是可靠的，其中 $\langle X, \rho\rangle \in \Omega$ 且 f 是浸入。

根据导数空间语境下连续函数的定义（定义 2.6），上述引理很容易验证。注意，$\diamondsuit^{\infty}\bigcirc\Phi \to \bigcirc\diamondsuit^{\infty}\Phi$在具有连续函数的动态导数空间类上并非 有效（见例 4.3 ）。

4 动力系统的应用

我们的逻辑框架旨在对动力系统，尤其是基于度量空间的动力系统进行规范描述和形式化推理。在许多应用中，所使用的空间还具有稠密或自身稠密的性质，即其中没有孤立点。在 d-语义中，该性质由公理 D 表示，即 $\diamondsuit\top$。

在引言中，我们提到了一个涉及围绕重心运行的卫星的例子。现在让我们从形式语言的角度重新审视这个例子。

例 4.1（重心）。在图 1 中，我们展示了一个物体在平面上围绕重心运行的模型。我们可以将其建模为 $\mathbb{R}^2$ ，其中转移函数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 对应于物体在固定的 ε 秒时间间隔内的运动。随后，我们可以使用动态拓扑逻辑描述该系统的各种性质。

首先，观察区域 P.[4] 该区域中的点完成一整个轨道后（比如经过时间 n）会返回 P ，但在此之前不会返回。这对应于表达式 $P \to \bigcirc^n P \wedge \neg \bigvee_{i=1}^{n-1} \bigcirc^i P$。反过来，区域 Q 是一个危险区域，图中标出的三条轨道都不会与之相交。因此，对于每个 m，我们的模型都满足 $\boxdot P \to \bigwedge_{i=0}^{m} \bigcirc^i \boxdot \neg Q$ ；请注意， $\boxdot\neg Q$ 意味着我们位于区域 $\neg Q$内部，而不是边界上。这在空间安全条件中十分重要，因为这意味着即使测量误差很小，我们也能保证不会处于危险区域内。

[4]更准确地说，该区域应记为 $\nu(P)$，但为了便于图示，我们将简单地写作 P 。

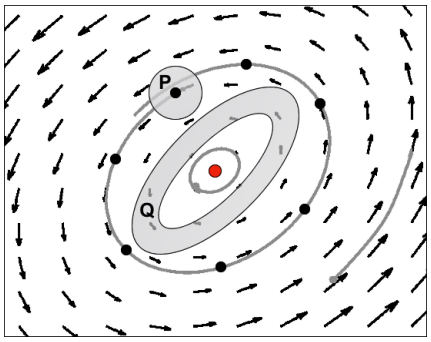


图 2：重心周围的轨道

这是一个动力系统的基本示例，它源自一个受到力（此处为重力）影响的度量空间。这类力可以引发各种不同的现象，例如系统中的混沌 。

给定一个动力系统 $\mathfrak{X} = \langle X, \tau, f \rangle$，我们称 $f\colon\ X \to X$ 若对于任意非空开集 U，$V \in \tau$ 都存在 $n \geq 0$，使得 $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$，则称其为拓扑传递的。这是一项重要性质；它与 f 的周期点集合稠密这一性质共同意味着 $\mathcal{X}$ 是一个混沌动力系统；[5] 在一项开创性成果中，Banks 等人 [4]证明，这类系统表现出对初始条件的敏感依赖，也就是“蝴蝶效应”。

例 4.2。考虑图 3 中的动力系统。假设从每个黑点出发，函数在 n 步内到达区域 P。那么公式 $\Diamond \bigvee_{i=1}^{n} \bigcirc^i P$ 体现了这样一个事实：红点的每个开邻域都包含一个点，该点经过一段不超过 n 的时间后到达 P。拓扑传递性保证了这类点的存在。

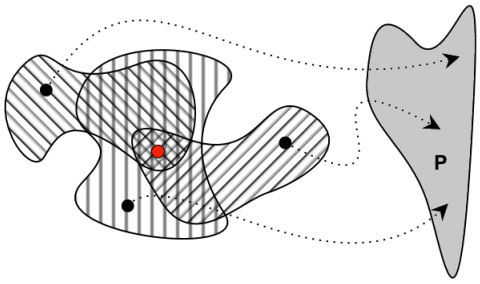


图 3：在具有拓扑传递性的系统中，每个开集的轨道都会与其他所有开集相交。

现在让我们把注意力转向拓扑不动点。回想一下，μ-演算通过加入形如 $\mu x.\varphi(x)$ 的表达式丰富了模态逻辑，其中x 在 φ 中处于偶数个否定的辖域内。我们用 $\mathcal{L}_\mu$ 表示 μ-演算的语言。该表达式的预期含义是映射 $A \mapsto \varphi(A)$ 的最小不动点，其中 A 遍历某个模型的子集

[5]数学混沌有许多不同的定义。这里我们采用 Devaney 的原始定义 [10]。

X。当 X 是拓扑空间或度量空间时，这一概念是有意义的。Dawar 和 Otto [9] 证明，单子二阶逻辑（**单子二阶逻辑**）的双模拟不变片段在有限**K4** 框架类上与 $\mathcal{L}_{\Diamond\Diamond^\infty}$ 表达力等价。由于 μ-演算是单子二阶逻辑（**单子二阶逻辑**）的一个双模拟不变片段，Goldblatt 和 Hodkinson [19] 指出，作为推论，我们可以得到：对于每个 $\varphi \in \mathcal{L}_\mu$，都存在一个 $\varphi^\infty \in \mathcal{L}_{\Diamond\Diamond^\infty}$，使得 $\varphi \leftrightarrow \varphi^\infty$ 在度量空间类上有效。因此，用 $\mathcal{L}_{\Diamond\Diamond^\infty}$ 替换 $\mathcal{L}_\mu$ 并不会损失一般性。加入 $\bigcirc$ 后，我们得到一种能够表达所有拓扑不动点的逻辑，但无法表达以 $\bigcirc$ 定义的不动点，例如“直到”算子。

作为一个重要的特例，我们考虑表示 P 的完美核 的一元缠结 $\Diamond^\infty\{P\}$，也就是说，它是 $\nu(P)$ 中不含孤立点的最大子集。

例 4.3。 在图 4 中，我们看到两个基于平面上线性变换的动力系统：左侧是旋转，右侧是将整个平面映射到 0 的平凡系统。左侧的系统是浸入（事实上是同胚），而右侧的系统不是。设 P 为左图中的上方正方形（包括内部和边界），Q 为下方正方形。显然，$\|\Diamond^\infty\{P\}\| = P$，因为 $P = d(P) = d(P \cap P)$。换句话说，P 是完美的，也就是说，它是闭的且不含孤立点。类似地，Q 中的点满足 $\Diamond^\infty\{\bigcirc P\}$，因为 Q 中的每个点都满足 $\bigcirc P$，而且 Q 也是完美的。此外，这些点还满足 $\bigcirc\Diamond^\infty\{P\}$，因此 $\Diamond^\infty\{\bigcirc P\} \to \bigcirc\Diamond^\infty\{P\}$ 成立；这是公理 CTan$_\Diamond$ 的一个实例。

相反，让我们考虑右侧的图形，并令 O 为包含原点的单元素集；Q 与上述相同。和之前一样，Q中的每个点都满足 $\bigcirc O$，因此由于 Q 是完美的，$\Diamond^\infty\{\bigcirc O\}$。然而，原点是一个孤立点，即并非完美，因此不满足 $\Diamond^\infty\{O\}$。由此可知，Q中的点满足 $\Diamond^\infty\{\bigcirc O\} \wedge \neg\bigcirc\Diamond^\infty\{O\}$，且 CTan$_\Diamond$ 不成立。然而，该映射仍然是连续的，因此我们预期 CTan$_\Diamond$ 成立；事实上，我们观察到$\Diamond^\infty\{O\}$ 在原点成立，因为 $O \subseteq c(O)$。由此很容易得出，$\Diamond^\infty\{\bigcirc O\} \to \bigcirc\Diamond^\infty\{O\}$ 在右侧的模型中为真，即 CTan$_\Diamond$ 有效。

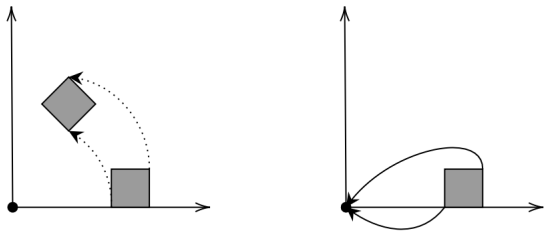


图 4：平面上的两个动力系统。

5 动力系统之间的态射

在模态逻辑的研究中，处理保持公式有效性的结构之间的态射通常很有用。对于Kripke语义，这类映射称为

称为 p-态射。这些态射可以在动态导数空间的背景下定义并推广如下。

定义 5.1（动态 p-态射）。设 $\mathfrak{X} = \langle X, \rho_{\mathfrak{X}}, f_{\mathfrak{X}} \rangle$ 和 $\mathfrak{Y} = \langle Y, \rho_{\mathfrak{Y}}, f_{\mathfrak{Y}} \rangle$ 为动态导数系统。设 $\pi\colon X \to Y$。若 π是一个动态 p-态射，则称之为娱乐主管

对于所有 $B \subseteq Y$，• $\pi^{-1}\rho_{\mathfrak{Y}}(B) = \rho_{\mathfrak{X}}\pi^{-1}(B)$，并且

- $\pi \circ f_{\mathfrak{X}} = f_{\mathfrak{Y}} \circ \pi$。

这些映射以如下方式保持有效性。

命题 5.2。设 $\mathfrak{X} = \langle X, \rho_{\mathfrak{X}}, f_{\mathfrak{X}} \rangle$ 和 $\mathfrak{Y} = \langle Y, \rho_{\mathfrak{Y}}, f_{\mathfrak{Y}} \rangle$ 是动态导数空间，并假设 $\pi\colon X \to Y$ 是一个动态 p-态射。那么，对于每个 $\varphi \in \mathcal{L}_{\Diamond\Diamond^{\infty}}$，若 $\mathfrak{X} \models \varphi$，则 $\mathfrak{Y} \models \varphi$。

证明是标准的；例如参见 [14, 19]。在实践中，我们不会以这种一般方式使用定义 5.1；相反，我们会针对所关注的特定类导数空间对其加以专门化。首先来描述导数框架之间的动态p-态射；详情见 [2] 。

命题 5.3。设 $\mathfrak{M} = \langle M, \sqsubset_{\mathfrak{M}}, g_{\mathfrak{M}} \rangle$ 和 $\mathfrak{N} = \langle N, \sqsubset_{\mathfrak{N}}, g_{\mathfrak{N}} \rangle$ 是动态导数框架。设 $\pi\colon M \to N$。那么 π 是一个动态 p-态射，当且仅当

- （前向条件） $w \sqsubset_{\mathfrak{M}} v$ 蕴含 $\pi(w) \sqsubset_{\mathfrak{N}} \pi(v)$；
- （后向条件） $\pi(w) \sqsubset_{\mathfrak{N}} u$ 蕴含存在 $v \sqsupset_{\mathfrak{M}} w$，使得 $\pi(v) = u$；
- $\pi \circ g_{\mathfrak{M}} = g_{\mathfrak{N}} \circ \pi$。

我们的主要结果首先通过为导数框架建立这些结果，再将它们“提升”到度量空间中而得到。为此，我们需要考虑从动态度量系统到动态导数框架的动态 p-态射。下面的陈述可直接通过展开定义得出。

命题 5.4。设 $\mathfrak{X} = \langle X, \delta, f \rangle$ 是一个动态度量系统，$\mathfrak{M} = \langle W, \sqsubset, g \rangle$ 是一个动态导数框架。设 $\pi\colon X \to M$。那么，若对每个 $x \in X$ 和 $w \in W$，π 满足以下条件，则它是一个动态p-态射：

- （前向条件）若 $w = \pi(x)$，则存在 $\varepsilon > 0$ 使得，对所有$y \in X$，$0 < \delta(x, y) < \varepsilon$ 蕴含 $\pi(x) \sqsubset \pi(y)$。
- *(后向条件)* 若 $w = \pi(x)$ 且 $w \sqsubset v$，对于某个 $v \in W$，则存在 $y \in X$，使得 $0 < d(x, y) < \varepsilon$ 满足 $\pi(y) = v$。
- $\pi \circ f = g \circ \pi$。

这类从动态导数度量空间到动态导数框架的态射将在第9节中明确使用。目前，我们给出以下示例来说明它们。

例5.5。图5中的映射 π 展示了一个 p-态射：左侧圆的中心映射到右侧 Kripke 框架的根，红色射线映射到 Kripke 框架中的红色中间点，灰色开放区域则映射到 Kripke 框架的叶节点。

圆的旋转动力学被转化为 Kripke 框架中以虚线标出的循环。

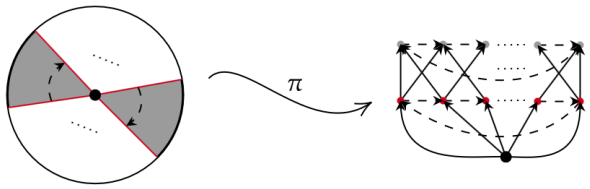


图5：从动态度量空间到动态 Kripke 框架的一个 p-态射。

6 典范模型

我们的 Kripke 完备性证明的第一步，将是一个相当标准的典范模型构造。极大 Λ-一致集合 (Λ-MCS) w 是一个公式集合，它是 Λ-一致的，即 $w \nvdash_\Lambda \bot$，并且任何适当包含它的公式集合都是 Λ-不一致的。

给定一个基于 $\mathcal{L}^\circ_\Diamond$ 的逻辑 Λ，令 $\mathfrak{M}^\Lambda_c = \langle W_c, \sqsubset_c, g_c, \nu_c \rangle$ 为 Λ的典范模型，其中

1. W_c 是所有 Λ-MCS 的集合；
2. $w \sqsubset_c v$ 当且仅当对于所有公式 φ，若 $\Box\varphi \in w$，则 $\varphi \in v$；
3. $g_c(w) = \{\varphi : \bigcirc\varphi \in w\}$；
4. $\nu_c(p) = \{w : p \in w\}$。

不难验证，**K4C** 定义了传递的、单调的 Kripke 模型类。此外，**K4I**定义了所有传递的、严格单调的 Kripke 模型类。我们分别称这些模型为**K4C** 模型和 **K4I** 模型。

引理 6.1。

1. 如果 Λ 扩展了 **K4C**，那么 Λ 的典范模型是传递的且单调的。*2.* 如果 Λ 扩展了 **K4I**，那么 Λ 的典范模型是传递的且严格单调的。*3.* 如果 Λ 扩展了 **K4D**，那么 Λ 的典范模型相对于$\sqsubset$ 是串行的（即，对于所有 $w \in W_c$，存在 $v \sqsupset w$）。

证明。 设 $\mathfrak{M}^\Lambda_c = \langle W, \sqsubset, g, \nu \rangle$。第一个陈述的证明见 [14]，第三个陈述是标准结果（例如参见 [6]）。对于第二个陈述，证明 $\sqsubset$ 是传递的很常规，可由公理 4 得出。假设 Λ 扩展了 **K4I**。我们证明 g 是严格单调的。假设 $w \sqsubset v$。考虑任意一个 $\Box\psi \in g(w)$。根据定义，$\bigcirc\Box\psi \in w$，因此由 C$\Diamond$，我们有 $\Box\bigcirc\psi \in v$。由于 $w \sqsubset v$，于是 $\bigcirc\psi \in (v)$，从而 $\psi \in g(v)$。由此可得 $g(w) \sqsubset g(v)$，如所需，因此 g 是单调的。 □

以下两个引理的证明是标准的，例如可见于 [6]。

引理 6.2（存在引理）。设 Λ 是一个正规模态逻辑，且 $\mathfrak{M}_{\mathrm{c}}^{\Lambda}=\langle W_{\mathrm{c}}, \sqsubset_{\mathrm{c}}, g_{\mathrm{c}}, \nu_{\mathrm{c}}\rangle$。那么，对于每个 $w \in W_{\mathrm{c}}$ 以及 Λ 中的每个公式 φ，如果 $\Diamond\varphi \in w$，则存在一个点 $v \in W_{\mathrm{c}}$，使得 $w \sqsubset_{\mathrm{c}} v$ 且 $\varphi \in v$。

这已经足以得到无缠结语言的标准真值引理，从而得到完备性。

引理 6.3（真值引理）。设 Λ 是一个无缠结的正规模态逻辑。对于每个 $w \in W_{\mathrm{c}}$ 以及 Λ 中的每个公式 φ，

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{c}}^{\Lambda}, w \models \varphi \textit{ iff } \varphi \in w.$$

推论 6.4。逻辑 **K4C** 相对于所有传递且单调的动态导数框架构成的类是可靠且完备的，而 **K4I** 相对于所有传递且严格单调的动态导数框架构成的类是可靠且完备的。逻辑 **K4DC** 和 **K4DI** 分别相对于相应的串行框架类是可靠且完备的。

因此，我们可以用标准方法证明无缠结逻辑的完备性。然而，存在缠结时引理 6.3 不再成立，因此要在这种情形下实现完备性，我们需要多做一些工作。

7 有限可及关系

有限模型性质证明中的一个关键步骤，是在典范模型上构造一种“有限”的可及关系 $\sqsubset_{\Phi}$。这种可及关系具有如下性质：每个点都只有有限个后继，但存在引理对预先指定的有限集 Φ 中的公式仍然成立。

定义 7.1 (φ-终结集)。固定一个逻辑 Λ。若一个集合 w 满足以下条件，则称其为 φ-终结集（或点）：w 是一个 Λ-MCS，$\varphi \in w$，并且只要 $w \sqsubset_{\mathrm{c}} v$ 且 $\varphi \in v$，就有 $v \in C(w)$。

令 $\sqsubseteq_{\mathrm{c}}$ 为 $\sqsubset_{\mathrm{c}}$的自反闭包。在典范模型中，用句法方式刻画 $\sqsubseteq_{\mathrm{c}}$将更为方便。回忆一下，$\boxdot\varphi := \varphi \wedge \Box\varphi$。下述结果见于 [14]，但其渊源可追溯至 Fine [18]。

引理 7.2. 若$\Diamond\varphi \in w$，则存在一个 φ-终结点 v，使得 $w \sqsubset_{\mathrm{c}} v$。

现在我们可以证明本节关于有限可达关系 $\sqsubset_{\Phi}$ 存在性的主要结果了。

引理 7.3. 设 Λ 扩展$\mathbf{K4}^{\infty}$，且 Φ 是一个在子公式下闭的有限公式集。存在定义在Λ的典范模型上的一个辅助关系 $\sqsubset_{\Phi}$，使得:

(i) $\sqsubset_{\Phi}$ 是 $\sqsubset_{\mathrm{c}}$ 的子集。

(ii) 对每个 $w \in W$，w 的 $\sqsubset_{\Phi}$-后继集合 $\sqsubset_{\Phi}(w)$ 都是有限的。

(iii) 若$\Diamond\varphi \in w \cap \Phi$，则存在 $v \in W$，使得 $w \sqsubset_{\Phi} v$ 且 $\varphi \in v$。

(iv) 若$\Diamond^\infty\Psi \in w \cap \Phi$，则存在 $\{v_\psi : \psi \in \Psi\} \subseteq W$ （不一定互异），使得 $w \sqsubseteq_\Phi v_\psi$、$\psi$、$\Diamond^\infty\Psi \in v_\psi$，且对所有 ψ、$\varphi \in \Psi$（包括 $\psi = \varphi$），都有 $v_\psi \sqsubset v_\varphi$。

(v) If $w \equiv_c v$ *then* $\sqsubset_\Phi(w) = \sqsubseteq_\Phi(v)$.

(vi) $\sqsubset_\Phi$ 是传递的。

证明。令 C 为 W 中的任意一个点簇，并定义

$$\sqsubset_c(C) = \bigcup\{\sqsubset_c(v) : v \in C\}.$$

我们按如下方式构造传递关系 $\sqsubset_\Phi$：利用引理 7.2，我们使用选择公理，选取一个函数，使其对每个公式 φ 以及每个满足 $\Diamond\varphi \in \bigcup C$ 的点簇 C，指定一个 φ-终结点 $w(\varphi, C)$，使得 $w(\varphi, C) \in \sqsubset_c(C)$。同样，如果 $\Diamond^\infty\Gamma \in \bigcup C$，我们选择一个 $\Diamond^\infty\Gamma$-终结点 $v \in \sqsubset_c(C)$。对于每个$\varphi \in \Gamma$，都有 $\vdash \Diamond^\infty\Gamma \to \Diamond(\varphi \wedge \Diamond^\infty\Gamma)$，因此我们可以选择一个 $(\varphi \wedge \Diamond^\infty\Gamma)$-终结的 $v(\varphi, \Diamond^\infty\Gamma, C) \sqsupseteq_c v$。由于 v已经是 $\Diamond^\infty\Gamma$-终结的，我们必有$v(\varphi, \Diamond^\infty\Gamma, C)$与 v属于同一个簇。

设 $u \sqsubset^0_\Phi u'$ 当且仅当 $u \sqsubset_c u'$，并且存在 $\Diamond\psi \in u \cap \Phi$ 使得 $u' = w(\psi, C(u))$，或者存在 $\Diamond^\infty\Gamma \in u \cap \Phi$ 和 $\varphi \in \Gamma$ 使得 $u' = v(\varphi, \Diamond^\infty\Gamma, C(u))$。令 $\sqsubset_\Phi$ 为 $\sqsubset^0_\Phi$ 的传递闭包。

显然，(i)、(iii)、(iv)、(v) 和 (vi) 均可直接由构造得出：(i) 源于 $\sqsubset_\Phi$ 是 $\sqsubset^0_\Phi$ 的传递闭包这一事实；(iii) 和 (iv) 源于引理 7.1；(v) 源于 $v \in C(w)$，并假设 $v \sqsubseteq_\Phi u$ 后展开 $\sqsubseteq_\Phi$ 的定义；(vi) 源于传递闭包的定义。

我们继续验证条件 (ii)。首先注意，根据构造，$\sqsubset^0_\Phi(u)$ 是有限的，因为对于每个 $\varphi \in \Phi$ 至多包含一个元素，对于每个满足 $\Diamond^\infty\Gamma \in \Phi$ 的 $\varphi \in \Gamma$ 也至多包含一个元素。现在，若 $u \sqsubset_\Phi v$，则存在一个序列

$$u \sqsubset^0_\Phi v_1 \sqsubset^0_\Phi \cdots \sqsubset^0_\Phi v_n = v.$$

取这样的一个最短序列后，我们可以假设它是单射的。考虑由所有这类序列构成的树（按初始段关系排序）。这是有限分支树，因为 $\sqsubset^0_\Phi(x)$ 总是有限的。此外，若 $\sqsubset_\Phi(u)$ 是无限的，则这棵树也是无限的。由 K¨onig 引理，存在一个无限序列

$$u \sqsubset^0_\Phi v_1 \sqsubset^0_\Phi v_2 \sqsubset^0_\Phi \ldots.$$

根据 $\sqsubset^0_\Phi$ 的定义，对于每个 $i \in \omega$，存在 $\varphi_i \in \Phi$ 使得 v_{i+1} 是 φ_i-终结的。由于 $\sqsubset^0_\Phi \subseteq \sqsubset_c$，当 $i \leq j$ 时，我们有 $v_i \sqsubseteq_c v_j$。由于 Φ 是有限的，存在某个 $\theta \in \Phi$，使得对于无限多个 i 的取值，v_i 都是 θ-终结的。令 i_0 为这样的最小取值。若 $i > i_0$ 是另一个这样的取值，则由 $v_{i_0} \sqsubset_c v_i$ 以及 v_{i_0} 的 θ-终结性可得 $v_i \sqsubset_c v_{i_0}$。因此，$v_i \in C(v_{i_0})$ 且 $v_i \sqsubset^0_\Phi v_{i+1}$，根据 $\sqsubset^0_\Phi$ 的定义可得 $v_{i+1} \in \sqsubset^0_\Phi(v_{i_0})$。然而，$\sqsubset^0_\Phi(v_{i_0})$ 是有限的，这与该链无限且为单射矛盾。 □

8 个故事和 Φ-态射

在本小节中，我们通过构造有限模型以及从这些模型到典范模型的保真映射，证明逻辑**K4C**$^\infty$、**K4DC**$^\infty$、**K4I**$^\infty$和**K4DI**$^\infty$ 具有有限模型性质。

若 $\sqsubset$ 是 A上的传递关系，则当且仅当对任意 $a \sqsubseteq c$和 $b \sqsubseteq c$，有 $a \sqsubseteq b$ 或 $b \sqsubseteq a$时，称 $\langle A, \sqsubset \rangle$ 为树状。我们将使用称为时刻的带标签树状结构来记录某个 $\sqsubset$处的“静态”信息；也就是说，该结构涉及 $\sqsubset$，但不涉及 f。

定义 8.1（时刻）。固定 $\Lambda \in \{\mathbf{K4}, \mathbf{K4D}\}$。 Λ-时刻 是一个结构 $\mathfrak{m} = \langle |\mathfrak{m}|, \sqsubset_{\mathfrak{m}}, \nu_{\mathfrak{m}}, r_{\mathfrak{m}} \rangle$，其中 $\langle |\mathfrak{m}|, \sqsubset_{\mathfrak{m}} \rangle$ 是一个具有根$r_{\mathfrak{m}}$的有限树状 Λ-框架，而 $\nu_{\mathfrak{m}}$ 是定义在 $|\mathfrak{m}|$上的赋值。

为了也记录“动态”信息，也就是涉及转移函数的信息，我们将多个时刻叠加起来，形成一个“故事”。下文中，$\bigsqcup$ 表示不交并，$f[S]$ 表示集合 S 在映射 f 下的像。

定义 8.2（故事和浸入式故事）。一个故事（持续时间为 I）是一个结构 $\mathfrak{S} = \langle |\mathfrak{S}|, \sqsubset_{\mathfrak{S}}, f_{\mathfrak{S}}, \nu_{\mathfrak{S}}, r_{\mathfrak{S}} \rangle$，满足存在 $I < \omega$、对于每个 $i \leq I$的时刻 $\mathfrak{S}_i = \langle |\mathfrak{S}_i|, \sqsubset_i, \nu_i, r_i \rangle$ 以及函数 $(f_i)_{i<I}$，使得：

1. $|\mathfrak{S}| = \bigsqcup_{i \leq I} |\mathfrak{S}_i|$；2. $\sqsubset_{\mathfrak{S}} = \bigsqcup_{i \leq I} \sqsubset_i$；3. 对每个变量 p，$\nu_{\mathfrak{S}}(p) = \bigsqcup_{i \leq I} \nu_i(p)$；4. $r_{\mathfrak{S}} = r_0$；5. $f_{\mathfrak{S}} = \mathrm{Id}_I \cup \bigsqcup_{i<I} f_i$，其中 $f_i \colon |\mathfrak{S}_i| \to |\mathfrak{S}_{i+1}|$ 是一个单调映射，满足 $f_{\mathfrak{S}}$ 是**保持根：** $f_i(r_i) = r_{i+1}$ 对所有 $i < I$ 成立，**几乎单射：** 对每个 $x, y \in |\mathfrak{S}_i|$，如果 $f_{\mathfrak{S}}(x) = f_{\mathfrak{S}}(y)$，那么 $f_{\mathfrak{S}}(x)$ 是非自反的，**保持簇：** 对每个 $x \in |\mathfrak{S}|$，$C(f_{\mathfrak{S}}(x)) = f_{\mathfrak{S}}[C(x)]$,，并且**稳定：** f_I 在 $|\mathfrak{S}_I|$ 上是恒等映射。

此外，如果每个 f_i 都严格单调且为单射，我们就称 $\mathfrak{S}$ 为浸入式故事。如果每个 $\mathfrak{S}_i$ 都是一个 Λ-时刻，我们就称 $\mathfrak{S}$ 为 $\Lambda\mathbf{C}$-故事，而如果 $\mathfrak{S}$ 是浸入的，我们就称 $\mathfrak{S}$ 为 $\Lambda\mathbf{I}$-故事。

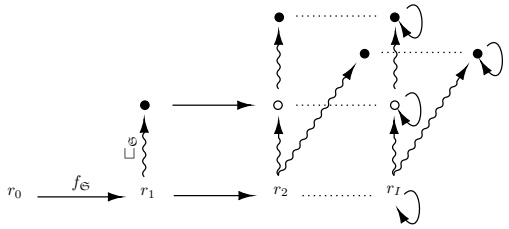


图 6：一个**K4D**故事示例。波浪箭头表示关系 $\sqsubset_{\mathfrak{S}}$，而直箭头表示函数 $f_{\mathfrak{S}}$。黑色点相对于 $\sqsubset_{\mathfrak{S}}$是自反的。每个垂直切片表示一个**K4D**时刻。

如果不致引起混淆，我们通常省略指标 $\mathfrak{m}$ 或 $\mathfrak{S}$ 。我们也可以用不同的记号表示时刻的各个分量，因此如果写作 $\mathfrak{m}=\langle W,\sqsubset,\nu,x\rangle$，就表示 $W=|\mathfrak{m}|$、 $\sqsubset=\sqsubset_{\mathfrak{m}}$ 等。

有限可及关系 $\sqsubset_\Phi$ 允许我们弱化对 p-态射的条件，同时仍能得到保持（某些）公式真值的映射。

定义 8.3（Φ-态射）。固定一个逻辑 Λ。令 $\mathfrak{M}_{\mathrm{c}}^{\Lambda}=\langle W_{\mathrm{c}},\sqsubset_{\mathrm{c}},g_{\mathrm{c}},\nu_{\mathrm{c}}\rangle$，并令 $\mathfrak{m}$ 为一个时刻。映射 $\pi:|\mathfrak{m}|\to W_{\mathrm{c}}$ 称为一个 Φ-态射，如果对于所有$x\in|\mathfrak{m}|$，以下条件均成立：

1. $x\in\nu_{\mathfrak{m}}(p)\iff p\in\pi(x)$；
2. 若 $x\sqsubset_{\mathfrak{m}}y$，则 $\pi(x)\sqsubset_{\mathrm{c}}\pi(y)$；
3. 若 $\pi(x)\sqsubset_\Phi v$ 对某个 $v\in W_{\mathrm{c}}$成立，则存在 $y\in|\mathfrak{m}|$ 使得 $x\sqsubset_{\mathfrak{m}}y$ 且 $v=\pi(y)$。

我们称 π 是区分的，如果每当 x 是自反的，那么要么存在某个 $\theta\in\mathcal{L}^{\circ}_{\Diamond\Diamond^\infty}$（不一定在 Φ中），使得 $\pi(x)$是θ-终结的；要么存在 $y\equiv_{\mathfrak{m}}x$，使得 $\pi(y)\neq\pi(x)$。

我们还需要一种 Φ-态射的动态变体，它将转移函数考虑在内。

定义 8.4（动态 Φ-态射）。固定一个逻辑 Λ。设 $\mathfrak{M}_{\mathrm{c}}^{\Lambda}=\langle W_{\mathrm{c}},\sqsubset_{\mathrm{c}}g_{\mathrm{c}},\ \nu_{\mathrm{c}}\rangle$，并令 $\mathfrak{S}$为一个持续时间为 I的故事。映射 π：$|\mathfrak{S}|\to W_{\mathrm{c}}$称为动态 Φ-态射，如果对于所有 $i\leq I$，$\pi\restriction|\mathfrak{S}_i|$ 都是一个 Φ-态射，并且如果对于某个 $i<I$有 $x\in|\mathfrak{S}_i|$，那么 $g_{\mathrm{c}}(\pi(x))=\pi(f_{\mathfrak{S}}(x))$。

我们称 π 为区分的动态 Φ-态射，如果每个 $\pi\restriction|\mathfrak{S}_i|$ 都是区分的，并且对于每个自反的 $y\in|\mathfrak{S}_i|$，要么存在某个 θ使得 y 是 θ-终结的，要么$i>0$ 并且 $y\in f_{\mathfrak{S}}[|\mathfrak{S}_{i-1}|]$。

我们现在证明，动态 Φ-态射 π 保留适当 $\bigcirc$-深度公式的真值。为证明这一点，我们需要以下见证引理。

引理 8.5（见证引理）。设 $\mathfrak{S}$ 是持续时间为 I 的弱故事，且 $x\in|\mathfrak{S}_i|$ 满足 $i\leq I$。设 Φ 对其子公式和单次否定封闭，且 π 是一个动态 Φ-态射，映入某个正规逻辑 Λ 的典范模型，该逻辑扩张了 $\mathbf{K4C}^\infty$，其中要么 Λ 和 $\mathfrak{S}$ 是浸入的，要么 π 是区分的。那么，

1. 若 $\Diamond\varphi\in\Phi$，则 $\Diamond\varphi\in\pi(x)$ 当且仅当存在 $y\sqsupset_{\mathfrak{S}}x$ 使得$\varphi\in\pi(y)$；
2. 若 φ 是一个公式（不一定属于 Φ），且 $i<I$ 和 $x\in|\mathfrak{S}|$，则 $\bigcirc\varphi\in\pi(x)$ 当且仅当 $\varphi\in\pi(f_{\mathfrak{S}}(x))$；
3. 若 $\Psi=\{\psi_1,\ldots,\psi_n\}$ 则
   - 若$\Diamond^\infty\Psi\in\Phi\cap\pi(x)$，则存在自反点 $y_1,\ldots,y_n$，使得 $x\sqsubseteq_{\mathfrak{S}}y_1\equiv_{\mathfrak{S}}y_2\equiv_{\mathfrak{S}}\ldots\equiv_{\mathfrak{S}}y_n$且 $\psi_i\in\pi(y_i)$。
   - 如果存在自反点 $y_1,\ldots,y_n$使得 $x\sqsubseteq_{\mathfrak{S}}y_1\equiv_{\mathfrak{S}}y_2\equiv_{\mathfrak{S}}\ldots\equiv_{\mathfrak{S}}y_n$且 $\psi_i\in\pi(y_i)$，那么 $\Diamond^\infty\Psi\in\pi(x)$；注意，$\Diamond^\infty\Psi\in\Phi$ 并非必需。

证明。(1) 若 $\Diamond\varphi \notin \pi(x)$，则 $\Box\neg\varphi \in \pi(x)$。于是，若 $y \sqsupset_{\mathfrak{S}} x$，可得$\pi(y) \sqsupseteq_{\mathrm{c}} \pi(x)$，因此根据 $\sqsupseteq_{\mathrm{c}}$ 的定义有 $\neg\varphi \in \pi(y)$。

如果 $\Diamond\varphi \in \pi(x)$，那么存在 $v \in W_{\mathrm{c}}$，使得 $\pi(x) \sqsubset_{\Phi} v$ 且 $\varphi \in v$。根据动态 Φ-态射的定义，存在 $v' \in |\mathfrak{S}|$，使得 $x \sqsubset_{\mathfrak{S}} v'$且 $v = \pi(v')$，如所需。

(2) 如果 $\bigcirc\varphi \in \pi(x)$，那么 $\varphi \in g_{\mathrm{c}}(\pi(x))$。根据动态 Φ-态射的定义，我们得到 $g_{\mathrm{c}}(\pi(x)) = \pi(f_{\mathfrak{S}}(x))$；根据 g_{c} 的定义，$\varphi \in g_{\mathrm{c}}(\pi(x))$，如所需。通过观察到 $\neg\bigcirc\varphi$ 等价于 $\bigcirc\neg\varphi$，并应用相同的论证，即可得到反向蕴含。

(3) 如果 $\Diamond^{\infty}\Psi \in \pi(x)$，那么引理 7.1 给出了 $x \in\!|\Diamond^{\infty}\Psi\|_{\mathfrak{S}}$ 所需的见证。对于反向推导，我们考虑 $\Lambda \nvdash \mathsf{Cont}_{\Diamond}$ 的情形。回想一下，$x \in |\mathfrak{S}_i|$ 对某个 i 成立；我们对 i 作归纳，以证明如果存在 $y_1, \ldots\ldots, y_n$，使得 $x \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} y_1 \equiv_{\mathfrak{S}} y_2 \equiv_{\mathfrak{S}} \ldots \equiv_{\mathfrak{S}} y_n$ 且 $\psi_j \in \pi(y_j)$，那么 $\Diamond^{\infty}\Psi \in \pi(x)$。

设 $y = y_1$。由于 $y \sqsupseteq_{\mathfrak{S}} x$，只需证明 $\Diamond^{\infty}\Psi \in \pi(y)$。考虑以下几种情况。若对于某个 θ，y 是 θ-终结的，注意到每个 $z \equiv_{\mathfrak{S}} y$ 都是 $\Diamond\theta$-终结的。容易验证 $\boxdot(\Diamond\theta \to \bigwedge_{\psi\in\Phi}\Diamond(\psi \wedge \Diamond\theta)) \in \pi(x)$，因此由公理 $\mathsf{Ind}_{\Diamond}^{\infty}$ 得到 $\Diamond\theta \to \Diamond^{\infty}\Psi \in \pi(x)$，进而由肯定前件式得到 $\Diamond^{\infty}\Psi \in \pi(x)$。若 y 是自反的，且存在 z 使得 $y = f_{\mathfrak{S}}(z)$，那么由簇保持性可得 $C_{\mathfrak{S}}(y) = f_{\mathfrak{S}}[C_{\mathfrak{S}}(z)]$。由于 $\mathfrak{S}$ 是区分的，存在 $y' \neq y''$ 属于 $C_{\mathfrak{S}}(y)$，使得 $\pi(y') \neq \pi(y'')$，因此存在一个公式 χ，使得 $\chi \in \pi(y')$ 且 $\neg\chi \in \pi(y'')$。我们可以令 $\psi_{n+1} \equiv \chi$, $\psi_{n+2} \equiv \neg\chi$, $y_{n+1} := y'$ 和 $y_{n+2} := y''$。令 $z_j \in C_{\mathfrak{S}}(z)$ 满足 $y_j = f_{\mathfrak{S}}(z_j)$，容易看出 $z_1 \equiv_{\mathfrak{S}} z_2 \equiv_{\mathfrak{S}} \ldots \equiv_{\mathfrak{S}} z_{n+2}$ 和 $\bigcirc\psi_j \in \pi(z_j)$。注意到 $z \in |\mathfrak{S}_{i-1}|$，因此我们可以应用归纳假设得到 $\Diamond^{\infty}\bigcirc(\Psi \cup \{\chi, \neg\chi\}) \in \pi(z)$。由公理 $\mathsf{CTan}_{\Diamond}$，$\bigcirc\Diamond^{\infty}(\Psi \cup \{\chi, \neg\chi\}) \in \pi(z)$，因此 $\Diamond^{\infty}(\Psi \cup \{\chi, \neg\chi\}) \in \pi(y)$。但引理 3.3 得出 $\Diamond^{\infty}\Psi \in \pi(y)$，正如所需。最后，根据假设，$y$ 是非自反的情况不可能发生。

Λ 是浸入的情况类似，但更为简单，因为我们不需要绕道经过 $\Diamond^{\infty}$。 □

由此，我们很容易得到以下真值保持引理。

引理 8.6 (真值保持)。设 $\mathfrak{S}$ 是一个持续时间为 I 的故事，且 $x \in\!|\mathfrak{S}_0|$。设 π 是映入某个正规逻辑 Λ 的典范模型的动态 Φ-态射，其中该逻辑扩展了 $\mathbf{K4C}^{\infty}$。假设 $\varphi \in \Phi$ 是一个 $\bigcirc$-深度至多为 I 的公式，并且 Λ 和 $\mathfrak{S}$ 要么是浸入的，要么 π 是区分的。那么，$\varphi \in \pi(x)$ 当且仅当 $x \in \|\varphi\|_{\mathfrak{S}}$。

证明。我们必须证明更一般的结论：如果 φ 的 $\bigcirc$ 深度至多为 $I-j$，且 $x \in |\mathfrak{S}_j|$，那么 $\varphi \in \pi(x)$ 当且仅当 $x \in \|\varphi\|_{\mathfrak{S}}$。证明通过对 φ 的复杂度进行归纳来进行，每一步都可由引理 8.5 直接得出。 □

接下来我们将证明，对于典范模型中的每个点 w，都存在一个合适的时刻 $\mathfrak{m}$ 以及一个将 $\mathfrak{m}$ 映射到 w 的 Φ-态射。为此，我们定义一个从较小时刻构造新时刻的过程。

定义 8.7（时刻构造）。固定 $\Lambda \in \{\mathbf{K4}, \mathbf{K4D}\}$。设 $\{x\} \subseteq C' \subseteq C(x)$，其中某个 x 属于典范模型 $\mathfrak{M}_{\mathrm{c}}^{\Lambda}$，且 C' 有限；$\mathfrak{q} \in \{\mathfrak{i}, \mathfrak{r}\}$（表示“非自反”或“自反的”）。令 $\vec{\mathfrak{a}} = \langle \mathfrak{a}_m \rangle_{m<N}$ 为一个时刻序列。我们定义一个结构 $\mathfrak{n} = \left(\begin{smallmatrix}\vec{\mathfrak{a}}\\ C'\end{smallmatrix}\right)^{\mathfrak{q}}_{x}$，其中 $\mathfrak{n} = \langle |\mathfrak{n}|, \sqsubset_{\mathfrak{n}}, \nu_{\mathfrak{n}}, r_{\mathfrak{n}} \rangle$ 如下：

1. $|\mathfrak{n}| = C' \sqcup \bigsqcup_{m<N} |\mathfrak{a}_m|$;

2. $y \sqsubset_{\mathfrak{n}} z$ 如果任一

   - $y,\ z \in C'$ 且 $\mathfrak{q} = \mathrm{r}$,
   - $y \in C'$ 且 $z \in |\mathfrak{a}_m|$ 对于某个 m，或者
   - $y,\ z \in |\mathfrak{a}_m|$ 且 $y \sqsubset_{\mathfrak{a}_m} z$ 对于某个 m;

3. $\nu_{\mathfrak{n}}(p) = \{x \in C' :\ x \in \nu_{\mathrm{c}}(p)\} \sqcup \bigsqcup_{m<N} \nu_{\mathfrak{a}_m}(p)$;

4. $r_{\mathfrak{n}} = x_\circ$

某个逻辑 Λ的时刻构造可用于生成 Λ-时刻。

引理 8.8. 设 $C' \subseteq C(x)$ 是典范模型 $\mathfrak{M}^{\Lambda}_{\mathrm{c}}$ 中的某个 x ，并设$\mathfrak{q} \in \{\mathrm{i},\mathrm{r}\}$，其中$\mathfrak{q} = \mathrm{r}$ 或 C' 是单元素集。设 $\vec{\mathfrak{a}} = \langle \mathfrak{a}_i \rangle_{i<N}$ 是一个 Λ-时刻序列。那么， $\mathfrak{m} := \binom{\vec{\mathfrak{a}}}{C}^{\mathfrak{q}}_{x}$ 是一个**K4**-时刻；若每个 $\mathfrak{a}_i$ 都是串行的，且 $N > 0$ 或 C 是自反的，则它是一个**K4D**-时刻。

证明。 容易看出，关系 $\sqsubset_{\mathfrak{m}}$ 是传递的，因为每个 $\mathfrak{a}_i$ 都是弱传递的，且根能看到所有其他点。类似地，如果 $\mathfrak{a}_i$ 是串行的，那么 $\mathfrak{a}_i$ 中的任意点都有一个后继；如果 C 是自反的，那么根点在任意 $\mathfrak{a}_i$ 中都会有一个后继，或者它本身就是自己的后继。

□

我们用这个时刻构造证明，典范模型中的每个点都是某个时刻的 Φ-态射像。下文用 $C_\Phi(w)$表示 w的 $\sqsubset_\Phi$-簇，即

$$C_\Phi(w) = \{w\} \cup \{v : w \sqsubset_\Phi v \sqsubset_\Phi w\}.$$

引理 8.9. 固定 $\Lambda \in \{\mathbf{K4},\mathbf{K4D}\}$. 给定有限公式集 Φ ，其中 $\Diamond\top \in \Phi$，对所有 $w \in W_{\mathrm{c}}$ ，存在一个 Λ-时刻 $\mathfrak{m}$ 和一个区分的 Φ-态射 $\pi\colon |\mathfrak{m}| \to W_{\mathrm{c}}$ ，使得 $\pi(r_{\mathfrak{m}}) = w$。

证明。 我们证明更强的断言：存在一个时刻 $\mathfrak{m}$ 和一个映射π: $|\mathfrak{m}| \to W_{\mathrm{c}}$，它是结构 $(W_{\mathrm{c}}, \sqsubset_\Phi)$ 上的 p-态射（我们称π 是相对于 $\sqsubset_\Phi$的 p-态射）。令 $\sqsubset^1_\Phi$ 为严格的 $\sqsubset_\Phi$ 后继，即$w \sqsubset^1_\Phi v$ 当且仅当 $w \sqsubset_\Phi v$ 且 $\neg(v \sqsubset_\Phi w)$。由于 $\sqsubset^1_\Phi$ 是逆良基的，我们可以归纳地假设，对每个满足 $w \sqsubset^1_\Phi v$的 v ，都存在一个时刻 $\mathfrak{m}_v$ 和一个相对于 $\sqsubset_\Phi$ 的 p-态射 π_v： $|\mathfrak{m}_v| \to W_{\mathrm{c}}$ ，它将 $\mathfrak{m}_v$ 的根映射到$v_\circ$。因此，我们定义一个时刻

$$\mathfrak{m} = \binom{\{\mathfrak{m}_v : v \sqsupset^1_\Phi w\}}{C_\Phi(w)}^{\mathfrak{q}}_{w},$$

其中，若 w 是自反的且 Φ-终结的，或 $|C_\Phi(w)| > 1$，则 $\mathfrak{q} = \mathrm{i}$；否则 $\mathfrak{q} = \mathrm{r}$。此外，$C_\Phi(w)$ 是有限的，因此根据引理 8.8， $\mathfrak{m}$ 是一个 **K4**-时刻。

接下来我们定义一个映射 π： $|\mathfrak{m}| \to W$ 为

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \in C_\Phi(w), \\ \pi_v(x) & \text{if } x \in |\mathfrak{m}_v|. \end{cases}$$

我们证明，对于 $\sqsubset_\Phi$， π 是一个 p-态射。首先假设 $\pi(x) \sqsubset_\Phi v$；我们必须证明存在 $y \sqsupset_{\mathfrak{m}} x$，使得 $\pi(y) = v$。要么 $x \in C_\Phi(w)$，要么对某个 u 有 $x \in |\mathfrak{m}_u|$。在第一种情况下，我们考虑两种子情况。如果 $v \in C_\Phi(w)$ 也成立，那么 $\pi(v) = v$，于是我们可以令 $y := v$。否则， $\pi(x) \sqsubset_\Phi^1 v$，令 y 为 $\mathfrak{m}_v$ 的根后，我们便可得出 $\pi(y) = v$。如果对某个 u 有 $x \in |\mathfrak{m}_u|$，那么根据假设， π_u 是一个 p-态射，从而立即得到所需的 y （且满足 $y \in |\mathfrak{m}_u|$）。

现在，假设 $x \sqsubset_{\mathfrak{m}} y$。我们来验证 $\pi(x) \sqsubset_\Phi \pi(y)$。需要考虑两种情况：首先，假设对于某个 u， $x \in |\mathfrak{m}_u|$，并且对于某个 v， $y \in |\mathfrak{m}_v|$。那么，根据时刻构造运算的定义， $u = v$。根据归纳假设，由于 π_u 是一个 p-态射，因此 $\pi(x) \sqsubset_\Phi \pi(y)$。否则，假设 $x \in C_\Phi(w)$。如果 $y \in C_\Phi(w)$，我们便立即得到 $\pi(x) \sqsubset_\Phi \pi(y)$，因为 $C_\Phi(w)$ 正是 w 的 $\sqsubset_\Phi$-簇（具有相同的可及关系）。否则，对于某个 v，有 $y \in |\mathfrak{m}_v|$，我们令 y' 为 $\mathfrak{m}_v$ 的根，使得 $\pi(y') = v$。于是， $\pi(x) \sqsubset_\Phi \pi(y')$。如果 $y = y'$，则证毕。如果 $y \neq y'$，那么根据归纳假设， π_v 关于 $\sqsubset_\Phi$ 是一个 p-态射，因此 $y' \sqsubset y$ 蕴含 $\pi(y') \sqsubset_\Phi \pi(y)$。根据 $\sqsubset_\Phi$ 的传递性，我们有 $\pi(x) \sqsubset_\Phi \pi(y)$。

现在，对于扩展了 **K4D** 的 Λ，注意到典范模型中的每个 v 都有一个满足 $\top$ 的后继。根据假设，$\Diamond\top \in \Phi$，而根据 D，$\Diamond\top \in v$，因此 v 有一个满足 $\top$ 的 $\sqsubset_\Phi$-后继，所以 $\sqsubset_\Phi$ 是串行的。由于 π 关于 $\sqsubset_\Phi$ 是一个 p-态射，因此 $\sqsubset_{\mathfrak{m}}$ 也是串行的。

最后，利用每个 π_v 都是区分的这一假设，以及我们对 π 和 q 的定义，很容易验证 π 是区分的。 □

非严格单调性会给我们的证明带来一个小小的技术问题。我们希望通过逐步构造的方法来构造故事。假设 $x \sqsubset x'$ 已经添加到我们的模型中，但尚未定义 $f(x)$ 和 $f(x')$。我们希望添加点 y 和 y'，以便设定 $f(x) = y$，以及 $f(x') = y'$。然而，仅凭非严格单调性，我们无法立即保证 $\pi(y) \sqsubset \pi(y')$，因为单调性只能推出 $\pi(y) \sqsubseteq \pi(y')$。若 $\pi(y) = \pi(y')$，我们可以将 y 和 y' 视为同一点来处理这一问题。由于我们自上而下地构造框架，在这种情况下， y 和 y' 将 位于底部。

定义 8.10（预-Φ-态射，底部）。设 $\mathfrak{m}$ 是一个时刻，且 $\pi\colon |\mathfrak{m}| \to W_c$。如果 $x \in |\mathfrak{m}|$ 处于底部，则称之为如此；若 $\pi(x)$ 是非自反的，且 $\pi(x) = \pi(r_{\mathfrak{m}})$。

如果 $\pi\colon |\mathfrak{m}| \to W_c$ 满足 Φ-态射（定义 8.3）的条件 1 和 3，并且 $x \sqsubset_{\mathfrak{m}} y$ 意味着 $\pi(x) \sqsubset_c \pi(y)$ 或 x， y 处于底部，则称其为预-Φ-态射。

引理 8.11。固定 $\Lambda \in \{\mathbf{K4}、\mathbf{K4D}\}$。设 $\mathfrak{m}$、$\hat{}\mathfrak{n}$ 是 Λ-时刻，且存在$\hat{}$一个单调、保根、几乎单射映射 $f\colon |\mathfrak{m}| \to |\hat{}\mathfrak{m}|$，以及一个预-Φ-态射 $\hat{}\pi\colon |\hat{}\mathfrak{n}| \to W_c$。那么，存在一个 Λ-时刻 $\mathfrak{n}$、一个单调、保根、几乎单射映射 $f\colon |\mathfrak{m}| \to |\mathfrak{n}|$，以及一个 Φ-态射 $\pi\colon |\mathfrak{n}| \to W_c$。

证明。这在 [14] 中得到了证明。基本做法是取一个商，将底部的点识别起来。唯一的区别是，我们使用另一篇论文中称为**GL**-底部的结构；只有当根是非自反的时，它才会识别根的副本。这样，我们确保 f 在自反点上仍然是单射。

□

利用这一点，我们可以证明存在一个映射到典范模型的合适故事。这基于以下有用的引理。

引理 8.12。固定

$$\Lambda \in \{\mathbf{K4C}^{\infty}, \mathbf{K4DC}^{\infty}, \mathbf{K4I}^{\infty}, \mathbf{K4DI}^{\infty}\}.$$

设 $\mathfrak{M}_{\mathrm{c}}^{\Lambda} = \langle W, \sqsubset, g, \nu \rangle$，并令 $\mathfrak{m}$ 为一个 Λ-时刻。假设存在一个 Φ-态射 $\pi\colon |\mathfrak{m}| \to W$。那么，存在一个时刻 $\mathfrak{n}$、一个单调映射$f\colon |\mathfrak{m}| \to |\mathfrak{n}|$以及一个 Φ-态射 $\rho\colon |\mathfrak{n}| \to W$，使得 $g \circ \pi = \rho \circ f$；其中，只要 Λ 是浸入的，f就是浸入的。

证明。我们对 $\mathfrak{m}$的高度进行归纳。令 C 为 $r_{\mathfrak{m}}$ 的簇，并令 $\vec{\mathfrak{a}} = \langle \mathfrak{a}_n \rangle_{n<N}$ 为 $r_{\mathfrak{m}}$ 的直接严格后继的生成子模型；注意，每个 $\mathfrak{a}_n$ 本身都是高度更小的时刻。根据归纳假设，存在时刻 $\langle \mathfrak{a}'_n \rangle_{n<N}$、保根的单调映射 $f_n\colon |\mathfrak{a}_n| \to |\mathfrak{a}'_n|$以及 Φ-态射 $\rho_n\colon |\mathfrak{a}'_n| \to W$，使得$g \circ \pi_n = \rho_n \circ f_n$。此外，对每个 $v \sqsupset_{\Phi} g(r_{\mathfrak{m}})$，根据引理 8.9，存在$\mathfrak{b}_v$ 和一个 Φ-态射 $\rho_v\colon |\mathfrak{b}_v| \to W$，将 $\mathfrak{b}_v$ 的根映射到 v。如果 Λ 是浸入的，或者 $|g_{\mathrm{c}}[\pi[C(r_{\mathfrak{m}})]]| > 1$，我们就令 $D = \{(x, g_{\mathrm{c}}(\pi(x))) : x \in C(r_{\mathfrak{m}})\}$，其中$(x,y)$，且当 x是自反的时，$\mathfrak{q} := \mathfrak{r}$（否则 $\mathfrak{q} := \mathfrak{i}$）；令 $f_D(x) = (x, g_{\mathrm{c}}(\pi(x)))$，其中$x \in C(r_{\mathfrak{m}})$；并令 $\rho_D(x,y) := y$。否则，Λ 不是浸入的，且 $g_{\mathrm{c}}[\pi[C(r_{\mathfrak{m}})]]$ 是一个单元素集，记作 v；我们令 $D = \{v\}$，其中 $\mathfrak{q} = \mathfrak{i}$，对所有 $x \in C(r_{\mathfrak{m}})$ 令 $f_D(x) = v$，并令 $\rho_D(v) := v$。这样定义 D，可以确保我们的映射是保簇且几乎单射的。

令$\hat{\mathfrak{n}} = \binom{\vec{\mathfrak{a}} * \vec{\mathfrak{b}}}{D}^{\mathfrak{q}}_{g_{\mathrm{c}}(w)}$，并定义

$$\hat{\rho}(w) = \begin{cases} \rho_D(w) & \text{if } w \in D, \\ \rho_n(w) & \text{if } w \in |\mathfrak{a}'_n|, \\ \rho_v(w) & \text{if } w \in |\mathfrak{b}_v|. \end{cases}$$

不难验证，$\hat{}\rho$ 是从 $\hat{}\mathfrak{n}$ 到 W 的预-Φ-态射。于是，令

$$\hat{f}(w) = \begin{cases} f_D & \text{if } w \in C(r_{\mathfrak{m}}), \\ f_n(w) & \text{if } w \in |\mathfrak{a}_n|. \end{cases}$$

$\hat{}$ 易知，$f\colon |\mathfrak{m}| \to |\hat{}\mathfrak{n}|$ 是单调的，且满足 $g \circ \pi = \hat{}\rho \circ f$。若 $\hat{}$ 每个 f_n 都是浸入的，且 Λ 也是如此，则 f 实际上是严格单调且单射的，证毕。

$\hat{}$ 否则，令 $\mathfrak{n} = \hat{}\mathfrak{n}/\hat{}\rho$、$f = [f]$ 和 $\rho = [\hat{}\rho]$，由引理 8.11 可知，$\mathfrak{n}$、f 和 ρ 具有所需性质。 □

命题 8.13. 固定

$$\Lambda \in \{\mathbf{K4C}^{\infty}, \mathbf{K4DC}^{\infty}, \mathbf{K4I}^{\infty}, \mathbf{K4DI}^{\infty}\}.$$

给定 $I < \omega$ 和 $w \in W_{\mathrm{c}}$，存在一个持续时间为 I 的故事 $\mathfrak{S}$，以及一个动态Φ-态射 $\pi\colon |\mathfrak{S}| \to W_{\mathrm{c}}$，使得 $w = \pi(r_{\mathfrak{S}})$，并且满足以下二者之一：$\Lambda$ 和 $\mathfrak{S}$ 是浸入的，或者 π 是区分的。

证明。我们对 I 进行归纳。对于 $I = 0$，这实质上就是引理 8.9。否则，根据归纳假设，假设存在一个深度为 I 的故事 $\mathfrak{S}$，以及一个动态 p-态射 $\hat{}\pi$。由引理 8.12，存在一个时刻 $\mathfrak{S}_{I+1}$、适当映射 $f_I\colon |\mathfrak{S}_I| \to |\mathfrak{S}_{I+1}|$，以及一个 Φ-态射 $\pi_{I+1}\colon |\mathfrak{S}_{I+1}| \to W_{\mathrm{c}}$

使其与 f_I 交换；如果 Λ 不是浸入的，则可令 π_{I+1} 为区分的。我们通过将 $\mathfrak{S}_{I+1}$ 添加到 $\mathfrak{S}$ 来定义 $\mathfrak{S}$，从而得到所需的故事。 □

由此可知，每个可满足公式都能在有限故事上满足，因此也能在有限模型上满足，从而得出本节的主要结果。

定理 8.14. 逻辑 $\mathbf{K4C}^\infty$、$\mathbf{K4DC}^\infty$、$\mathbf{K4I}^\infty$ 和$\mathbf{K4DI}^\infty$ 对于各自的有限动态导数框架类都是可靠且完备的。

证明。 可靠性由引理 3.6 以及第 3 节回顾的著名可靠性结果直接得出。设 $\Lambda \in \{\mathbf{K4C}^\infty, \mathbf{K4DC}^\infty, \mathbf{K4I}^\infty, \mathbf{K4DI}^\infty\}$，并假设 $\Lambda \nvdash \varphi$。那么在典范模型 $\mathfrak{M}_{\mathrm{c}}^{\Lambda} = \langle W, \sqsubset, g, \nu \rangle$ 中，存在 $w \in W$ 使 φ 不成立。根据命题 8.13，存在一个故事 $\mathfrak{S}$ 以及一个动态 Φ-态射 $\pi : |\mathfrak{S}| \to W$，使得 $w = \pi(r)$，其中 r 是 $\mathfrak{S}$ 的根。由此可得 $\mathfrak{S}, r \not\models \varphi$。回想一下，$\mathfrak{S}$ 是一个有限动态导数框架；如果 Λ 包含 D，则它是串行的；如果它包含 C$\Diamond$，则它是浸入的，正如所需。 □

9 度量 d完备性

本节将证明动态度量系统的完备性结果。为了让康托尔导数能够真正通过不同于求值点的点来求值，我们的 Kripke 模型最好将所有自反点复制一遍。我们采用以下广为人知的构造 [11]。

定义 9.1。 设 $\mathfrak{F} = \langle W, \sqsubset, g \rangle$ 为一个动态 Kripke 框架，W^{i}和W^{r} 分别为非自反点和自反点的集合。我们定义一个新框架 $\mathfrak{F}_{\oplus} = \langle W_{\oplus}, \sqsubset_{\oplus}, g_{\oplus} \rangle$，其中

1. $W_{\oplus} = (W^{\mathrm{i}} \times \{0\}) \cup (W^{\mathrm{r}} \times \{0, 1\})$;
2. $(w, i) \sqsubset_{\oplus} (v, j)$ iff $w \sqsubset v$;
3. $g_{\oplus}(w, i) = (g(w), i)$.

以下结论是标准的，且易于验证。

命题 9.2。 若 $\mathfrak{F} = \langle W, \sqsubset, g \rangle$ 是任意一个动态导数框架，则 $\mathfrak{F}_{\oplus}$也是一个动态导数框架，其中自反簇至少包含两个点；并且，由 $\pi(w, i) = w$ 给出的 π： $W_{\oplus} \to W$ 是满射动态 p-态射。此外，若 $\mathfrak{F}$ 是一个故事，则 $\mathfrak{F}_{\oplus}$也是；若 $\mathfrak{F}$ 是浸入的，则 $\mathfrak{F}_{\oplus}$也是。

接下来，按照 Kremer 和 Mints [22], 的做法，我们需要为 Kripke 模型添加极限。

定义 9.3。 设 $\mathfrak{F} = \langle W, \sqsubset, g \rangle$ 是一个有限动态 Kripke 框架。穿过 $\mathfrak{F}$ 的路径是一个无限序列 $\vec{w} = (w_i)_{i=0}^{\infty}$，满足 $w_i \sqsubseteq w_{i+1}$。有限路径 的定义类似，但它只有有限多个元素。（无限）路径的集合记作 $\vec{W}$。

对于路径 $\vec{w} = (w_i)_{i=0}^{\infty}$，我们定义 $\vec{g}(\vec{w}) = (g(w_i))_{i=0}^{\infty}$。极限赋值 是一个函数 $\lim$，它为每个 $\vec{w} \in \vec{W}$ 赋予一个元素 $\lim \vec{w} \in W$，使得 $\lim \vec{w}$在 $\vec{w}$中无限次出现，并且 $\lim \vec{g}(\vec{w}) = \vec{g}(\lim \vec{w})$。

引理 9.4. 每个故事都有一个极限赋值。

证明。设 $\mathfrak{S} = \langle |\mathfrak{S}|, \sqsubset, f, \nu, r\rangle$ 是一个持续时间为 I 的故事。我们将通过对每个 $|\mathfrak{S}_i|$ 中的元素赋予线性序，并令 $\lim \vec{w}$ 为（在此序下）无限次出现的最小元素，来赋予极限。为定义这个线性序，只需选取一个单射函数 h_i: $|\mathfrak{S}_i| \to \mathbb{N}$。对于 $i = 0$，此函数可以任意选取；但对于 $i+1$，我们必须确保以一种使极限可交换的方式选取 h_{i+1}。为此，先对 f $h_{i+1}(w)$ 的值域中的 w 定义 $= \min\{h_i(v) : f(v) = w\}$。然后，如果 w 不在此值域中，我们就任意选取 $h_{i+1}(w)$，但其值必须大于此前为 h_{i+1} 定义的所有值。

我们必须检验 f 是否与极限可交换。令 $\vec{w}$ 为一条经过 $\mathfrak{S}_i$ 和 $w =$ 的路径，且 $\lim \vec{w}$。于是， w 在 $\vec{w}$ 中出现无穷多次，因此 $f(\vec{w})$ 在 $\vec{f}(\vec{w})$ 中出现无穷多次。我们必须证明，任何在 $\vec{f}(\vec{w})$ 中出现无穷多次的 v，都满足 $h_{i+1}(v) \geq h_{i+1}(f(w))$。若 $v = f(\vec{w})$，则无需证明，因此我们假设并非如此。然而，此时 $f(\vec{w})$ 和 v 属于同一个簇，因为它们都在一条路径上出现无穷多次，这意味着它们都是自反的；由于 f 几乎单射且保持簇，因此存在唯一的 $w' \in |\mathfrak{S}_i|$，使得 $f(w') = v$，并且 w' 与 w 属于同一个簇。但是， w' 在 $\vec{w}$ 上出现无穷多次（因为 $f(w')$ 在 $\vec{f}(\vec{w})$ 中出现无穷多次）；由 $w' \neq \lim \vec{w}$ 可知，这意味着 $h_i(w') > h_i(w)$，因此 $h_{i+1}(v) > h_{i+1}(f(w))$，且 $\lim \vec{f}(\vec{w}) \neq v$，由此消去可得 $\lim \vec{f}(\vec{w}) = f(w)$。 □

定义 9.5。设 $\mathfrak{F} = \langle W, \sqsubset, g\rangle$ 是带有极限赋值的有限动态 Kripke 框架。我们定义 $\vec{W}$ 上的度量 δ，使得若 $\vec{w} = \vec{v}$，则 $\delta(\vec{w}, \vec{v}) = 0$；否则，$\vec{w}, \vec{v}) = 2^{-n}$，其中 n 是满足 $w_n \neq v_n$ 的最小值。

照例，我们用 $B_\varepsilon(\vec{w})$ 表示集合 $\{\vec{v} \in \vec{W} : \delta(\vec{w}, \vec{v}) < \varepsilon\}$；这就是以 $\vec{w}$ 为中心、半径为 ε 的球。

命题 9.6。设 $\mathfrak{F} = \langle W, \sqsubset, g\rangle$ 是一个有限故事，其中每个自反簇至少包含两个元素，并设极限是 $\mathfrak{F}$ 上的一个极限赋值。结构 $\vec{\mathfrak{F}} = (\vec{W}, \delta, \vec{g})$ 是一个动态度量系统，并且极限： $\vec{W} \to W$ 是一个动态 p-态射。此外，若 g 是浸入的，则 $\vec{g}$ 也是。

证明。要验证 $\vec{g}$ 连续，只需注意，如果 $\delta(\vec{w}, \vec{v}) < 2^{-n}$，那么它们在前 n 个元素上相同，因此 $\vec{g}(\vec{w})$ $\vec{g}(\vec{v})$ 和 $\delta(\vec{g}(\vec{w})\ \vec{g}(\vec{v})) < 2^{-n}$ 也相同。此外，由于假定极限具有这一性质，$\lim \circ \vec{g} = g \circ \lim$ 显然成立。现在，若 g 是浸入的，我们必须验证 $\vec{g}$ 是局部单射，才能得出它也是浸入的。设 $\vec{w}$ 是经过 $\mathfrak{S}_i$ 的任意路径；那么， $B_1(\vec{w})$ 是 $\vec{w}$ 的一个邻域，并且其中任意 $\vec{v} \in B_1(\vec{w})$ 也是经过 $\mathfrak{S}_i$ 的路径（因为 $v_0 = w_0$）。但根据定义，g 在 $\mathfrak{S}_i$ 上是单射，因此很容易验证， $\vec{g}(\vec{w}) = \vec{g}(\vec{v})$ 蕴含 $\vec{w} = \vec{v}$，因为它们的各个分量都必须相等。

还需验证 $\vec{g}$ 是一个 p-态射。首先，我们证明，若 $v_0 \sqsubset \lim \vec{w}$，那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $g[B_\varepsilon(\vec{w})] \sqsubseteq \downarrow v_0$。由于 $\lim \vec{w}$ 在 $\vec{w}$ 中无限次出现，我们可以选择 n，使得 $w_n = \lim \vec{w}$，然后定义 $\varepsilon = 2^{-n}$。令 $\vec{v} \in B_\varepsilon(\vec{w}) \setminus \{\vec{w}\}$。根据传递性，对于所有 $m \geq n$，都有 $w_n \sqsubseteq v_m$，特别是 $\lim \vec{w} \sqsubseteq \lim \vec{v}$。如果 $\lim w \neq \lim v$，则问题解决；否则，由于根据假设 $\vec{v} \neq \vec{w}$，我们可以选择 $m > n$，使得 $v_m \neq w_m$。这意味着两者中至少有一个不等于 $\lim \vec{w}$，不妨设为 v_m。由于 $\lim \vec{w}$ 在 $\vec{v}$ 中无限次出现，我们看到 $\lim \vec{w} = v_n \sqsubset v_m \sqsubseteq \lim \vec{v}$，由传递性可得 $\lim \vec{w} \sqsubset \lim \vec{v}$，正如所需。

现在假设 $\vec{g}(\vec{w}) = v$，并令 $v' \sqsupset v$ 和 $\varepsilon > 0$；我们需要找到$\vec{u} \in B_\varepsilon(\vec{w})$，使得 $\vec{u} \neq \vec{w}$且 $\lim \vec{u} = v'$。由于 v在$\vec{w}$中无限次出现，我们可以选择 n，使得 $(w_i)_{i<n}$ 延伸 $\vec{a}$ 且 $w_n = v$。现在分两种情况讨论。如果 $v' \neq v$，那么对于路径 $\vec{u} := (w_0, \ldots, w_n, v', v', \ldots)$，我们有 $\delta(\vec{u}, \vec{w}) < \varepsilon$，且 $\vec{u} \neq \vec{w}$，因为 v 并非无限次出现。此外，$\lim \vec{u} = v'$，因为这是唯一一个无限次出现的元素。否则，$v' = v$ 且 v 是自反的。但根据假设，同一簇中存在 v''，我们考虑 $\vec{u} := (w_0, \ldots, w_n, v'', v, v, \ldots)$，它与前面一样具有所需的性质。 □

我们希望证明，W 实际上同胚于康托尔空间的一个子集。为此，我们使用以下两个结果。

定理 9.7 (布劳威尔（例如 [30]）。一个度量空间是康托尔空间，当且仅当它非空、完美、紧致且完全不连通。

特别是，众所周知，无限二叉树上的分支集合与康托尔集同胚。不难看出，这棵二叉树具有 W的形式，其中 W 是一个二元素簇。更一般地，只要满足一些温和条件，W 就总是一个康托尔集。

引理 9.8。设 $\langle W, \sqsubset \rangle$ 是一个非空有限传递框架，且每个自反簇至少包含两个点。若 $\langle W, \sqsubset \rangle$ 是串行的，则 $\vec{W}$ 与康托尔集同胚；若 $\langle W, \sqsubset \rangle$ 是传递的，但不一定是串行的，则 W 同胚于康托尔集的一个闭子集。

证明。首先假设 $\sqsubset$ 是串行的。我们知道 W 非空，因为 W是；它也是完美的，因为对于每个 $\vec{w}$ 和 $\varepsilon > 0$，我们都能找到 $\vec{v} \neq \vec{w}$，使得$\delta(\vec{v}, \vec{w}) < \varepsilon$；只需取 n，使得 $2^{-n} < \varepsilon$，并选择 $v \sqsupset w_n$，使得 $v \neq w_n$。这样的元素必然存在，因为 $\sqsubset$是串行的，而且根据假设，每个自反簇至少包含两个元素。接着，对于 $\vec{v} := (w_0, \ldots, w_n, v, v, \ldots)$，我们很容易看出，$\delta(\vec{v}, \vec{w}) < \varepsilon$，正如所需。根据 K¨onig 引理，$\vec{W}$ 是紧致的，因为基本开集构成一棵有限分支树；它也是全不连通的，因为如果 $A \subseteq W$ 至少有两个元素，令 n满足 $\delta(\vec{w}, \vec{v}) = 2^{-n}$。取 ε使得 $2^{-n-1} < \varepsilon < 2^{-n}$，我们看到 $B_\varepsilon(\vec{w})$及其补集都是开集，但一个包含 $\vec{w}$，另一个包含 $\vec{v}$，因此 W 是全不连通的。因此，定理 9.7 告诉我们，W 与康托尔集同胚。

如果 $\sqsubset$ 不是串行的，考虑通过添加一个由两个自反点组成的簇来定义的 W_∞；这两个点 $\{u_\infty, v_\infty\}$高于 W的每个元素。根据前一条，W_∞ 与康托尔集同胚，并且很容易看出，W 是 W_∞的一个闭子集。 □

康托尔空间的完备性由此得出（见下文定理 9.12）。最后，我们利用以下命题证明有理数子空间的完备性。

命题 9.9 (Sierpinski [29])。任意两个完美的可数度量空间都彼此同胚。

为此，我们将注意力集中在 W的一个可数子空间上；具体来说，就是那些最终为常数的序列。给定一个框架 $\langle W, \sqsubset \rangle$，定义 $\vec{W}_0$为 $\vec{w} \in W$ 的全体所成的集合，使得存在 $n \in \mathbb{N}$，满足对于所有 $n > m$，都有 $w_n = w_m$。

显然，如果 W 是有限的，那么 $\vec{W}_0$ 就是可数的；并且它继承了来自 $\vec{W}$的度量（记作 δ_0）。

命题 9.10。 设 $\mathfrak{X} = \langle W, \sqsubset, g\rangle$ 是一个有限故事，其中每个自反簇至少包含两个元素，并设 $\lim$ 是 $\mathfrak{X}$ 上的一个极限赋值。结构 $\vec{\mathfrak{X}} = \langle \vec{W}_0, \delta_0, \vec{g}_0\rangle$ 是一个动态度量系统，而 $\lim_0 \colon \vec{W}_0 \to \vec{W}$ 是一个动态 p-态射，其中下标 0 表示对 W_0的限制。此外，如果 g 是浸入的，那么 $\vec{g}_0$ 也是浸入的。

证明。 所需的大多数性质都继承自 $\vec{W}$（例如，$\vec{g}_0$ 的连续性），但“回退”条件除外。不过，在命题 9.6 的证明中得到的所有见证最终都是常值的，因此同一证明在此情形下仍然适用。 □

以下结论的证明与引理 9.8 类似，只需将 W 替换为 $\vec{W}_0$，并使用定理 9.9。

引理 9.11。 设$(W, \sqsubset)$ 是一个非空有限的传递框架，其中每个自反簇至少包含两个点。若$(W, \sqsubset)$ 是串行的，则 $\vec{W}_0$ 与 $\mathbb{Q}$同胚；若$(W, \sqsubset)$ 是传递的，但不一定是串行的，则 $\vec{W}$ 同胚于 $\mathbb{Q}$的一个子空间。

总之，我们得到以下完备性结果。

定理 9.12。 设 X 为 $\mathbb{Q}$ 或康托尔集。

1. $\mathbf{K4C}^\infty$ 对于基于 X的闭子空间的动力系统类是完备的。*2.* $\mathbf{K4I}^\infty$ 对于基于 X的闭子空间的单射动力系统类是完备的。*3.* $\mathbf{K4DC}^\infty$ 对于基于 X的动力系统类是完备的。*4.* $\mathbf{K4DI}^\infty$ 对于基于X的单射动力系统类是完备的。

10 结论

我们基于拓扑 μ- 演算构建了动态拓扑逻辑，采用其缠结表述，并引入了多种公理系统；对于基于度量空间的动力系统，这些系统在预期解释下是可靠且完备的。我们证明，这些完备性结果尤其适用于康托尔空间和有理数集——这两个“典范”的度量空间。

我们也可以考虑基于实数直线或一般欧几里得空间的解释。Fernández-Duque [15] 证明了$\mathbf{S4C}$ 对于平面是完备的，但鉴于 Lucero-Bryan 和 Shehtman [24,28]的研究结果，我们不能期待 $\mathbf{K4DC}^\infty$ 也有类似结果。不过，或许可以定义$\mathbf{K4DC}^\infty$ 的扩展，使其对于欧几里得空间是完备的。

最后，还有一个问题：将我们的语言扩展到包含“从此以后”算子。我们预计，所有动态度量

系统的 -逻辑都可以用缠结导数公理化，正如缠结闭包曾被用于为基于闭包的**DTL** [16]提供公理化一样。Fern´andez-Duque 展示了缠结闭包对于使用“从此以后”算子为**DTL** 公理化至关重要；在未来的工作中，我们计划展示如何将同样的方法用于带有康托尔导数的**DTL** 。这延续了 Fern´andez-Duque 和 Montacute 的工作，他们为带有康托尔导数和“从此以后”算子的**DTL** 在散布空间 [17]这一类上提供了完备的公理化。在此背景下，我们特别关注混沌系统这一类的公理化。我们相信，当前的工作是实现这一目标的重要一步。

参考文献

[1] S. Artemov、J. Davoren 和 A. Nerode。混合系统的模态逻辑与拓扑语义。技术报告 *MSI 97-05*，1997年。[2] Alexandru Baltag、Nick Bezhanishvili 和 David Fern´andez-Duque。拓扑 μ 演算：完备性与可判定性。第 1–13 页，2021年。[3] Alexandru Baltag、Nick Bezhanishvili 和 David Fern´andez-Duque。惊奇拓扑。载于 Gabriele Kern-Isberner、Gerhard Lakemeyer 和 Thomas Meyer 编，《第 *19* 届知识表示与推理原理国际会议论文集，*KR 2022*，以色列海法，*2022*年*7*月*31*日至*8*月*5*日》，2022年。[4] J. Banks、J. Brooks、G. Cairns、G. Davis 和 P. Stacey。论 Devaney 的混沌定义。《美国数学月刊》，99(4):332–334，1992年4月。[5] Guram Bezhanishvili 和 Joel Lucero-Bryan。关于有理数子空间的 d-逻辑。《圣母大学形式逻辑杂志》，53(3):319–345，2012年。[6] Patrick Blackburn、Maarten de Rijke 和 Yde Venema。模态逻辑，剑桥理论计算机科学论丛第 53 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2001年。[7] Steven L Brunton 和 J Nathan Kutz。数据驱动科学与工程：机器学习、动力系统与控制。剑桥大学出版社，2019年。[8] Moody T Chu。作为动力系统的线性代数算法。《数值纪事》，17:1–86，2008年。[9] Anuj Dawar 和 Martin Otto。特殊框架类上的模态刻画定理。《纯粹与应用逻辑年刊》，161(1):1–42，2009年。[10] Robert L Devaney。混沌动力系统导论。CRC出版社，2018年。[11] Leo Esakia。通过拓扑研究直觉主义逻辑与模态。《纯粹与应用逻辑年刊》，127(1-3):155–170，2004年。[12] David Fern´andez-Duque。有限传递模型可模拟性的模态可定义性。《逻辑学研究》，98(3):347–373，2011年。

[13] David Fern´andez-Duque。用于空间推理的纠缠模态逻辑。载于 Toby Walsh 编，《IJCAI 2011：第 22 届国际人工智能联合会议论文集》，西班牙加泰罗尼亚巴塞罗那，2011年7月16日至22日，第 857–862 页。IJCAI/AAAI，2011年。[14] David Fern´andez-Duque 和 Yo`av Montacute。动态康托尔导数逻辑。载于 Florin Manea 和 Alex Simpson 编，《第 30 届 EACSL计算机科学逻辑年会（CSL 2022）》，2022年2月14日至19日，德国哥廷根（线上会议），LIPIcs 第 216 卷，第 19:1–19:17 页。Schloss Dagstuhl - 莱布尼茨信息学中心，2022年。[15] David Fern´andez-Duque。$\mathbb{R}^2$的动态拓扑完备性。《IGPL逻辑期刊》，15(1):77–107，2007年1月。[16] David Fern´andez-Duque。动态拓扑逻辑的可靠且完备的公理化。《符号逻辑杂志》，77(3):947–969，2012年。[17] David Fern´andez-Duque 和 Yo`av Montacute。Untangled：完备的动态拓扑逻辑，2022年。（即将发表于 AAAI-23。）[18] K. Fine。包含 $K4$ 的逻辑。《符号逻辑杂志》，39:31–42，1974年。[19] R. Goldblatt 和 I. Hodkinson。纠缠闭包算子的空间逻辑与模态 μ 演算。《纯粹与应用逻辑年刊》，168(5):1032–1090，2017年。[20] Guillaume Hanrot、Xavier Pujol 和 Damien Stehl´e。使用动力系统分析分块格算法。载于《年度密码学会议》，第 447–464 页。Springer，2011年。[21] A.J. Ijspeert、J. Nakanishi 和 S. Schaal。人形机器人中利用非线性动力系统进行运动模仿。载于《2002 年 IEEE 机器人与自动化国际会议论文集（目录号 02CH37292）》，第 2 卷，第 1398–1403 页，第 2 卷，2002年。[22] Philip Kremer 和 Grigori Mints。动态拓扑逻辑。载于 Marco Aiello、Ian Pratt-Hartmann 和 Johan van Benthem 编，《空间逻辑手册》，第 565–606 页。Springer，2007年。[23] Hai Lin 和 Panos J. Antsaklis。混合动力系统：控制与验证导论。《系统与控制基础与趋势》，1(1):1–172，2014年3月。[24] Joel Gregory Lucero-Bryan。实数直线的 d-逻辑。《逻辑与计算杂志》，23(1):121–156，2013年。[25] J.C.C. McKinsey 和 A. Tarski。拓扑代数。《数学年刊》，2:141–191，1944年。[26] Grigori Mints 和 Ting Zhang。康托尔空间中连续变换的命题逻辑。《数学逻辑档案》，44(6):783–799，2005年。[27] Henning S. Mortveit 和 Christian M. Reidys。《序列动力系统导论》。施普林格出版社，柏林、海德堡，2007年。

[28] V. B. Shehtman. 欧几里得空间中的导出集与模态逻辑。*ILLC* 预印本与出版物，X-1990-05，1990年。[29] W. Sierpinski. 关于自身稠密的可数集合的一个拓扑性质。*Fund. Math.*，1:11–16，1920年。[30] J. van Mill. 函数空间的无限维拓扑。阿姆斯特丹，2001年。[31] E Weinan. 一种通过动力系统实现机器学习的方案。数学与统计学通讯，5(1):1–11，2017年。