arXiv:2301.09944v1 [math.GR] 24 Jan 2023

# 克利福德半群上的五边形方程的集合论解⋆

Marzia MAZZOTTA[a], Vicent P´EREZ-CALABUIG[b], Paola STEFANELLI[a]

[a] *Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi", Università del Salento,Via Provinciale Lecce-Arnesano, 73100 Lecce (Italy)*

[b] *Departament de Matemàtiques de València,Dr. Moliner,* 50,*46100 Burjassot, València (Spain)*

摘要

给定集合 $S$ 上五边形方程 $s$： $S\times S\to S\times S$ 的一个集合论解，并令 $s(a,b)=(a\cdot b,\theta_a(b))$，其中 $\cdot$ 是 $S$ 上的二元运算， $\theta_a$ 是从 $S$ 到其自身的映射，则对于每个 $a\in S$，自然可得 $(S,\cdot)$ 是一个半群。

本文聚焦于克利福德半群（$S,\cdot$）上的解，这些解在幂等元集合 E($S$) 上满足特殊性质。具体而言，我们完整描述了幂等元不变解，即对每个 $a\in S$， $\theta_a$ 在 E($S$) 中保持不变的解。此外，将（$S,\cdot$）视为群的不交并，我们从每个群上的一个解出发，构造一族幂等元固定解，也就是说，对每个 $a\in S$， $\theta_a$ 固定 E($S$) 中的每个元素。

关键词：五边形方程，集合论解，逆半群，克利福德半群

2022年 MSC：16T25，81R50，20M18

## 引言

若 $V$ 是域 $F$ 上的向量空间，则称线性映射 $\mathcal{S}\colon V\otimes V\to V\otimes V$ 是 $V$ 上五边形方程的一个解，若其满足关系式

$$\mathcal{S}_{12}\mathcal{S}_{13}\mathcal{S}_{23}=\mathcal{S}_{23}\mathcal{S}_{12}, \tag{1}$$

⋆本研究部分得到"恩尼奥·德·乔治"数学与物理系—萨伦托大学以及瓦伦西亚大学数学系的资助。第一作者和第三作者是 GNSAGA（INdAM）以及非营利协会 ADV-AGTA 的成员。

*Email addresses:* marzia.mazzotta@unisalento.it (Marzia MAZZOTTA), vicent.perez-calabuig@uv.es (Vicent P´EREZ-CALABUIG), paola.stefanelli@unisalento.it(Paola STEFANELLI)

*January 25*，2023年

其中 $\mathcal{S}_{12} = \mathcal{S} \otimes \mathrm{id}_V, \mathcal{S}_{23} = \mathrm{id}_V \otimes \mathcal{S}, \mathcal{S}_{13} = (\mathrm{id}_V \otimes \Sigma)\mathcal{S}_{12}(\mathrm{id}_V \otimes \Sigma)$，其中 $\Sigma$ 是作用在 $V \otimes V$ 上的翻转算子，即 $\Sigma(u \otimes v) = v \otimes u$，对所有 $u, v \in V$ 均成立。五边形方程最早出现于 20 世纪 80 年代初的 [5]，作为旋转群表示论中 Wigner $6j$–符号和 Racah 系数的 Biedenharn-Elliott 恒等式。Maillet [21] 证明，五边形方程的解可导出四面体方程的解 [31], ，后者是著名量子 Yang-Baxter 方程 [29, 4]的一种推广。此外，在 [25, 定理 3.2], 中，Militaru 证明，有限维向量空间上的双射解等价于有限 Hopf 代数，因此，对后者的分类可归结为对解的分类。在此后的数年间，五边形方程以多种形式出现在文献中，并根据具体研究领域采用了不同的术语。我们列举一些有趣的研究 [11, 30, 22, 27, 16, 28, 2, 26, 17, 3, 25, 15, 13], ，仅举数例。若想更全面地了解五边形方程的一些应用，我们推荐 Dimakis 和 M¨uller-Hoissen [10] 近期发表的论文（以及其中的参考文献），作者在文中研究了一个称为多边形方程的无限方程族。

正如 Drinfel'd 在 [12] 将 Yang-Baxter 方程的解转化为集合论表述的研究一样，Kashaev 和 Sergeev 在 [19] 开始了采用集合论方法研究五边形方程。也就是说，若 $S$ 是一个集合，映射 $s: S \times S \to S \times S$ 满足以下"逆向"关系

$$s_{23}s_{13}s_{12} = s_{12}s_{23}, \tag{2}$$

其中，对于所有的 $a$、$b \in S$，$s_{12} = s \times \mathrm{id}_S$、$s_{23} = \mathrm{id}_S \times s$、$s_{13} = (\mathrm{id}_S \times \tau)\, s_{12}\, (\mathrm{id}_S \times \tau)$，以及 $\tau(a, b) = (b, a)$，则称其为集合 $S$ 上五边形方程的集合论解，或简称解。特别地，若 $s$ 是有限集合 $S$ 上的一个解，则对所有的 $a$、$b \in S$，由 $\mathcal{S}$: $F^{S\times S} \to F^{S\times S}$ 定义的线性映射 $\mathcal{S}(f)(a, b) = f(s(a, b))$ 是向量空间 $F^S$ 上方程（1）的一个解，其中 $F^S$ 是从 $S$ 到 $F$ 的所有函数构成的向量空间。

出于他们的研究目的，[19] 中的作者只考察了双射映射。Kashaev 和 Reshetikhin 也在 [18], 中研究了这一类解，并证明每个对称可分解李群都与一个双射解相关。在这些解中，Colazzo、Jespers 和 Kubat 最近在 [9]中描述了所有满足对合条件的解，即 $s^2 = \mathrm{id}_{S\times S}$。

正如 [6, 命题 8], 所示，任意集合 $S$ 上的解 $s$ 都可以写成 $s(a, b) = (a \cdot b, \theta_a(b))$，其中 $\cdot$ 是 $S$ 上的二元运算，$\theta_a$ 是从 $S$ 到其自身的映射，对任意 $a \in S$ 均如此。由此，$S$ 自然具有半群 $(S, \cdot)$ 的结构，因此研究特定类半群上的解显得顺理成章。为简洁起见，我们将 $S$ 中的乘法记作连接。在这方面，[6, 定理 15]中，作者通过说明群上的所有解均由其正规子群决定，给出了这些解的描述。此外，在 [7], 中，我们可以找到半群上解的多种构造，例如两个半群的匹配积上的解；匹配积是一种半群，其中包含经典的 Zappa-Sz´ep 积。在同一篇论文中，作者研究了同时满足五边形方程和 Yang-Baxter 方程[12]的映射。此外，在 [23], 中，第一作者研究幂等解，即满足

性质 $s^2 = s$的映射，并描述了具有中心幂等元的幺半群上的这类解。

本文开始研究克利福德半群上的解，即幂等元为中心元的逆半群。回顾一下，半群 $S$ 是逆的，当且仅当对每个 $a \in S$，都存在唯一的 $a^{-1} \in S$ 满足 $aa^{-1}a = a$ 和 $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$；显然，克利福德半群的性质与群非常接近。鉴于这一事实以及文献 [6], 中对群上解的描述，自然会想知道，能否也对这类半群上的解进行描述。然而，这一目标似乎颇具挑战性，因此有必要对解集作一些考察。容易验证，群 $G$ 上的每个解都满足 $\theta_a(1) = 1$，对每个 $a \in G$ 均如此。因此，我们考虑克利福德半群 $S$ 上的两类解，使得 $\theta_a$ 分别固定每个幂等元，或在每个幂等元上保持不变，对每个 $a \in S$ 均如此。我们分别称它们为幂等固定解和幂等元不变解。

本文的主要结果如下。首先，我们完整描述了克利福德半群 $S$ 上第一类解，其中包括在群的背景下得到的解。为此，我们引入了 $S$ 上任意解的核，结果表明它是一个正规子半群，即包含幂等元且在共轭运算下封闭的子半群。其次，对于第二类解，考虑到任何克利福德半群都是一族两两不交的群 $\{G_e\}_{e\in \mathrm{E}(S)}$的并，我们给出了一种构造解的方法：从每个群 $G_e$上的一个解出发构造得到。

## 1. 预备知识

本节旨在简要介绍五边形方程集合论解的一些基础知识。首先，我们回顾一些与克利福德半群相关且对本文有用的概念。关于这一主题的更全面论述，请参阅 [8]和 [20]。

### 1.1. 克利福德半群基础

回顾一下，若对每个 $a \in S$，都存在唯一的 $a^{-1} \in S$ 使得 $a = aa^{-1}a$ 和 $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1}$，则 $S$ 是一个逆半群。对所有 $a$、$b \in S$，它们满足 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ 和 $(a^{-1})^{-1} = a$。此外，$\mathrm{E}(S) = \{\, aa^{-1} \mid a \in S \,\} = \{\, a^{-1}a \mid a \in S \,\}$，并且可以考虑如下自然偏序关系

$$\forall\, e, f \in \mathrm{E}(S) \qquad e \leq f \iff e = ef = fe.$$

若对任意 $a \in S$，$aa^{-1} = a^{-1}a$，则逆半群 $S$ 是克利福德半群；或者等价地说，幂等元是中心元，即它们与 $S$ 中的每个元素都可交换。

给定一个克利福德半群 $S$，我们引入以下关系及其相关性质。这些性质很容易由 $S$ 中所有格林关系都相同这一事实推出，并且它们刻画了 $S$ 本身的结构。若 $a$、$b \in S$，我们定义

1. $a \leq b$ 当且仅当 $aa^{-1} \leq bb^{-1}$，这是对 $S$中自然偏序的扩展；2. $a \mathcal{R} b$ 当且仅当 $a \leq b$ 且 $b \leq a$。

由此可知， $\leq$ 是 $S$ 上的预序，而 $\mathcal{R}$ 是 $S$ 上的等价关系，使得

$$G_{aa^{-1}} := [a]_{\mathcal{R}} = \{b \in S \mid bb^{-1} = aa^{-1}\}$$

对每个 $a \in S$， $aa^{-1}$都是一个以 $aa^{-1}$为单位元的群。另一方面，对所有 $a$、 $b \in S$，

$$a \leq b \iff \exists\, u \in S \quad a = ub \ \vee \ a = bu. \tag{3}$$

此外， $\leq$ 在 $\mathcal{R}$的等价类上诱导出一个序关系，即对所有$e$、 $f \in \mathrm{E}(S)$， $G_e \leq G_f$ 当且仅当 $e \leq f$。以下定理描述克利福德半群。

定理 1. 设 $S$ 是一个克利福德半群。那么，

1. $S$ 是由一族两两不交的群 $\{G_e\}_{e \in \mathrm{E}(S)}$构成的并；2. 映射$\varphi_{f,e}$：$G_f \to G_e$ 由$\varphi_{f,e}(b) = eb$给出，对每个 $b \in G_f$都是群同态；对所有满足 $e \leq f$的 $e$、 $f \in \mathrm{E}(S)$；3. 对所有满足 $e \leq f \leq g$的 $e$、 $f$、 $g \in \mathrm{E}(S)$，则$\varphi_{g,e} = \varphi_{f,e}\varphi_{g,f}$。

根据前面的定理，克利福德半群中的乘积可以通过群同态 $\varphi_{e,\ f}$ 来表示，即

$$ab = (ae)(fb) = (efa)(efb) = \varphi_{e,ef}\,(a)\,\varphi_{f,ef}\,(b) \in G_{ef},$$

对所有 $a \in G_e$、 $b \in G_f$ 都成立。特别地，对于所有满足 $a \leq e$ 的 $a \in S$、 $e \in \mathrm{E}(S)$，则 $ae = ea = a$。

为求完整起见，定理 1 的逆命题也成立。

### 1.2. 解的基础知识

Kashaev 和 Sergeev [19] 最早从代数视角研究了解。最近， [6, 7, 9, 23]重新开始研究这些解。沿用这些文献中引入的记号，给定集合 $S$ 以及从 $S \times S$ 映射到自身的映射 $s$，我们记作

$$s(a, b) := (ab,\, \theta_a(b)),$$

对所有 $a$、 $b \in S$ 都成立，其中 $\theta_a$ 是对每个 $a \in S$ 都将 $S$ 映射到自身的映射。于是，若且唯若以下条件成立， $s$ 便简称为 $S$ 上的解

$$(ab)c = a(bc)$$

$$\theta_a(b)\theta_{ab}(c) = \theta_a(bc) \tag{P1}$$

$$\theta_{\theta_a(b)}\theta_{ab} = \theta_b \tag{P2}$$

对所有 $a$、 $b$、 $c \in S$ 均成立。因此，第一个恒等式自然地赋予 $S$ 一个半群结构，这使得对解的研究聚焦于特定类别的半群。在描述解时，区分那些不同构的解很有帮助。

定义 2. 设 $S$、$T$ 是两个半群，且 $s(a,b) = (ab, \theta_a(b))$、$t(u,v) = (uv, \eta_u(v))$ 分别是 $S$ 和 $T$ 上的两个解。若存在一个同构 $\psi\colon S \to T$ 使得

$$\psi\theta_a(b) = \eta_{f(a)}\psi(b), \tag{4}$$

对所有 $a$、$b \in S$，或者等价地，$(\psi \times \psi)s = t(\psi \times \psi)$。

下面给出一些贯穿本文使用的解的简单例子。

例 1。

1. 设 $S$ 为一个集合，且 $f$、$g\colon S \to S$ 为幂等映射，使得 $fg = gf$。则，$s(a$、$b) = (f(a)\ g(b))$ 是 $S$ 上的一个解（参见 [24]）。2. 设 $S$ 为一个半群，且 $\gamma \in \mathrm{End}(S)$，使得 $\gamma^2 = \gamma$。则，由 $s$ 给出的映射为 $s(a$、$b) = (ab$、$\gamma(b))$，对所有 $a$、$b \in S$ 成立，是 $S$ 上的一个解（见 [6, 例 2-2。]）。

我们注意到，每个克利福德半群 $S$ 都产生如下解

$$\mathcal{I}(a,b) = (ab, b), \qquad \mathcal{F}(a,b) = \left(ab, bb^{-1}\right), \qquad \mathcal{E}(a,b) = (ab, e), \tag{5}$$

其中，$e \in \mathrm{E}(S)$ 是 $S$ 的一个固定幂等元，属于例 1 中第 2 类解。

在 [1]，中，式 (1) 的解是通过交换且余交换的乘法酉算子在希尔伯特空间上定义的（见 [1, Definition 2.1]）。这些算子启发了集合论情形下以下几类解。

定义 3. 若 $s\colon S \times S \to S \times S$ 满足 $s_{12}s_{13} = s_{13}s_{12}$，则称其为交换的；若满足 $s_{13}s_{23} = s_{23}s_{13}$，则称其为余交换的。

例 1-1 中的解既是交换的，也是余交换的。在 [9, Corollary 3.4]，中证明了，若 $s$ 是对合解，即 $s^2 = \mathrm{id}_{S\times S}$，则 $s$ 既是交换的，也是余交换的。

约定：下文假设 $S$ 是克利福德半群，并简写为 $s$ 是定义在 $S$ 上的解，而不写成 $s(a, b) = (ab, \theta_a(b))$，其中所有 $a, b \in S$ 均成立。

## 2. 克利福德半群上解的性质

本节中，我们证明与任意解 $s$ 在 $S$ 上相关联的正规子半群的存在性。我们指出，我们证明的性质与群 [6]背景下给出的性质一致。

命题 4. 设 $s$ 是 $S$ 上的一个解。那么，以下结论成立：

1. $\theta_a\left(a^{-1}\right)=\theta_{aa^{-1}}(a)^{-1}$,
2. $\theta_a\left(a^{-1}a\right)=\theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_a\left(a^{-1}\right)^{-1}\in \mathrm{E}(S)$,
3. $\theta_{aa^{-1}}=\theta_{\theta_{a^{-1}}(aa^{-1})}\theta_{a^{-1}}$,

对每个 $a\in S$ 均成立。

证明。令 $a\in S$。那么，由 (P1) 可得

$$\begin{aligned}\theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_{aa^{-1}}(a)\,\theta_a\left(a^{-1}\right)&=\theta_a\left(a^{-1}a\right)\theta_a\left(a^{-1}\right)=\theta_a\left(a^{-1}a\right)\theta_{aa^{-1}a}\left(a^{-1}\right)\\&=\theta_a\left(a^{-1}aa^{-1}\right)=\theta_a\left(a^{-1}\right)\end{aligned}$$

且 $\theta_{aa^{-1}}(a)\,\theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_{aa^{-1}}(a)=\theta_{aa^{-1}}\left(aa^{-1}\right)\theta_{aa^{-1}}(a)=\theta_{aa^{-1}}\left(aa^{-1}a\right)=\theta_{aa^{-1}}(a)$，因此 $\theta_a\left(a^{-1}\right)=\theta_{aa^{-1}}(a)^{-1}$，故条件 1. 得以满足。

此外，由 1. 可得 $\theta_a\left(a^{-1}a\right)=\theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_{aa^{-1}}(a)=\theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_a\left(a^{-1}\right)^{-1}$，因此 $\theta_a\left(a^{-1}a\right)$ 是 $S$ 的一个幂等元。

最后，由 (P2)，$\theta_{aa^{-1}}=\theta_{\theta_{a^{-1}}(aa^{-1})}\,\theta_{a^{-1}aa^{-1}}=\theta_{\theta_{a^{-1}}(aa^{-1})}\,\theta_{a^{-1}}$，这正是我们要证明的结论。 □

请注意，前述结果同样适用于任何不一定是克利福德半群的逆半群。

现在，让我们引入一个研究克利福德半群上解的关键对象。

定义5. 若 $s$ 是 $S$ 上的一个解，则以下集合

$$K=\{a\in S\mid \forall\, e\in \mathrm{E}(S),\ e\le a\quad \theta_e(a)\in \mathrm{E}(S)\}$$

称为 $s$ 的核。

与 [6, 引理 13], 一致，我们的目标是证明 $K$ 是克利福德 $S$ 的一个正规子半群，即 $\mathrm{E}(S)\subseteq K$ 和 $a^{-1}Ka\subseteq K$，对每个 $a\in S$ 均成立。为此，我们先给出一个预备结果。

引理6。设 $s$ 是 $S$ 上的一个解，且 $K$ 是 $s$的核。则有:

1. 对所有满足 $a\le e$的 $a\in S$ 和 $e\in \mathrm{E}(S)$, $\theta_a(e)\in \mathrm{E}(S)$; 2. 对所有满足 $e\le a, e\le k$的 $a\in S, k\in K$和 $e\in \mathrm{E}(S)$, $\theta_{ea}(k)\in \mathrm{E}(S)$。

证明。设 $a\in S$ 且 $e\in \mathrm{E}(S)$。若 $a\le e$，由 (P1) 可得 $\theta_a(e)=\theta_a(e)\theta_{ae}(e)=\theta_a(e)^2$,, 因此结论1成立。现在，若 $k\in K$ 且 $e\le a, e\le k$，则 $\theta_e(k)\in \mathrm{E}(S)$，并且由 (P2),

$$\theta_{ea}(k)=\theta_{\theta_{a^{-1}}(ea)}\theta_{a^{-1}ea}(k)=\theta_{\theta_{a^{-1}}(ea)}\theta_e(k).$$

若我们证明 $\theta_{a^{-1}}(ea)\le\theta_e(k)$，则由1可得 $\theta_{ea}(k)\in \mathrm{E}(S)$。于是

$$\begin{aligned}\theta_{a^{-1}}(ea)&=\theta_{a^{-1}}\left(eakk^{-1}\right)=\theta_{a^{-1}}(ea)\,\theta_{a^{-1}ea}\left(kk^{-1}\right)=\theta_{a^{-1}}(ea)\,\theta_e\left(kk^{-1}\right)\\&=\theta_{a^{-1}}(ea)\,\theta_e(k)\,\theta_{ek}\left(k^{-1}\right).\end{aligned}$$

因此，根据（3），$\theta_{a^{-1}}(ea)\le\theta_e(k)$。所以，该断言得证。 □

推论7. 设 $s$ 是 $S$上的一个解。若 $a$、 $b \in S$ 满足 $a \leq b$，则 $\theta_a(b) \in G_{\theta_a(bb^{-1})}$。此外，它们满足 $\theta_a(bb^{-1}) = \theta_a(b)\theta_a(b)^{-1}$ 以及 $\theta_a(b)^{-1} = \theta_{ab}(b^{-1})$。

证明。若 $a$、 $b \in S$ 满足 $a \leq b$，则 $a \leq bb^{-1}$，且由引理6-1 可知， $\theta_a(bb^{-1}) \in \mathrm{E}(S)$。现在，

$$\theta_a(b) = \theta_a\left(bb^{-1}b\right) = \theta_a\left(bb^{-1}\right)\theta_{abb^{-1}}(b) = \theta_a\left(bb^{-1}\right)\theta_a(b)$$

并且 $\theta_a\left(bb^{-1}\right) = \theta_a(b)\theta_{ab}\left(b^{-1}\right)$。因此，由（3）可得， $\theta_a(b) \leq \theta_a(bb^{-1})$ 且 $\theta_a(bb^{-1}) \leq \theta_a(b)$，即 $\theta_a(b) \in G_{\theta_a(bb^{-1})}$。此外，由等式 $\theta_a\left(bb^{-1}\right) = \theta_a\left(b^{-1}b\right) = \theta_a\left(b^{-1}\right)\theta_{ab^{-1}}(b)$ 以及上一段可知， $\theta_a(b)$、 $\theta_a(b^{-1})$ 和 $\theta_a(bb^{-1})$ 属于同一个群，其单位元为 $\theta_a(bb^{-1})$。此外， $\theta_a(b)^{-1} = \theta_{ab}\left(b^{-1}\right)$，证毕。

□

定理8. 设 $s$ 是 $S$上的一个解。那么， $s$ 的核 $K$ 是 $S$的正规子半群。

证明. 首先，根据引理6-1.，$\mathrm{E}(S) \subseteq K$。现在，若 $k$、 $h \in K$ 和 $e \in \mathrm{E}(S)$满足$e \leq kh$，则 $e \leq k$ 和 $e \leq h$，因此， $\theta_e(k)\ \theta_e(h) \in \mathrm{E}(S)$。根据引理6-2.，我们得到 $\theta_{ek}(h) \in \mathrm{E}(S)$，从而 $\theta_e(kh) = \theta_e(k)\theta_{ek}(h) \in \mathrm{E}(S)$。

现在，若 $a \in S$、 $k \in K$和 $e \in \mathrm{E}(S)$满足 $e \leq a^{-1}ka$，则 $e \leq a$、 $e \leq a^{-1}$和$e \leq k$。于是， $\theta_e(k) \in \mathrm{E}(S)$。此外，

$$\theta_e\left(a^{-1}ka\right) = \theta_e\left(a^{-1}\right)\theta_{ea^{-1}}(k)\theta_{ea^{-1}k}(a).$$

根据引理6-1.， $\theta_e\left(a^{-1}\right) \in \mathrm{E}(S)$；根据引理6-2.， $\theta_{ea^{-1}}(k) \in \mathrm{E}(S)$。此外， $\theta_{ea^{-1}k}(a) \in \mathrm{E}(S)$。事实上，根据(P2),

$$\theta_{ea^{-1}k}(a) = \theta_{\theta_{k^{-1}a}(ea^{-1}k)}\theta_{k^{-1}aea^{-1}k}(a) = \theta_{\theta_{k^{-1}a}(ea^{-1}k)}\theta_e(a)$$

并且，由于

$$\begin{aligned}\theta_{k^{-1}a}\left(ea^{-1}k\right) &= \theta_{k^{-1}a}\left(ea^{-1}kaa^{-1}\right)\theta_{k^{-1}a}\left(ea^{-1}k\right)\theta_{k^{-1}aea^{-1}k}\left(aa^{-1}\right)\\ &= \theta_{k^{-1}a}\left(ea^{-1}k\right)\theta_e(a)\,\theta_{ea}\left(a^{-1}\right),\end{aligned}$$

由此可得，根据（3）， $\theta_{k^{-1}a}\left(ea^{-1}k\right) \leq \theta_e(a)$。因此，与前面一样，由引理6-1.可得 $\theta_{ea^{-1}k}(a) \in E(S)$。故结论得证。

□

我们以描述克利福德半群上的交换解和余交换解作为本节的结尾。容易验证，解 $s(a,b) = (ab, \theta_a(b))$ 是交换的，当且仅当，

$$acb = abc \tag{C1}$$

$$\theta_a = \theta_{ab} \tag{C2}$$

并且 $s$ 是余交换的，当且仅当，

$$a\theta_b(c) = ac \tag{CC1}$$
$$\theta_a\theta_b = \theta_b\theta_a \tag{CC2}$$

对所有 $a$、$b$、$c \in S$。

命题 9. 设 $s$ 是 $S$ 上的一个解。那么，

1. $s$ 是交换的，当且仅当 $S$ 是交换的克利福德半群，且对每个 $a \in S$，都有 $\theta_a = \gamma$，其中 $\gamma \in \mathrm{End}(S)$，并且 $\gamma^2 = \gamma$。2. $s$ 是余交换的，当且仅当对所有 $a$、$b \in S$，都有 $\theta_a(b) = b$，即 $s = \mathcal{I}$。

证明。首先，假设 $s(a,b) = (ab, \theta_a(b))$ 是一个交换解。那么，由 (C1)，取 $a = cc^{-1}$，可得 $S$ 是交换的。此外，由 (C2)，可得$\theta_a = \theta_{ab} = \theta_{ba} = \theta_b$。因此，对每个 $a \in S$，都有 $\theta_a = \gamma$；再根据解的定义，可得其余结论。逆命题可由例 1 中的 2. 直接推出。

现在，假设 $s(a,b) = (ab, \theta_a(b))$ 是一个余交换解。那么，由 (CC1)，取 $a = cc^{-1}$，可得

$$cc^{-1}\theta_b(c) = c, \quad \text{for all } b, c \in S.$$

令 $e_0 := \theta_b(c)\theta_b(c)^{-1}$，则可得 $cc^{-1} \leq e_0$。另一方面，再由 (CC1)，对于每个 $e \in \mathrm{E}(S)$，都有 $e\theta_b(c) = ec$。特别地，$\theta_b(c) = e_0\theta_b(c) = e_0c$。因此，$e_0 \leq cc^{-1}$，从而 $e_0 = cc^{-1}$。所以，我们得到 $\theta_b(c) = c$，这就是我们要证明的结论。 □

## 3. 幂等元不变解的描述

本节我们描述克利福德半群上的一类特殊解，即幂等元不变解，其中包含了 [6,定理 15] 中的结果。

定义 10. 若解 $s$ 在 $S$ 上满足恒等式，则称其为幂等元不变解，或称为 $E(S)$-不变解。

$$\theta_a(e) = \theta_a(f), \tag{6}$$

对于所有的 $a \in S$ 和 $e, f \in \mathrm{E}(S)$。

一个简单的 $\mathrm{E}(S)$-不变解的例子是 (5) 中的 $\mathcal{E}(a,b) = (ab, e)$，其中 $e \in \mathrm{E}(S)$。

例 2. 考虑交换克利福德幺半群 $S = \{1, a, b\}$，其单位元为 1，且满足 $a^2 = a$、$b^2 = a$ 和 $ab = b$。那么，除了式 (5) 中的映射 $\mathcal{E}$ 外，还存在幂等元不变解 $s(a,b) = (ab, \gamma(b))$，其中 $\gamma\colon S \to S$ 由 $\gamma(1) = \gamma(a) = a$ 和 $\gamma(b) = b$ 给出的映射；该解属于例 1 中第 2 类解。

接下来，我们说明如何从 $S$ 上的特定同余出发，在 $S$ 上构造一个幂等元不变解。回顾一下，克利福德半群 $S$ 上同余 $\rho$ 在 $\mathrm{E}(S)$ 上的限制也是 $\mathrm{E}(S)$ 上的一个同余，称为 $\rho$ 的迹，通常记作 $\tau = \operatorname{tr}\rho$（更多详情见第 5.3] 节）。

命题 11. 设 $S$ 是一个克利福德半群，$\rho$ 是 $S$ 上的同余，使得 $S/\rho$ 是一个群，而 $\mathcal{R}$ 是 $S/\rho$ 的代表元系。若 $\mu\colon S \to \mathcal{R}$ 是一个映射，满足

$$\mu(ab) = \mu(a)\,\mu(a)^{-1}\,\mu(ab), \tag{7}$$

对所有 $a$、$b \in S$ 和 $\mu(a) \in [a]_\rho$，对每个 $a \in S$，则由下式给出的映射 $s$：$S \times S \to S \times S$

$$s(a,b) = \left(ab, \mu(a)^{-1}\,\mu(ab)\right),$$

对所有 $a$、$b \in S$，都是 $S$ 上的一个 $\mathrm{E}(S)$-不变解。

证明. 设 $a$、$b$、$c \in S$。令 $\theta_a(b) := \mu(a)^{-1}\,\mu(ab)$，由 (7) 可得

$$\theta_a(b)\theta_{ab}(c) = \mu(a)^{-1}\,\mu(ab)\,\mu(ab)^{-1}\,\mu(abc) = \mu(a)^{-1}\,\mu(abc) = \theta_a(bc).$$

现在，若比较

$$\begin{aligned}\theta_{\theta_a(b)}\theta_{ab}(c) :&= \mu\left(\mu(a)^{-1}\,\mu(ab)\right)^{-1}\mu\left(\mu(a)^{-1}\,\mu(ab)\,\mu(ab)^{-1}\,\mu(abc)\right)\\ &= \mu\left(\mu(a)^{-1}\,\mu(ab)\right)^{-1}\mu\left(\mu(a)^{-1}\,\mu(abc)\right) \qquad \text{by (7)}\end{aligned}$$

以及 $\theta_b(c) := \mu(b)^{-1}\mu(bc)$，要得到所要证明的结论，只需证明

$$\mu(x)^{-1}\mu(xy) = \mu(y),$$

对所有 $x$、$y \in S$ 均成立。事实上，根据 [14, 命题 5.3.1], $\operatorname{tr}\ \rho = \mathrm{E}(S) \times \mathrm{E}(S)$，因此

$$\mu(x)^{-1}\mu(xy)\ \rho\ x^{-1}xy\ \rho\ y^{-1}yy\ \rho\ y\ \rho\ \mu(y).$$

最后，若 $a \in S$ 且 $e$，$f \in \mathrm{E}(S)$，则可得

$$\mu(ae)\ \rho\ ae\ \rho\ af\rho\ \mu(af),$$

因此 $\mu(ae) = \mu(af)$。于是，$\theta_a(e) = \mu(a)^{-1}\mu(ae) = \mu(a)^{-1}\mu(af) = \theta_a(f)$。由此，结论得证。 □

我们的目标是证明，所有幂等元不变解都可以按照命题 11 中的方式构造。首先，我们先归纳这些映射的一些有用性质。

引理 12。设 $s$ 是 $S$ 上的一个 $E(S)$-不变解。则有以下结论：

1. $\theta_e = \theta_f$,
2. $\theta_{ae} = \theta_a$,

3. $\theta_a(e) \in \mathrm{E}(S)$,
4. $\theta_e\theta_a = \theta_e$,
5. $\theta_a(b) = \theta_a(eb)$,
6. $\theta_e(a)^{-1} = \theta_{ea}\left(a^{-1}\right)$,

对于所有 $e$、$f \in \mathrm{E}(S)$ 以及 $a$、$b \in S$。

证明。令 $e, f \in \mathrm{E}(S)$ 且 $a, b \in S$。
1. 由于 $\theta_e = \theta_{\theta_f(e)}\ \theta_{fe} = \theta_{\theta_f(fe)}\ \theta_{ffe} = \theta_{fe}$，类似地 $\theta_f = \theta_{ef}$，因此可得 $\theta_f = \theta_e$。2. 我们有

$$\begin{aligned}
\theta_{ae} &= \theta_{\theta_{a^{-1}}(ae)}\theta_{aa^{-1}e} \\
&= \theta_{\theta_{a^{-1}}(a)\theta_{a^{-1}a}(e)}\theta_{aa^{-1}} && aa^{-1}e \in \mathrm{E}(S) \\
&= \theta_{\theta_{a^{-1}}(a)\theta_{a^{-1}a}(a^{-1}a)}\theta_{aa^{-1}} && \text{by (6)} \\
&= \theta_{\theta_{a^{-1}}(a)}\theta_{aa^{-1}} = \theta_a.
\end{aligned}$$

3. 根据 2.，可得 $\theta_a(e) = \theta_a(ee) = \theta_a(e)\ \theta_{ae}(e) = \theta_a(e)\ \theta_a(e)$，即 $\theta_a(e) \in \mathrm{E}(S)$。
4. 根据 2.，我们得到 $\theta_e = \theta_{\theta_a(e)}\ \theta_{ae} = \theta_e\theta_{ae} = \theta_e\theta_a$。
5. 注意，根据 2.，$\theta_a(b) = \theta_a\left(bb^{-1}b\right) = \theta_a\left(bb^{-1}\right)\theta_{abb^{-1}}(b) = \theta_a(e)\ \theta_{ae}(b) = \theta_a(eb)$。
6. 应用 1.，我们得到 $\theta_e(a)\ \theta_{ea}\left(a^{-1}\right)\theta_e(a) = \theta_e\left(aa^{-1}\right)\theta_{eaa^{-1}}(a) = \theta_e(a)$；另一方面，

$$\theta_{ea}\left(a^{-1}\right)\theta_e(a)\theta_{ea}\left(a^{-1}\right) = \theta_{ea}\left(a^{-1}\right)\theta_e\left(aa^{-1}\right) = \theta_{ea}\left(a^{-1}\right)\theta_{eaa^{-1}}\left(aa^{-1}\right) = \theta_e\left(a^{-1}\right).$$

因此，结论得证。 □

为了证明命题 11 的逆命题，我们需要回顾克利福德逆半群的同余对这一概念（见 [14, 第 155] 页）。给定一个克利福德半群$S$，若 $\mathrm{E}(S)$ 上的同余 $\tau$ 满足

$$\forall\ e, f \in \mathrm{E}(S)\quad e\ \tau\ f \implies \forall\ a \in S\quad a^{-1}ea\ \tau\ a^{-1}fa.$$

若 $K$ 是 $S$的正规子半群，则称有序对 $(K, \tau)$ 是 $S$的同余对，若

$$\forall\ a \in S,\ e \in \mathrm{E}(S)\quad ae \in K\ \text{ and }\ (e, a^{-1}a) \in \tau \implies a \in K.$$

给定同余 $\rho$，用 $\operatorname{Ker}\rho$ 表示所有幂等元 $\rho$-类的并集，其性质完全可以用 $\operatorname{Ker}\rho$ 和 $\operatorname{tr}\rho$ 来描述。

定理 13（参见 [14] 中的定理 5.3.3）。设 $S$ 是一个逆半群。若 $\rho$ 是 $S$ 上的同余，则 $(\operatorname{Ker}\rho, \operatorname{tr}\rho)$ 是一个同余对。反之，若 $(K, \tau)$ 是一个同余对，则

$$\rho_{(K,\tau)} = \{(a, b) \in S \times S \mid \left(a^{-1}a, b^{-1}b\right) \in \tau,\ ab^{-1} \in K\}$$

是 $S$ 上的一个同余。此外，$\operatorname{Ker}\rho_{(K,\tau)} = K$、$\operatorname{tr}\rho_{(K,\tau)} = \tau$ 和 $\rho_{(\operatorname{Ker}\rho, \operatorname{tr}\rho)} = \rho$。10

引理 14. 设 $s$ 是 $S$ 上的一个 $\mathrm{E}(S)$-不变解，$\tau = \mathrm{E}(S) \times \mathrm{E}(S)$，且 $K$ 是 $s$ 的核。那么，$(K, \tau)$ 是 $S$ 的一个同余对。

证明。首先，我们注意到 $s$ 的核 $K$ 可以写为

$$K = \{a \in S \mid \forall\, e \in \mathrm{E}(S) \quad \theta_e(a) \in \mathrm{E}(S)\}.$$

现在，令 $a \in S$ 和 $e \in \mathrm{E}(S)$ 满足 $ae \in K$。为得到所述结论，只需证明：若 $f \in \mathrm{E}(S)$，则 $\theta_f(a) \in \mathrm{E}(S)$，即 $a \in K$。由引理 12 中的 1. 和 5.，可得

$$\theta_f(a) = \theta_{ef}(a) = \theta_{ef}(ae) \in \mathrm{E}(S),$$

这就是我们要证明的结论。 □

以下结果完整刻画了幂等元不变解。

定理 15。设 $s$ 是 $S$ 上的一个 $\mathrm{E}(S)$-不变解。那么，对于每个 $e \in \mathrm{E}(S)$，映射 $\theta_e$ 满足 (7)，并且

$$\theta_a(b) = \theta_e(a)^{-1}\theta_e(ab),$$

对于所有 $a$、$b \in S$ 以及 $e \in \mathrm{E}(S)$。此外，存在同余对 $(K, \tau)$，其中 $K$ 是 $S$ 的核，且 $\tau = \mathrm{E}(S) \times \mathrm{E}(S)$，使得 $\theta_e(S)$ 是群 $S/\rho_{(K,\tau)}$ 的代表元系，并且对于所有 $e \in \mathrm{E}(S)$ 和 $a \in S$，有 $(\theta_e(a)\ a) \in \rho_{(K,\tau)}$。

证明。首先，（7）成立，因为

$$\theta_e(a)^{-1}\theta_e(a)\theta_e(ab) = \theta_e(a)^{-1}\theta_e(a)\theta_e(a)\theta_{ea}(b) = \theta_e(a)\theta_{ea}(b) = \theta_e(ab),$$

对于所有 $a$、$b \in S$ 和 $e \in \mathrm{E}(S)$。此外，

$$\begin{aligned}
\theta_a(b) &= \theta_a\left(a^{-1}ab\right) && \text{by Lemma 12-5.}\\
&= \theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_{aa^{-1}}(ab)\\
&= \theta_{aa^{-1}}(a)^{-1}\theta_{aa^{-1}}(ab), && \text{by Proposition 4-1.}\\
&= \theta_e(a)^{-1}\theta_e(ab) && \text{by Lemma 12-1.}
\end{aligned}$$

对所有的 $a$、$b \in S$ 和 $e \in \mathrm{E}(S)$ 均成立。此外，由引理 14 可知，$(K, \tau)$ 是一个同余对，因此由定理 13，$\rho_{(K,\tau)}$ 是一个同余，使得 $\tau = \mathrm{tr}^{\rho_{(K,\tau)}}$。另外，由 [14,命题 5.3.1]，，由于 $\mathrm{tr}^{\rho_{(K,\tau)}} = \mathrm{E}(S) \times \mathrm{E}(S)$，$S/\rho_{(K,\tau)}$ 是一个群。现在，设 $a \in S$ 且 $e \in \mathrm{E}(S)$，我们来验证 $(\theta_e(a)\ \ a) \in \rho_{(K,\tau)}$，只需证明 $a^{-1}\theta_e(a) \in K$，即 $\theta_e\left(a^{-1}\theta_e(a)\right) \in \mathrm{E}(S)$。为此，注意到

$$\begin{aligned}
\theta_e\left(a^{-1}\theta_e(a)\right) &= \theta_e\theta_a\left(a^{-1}\theta_e(a)\right) && \text{by Lemma 12-4.}\\
&= \theta_e\left(\theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_{aa^{-1}}\theta_e(a)\right)\\
&= \theta_e\left(\theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_{aa^{-1}}(a)\right) && \text{by Lemma 12-4.}\\
&= \theta_e\left(\theta_a\left(a^{-1}\right)\theta_a\left(a^{-1}\right)^{-1}\right), && \text{by Proposition 4-1.}
\end{aligned}$$

因此，由引理 12-3.，$\theta_e\left(a^{-1}\theta_e(a)\right) \in \mathrm{E}(S)$。现在，我们来验证 $\theta_e(S)$ 是 $S/\rho_{(K,\tau)}$ 的一个代表元系。显然，$\theta_e(S) \neq \emptyset$，因为 $\theta_e(e) \in \mathrm{E}(S)$。此外，若 $(\theta_e(b)\ a) \in \rho_{(K,\tau)}$，则有 $a\,\rho_{(K,\tau)}\,b$，因为 $(\theta_e(a)\ a) \in \rho_{(K,\tau)}$。因此，$ab^{-1} \in K$，于是 $\theta_e\left(ab^{-1}\right) \in \mathrm{E}(S)$。这意味着

$$\begin{aligned}
\theta_e(b) &= \theta_e\left(bb^{-1}\right)\theta_{ebb^{-1}}(b) \\
&= \theta_e\left(bb^{-1}\right)\theta_{\theta_e(ab^{-1})}(b) && \text{by Lemma 12-1.} \\
&= \theta_e\theta_e\left(ab^{-1}\right)\theta_{\theta_e(ab^{-1})}\theta_{eab^{-1}}(b) && \text{by (6) and Lemma 12-4.} \\
&= \theta_e\left(ab^{-1}\right)\theta_{ab^{-1}}(b) && \text{by Lemma 12-4.} \\
&= \theta_e\left(ab^{-1}\right)\theta_{eab^{-1}}(b) && \text{by Lemma 12-2. and (P2)} \\
&= \theta_e\left(ab^{-1}b\right) \\
&= \theta_e(a). && \text{by Lemma 12-5.}
\end{aligned}$$

因此，结论成立。 □

命题 16. 设 $s(a,b) = (ab, \theta_a(b))$ 和 $t(u,v) = (uv, \theta_u(v))$ 是 $S$ 上的两个 $\mathrm{E}(S)$-不变解。那么，$s$ 和 $t$ 同构，当且仅当存在一个 $S$ 的同构$\psi$，使得 $\psi\theta_e = \eta_e\psi$，也就是说，对于每个 $e \in \mathrm{E}(S)$，$\psi$ 将代表元系 $\theta_e(S)$ 映到另一个代表元系 $\eta_e(\psi(S))$。

证明. 具体展开条件 (4)，可得

$$\psi\left(\theta_e(a)^{-1}\theta_e(ab)\right) = \eta_e\left(\psi(a)\right)^{-1}\eta_e\left(\psi(ab)\right),$$

对于所有 $a$、$b \in S$ 和 $e \in \mathrm{E}(S)$。应用引理 12-6. 并取 $b = a^{-1}$，得到$\psi\left(\theta_e(a)^{-1}\right) = \eta_e\left(\psi(a)\right)^{-1}$。因此，结论成立。 □

## 4. 幂等元固定解的构造

本节讨论一类不同于幂等元不变解的解，我们称之为幂等元固定解。鉴于克利福德半群可以看作满足某些性质的群之并，自然会考虑能否根据其各个群上的解，在克利福德半群上构造一个整体解。关于这一点，对于幂等元固定解，我们成功构造出一族解，其构造从各个群上给定的解出发。

定义 17. 设 $s$ 是 $S$上的一个解。那么，$s$ 是幂等元固定的，或称 $\mathrm{E}(S)$-固定的，如果

$$\theta_a(e) = e, \tag{8}$$

对于所有 $a \in S$ 和 $e \in \mathrm{E}(S)$。

式 (5) 中的映射 $\mathcal{I}(a,b)=(ab,b)$ 和 $\mathcal{F}(a,b)=\left(ab、\ bb^{-1}\right)$ 是 $S$ 上的幂等元固定解。显然，如果 $S$ 是一个不是群的克利福德，即 $|\mathrm{E}(S)|>1$，那么 $S$ 上的解不可能同时是幂等元固定解和幂等元不变解。

接下来的结果包含了幂等元固定解的若干性质。

命题18. 设 $s$ 是 $S$上的一个幂等元固定解。那么，对于所有$a\in S$ 和 $e\in$E($S$)，有 $\theta_e=\theta_e\theta_{ae}$。特别地， $\theta_e$ 是一个幂等映射。

证明. 由$\theta_e=\theta_{\theta_a(e)}\theta_{ae}=\theta_e\theta_{ae}$可知，对于所有 $a\in S$ 和 $e\in$ E($S$)，结论成立。取 $a=e$，可得映射 $\theta_e$ 是幂等的。 □

命题19. 设 $s$ 是 $S$上的一个幂等元固定解。则以下结论成立:

1. $\theta_a(b)=bb^{-1}\theta_a(b)$,
2. $\theta_a(b)\,\theta_a(b)^{-1}=bb^{-1}$,
3. $\theta_a(b)=\theta_{abb^{-1}}(b)$,

对于所有 $a$、 $b\in S$。

证明。令 $a,b\in S$。于是， $\theta_a(b)=\theta_a(b)\ \theta_{ab}\left(b^{-1}b\right)=\theta_a(b)\,bb^{-1}$。此外，我们有 $\theta_a(b)^{-1}=\theta_{ab}\left(b^{-1}\right)$，因为

$$\theta_a(b)\,\theta_{ab}\left(b^{-1}\right)\theta_a(b)=\theta_a\left(bb^{-1}\right)\theta_a(b)=bb^{-1}\theta_a(b)=\theta_a(b)$$

and

$$\begin{aligned}\theta_{ab}\left(b^{-1}\right)\theta_a(b)\,\theta_{ab}\left(b^{-1}\right)&=\theta_{ab}\left(b^{-1}\right)\theta_a\left(bb^{-1}\right)=b^{-1}b\,\theta_{ab}\left(b^{-1}\right)=\theta_{ab}\left(bb^{-1}\right)\theta_{abb^{-1}b}\left(b^{-1}\right)\\&=\theta_{ab}\left(b^{-1}\right).\end{aligned}$$

由此可得 $\theta_a(b)\,\theta_a(b)^{-1}=\theta_a(b)\,\theta_{ab}\left(b^{-1}\right)=\theta_a\left(bb^{-1}\right)=bb^{-1}$. 最后，根据 1.，我们有

$$\theta_{abb^{-1}}(b)=bb^{-1}\theta_{abb^{-1}}(b)=\theta_a\left(bb^{-1}\right)\theta_{abb^{-1}}(b)=\theta_a\left(bb^{-1}b\right)=\theta_a(b)$$

至此证明完毕。 □

根据命题19-1.，如果 $s$ 是克利福德 $S$上的幂等元固定解，那么对于所有 $a\in S$，$S$ 中的每个群都在 $\theta_a$作用下保持不变。因此，鉴于群上的解已有良好描述，从$S$中每个群上的解构造这类解的方法便很有意义。为此，克利福德半群的内部结构表明，必须考虑与 $S$ 中各群上的不同解相关的条件。例如，命题19-3.表明，对于所有 $e,f\in$E($S$)，在 $e\geq f$成立时， $\theta_a(b)=\theta_{\varphi_{e,\ f}(a)}(b)$，且对于所有 $a\in G_e$, $b\in G_f$均成立。基于这些观察，我们给出以下一族幂等元固定解。

定理20. 设对于每个 $e \in \mathrm{E}(S)$， $s^{[e]}(a,b) = \left(ab,\, \theta_a^{[e]}(b)\right)$ 是 $G_e$上的一个解。此外，对于所有 $e, f \in \mathrm{E}(S)$，设 $\epsilon_{e,\ f}\colon G_e \to G_f$是映射，且满足 $\epsilon_{e,\ f} = \varphi_{e,\ f}$，当且仅当 $e \geq f$。若满足以下条件

$$\theta^{[h]}_{\epsilon_{ef,h}(ab)} = \theta^{[h]}_{\epsilon_{e,h}(a)\epsilon_{f,h}(b)}, \tag{9}$$

$$\epsilon_{f,h}\theta^{[f]}_{\epsilon_{e,f}(a)}(b) = \theta^{[h]}_{\epsilon_{e,h}(a)}\epsilon_{f,h}(b), \tag{10}$$

对所有 $e, f, h \in \mathrm{E}(S)$ 以及 $a \in G_e$和 $b \in G_f$，令

$$\theta_a(b) := \theta^{[f]}_{\epsilon_{e,f}(a)}(b),$$

对所有 $a \in G_e$和 $b \in G_f$。那么，由 $s(a,b) = (ab, \theta_a(b))$ 给出的映射 $s\colon S \times S \to S \times S$ 是 $S$ 上的一个幂等元固定解。

证明。设 $e, f, h \in \mathrm{E}(S)$、 $a \in G_e$、 $b \in G_f$ 和 $c \in G_h$。那么，由于 $s^{[fh]}$ 是 $G_{fh}$ 上的一个解，我们得到

$$\begin{aligned}\theta_a(bc) &= \theta_a\left(\varphi_{f,fh}(b)\,\varphi_{h,fh}(c)\right) = \theta^{[fh]}_{\epsilon_{e,fh}(a)}\left(\varphi_{f,fh}(b)\,\varphi_{h,fh}(c)\right)\\ &= \theta^{[fh]}_{\epsilon_{e,fh}(a)}\varphi_{f,fh}(b)\,\theta^{[fh]}_{\epsilon_{e,fh}(a)\varphi_{f,fh}(b)}\varphi_{f,fh}(c).\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\theta_a(b)\,\theta_{ab}(c) = \theta^{[f]}_{\epsilon_{e,f}(a)}(b)\,\theta^{[h]}_{\epsilon_{ef,h}(ab)}(c) = \varphi_{f,fh}\theta^{[f]}_{\epsilon_{e,f}(a)}(b)\,\varphi_{h,fh}\theta^{[h]}_{\epsilon_{ef,h}(ab)}(c).$$

因此，注意到由 (9) 可得，

$$\theta^{[fh]}_{\epsilon_{e,fh}(a)}\varphi_{f,fh}(b) = \theta^{[fh]}_{\epsilon_{e,fh}(a)}\epsilon_{f,fh}(b) = \epsilon_{f,fh}\theta^{[f]}_{\epsilon_{e,f}(a)}(b) = \varphi_{f,fh}\theta^{[f]}_{\epsilon_{e,f}(a)}(b)$$

and

$$\begin{aligned}\theta^{[fh]}_{\epsilon_{e,fh}(a)\varphi_{f,fh}(b)}\varphi_{f,fh}(c) &= \theta^{[fh]}_{\epsilon_{e,fh}(a)\epsilon_{f,fh}(b)}\epsilon_{f,fh}(c)\\ &= \theta^{[fh]}_{\epsilon_{ef,fh}(ab)}\epsilon_{f,fh}(c) && \text{by (9)}\\ &= \epsilon_{h,fh}\theta^{[h]}_{\epsilon_{ef,h}(ab)}(c) && \text{by (10)}\\ &= \varphi_{h,fh}\theta^{[h]}_{\epsilon_{ef,h}(ab)}(c),\end{aligned}$$

由此可得，(P1) 得以满足。此外，

$$\begin{aligned}\theta_{\theta_a(b)}\theta_{ab}(c) &= \theta_{\theta^{[f]}_{\epsilon_{e,f}(a)}(b)}\theta^{[h]}_{\epsilon_{ef,h}(ab)}(c)\\ &= \theta^{[h]}_{\epsilon_{f,h}\theta^{[f]}_{\epsilon_{e,f}(a)}(b)}\theta^{[h]}_{\epsilon_{ef,h}(ab)}(c)\\ &= \theta^{[h]}_{\theta^{[h]}_{\epsilon_{e,h}(a)}\epsilon_{f,h}(b)}\theta^{[h]}_{\epsilon_{e,h}(a)\epsilon_{f,h}(b)}(c) && \text{by (10) and (9)}\\ &= \theta^{[h]}_{\epsilon_{f,h}(b)}(c) && s^{[h]} \text{ is a solution on } G_h\\ &= \theta_b(c),\end{aligned}$$

因此，(P2) 成立。最后，由 $[6, \text{引理 11-1.}]$，$\theta_a(f) = \theta^{[f]}_{\epsilon_e,\ f(a)}(f) = f$因此 $s$是幂等固定的。 □

以下是在 $S$ 上的一类幂等元固定解，可通过定理20构造，其中包括解 $\mathcal{I}(a,b) = (ab,b)$ 和 $\mathcal{F}(a,b) = \left(ab, bb^{-1}\right)$（见（5））。

例3. 设 $s^{[e]}(a,b) = \left(ab, \gamma^{[e]}(b)\right)$ 是 例 1 的 2. 中 $G_e$ 上的解，其中 $\gamma^{[e]}$ 是 $G_e$ 的幂等自同态，对每个 $e \in \mathrm{E}(S)$ 均成立。然后，选取映射 $\epsilon_{e,\ f}\colon G_e \to G_f$，对所有满足 $\varphi_{e,\ f}\gamma^{[e]} = \gamma^{[f]}\varphi_{e,\ f}$ 的 $e, f \in \mathrm{E}(S)$，若 $e \geq f$ 且 $\epsilon_{e,\ f}(x) := f$，则其他情况下，条件（9）和（10）均成立。因此，映射

$$s(a,b) = \left(ab, \gamma^{[f]}(b)\right),$$

对于所有的 $a \in G_e$ 和 $b \in G_f$，都是 $S$上的一个解。

根据定理20，以下构造给出了克利福德半群中一类幂等元固定解；其中，当 $f \leq e$ 时，对于所有 $e, f \in \mathrm{E}(S)$，每个群 $G_f$ 都是 $G_e$的一个满同态像。

推论21. 设 $S$ 是一个克利福德半群，使得 $\varphi_{e,f}$ 是满同态；对于所有满足 $f \leq e$的 $e, f \in \mathrm{E}(S)$，设 $s^{[e]}(a,b) = \left(ab, \theta^{[e]}_a(b)\right)$ 是 $G_e$上的一个解，并令$N_e := \prod \ker \varphi_{e,f}$，其中每个 $e \in \mathrm{E}(S)$。假设$f \leq e$

1. $\theta^{[e]}_a = \theta^{[e]}_b$，对于所有 $e \in \mathrm{E}(S)$以及所有满足 $aN_e = bN_e$的 $a, b \in G_e$，2. $\varphi_{e,\ f}\theta^{[e]}_a(b) = \theta^{[f]}_{\varphi_e,\ f(a)}\varphi_{e,f}(b)$，对于所有满足 $f \leq e$的 $e, f \in \mathrm{E}(S)$以及所有 $a, b \in G_e$。

设 $\theta_a(b) := \theta^{[f]}_{b'}(b)$，其中 $b' \in G_f$满足 $\varphi_{f,ef}(b) = \varphi_{e,ef}(a)$，对所有 $e, f \in \mathrm{E}(S)$ 以及所有 $a \in G_e$, $b \in G_f$ 均成立。则由 $s(a,b) = (ab, \theta_a(b))$ 给出的映射 $s\colon S \times S \to S \times S$ 是 $S$ 上的幂等元固定解。

证明。首先，根据 1.，注意到对于每个 $a \in S$，$\theta_a$ 定义良好。现在，令 $e, f \in \mathrm{E}(S)$，并考虑 $T_{e,f}$作为 $G_f$ 中 $\ker \varphi_{f,ef}$ 的代表元系。由于 $\varphi_{f,ef}$是满同态，对于每个 $a \in G_e$，我们可以定义映射 $\epsilon_{e,f}(a) := x \in T_{e,f}$，其中$\varphi_{e,ef}(a) = \varphi_{f,ef}(x)$。特别地，在 $f \leq e$ 的情况下，可得 $\epsilon_{e,f} = \varphi_{e,f}$。因此，对于所有 $e, f \in \mathrm{E}(S)$ 及所有 $a \in G_e$, $b \in G_f$，都有 $\theta_a(b) = \theta^{[f]}_{\epsilon_e,f(a)}(b)$。注意，根据 1.，最后一个等式与 $T_{e,f}$ 的选取无关。此外，应用同态 $\varphi_{e,f}$ 的定理 1 中的性质，对于所有满足 $f \leq e$ 的 $e, f \in \mathrm{E}(S)$，结合这些假设，直接计算即可验证定理20中的条件 (9) 和 (10) 得到满足。

□

我们注意到，幂等元固定解 $s$ 的核可改写为

$$K = \{a \in S \mid \forall e \in \mathrm{E}(S),\, e \le a,\, \theta_e(a) = aa^{-1}\}.$$

记 $K_e$ 为 $G_e$ 上每个解 $s^{[e]}$ 的核，即正规子群

$$K_e = \{a \in G_e \mid \theta_e^{[e]}(a) = e\}.$$

$G_e$，我们得到以下结果，它说明定理20中的先前构造并非一种描述。

命题22. 设 $s$ 是 上的一个幂等固定解， $S$ 其构造如定理20所示，并假设 $\epsilon_{e,f}(e) = f$ 对所有 $e$， $f \in \mathrm{E}(S)$ 均满足 $e \le f$。假设每个$G_e$ 都存在一个解 $s^{[e]}$，并令 $K_e$ 为每个映射 $s^{[e]}$的核，其中 $e \in \mathrm{E}(S)$。那么， $K = \bigcup_{e \in \mathrm{E}(S)} K_e$。

证明。事实上，设 $a \in K \cap G_e$。于是，我们得到 $e = aa^{-1} = \theta_e(a) = \theta_e^{[e]}(a)$。因此， $a \in K_e$。另一方面，若 $a \in K_e$ 且 $f \in \mathrm{E}(S)$ 满足 $f \le a$，则由于 $\epsilon_{e,f}(e) = f$，我们得到 $\theta_f(a) = \theta_{\epsilon_f, e(f)}^{[e]}(a) = \theta_e^{[e]}(a) = e$，即 $a \in K$。 □

问题1. 完整描述所有幂等元固定解。

最后，我们注意到，并非 $S$ 上的每个解都属于幂等元不变解或幂等元固定解。事实上，即使在阶数较低的克利福德半群中，也可以构造出这样的例子。

例4. 设 $S = \{1, a, b\}$ 是例 2 中的克利福德幺半群。那么，这些映射

$$\theta_1(x) = a, \quad \text{for every } x \in S,$$
$$\theta_a = \theta_b : S \to S, \quad \text{given by } \theta_a(1) = 1,\ \theta_a(a) = \theta_a(b) = a$$

给出了 $S$ 上的一个解，它既不是幂等元不变解，也不是幂等元固定解。

问题2. 研究克利福德半群上的其他类别的解，例如例4中的映射。

参考文献

[1] S. Baaj, G. Skandalis，交换乘法酉元及C*-代数交叉积的对偶性，《数学年刊》26 (4) (1993) 425–488。网址 http://eudml.org/doc/82346[2] S. Baaj, G. Skandalis，《五边形变换》，巴黎科学院报告 S´系列 I 数学 327 (7) (1998) 623–628。网址 https://doi.org/10.1016/S0764-4442(99)80090-1[3] S. Baaj, G. Skandalis，交换乘法酉元，巴黎科学院数学报告 336 (4) (2003) 299–304。网址 https://doi.org/10.1016/S1631-073X(03)00034-7[4] R. J. Baxter，八顶点格点模型的配分函数，《物理年刊》70 (1972) 193–228。网址 https://doi.org/10.1016/0003-4916(72)90335-1 [5] L. C. Biedenharn, J. D. Louck，量子物理中的角动量，数学及其应用百科全书第8卷，Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981，理论与应用，Peter A. Carruthers作序。[6] F. Catino, M. Mazzotta, M. M. Miccoli，群上的五边形方程集合论解，Comm. Algebra 48 (1) (2020) 83–92。网址 https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1632331[7] F. Catino, M. Mazzotta, P. Stefanelli，半群上的Yang–Baxter方程与五边形方程集合论解，《半群论坛》100 (3) (2020) 1–26。网址 https://doi.org/10.1007/s00233-020-10100-x[8] A. H. Clifford, G. B. Preston，《半群代数理论》第一卷，《数学调查》第7号，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1961年。[9] I. Colazzo, E. Jespers, L. Kubat，五边形方程的集合论解，《数学物理通讯》380 (2) (2020) 1003–1024。网址 https://doi.org/10.1007/s00220-020-03862-6[10] A. Dimakis, F. M¨uller-Hoissen，《单形方程与多边形方程》，SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 11 (2015) 论文042，49页。网址 https://doi.org/10.3842/SIGMA.2015.042[11] V. G. Drinfel′ d，准霍普夫代数与Knizhnik-Zamolodchikov方程，载于：《现代量子场论问题》（阿卢什塔，1989），《物理研究报告》，施普林格，柏林，1989年，第1–13页。[12] V. G. Drinfel′ d，关于量子群理论中的若干未解问题，载于：《量子群》（列宁格勒，1990），《数学讲义》第1510卷，施普林格，柏林，1992年，第1–8页。网址 https://doi.org/10.1007/BFb0101175[13] H. Furusho，五边形方程与六边形方程，《数学年刊》（第2辑）171 (1) (2010) 545–556。网址 https://doi.org/10.4007/annals.2010.171.545 [14] J. M. Howie，《半群理论基础》，伦敦数学学会专著新系列第12卷，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1995年，牛津科学出版物。[15] L. Jiang, M. Liu，关于五边形方程的集合论解，《中国高等数学研究》34 (3) (2005) 331–337。[16] R. M. Kashaev，海森堡双代数与五边形关系，Algebra i Analiz 8 (4) (1996) 63–74。[17] R. M. Kashaev，关于二重对数的矩阵推广，《理论数学物理》118 (3) (1999) 398–404。网址 https://doi.org/10.1007/BF02557327[18] R. M. Kashaev, N. Reshetikhin，对称可分解群与五边形方程的自理论解，载于：《量子群》，《当代数学》第433卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007年，第267–279页。网址 https://doi.org/10.1090/conm/433/08330[19] R. M. Kashaev, S. M. Sergeev，关于五边形、十项式及四面体关系，《数学物理通讯》195 (2) (1998) 309–319。网址 https://doi.org/10.1007/s0022000503917

[20] M. V. Lawson, 《逆半群》, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998年, 部分对称性理论。URL https://doi.org/10.1142/9789812816689[21] J.-M. Maillet, 《关于五边形方程和四面体方程》, Algebra i Analiz 6 (2) (1994) 206–214。[22] T. Masuda, Y. Nakagami, 《量子群对偶性的冯·诺伊曼代数框架》, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 30 (5) (1994) 799–850。URL https://doi.org/10.2977/prims/1195165585[23]M. Mazzotta, 《五边形方程的幂等集合论解》, arxiv预印本 arXiv:2301.01643。URL https://arxiv.org/abs/2301.01643[24] G. Militaru, 《Hopf模范畴与Hopf方程》, Comm. Algebra 26 (10) (1998) 3071–3097。URL https://doi.org/10.1080/00927879808826329[25]G. Militaru, 《海森堡双代数、五边形方程、有限维Hopf代数的结构与分类》, J. London Math. Soc. (2) 69 (1) (2004) 44–64。URL https://doi.org/10.1112/S0024610703004897[26] R. Street, 《幺半范畴中的融合算子与余循环体》, Appl. Categ. Structures 6 (2) (1998) 177–191。URL https://doi.org/10.1023/A:1008655911796[27] A. Van Daele, S. Van Keer, 《Yang-Baxter方程与五边形方程》, Compositio Math. 91 (2) (1994) 201–221。URL http://www.numdam.org/item?id=CM_1994__91_2_201_0[28] S. L. Woronowicz, 《从乘法酉元到量子群》, Internat. J. Math. 7 (1) (1996) 127–149。URL https://doi.org/10.1142/S0129167X96000086[29] C. N. Yang, 《一维排斥性δ函数相互作用多体问题的一些精确结果》, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1312–1315。URL https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1312[30] S. Zakrzewski, 《泊松李群与五角变换》, Lett. Math. Phys. 24 (1) (1992) 13–19。URL https://doi.org/10.1007/BF00429998[31] A. B. Zamolodchikov, 《三维空间中的四面体方程与可积系统》, Zh. Eksper. Teoret. Fiz. 79 (2) (1980年) 641–664。