arXiv:2301.09945v2 [math.MG] 5 Feb 2023

将中心概念视为等变映射，并证明等面单纯形的中心猜想的一个类比命题

L. Felipe Prieto-Martínez*

2023年2月7日

摘要

多位作者指出，将几何学中出现的不同中心概念（点集的质心、三角形的内心、圆锥曲线的中心，以及其他许多中心）理解为函数十分方便。最一般的做法是将中心定义为 G-空间之间的等变映射。本文证明，在一定假设下，对于任意两个 G-空间$\mathcal{A}\,\mathcal{X}$，对每个 $V \in \mathcal{A}$ 以及每个被 V 的对称群固定的点 $P \in \mathcal{X}$，都存在某个等变映射 $\mathfrak{Z}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{X}$，使得 $\mathfrak{Z}(V) = P$。由此，我们证明了一个类比命题（适用于不一定连续的中心），即 A. L. Edmonds 提出的 *center conjecture for equifacetal simplices*。

关键词：几何中心、等变映射、单形、对称群。

1 引言

“中心”一词在许多语境中有着不同的含义，在应用数学中也备受关注（例如参见 [7, 14]）。

在 20 世纪 90 年代发表的一系列论文中，C. Kimberling 说明了将三角形中心（包括质心、内心、垂心、外心等）定义为从三角形集合 $\mathcal{A}$ 到平面 $\mathcal{X}$ 的函数，并要求这些函数在相似变换下保持不变，这种做法十分便利（例如参见 [8, 9]）。这种方法使他得以完成许多工作，其中包括在 [10]列出所有已知的三角形中心。许多作者在其他语境中也采用了与 Kimberling 类似的近似方法。例如，我们可以在 [4, 12, 13] 找到 n边形中心的定义，也可以在 [3, 12]找到关于一组 n点的中心的类似定义。因此，在本文第 2 节中，我们将中心的概念推广到最大限度，以便用空间之间的等变映射来给出一个一般性的形式定义。

在经典三角形中心理论中，我们可以得到以下结果：

定理 1 令 $\mathcal{A}$ 表示平面中所有三角形的集合。对于每个三角形 $V \in \mathcal{A}$，我们有：

(a) V 的内心与垂心重合，当且仅当 V 是等边的（证明见 [6]）。(b) 设 S 为固定 V的全等变换群。那么，对于每个被 S固定的点 $P \in \mathbb{R}^2$，都存在一个三角形中心 $\mathfrak{Z}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$，使得 $\mathfrak{Z}(V) = P$（等价命题的证明见 [4] ）。

*De应用数学系，马德里理工大学（西班牙），luisfelipe.prieto@upm .es

参考文献中曾有多种尝试，旨在推广这一条定理（或其中一部分）。例如，

- 在 [1] 中，我们可以找到关于四边形的类似结果，
- 在 [12] 中，这一结果有一个推广，其中 $\mathcal{A}$ 是由 n 个点组成的集合族，而 $\mathcal{A}$是 n 边形的集合，
- 在 [3] 中，A. L. Edmonds 提出了（并证明了维数不超过 6 时成立）他所称的等面单纯形中心猜想。该猜想是命题 (b) 在定理 1 中针对单纯形的推广。

本文的主要定理（定理 4）见第 3 节，它将定理 1 中的命题 (b) 推广到了等变映射。该定理指出，若两个 G-空间 $\mathcal{A}$、$\mathcal{X}$ 满足某些相容条件，则对于每个 $V \in \mathcal{A}$，以及每个被 V 的对称群固定的点 $P \in \mathcal{X}$，都存在某个中心 $\mathfrak{Z}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{X}$，使得 $\mathfrak{Z}(V) = P$。

因此 根据定理 4，我们证明了等面单形的中心猜想的一个类似命题 *es* 在第 4 节（ 定理 5），针对不一定连续的中心。

2 中心的定义及若干例子

设 $(G, \cdot)$ 是一个群，其单位元记作 e。集合 $\mathcal{X}$ 上的一个（左） G-作用是指函数 $\alpha\colon G \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$，我们将记作 $g \cdot x$，或简记为 gx，而不写作 $\alpha(g, x)$，并满足

$$\forall x \in \mathcal{X},\ e \cdot x = x \quad \text{and} \quad \forall g, h \in G,\ \forall x \in \mathcal{X},\ g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$$

一个 G-集是一个带有 G 作用的集合 $\mathcal{X}$。设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{X}$ 是两个 G-集。等变映射是一个函数 $\mathfrak{Z}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{X}$，它与 G 作用相容，即 $\forall g \in G$、$\forall V \in \mathcal{A}$、$\mathfrak{Z}(g \cdot V) = g \cdot \mathfrak{Z}(V)$。

从相关文献来看，几何中心概念与一般的等变映射概念似乎有所不同。设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{X}$ 是两个 G-集。若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{X}$ 的子集族，我们称 G 在 $\mathcal{A}$ 上的作用是逐点的，若其满足

$$g \cdot S = \{g \cdot x : x \in S\}.$$

定义 2 中心是一个等变映射 $\mathfrak{Z}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{X}$，其中 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{X}$ 的子集族，且 G 在 $\mathcal{A}$ 中的作用是逐点的。

注 在讨论中心时，我们可能会有两处记号上的不严谨。首先，我们允许 $\mathcal{A}$ 是具有某些额外结构的 $\mathcal{X}$ 的子集族，例如序列、多边形或图。本文中，这种不严谨之处仅出现在本节的例（ IV ）中。其次，对于某些 $V \in \mathcal{A}$ 以及某个中心 $\mathfrak{Z}\colon A \to X$，我们用“ V 的中心”来指代 $\mathfrak{Z}(V)$。

下面我们将介绍一些在几何学中出现的中心示例：

（I）对我们而言，等变映射最重要的例子是三角形中心（为保持一致，我们不采用 C. Kimberling 的定义）。在这种情况下，集合$\mathcal{X}$ 是 $\mathbb{R}^2$，而 $\mathcal{A}$ 是由 $\mathcal{X}$ 中三个元素组成的集合族（表示顶点）。 $\mathcal{A}$ 中的元素称为三角形。 G 是 $\mathcal{X}$ 上的相似变换群，带有通常的作用，而每个 $g \in G$ 在 $\mathcal{A}$ 上的作用为

$$g\{A, B, C\} = \{gA, gB, gC\}.$$

最简单的三角形中心例子是质心 $\mathfrak{C}$： $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^2$ 由下式给出

$$\mathfrak{C}(\{A, B, C\}) = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

请注意，对于某些中心，其定义域可能并非 $\mathbb{R}^2$ 中所有三点集合构成的集合族：外心（按通常定义，它是一个将每个三角形映射到其各边垂直平分线交点的函数）在三个顶点共线时没有定义。

(II) 质心 $\mathfrak{C}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$ 可以针对许多其他的 $\mathcal{X}$、$\mathcal{A}$ 选择来定义。例如，当 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ 和 $\mathcal{A}$ 分别为 $\mathcal{X}$ 中所有有限集合构成的集合族时，也可以这样定义，此时其表达式为

$$\mathfrak{C}(\{P_0, \ldots, P_n\}) = \frac{1}{n+1}P_0 + \ldots + \frac{1}{n+1}P_n. \tag{2.1}$$

(III) 设 $\mathcal{X}$ 为实射影平面， $\mathcal{A}$ 为射影平面中圆锥曲线（不包括退化情形）的集合， G 为 $\mathcal{X}$ 的射影变换集合（在 $\mathcal{X}$ 上具有自然作用）。函数 $\mathfrak{Z}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$ 将每条圆锥曲线映射到所谓的圆锥曲线中心（无穷远直线的极点），它也是上述意义下的一个中心。

(IV) 令 $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$。对于 $n \geq 4$， n边形不仅仅是由 n 个点组成的集合，而是由 n个点构成的集合 V，这些点称为顶点，并带有邻接关系：每个顶点恰好与两个顶点相邻；并且对于每个 P_1、$P_k \in V$，对于 $2 \leq k \leq n$，恰好有两条链 P_1、P_2、.....、P_k，其中所有元素互不相同，且每对相邻的顶点都彼此相邻。 [4, 12, 13]中可以找到一些多边形中心的例子。在这种情况下，对应于上文注释中解释的第一种记号滥用，两个不同的多边形可能具有相同的顶点，而给定的中心可能为它们指定不同的点。

3 等变映射的一个结果

设 $\mathcal{X}$ 是一个 G-集合。若 $P \in \mathcal{X}$ 被 $g \in G$ 固定（分别地，被子群 $H < G$固定），我们就称之为固定（分别地，若 $\forall g \in H$、 $g \cdot P = P$）。给定元素 $P \in \mathcal{X}$ 的轨道是集合 $G \cdot x = \{g \cdot P\colon\ g \in G\}$。 G 在 $\mathcal{X}$ 上的作用是传递的，如果对任意两个点 P、$Q \in \mathcal{X}$，都存在某个 $g \in G$ 使得$g \cdot P = Q$；也就是说， $\mathcal{X}$ 中的所有元素都属于同一个轨道。

记 $\mathcal{X}^g$（分别地， $\mathcal{X}^H$）为 $\mathcal{X}$ 中被 g（分别地，被 H）固定的点集。对于任意 $P \in X$，记 G_P 为 P 的稳定子或对称群，即由满足 $g \cdot P = P$ 的元素 $g \in G$ 构成的 G 子群。

先来看下面这个显然成立的引理:

引理 3 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{X}$ 是两个 G 空间，且 $g \in G$。若存在等变映射 $\mathfrak{Z}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$ 到 $V \in \mathcal{A}^g$，则 $\mathfrak{Z}(V) \in \mathcal{X}^g$。特别地:

（$\star$）对于每个 $g \in G$，若 $\mathcal{A}^g$ 非空，则 $\mathcal{X}^g$ 也非空。

证明：设 $V \in \mathcal{A}^g$。若 $\mathfrak{Z}$ 是等变的，则有 $\mathfrak{Z}(V) = \mathfrak{Z}(g \cdot V) = g \cdot \mathfrak{Z}(V)$。结论（$\star$）由此即得。

□

这一简单观察引出了以下结论，它推广了定理 1 中的命题 (b) 以及 [12] 中的部分结果:

定理 4 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{X}$ 是满足条件 $(\star)$ 的两个 G-空间。设 $V \in \mathcal{A}$。对于每个由 V 的对称群固定的 $P \in \mathcal{X}$，都存在某个等变映射 $\mathfrak{Z}\colon A \to X$，使得 $\mathfrak{Z}(V) = P$。

证明：设 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathcal{A}$ 中 V 的轨道。我们先为 $\mathcal{A}'$ 中的元素定义 $\mathfrak{Z}$。令 $\mathfrak{Z}(V) = = P$。对于任意 $W \in \mathcal{A}'$（W 可能等于 V），至少存在一个 $g \in G$ 使得 $g \cdot V = W$，因此我们定义

$$\mathfrak{Z}(W) = g \cdot \mathfrak{Z}(V) = g \cdot P.$$

我们需要检查这个函数是否定义良好。假设存在另一个元素 $h \in G$ 使得 $h \cdot V = W$。那么，我们需要

$$\mathfrak{Z}(W) = g \cdot \mathfrak{Z}(V) = h \cdot \mathfrak{Z}(V)$$

注意

$$g \cdot V = h \cdot V \Leftrightarrow V = g^{-1} \cdot h \cdot V, \qquad g \cdot \mathfrak{Z}(V) = h \cdot \mathfrak{Z}(V) \Leftrightarrow P = g^{-1} \cdot h \cdot P$$

并且根据定理的陈述，$V = g^{-1} \cdot h \cdot V$ 蕴含 $P = g^{-1} \cdot h \cdot P$，因此 $\mathfrak{Z}$ 定义良好。

如果 G 对 $\mathcal{A}$ 的作用是传递的（也就是说，$\mathcal{A} = \mathcal{A}'$），那么我们就完成了。否则，要将 $\mathfrak{Z}$ 扩展到 $\mathcal{A}$，我们需要如下使用选择公理：

- 令 $\{G_i\}_{i \in I}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中不动点集非空的 G 的子群集合。再考虑集合 $\{\mathcal{X}^{G_i}\}_{i \in I}$。令 Φ_1 为一个选择函数，它从每个 $\mathcal{X}^{G_i}$ 中选取一个元素 P_i，其中 $i \in I$（此处用到了假设（$\star$）。
- $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ 可以拆分为若干轨道 $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}' = \bigcup_{j \in J} \mathcal{A}_j$的不交并。令 Φ_2 为一个选择函数，它从每个轨道 $\mathcal{A}_j$中选取一个元素 V_j。
- 如果 V属于轨道 $\mathcal{A}_j$，那么对于某个 $g \in G$，有 $V = g \cdot V_j$。如果 G_i是某个 $i \in I$对应的 V_j的稳定子，我们可以定义

$$\mathfrak{Z}(V) = \mathfrak{Z}(g \cdot V_j) = g \cdot \mathfrak{Z}(V_j) = g \cdot P_i.$$

相 同的论证表明，这个函数定义良好且是等变的 t.

□

4 等面单纯形中心猜想类似命题的证明

注 令 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathbb{R}^n$ 中的 $n+1$ 个点组成的子集的集合，并且

$$\mathcal{B} = \{(P_0, \ldots, P_n) \in (\mathbb{R}^n)^2 : P_0, \ldots, P_n \text{ are affinely independent}\}$$

在原论文中， [3], 中心被视为连续函数 $\mathfrak{Z}\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}^n$。这里，中心将是函数 $\mathfrak{Z}\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$ （不一定连续）。从现在起， $\mathcal{A}$ 中的元素称为单形，并且不要求 $\mathcal{A}$ 中的元素仿射无关。

令 $E(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的欧几里得群。单形 V 的一个面是 V 的一个子集，由 n 个点组成。回顾一下，若一个单形的所有面彼此全等，则称该单形为等面单形；换言之， $E(n)$在该单形的面集上的自然作用是传递的。

最后我们 可以作为定理的推论，证明等面单纯形的中心猜想 4.

定理 5（等面单纯形中心猜想类比命题的证明）令 $\mathcal{A}$为 $\mathcal{X}$ 中含有 $n+1$ 个元素的子集族（单纯形）。考虑欧几里得群 $E(n)$在这两者上的自然作用。那么，某个 $V \in \mathcal{A}$ 的所有中心重合（也就是说，存在某个 $P \in \mathcal{X}$，使得对每个中心 $\mathfrak{Z}$： $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{Z}(V) = P$）当且仅当 V是等面的。

证明： [3] 中的命题 3.4 保证，对于任意等面单形，所有中心都重合。考虑例（II）中定义的质心 $\mathfrak{C}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$ 。我们只需证明，对于每个非等面的$V = \{V_0, \ldots, V_n\} \in \mathcal{A}$，都存在一个中心 $\mathfrak{Z}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$，使得 $\mathfrak{Z}(V) \neq \mathfrak{C}(V)$。

若 V 仿射相关，则考虑由下式给出的 $\mathfrak{Z}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$

$$\mathfrak{Z}(\{V_0, \ldots, V_n\}) = \begin{cases} \mathfrak{C}(V) & \text{if } V_0 = \ldots = V_1 \\ \frac{h_0}{h_0+\ldots+h_n} V_0 + \ldots + \frac{h_n}{h_0+\ldots+h_n} V_n & \text{in other case} \end{cases}$$

其中， h_i 表示 V_i 与 $V \setminus \{V_i\}$的质心之间的距离。注意， $\mathfrak{Z}(V) = \mathfrak{C}(V)$ 当且仅当 V 中的所有元素都重合（因此 V 是等面的），或者

$$\frac{h_0}{h_0 + \ldots + h_n} = \ldots = \frac{h_n}{h_0 + \ldots + h_n} = \frac{1}{n+1}$$

但第二种情况不可能，因为至少有一个值 h_i （但并非全部）等于 0。

若 V 仿射无关，则其对称群 $(E(n))_V$ 的不动点集 $\mathcal{X}^{(E(n))_V}$ 是单点，当且仅当群 $E(n)$在 V 上传递（见 [3]中的引理 3.3）。进而，$(E(n))_V$ 在 V 上传递，当且仅当其在面集上传递（见 [2]中的定理 3.3）。因此，若 V 不是等面的，则其对称群 $(E(n))_V$ 有多个不动点。令 Q 表示一个不同于 $\mathfrak{C}(V)$的不动点。根据定理 4，存在某个中心 $\mathfrak{Z}$： $\mathcal{A} \to \mathcal{X}$，使得$\mathfrak{Z}(V) = Q \neq \mathfrak{C}(V)$。

□

5 最后的评论

尚待证明等面单纯形的原始中心猜想（涉及连续中心）。另一方面，等面单纯形的强猜想要求存在一个中心 $\mathfrak{Z}$：$\mathcal{A} \to \mathcal{X}$满足以下性质，

$$\mathfrak{Z}(V) = \mathfrak{C}(V) \Leftrightarrow V \text{ is equifacetal},$$

无论是连续中心还是不一定连续的中心，这一问题仍未解决。

参考文献

[1] A. Al-Sharif、M. Hajja、P. T. Krasopoulos。平面四边形中心的重合。《数学研究成果》55.3，231–247（2009）。

[2] Edmonds，《等面单纯形的几何》。Mathematica 52.1-2，31–45（2005）。

[3] A. L. Edmonds. 等面单纯形的中心猜想。《几何进展》9.4, 563–576 (2009)。

[4] M. Farr、M. Haj ja. Bang定理的向量证明。《美国数学月刊》108.6，562–564（2001）。

[5] A. Puiggal´ı, L. F. Prieto-Mart´ınez. n-边形中心与中心线 aacs.《大学生几何学》（第8卷）。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯（2009）。

[6] I. M. Is nchez 等人. 肿瘤边缘的演化动力学揭示代谢成像生物标志物. arXiv 预印本，arXiv:2204 08342

[7] J. Jim´enez-S´a. 《国家科学院院刊》118.6（2021）。

[8] C. Kimberling。《数学方程》中的三角形几何相关函数方程。45.2，127–152（1993）。

[9] C. Kimberling。《三角形平面中的中心点与中心线》。《数学杂志》67.3，163–187（1994）。[10] C. Kimberling。《三角形中心百科全书》。 https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html[11] P. McMullen。具有等面积面的单纯形。《离散与计算几何》24.2，397–412（2000）。[12] L. F. Prieto-Mart´ınez。平面中多边形中心与点多重集的中心之间对称性、重合性和共线性的关系。arXiv 预印本，arXiv:2206.13253。[13] L. F. Prieto-Mart´ınez，R. S´anchez-Cauce。将 Kimberling 的三角形中心概念推广到其他多边形。《数学研究成果》76.81（2021）。[14] P. A. Rogerson。寻找地理中心的新方法及其在美国各州中的应用。《专业地理学家》67.4（2015）。