arXiv:2301.09970v1 [math.AC] 24 Jan 2023

几乎戴德金整环中的有界性

DARIO SPIRITO

Abstract. 我们研究几乎戴德金整环中理想的不同有界性形式，推广临界理想、根式分解和 SP-整环的概念。我们证明，每个几乎戴德金整环至少有一个非临界极大理想；事实上，相对于可构造拓扑，非临界极大理想的集合在极大空间中稠密。因此，我们证明每个几乎戴德金整环都是 SP-散布的，尤其是，几乎戴德金整环 D 的可逆理想群 $\mathrm{Inv}(D)$ 总是自由群。如果 D 是雅各布森根非零的几乎戴德金整环，我们还证明存在至少一个元素，其理想函数有界。

1. Introduction

戴德金整环是交换代数中最基本的环之一。它们有许多刻画方式，其中一种涉及理想的分解：一个整环是戴德金整环，当且仅当每个理想都能唯一地写成素理想的有限乘积。推广这一性质的一种方式是要求理想分解为根理想：若每个理想都有根式分解，则称该整环为 SP 整环。SP整环与戴德金整环相去不远：事实上，它们是几乎戴德金整环，也就是说，在每个极大理想处的局部化都是离散赋值环（等价地，若一个整环局部上是戴德金整环，则它是几乎戴德金整环） [10, 定理 2。4]这一性质带来若干有趣的推论：例如，SP整环的可逆理想群 D 同构于从 D 的极大谱（赋予可构造拓扑）到 $\mathbb{Z}$的紧支撑连续函数群，并且特别地，该群是自由群（见 [5]和 [8]）。

然而，并非每个几乎戴德金整环都具有根分解；一种刻画是：几乎戴德金整环是 SP整环，当且仅当它没有临界极大理想，即每个极大理想都包含一个有限生成根理想。为了研究不是 SP整环的几乎戴德金整环情形，

日期：2023年1月25日。2010年数学主题分类：13F05；13A15。关键词与短语：几乎戴德金整环；临界极大理想；SP-整环；自由阿贝尔群；可逆理想。

在 [8] theauthor 引入了极大理想空间 $\mathcal{M}$的子集链 $\{\mathrm{Crit}_\alpha(D)\}_\alpha$ 以及基环的一条上整环链；这些链是通过递归应用临界理想的定义构造的，其方式类似于拓扑空间的导集链的定义。通过这种方式，可以在更广泛的一类整环（SP-散布整环）中恢复 SP整环的一些性质。SP-散布整环定义为这样的几乎戴德金整环：对于某个序数 α，$\mathrm{Crit}_\alpha(D)$ 为空；例如，在这种情况下，D 的可逆理想群是自由群，并且可以写成连续函数群的直和。

然而，[8] 中使用的方法不足以涵盖所有几乎戴德金整环，因为当 D 的临界理想集合 $\mathrm{Crit}(D)$ 与 D 的极大空间重合时，这些方法无法得出任何结果。不过，当时尚无关于这种现象的例子；例如，[4] 中的一个悬而未决的问题是，是否存在完全无界的几乎戴德金整环，也就是说，其中与每个元素相关联的理想函数都是无界的（与理想相关联的理想函数的定义见第 2.4 节）。

本文证明，每个几乎戴德金整环都有一个非临界极大理想（定理 4.5）；由此可得，每个几乎戴德金整环都是 SP-散布的（定理 5.1）。特别是，这表明 [8]中关于 SP-散布整环所证明的结果实际上适用于每个几乎戴德金整环。

我们首先在第 3 节将临界理想的概念推广为 n-临界理想（对于 $n \in \mathbb{N}$）和 ω-有界理想：前者是指不包含任何有限生成理想的极大理想，且该有限生成理想所对应的理想函数被 n 有界；后者是指不包含任何有限生成理想的极大理想，且该有限生成理想所对应的理想函数有界。注意，1-临界理想恰好就是临界理想。我们证明，这些概念可用于定义一种类似于 SP-整环的概念，并构建一种类似于 [8] 中针对临界理想所发展的理论。

在第 4 节中，我们通过分析当 I 是有限生成理想时的集合 $\nu_I^{-1}((n,+\infty))$，证明每个几乎戴德金整环都有一个非临界极大理想（定理 4.5 ）；特别地，我们证明这些集合总是开集（即 ν_I 是半连续的；命题 4.3）。对于主理想，我们证明如果 D 的雅各布森根非零，那么 D 不可能是完全无界的（命题 4.7）。在第 5 节中，我们通过证明每个几乎戴德金整环都是 SP-散布的（定理 5.1），并且集合 $\mathcal{M} \setminus \mathrm{Crit}(D)$ 不仅非空，而且在 $\mathcal{M}$ 中稠密（定理 5.6），完成这些结果。

2. Preliminaries

2.1. 整环。设 D 是商域为 K 的整环。D 的分式理想是 K 的子模 I，满足存在某些 $d \in D$、$d \neq 0$ 使得 $dI \subseteq D$；整理想是包含于 D 的分式理想（即 D 的理想），若 $I \subsetneq D$，则称 I 为真理想。

若存在一个 J 使得 $IJ = D$，则称分式理想可逆；在这种情况下，$J = (D : I) := \{x \in K \mid xI \subseteq D\}$。若 I 可逆，则令$I^{-1} := (D : I)$。每个可逆分式理想都是有限生成的。全体可逆理想在理想乘积运算下构成一个群，记为 Inv(D)。若 T 是介于 D 与 K 之间的环（即 D的一个上环），则扩张映射 $I \mapsto IT$ 诱导一个群同态 Inv(D) $\longrightarrow$ Inv(T)。

若 I 是 D的一个分式理想，则 I 的 v-闭包为 I^v :=$(D : (D : I))$；等价地，I^v 是所有包含 I的主分式理想的交。若 I 满足 $I = I^v := (D : (D : I))$，则称理想 I 为除子理想。每个可逆分式理想都是除子理想。

几乎戴德金整环是满足以下条件的整环 D：每个局部化 D_M 都是离散赋值环；特别地，几乎戴德金整环是一维、整闭且普吕弗的，因此几乎戴德金整环的每个有限生成理想都是可逆的。若 M 是几乎戴德金整环 D 的一个极大理想，我们称 M 为临界的，如果 M 不包含任何非零的根有限生成理想。我们用 Crit(D) 表示 D 的临界极大理想集合。

SP整环是满足每个真理想都是根理想乘积的整环；SP整环必定是几乎戴德金整环，而几乎戴德金整环是SP整环，当且仅当它没有临界极大理想。关于SP整环的其他刻画，见 [7, 定理 2.1] 和 [3, 定理 3.1.2]。

2.2. 逆拓扑与可构造拓扑。设 R 是一个含幺交换环。R 的谱 Spec(R) 上的逆拓扑，是指其子基开集为如下集合的拓扑：$\mathcal{V}(I) := \{P \in \text{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}$，其中 I 遍历 R 的有限生成理想。可构造拓扑是 Spec(R) 上由 $\mathcal{V}(I)$ 和如下集合共同生成的拓扑：$\mathcal{D}(I) := \{P \in \text{Spec}(D) \mid I \nsubseteq P\}$，其中 I 遍历 D 的有限生成理想。在这两种拓扑下，Spec(R) 都是紧空间（它也是一个谱空间，即与赋予扎里斯基拓扑的某个环的素谱同胚）；可构造拓扑还是豪斯多夫的。有关这些拓扑的详细考察，请参见 [2,第 1] 章。

在 R 的极大谱 Max(R) 上，逆拓扑与可构造拓扑一致 [2, 推论 4.4.9]；我们将这个拓扑空间记作 $\mathcal{M}$，或者在需要强调所涉及的环时记作 $\mathcal{M}_R$。于是，$\mathcal{M}$ 是完全正则、全不连通的，并且有一个基

由既开又闭子集组成 [2, 推论 4.4.9]。如果 R 是一维的（例如，如果 R 是几乎戴德金整环），那么 $\mathcal{M}$ 是紧致的，当且仅当 R 的雅各布森根 $\mathrm{Jac}(R)$ 非零；其中 $\mathrm{Jac}(R)$ 是 R 的所有极大理想的交。在这种情况下，逆拓扑和可构造拓扑也与扎里斯基拓扑一致。

2.3. 高秩临界理想。设 D 是一个几乎戴德金整环。D 的临界极大理想集 $\mathrm{Crit}(D)$ 是 $\mathcal{M}$ 的闭集；由 [8,引理 2.3], 可知

$$T_1 := \bigcap \{D_M \mid M \in \mathrm{Crit}(D)\}$$

是 T_1 的一个上环，其极大理想是 D 的临界理想的扩张。更一般地，若 α 是一个序数，我们可以递归地定义以下集合 [8, 第 5] 节：

- $\mathrm{Crit}_0(D) := \mathcal{M}$, $T_0 := D$;
- 若 $\alpha = \gamma + 1$ 是后继序数，则
$$\mathrm{Crit}_\alpha(D) := \{P \in \mathcal{M} \mid PT_\gamma \in \mathrm{Crit}(T_\gamma)\};$$
- 若 α 是极限序数，则
$$\mathrm{Crit}_\alpha(D) := \bigcap_{\gamma<\alpha} \mathrm{Crit}_\gamma(D);$$
- $T_\alpha := \bigcap \{D_P \mid P \in \mathrm{Crit}_\alpha(D)\}$.

那么，每个 $\mathrm{Crit}_\alpha(D)$ 都是 $\mathcal{M}$ 的闭集，并且每个 T_α 都是 D 的上环，其极大理想是 $\mathrm{Crit}_\alpha(D)$ 中理想的扩张。

降链 $\{\mathrm{Crit}_\alpha(D)\}_\alpha$ 会稳定；我们将满足 $\mathrm{Crit}_\alpha(D) = \mathrm{Crit}_{\alpha+1}(D)$ 的最小α 称为 D的 SP-秩，并令 $\mathrm{Crit}_\infty(D) := \mathrm{Crit}_\alpha(D)$。若 $\mathrm{Crit}_\infty(D) = \emptyset$，则称 D 为 SP-散布的。

2.4. 理想函数。设 D 是一个几乎戴德金整环，且I 是 D 的非零分式理想。那么， I 诱导出一个函数

$$\begin{aligned} \nu_I \colon \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ M &\longmapsto v_M(I), \end{aligned}$$

其中 v_M 是关于 D_M 的赋值。此映射与理想运算相容：若 I、J 是理想，则 $\nu_{I+J} = \inf\{\nu_I, \nu_J\}$、 $\nu_{IJ} = \nu_I + \nu_J$，且 $\nu_{I\cap J} = \sup\{\nu_I, \nu_J\}$。

ν_I 的连续性与 I的根式分解密切相关：事实上，如果 I 是 D的真有限生成理想，那么，当且仅当 I 可以写成根理想的有限乘积 [8, 命题 3.10]时， ν_I 是连续的。这一事实使得我们能够将$\mathcal{M}$ 上的连续映射与可逆理想 [8,的群 $\mathrm{Inv}(D)$联系起来 5]第 4 节。

3. Bounded-critical ideals

如果 I 是 D的根理想，那么其理想函数 ν_I 恰好是集合 $\mathcal{V}(I)$的特征函数；同样地，如果 ν_I 是 $\mathcal{M}$的某个子集的特征函数，那么 I 必定是一个根理想。因此，在真理想中，根理想的特征是其理想函数的上确界为 1。基于这一原因，为了推广临界理想，我们引入以下定义。

定义 3.1. 设 D 是一个几乎戴德金整环，I 是一个非零真理想。我们称 I 为:

若 $\sup \nu_I \leq n$，则称 • n为 $n \in \mathbb{N}$-有界；
若 ν_I 有界，则称 • 有界。

定义 3.2. 设 D 是一个几乎戴德金整环，M 是 D的一个极大理想。我们称 M 为:

如果不包含任何 n-有界有限生成理想，则称其为 • n-临界（对某个 $n \in \mathbb{N}$ 而言）；
如果不包含任何有界有限生成理想，则称其为 • ω-临界（或有界临界）。

我们用 ${}^{n}\mathrm{Crit}(D)$ 表示 n-临界极大理想的集合，用 ${}^{\omega}\mathrm{Crit}(D)$ 表示 R 的 ω- 临界极大理想的集合。

使用记号 ${}^{n}\mathrm{Crit}(D)$（而不采用或许更自然的 $\mathrm{Crit}_n(D)$），是为了避免与阶段 $\alpha = n$ 构造 $\mathrm{Crit}_\alpha(D)$ 时产生混淆。

命题 3.3. 设 D 是一个几乎戴德金整环，D 的一个极大理想为 M。则以下结论成立。

(a) ${}^{1}\mathrm{Crit}(D) = \mathrm{Crit}(D)$。(b) $\{{}^{n}\mathrm{Crit}(D) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathcal{M}$ 的闭子集构成的降链。(c) ${}^{\omega}\mathrm{Crit}(D) = \bigcap\{{}^{n}\mathrm{Crit}(D) \mid n \in \mathbb{N}\}$；特别地，${}^{\omega}\mathrm{Crit}(D)$ 在 $\mathcal{M}$ 中是闭的。

证明。(a)由 1-有界理想恰好是根理想这一事实得出。在 (b) 中，包含关系 ${}^{n+1}\mathrm{Crit}(D) \subseteq {}^{n}\mathrm{Crit}(D)$ 显然成立，因此只需证明这两个集合都是闭集。若 $M \in \mathcal{M} \setminus {}^{n}\mathrm{Crit}(D)$，则其中包含一个 n-有界有限生成理想 I；于是，$\mathcal{V}(I)$ 是 $\mathcal{M}$ 中的开集，包含 M，且与 ${}^{n}\mathrm{Crit}(D)$ 不相交。因此，$\mathcal{M} \setminus {}^{n}\mathrm{Crit}(D)$ 是开集，即 ${}^{n}\mathrm{Crit}(D)$ 是闭集。

(c) 由前一点直接得出。 □

我们注意到，一般而言，包含关系 ${}^{n+1}\mathrm{Crit}(D) \subseteq {}^{n}\mathrm{Crit}(D)$ 可能是严格包含：见下文例 3.12。

利用 n-临界理想的概念，可以推广临界理想和SP整环理论的部分内容。以下两个结果可视为对 [8, 命题 3.10]的部分推广。

命题 3.4. 设 D 是一个几乎戴德金整环，且 I 是 D的一个真理想。考虑以下条件:

(i) $\mathcal{V}(I) \cap {}^{\omega}\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$; (ii) I 有界。

那么，(i) $\Longrightarrow$ (ii)。若 I 是有限生成的，则(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。

证明。假设(i)成立。对每个 $M \in \mathcal{V}(I)$，取一个有界的有限生成理想 J_M，使得 $J_M \subseteq M$。（这样的 J_M 存在，因为 M不是 ω-临界的。）于是，$L_M := I + J_M$ 是一个有界的有限生成理想，使得 $I \subseteq L_M \subseteq M$。因此，$\{\mathcal{V}(L_M) \mid M \in \mathcal{V}(I)\}$ 是 $\mathcal{V}(I)$的一个开覆盖（相对于可构造拓扑）。空间 $\mathcal{V}(I)$在可构造拓扑下是紧致的（因为它与 D/I的谱同胚），因此我们可以找到一个有限子覆盖 $\{\mathcal{V}(L_{M_1}) \dots, \mathcal{V}(L_{M_k})\}$。令 $L := L_{M_1} \cdots L_{M_k}$。那么，$L$ 是有限生成的，且 $\mathcal{V}(L) = \mathcal{V}(I)$，即$\mathrm{rad}(L) = \mathrm{rad}(I)$；因此，存在一个 t 使得 $L^t \subseteq I$。然而，

$$\nu_{L^t} = t\nu_L = t(\nu_{L_{M_1}} + \cdots + \nu_{L_{M_k}}),$$

因此 ν_{L^t} 有界；所以 $\nu_I \leq \nu_{L^t}$ 也有界。断言得证。

若 I 是有限生成的，则 (ii) $\Longrightarrow$ (i) 可直接由定义得出。□

命题 3.5. 设 D 是一个几乎戴德金整环，并固定 $n \in \mathbb{N}$。设 I 是 D 的一个真理想。考虑以下条件:

(i) $\mathcal{V}(I) \cap {}^{n}\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$; (ii) 存在 n-有界的有限生成理想 $J_1, \dots, J_k$，使得$I = J_1 \cdots J_k$。

那么，(i) $\Longrightarrow$ (ii)。若 I 是有限生成的，则 (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)。

证明. (i) $\Longrightarrow$(ii) 由于 $\mathcal{V}(I) \cap {}^{n}\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$，因此也有 $\mathcal{V}(I) \cap {}^{\omega}\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$; 故根据命题 3.4，$\nu_I$ 有界。我们对 $\sup \nu_I$ 作归纳。若 $\sup \nu_I \leq n$，则断言显然成立（只需取 $J_1 = I$）。假设 $\sup \nu_I > n$。与前一个证明类似，对每个 $M \in \mathcal{V}(I)$，取一个 n-有界的有限生成理想 J_M，使得 $J_M \subseteq M$，并定义 $L_M := I + J_M$；于是，L_M 是一个 n-有界的有限生成理想，使得 $I \subseteq L_M \subseteq M$。族 $\{\mathcal{V}(L_M) \mid M \in \mathcal{V}(I)\}$ 是 $\mathcal{V}(I)$ 的一个开覆盖（相对于可构造拓扑），且由于$\mathcal{V}(I)$ 是紧致的，我们可以找到一个有限子覆盖 $\{\mathcal{V}(L_{M_1}) \dots, \mathcal{V}(L_{M_k})\}$。令 $L := L_{M_1} \cap \cdots \cap L_{M_k}$。于是，$L$ 是一个有限生成理想，使得 $\sup \nu_L \leq n$, $I \subseteq L$ 且 $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(L)$。设 $I_1 := IL^{-1}$: 那么，I_1 又是 D 的一个真理想，并且

$$\nu_{I_1}(M) = \nu_I(M) - \nu_L(M) \leq \nu_I(M) - 1$$

对于每个 $M \in \mathcal{V}(I)$。因此，$\sup \nu_{I_1} < \sup \nu_I$，并且根据归纳法，$I_1$具有将 $I_1 = J_1 \cdots J_t$ 分解为 n-有界理想之积的分解。因此，

$I = I_1L = J_1\cdots J_tL$ 也具有这种分解形式。命题得证。

假设 I 是有限生成的，且 (ii) 成立。令 $M \in \mathcal{V}(I)$。由于 $J_1\cdots J_k \subseteq M$，存在一个 i 使得 $J_i \subseteq M$；由于 I 可逆，J_i 也可逆，因而是有限生成的。根据定义，M 不可能是 n-临界的。因此 $\mathcal{V}(I) \cap {}^n\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$。□

注 3.6。如果 I 不是有限生成的，这两个条件并不等价。事实上，如果 M 是 ω-临界的，那么 M 是有界的，但 $\mathcal{V}(M) \cap {}^\omega\mathrm{Crit}(D) = \{M\} \neq \emptyset$。同理，如果 $n \in \mathbb{N}$，那么 M 可以分解为若干 n-临界理想的乘积（即 M 本身），但 $\mathcal{V}(M) \cap {}^n\mathrm{Crit}(D) = \{M\} \neq \emptyset$。

如果我们将这些结果应用于所有理想，就会得到与刻画 SP-整环的等价条件类似的等价条件。

推论 3.7. 设 D 是一个几乎戴德金整环。则下列条件等价：

(i) ${}^\omega\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$; (ii) 每个非零主真理想都有界；(iii) 每个非零有限生成真理想都有界；(iv) 每个非零真理想都有界；(v) 对每个分式理想 I，ν_I 都有界。

证明. (i) $\iff$ (iii) 由命题 3.4 得出。(v) $\implies$ (iv) $\implies$ (iii)$\implies$ (ii) 显然。为证明 (ii) $\implies$ (iv)，设 $I \neq$(0) 是一个理想。对于每个 $i \in I \setminus \{0\}$，ν_{iD} 都有界；由于 $\nu_I \leq \nu_{iD}$，ν_I 也有界。最后，若 (iv) 成立，且 $I \in \mathcal{F}(D)$，则存在真理想 J、$L \subset D$，使得 $I = JL^{-1}$，其中 L 是有限生成的 [8, ，由命题 3.3], 得出，因此 $\nu_I = \nu_J - \nu_L$ 有界。□

推论 3.8. 设 D 是一个几乎戴德金整环，并固定一个 $n \in \mathbb{N}$。那么，以下条件等价：

(i) ${}^n\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$；(ii) 每个非零有限生成真理想都是$n$-有界理想的乘积；

证明. 由命题 3.5 得出。□

与 Inv(D) 强校正的群是 D 的除子理想群。当 D 是几乎戴德金整环（或更一般地，一维 Pr¨ufer 整环）时，除子理想集 Div(D) 在 v-乘法 $I \times_v J := (IJ)^v = (D : (D : IJ))$ 下构成一个群。Inv(D) 和 Div(D) 都是关于包含序的逆序（即，当且仅当 $I \supseteq J$ 时，$I \leq J$ ）下的群，从这个角度看，Div(D) 是 Inv(D) 的完备化（关于 ℓ-群的背景知识，参见 [1] ；关于将 Inv(D) 和 Div(D) 视为 ℓ-群的讨论，参见 [5, 第 3] 节和 [8, 第 6] 节）。利用 ω-临界理想，我们可以证明以下对 [8, 定理 6.5]的部分推广。

命题 3.9. 设 D 是一个几乎戴德金整环，满足${}^{\omega}\mathrm{Crit}(D)=\emptyset$。那么，$\mathrm{Div}(D)$ 是一个自由群。

证明。令 $\mathcal{F}_b(\mathcal{M},\mathbb{Z})$ 为所有有界函数 $\mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{Z}$ 构成的群。由于 ${}^{\omega}\mathrm{Crit}(D)$ 为空，根据推论 3.7，每个有限生成分式理想都是可逆的；因此，映射 $I\mapsto\nu_I$ 定义了一个映射 $\mathrm{Inv}(D)\longrightarrow\mathcal{F}_b(\mathcal{M},\mathbb{Z})$，它也是一个 ℓ-群同态。由于 $\mathcal{F}_b(\mathcal{M},\mathbb{Z})$ 是一个完备的 ℓ-群，它包含 $\mathrm{Inv}(D)$ 的完备化，即包含一个与 $\mathrm{Div}(D)$ 同构的子群。然而，由于 $\mathcal{F}_b(\mathcal{M},\mathbb{Z})$ 是一个自由群 [6, Satz 1], ，这意味着 $\mathrm{Div}(D)$ 也是自由群。断言得证。□

注记 3.10。命题 3.9 表明，存在一个映射 $\phi:\mathrm{Div}(D)\longrightarrow\mathcal{F}_b(\mathcal{M},\mathbb{Z})$，使得 $\Phi(\mathrm{Div}(D))$ 与 $\mathrm{Div}(D)$ 同构。这个映射不同于将每个 $I\in\mathrm{Div}(D)$ 映射到其理想函数 ν_I 的映射（根据推论 3.7，该函数属于 $\mathcal{F}_b(\mathcal{M},\mathbb{Z})$）：事实上，若 I 是一个除子理想，但不是有限生成的，那么 $-\nu_I$ 不能写成 ν_J 的形式，其中 J 是某个理想（否则 $IJ=D$ 和 I 都将是可逆的）。特别地，若 $L=(D:I)$ 是 $\mathrm{Div}(D)$ 中 I 的逆元，则 $\nu_L\neq-\nu_I$。因此，将 $I\mapsto\nu_I$ 视为映射 $\mathrm{Div}(D)\longrightarrow\mathcal{F}_b(\mathcal{M},\mathbb{Z})$ 时，它不是群同态。

现在固定一个 $n\in\mathbb{N}\cup\{\omega\}$。与临界理想类似，可以递归地定义一个子集序列 $\{{}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D)\}_\alpha$ 以及一个上整环序列$\{{}^nT_\alpha\}_\alpha$，如下所示：

- ${}^n\mathrm{Crit}_0(D):=\mathcal{M}$, ${}^nT_0:=D$;
- 若 $\alpha=\gamma+1$ 是后继序数，则
$$ {}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D):=\{P\in\mathcal{M}\mid PT_\gamma\in{}^n\mathrm{Crit}({}^nT_\gamma)\};$$
- 若 α 是极限序数，则
$$ {}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D):=\bigcap_{\gamma<\alpha}{}^n\mathrm{Crit}_\gamma(D);$$
- ${}^nT_\alpha:=\bigcap\{D_P\mid P\in{}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D)\}$.

容易看出，$\{{}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D)\}_\alpha$ 是 $\mathcal{M}$的一个递降闭子集序列，而 $\{{}^nT_\alpha\}_\alpha$ 是一个递增的上整环序列，并且 $\mathcal{M}_{{}^nT_\alpha}$ 与 ${}^n\mathrm{Crit}_\alpha(R)$相对应，也就是说，${}^nT_\alpha$ 的极大理想是 ${}^n\mathrm{Crit}_\alpha(R)$中各元素的扩张。

序列 $\{{}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D)\}_\alpha$ 必定稳定；我们将满足 ${}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D)={}^n\mathrm{Crit}_{\alpha+1}(D)$ 的最小序数 α 称为 D的 n-SP-秩。在这种情况下，我们用 ${}^n\mathrm{Crit}_\infty(D)$表示集合 ${}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D)$；等价地，${}^n\mathrm{Crit}_\infty(D)$就是所有 ${}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D)$的交集。

利用这个序列，可以仿照 [8,第 5] 节 n 中的推理和结果，使用 [8, -临界理想或有界临界理想，而不只是临界理想；事实上，8] 命题 5. Ψ_γ 证明中最微妙的一点是，自然扩张映射 T_γ: Inv($\longrightarrow$) $T_{\gamma+1}$ Inv() 的核同构于一组连续

紧支撑映射，即 $\mathcal{C}_c(\mathrm{Crit}^\gamma(R) \setminus \mathrm{Crit}^{\gamma+1}(R)\ \mathbb{Z})$；而且，由于这些映射都是有界的，核是自由的。 n-临界理想也具有相同的性质。

命题 3.11. 设 D 是一个几乎戴德金整环， $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$。对于每个序数 γ，映射 $\Psi_\gamma : \mathrm{Inv}({}^nT_\gamma) \longrightarrow \mathrm{Inv}({}^nT_{\gamma+1})$ 的核是自由的。

证明。根据定义，若以 D 而非 ${}^nT_\gamma$ 为起点， ${}^nT_{\gamma+1}$ 恰好是上整环序列的第一个元素。因此，只需证明 $\gamma = 0$ 的情形，即扩张$\Psi^{(n)} : \mathrm{Inv}(D) \longrightarrow \mathrm{Inv}({}^nT_1)$ 的情形。此外， ${}^nT_1$ 包含于 ${}^\omega T_1$ （因为对每个 n，都有${}^\omega\mathrm{Crit}(D) \subseteq {}^n\mathrm{Crit}(D)$），因此 $\Psi^{(n)}$ 的核包含于 $\Psi^{(\omega)}$的核。由于自由阿贝尔群的子群仍是自由群，只需证明 $n = \omega$ 的情形。

$\Psi^{(\omega)}$ 的核是满足以下条件的可逆理想集合：对于每个 $M \in {}^\omega\mathrm{Crit}(D)$, I 使得 $ID_M = D_M$。若 $I \subseteq D$，则根据命题 3.4，此条件等价于 I 有界。若 $I \nsubseteq D$，则根据 [8,命题 3.3]，我们有 $I = JL^{-1}$，其中 J、L 是真理想，满足 $\mathcal{V}(J)$ 和 $\mathcal{V}(L)$ 与 ${}^\omega\mathrm{Crit}(D)$ 不相交。因此， ν_I 有界，因为它是两个有界函数之差。由此可得，$\ker \Psi^{(\omega)}$同构于所有满足 $\mathcal{M} \setminus {}^\omega\mathrm{Crit}(D) \longrightarrow \mathbb{Z}$ 的有界函数所成集合的一个子群；根据 [6, Satz 1]，该集合是自由的。结论得证。□

[8, 第 5] 节中的其余推理可以转用于 n-临界理想的情形；因此，对于每个序数 α，我们得到一个正合列

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i<\alpha} {}^n\Delta_i \longrightarrow \mathrm{Inv}(D) \longrightarrow \mathrm{Inv}({}^nT_\alpha) \longrightarrow 0,$$

其中 ${}^n\Delta_i$ 是 $\mathrm{Inv}({}^nT_i) \longrightarrow \mathrm{Inv}({}^nT_{i+1})$ 的核，因此由命题 3.11 可知它是自由的。特别地，如果 ${}^nT_\alpha = K$ （等价地，如果 ${}^n\mathrm{Crit}_\alpha(D) = \emptyset$），那么我们有

$$\mathrm{Inv}(D) \simeq \bigoplus_{i<\alpha} {}^n\Delta_i,$$

因此 $\mathrm{Inv}(D)$ 是自由的。不过，我们将在本文后续部分看到，这一事实并未改进 [8], 中的结果，也就是说，我们无法由此得出 $\mathrm{Inv}(D)$ 对任何“新”的环类都是自由的。

例 3.12。一般来说， ${}^n\mathrm{Crit}(D) \subsetneq \mathrm{Crit}(D)$ 可能成立。我们采用例 3.4.1]中的同一个例子：令 $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ 为域 F上的一个可数不定元集，令 $Y_n := \prod_{i \geq n+1} X_i^2$，并令

$$D_n := F[X_1, \ldots, X_n, Y_n]_{(Y_n)} \cap \bigcap_{i=1}^{n} F[X_1, \ldots, X_n, Y_n]_{(X_i)}$$

并令 $D := \bigcup_n D_n$。那么， D 是一个几乎戴德金整环，其商域为 $F(Y_0, X_1, \dots, X_n, \dots)$，其极大理想为主理想 $M_k := X_k D$ 以及由所有 Y_k生成的（非有限生成）理想 M。

于是，$\mathrm{Crit}(D) = \{M\}$；然而，如果 $t \geq k$，则 $\nu_{Y_t}(M) = 1$and $\nu_{Y_t}(M_k) = 2$。特别地， M 是临界的，但不是 2-临界的，因此 $^2\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$。

对同一例子稍作修改，便可得到不同的临界理想集合。

如果我们定义 $Y_n := \prod_{i \geq n+1} X_i^r$（即使用常数指数 r 而不是 2，但其余构造保持不变），则同样有 M 是临界的、2-临界的、.....、$(r-1)$-临界的，但不是 r-临界的。因此，如果 $n < r$ 且 ^{n}，则 $^n\mathrm{Crit}(D) = \{M\}$；如果 $n \geq r$ 或 $n = \omega$，则 $^n\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$。

如果我们定义 $Y_n := \prod_{i \geq n+1} X_i^i$（如 [3, 例 3.4.2] 中所示），则主理想 $Y_0 D$ 无界。因此，对于每个 M，$\mathrm{Crit}(D) = {}^n\mathrm{Crit}(D) = {}^\omega \mathrm{Crit}(D) = \{M\}$。

问题：是否存在一个几乎戴德金整环 D，使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $^{n+1}\mathrm{Crit}(D) \subsetneq {}^n\mathrm{Crit}(D)$?

4. Anti-SP domains

定义 4.1. 设 D 是一个几乎戴德金整环。若 $\mathrm{Max}(D) = \mathrm{Crit}(D)$，则称 D 为反 SP 整环。

根据 [8, 命题 3.10]，这个条件等价于不存在具有根式分解的有限生成理想；因此，反 SP 整环是“尽可能远离”SP-整环的几乎戴德金整环。在此条件下，用于研究 $\mathrm{Inv}(D)$ 的 [8, 第 5] 节中的方法在第一步就会失效；或许可以通过使用 n-有界或 ω-有界理想来改进 [8] 中的结果。然而，正如下一个命题所示，事实并非如此。

命题 4.2. 设 D 是一个几乎戴德金整环。那么，以下命题等价：

(i) $\mathrm{Crit}(D) = \mathrm{Max}(D)$; (ii) 对某个 $n \in \mathbb{N}$, $^n\mathrm{Crit}(D) = \mathrm{Max}(D)$; (iii) 对所有 $n \in \mathbb{N}$, $^n\mathrm{Crit}(D) = \mathrm{Max}(D)$; (iv) $^\omega\mathrm{Crit}(D) = \mathrm{Max}(D)$; (v) 没有有限生成理想是有界的。

证明。(iv) 和 (v) 根据定义等价。

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$(i) 可由包含关系 $^\omega\mathrm{Crit}(D) \subseteq {}^n\mathrm{Crit}(D) \subseteq \mathrm{Crit}(D)$ 得出。

(i) $\Longrightarrow$ (v) 假设 I 有界，并设 $J := \mathrm{rad}(I)$; 那么， $J^n \subseteq I$存在某个 $n \in \mathbb{N}$。因此，$(J^n)^v \subseteq I^v = I$; 然而，

$$(J^n)^v = (J \cdots J)^v = (J^v \cdots J^v)^v = ((J^v)^n)^v$$

因此 $J^v \neq D$。所以，存在一个 $\alpha \in K$ 使得 $J \subseteq D \cap \alpha D \subsetneq D$。这意味着 $L := D \cap \alpha D$ 是一个有限生成理想，同时也是根理想（因为它包含根理想 J）；特别地，每个包含 L 的极大理想都不是临界的，并且 $\mathrm{Crit}(D) \neq \mathrm{Max}(D)$。□

现在我们要证明，实际上不存在反 SP 整环。

命题 4.3. 设 D 是一个几乎戴德金整环，且 I 是 D 的一个真有限生成理想。那么，ν_I 关于可构造拓扑是下半连续的。

证明. 我们需要证明，对每个 $n \in \mathbb{N}$，$\nu_I^{-1}([0,n]) = \{M \in \mathrm{Max}(D) \mid v_M(I) \leq n\}$ 都是闭集。首先注意到，由于 I 有限生成，$\nu_I^{-1}(0) = \mathcal{D}(I)$ 在可构造拓扑下是闭集；因此，我们只需考虑 $X_n := \nu_I^{-1}([1,n])$。

设 $J := \mathrm{rad}(I)$，并设 $L := I^{-1}J^{n+1}$。取一个极大理想 M：若 $M \notin \mathcal{V}(J)$，则 $v_M(L) = 0$，因为 $v_M(I) = 0 = v_M(J)$。另一方面，若 $M \in \mathcal{V}(J)$，则 $v_M(L) = (n+1)v_M(J) - v_M(I) = (n+1) - v_M(I)$。因此，$v_M(L) > 0$ 当且仅当 $v_M(I) < n+1$，也就是说，当且仅当 $M \in X_n$。由此可知，$\mathcal{V}(L \cap D) = X_n$ 在扎里斯基拓扑下是闭集。然而，在 $\mathcal{V}(I)$ 上，扎里斯基拓扑、逆拓扑和可构造拓扑一致，因此（由于 $X_n \subseteq \mathcal{V}(I)$ 且 $\mathcal{V}(I)$ 在 $\mathcal{M}$ 中是闭集），可知 X_n 在可构造拓扑下也闭。因此，$\nu_I^{-1}([0,n]) = \mathcal{D}(I) \cup X_n$ 在可构造拓扑下是闭集。□

引理 4.4. 设 D 是一个 Jacobson 根非零的反 SP 整环。设 $I \subseteq \mathrm{Jac}(D)$ 是一个非零有限生成理想。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，集合

$$Y_n := \nu_I^{-1}((n, +\infty)) = \{M \in \mathrm{Max}(D) \mid v_M(I) > n\}$$

在 $\mathcal{M}$ 中稠密。

证明. 假设 Y_n 不稠密：那么，存在一个有限生成理想 J，使得闭开集 $\mathcal{V}(J)$ 与 Y_n 的闭包不相交。设 $J' := J + I$：那么，$J' \neq D$，因为每个包含 J 的极大理想也包含 J'（因为 $I \subseteq \mathrm{Jac}(D)$）。设 $M \in \mathcal{M}$：那么，如果 $M \in Y_n$，则 $v_M(J') = 0$（因为 $M \notin \mathcal{V}(J)$）；而如果 $M \notin Y_n$，则 $v_M(J') \leq v_M(I) \leq n$。因此，$\nu_{J'}$ 有界于 n，这与 D 是反 SP 整环这一事实矛盾。故 Y_n 在 $\mathcal{M}$ 中稠密。□

定理 4.5. 设 D 是一个非域的几乎戴德金整环。那么，$\mathrm{Crit}(D) \neq \mathrm{Max}(D)$。特别地，没有任何几乎戴德金整环是反 SP 整环。

证明. 首先假设 $\mathrm{Jac}(D) \neq (0)$，并假设 $\mathrm{Crit}(D) = \mathrm{Max}(D)$：那么，根据命题 4.2，$\nu_I$ 对于 D的每个真有限生成理想都不是有界的。

设 $I \subseteq \mathrm{Jac}(D)$ 是 D 的有限生成理想，并令 $Y_n := \nu_I^{-1}((n, +\infty)) = \{M \in \mathrm{Max}(D) \mid v_M(I) > n\}$。由命题 4.3 可知，每个

Y_n 在 $\mathcal{M}$ 中是开集，并且由引理 4.4 可知它们在 $\mathcal{M}$ 中稠密。因此，$\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是紧豪斯多夫空间 $\mathcal{M}$ 的一族开稠密子集；由贝尔纲定理，它们的交必定稠密，特别是非空。然而，若 $M \in \bigcap_n Y_n$，则对每个 n，$v_M(I) > n$；由于这不可能发生，因此 Crit(D) =Max(D) 不成立。

现在假设 Jac(D) = (0)，并设 I 是一个有限生成理想。那么，$T := (1+I)^{-1}D = \bigcap\{D_M \mid M \in \mathcal{V}(I)\}$ 是一个雅各布森根非零的几乎戴德金整环（事实上，$I \subseteq \mathrm{Jac}(T)$），因此存在 T 的一个真有限生成理想 J，使得$\nu_J : \mathcal{M}_T \longrightarrow \mathbb{N}$ 有界。设 J_0 是 D的一个有限生成理想，且 $J = J_0T$，并令 $L := J_0 + I$。那么，若 $M \notin \mathcal{V}(I)$，则 $\nu_L(M) = v_M(L) = 0$；而若 $M \in \mathcal{V}(I)$，则 $\nu_L(M) = v_M(L) \leq v_{MT}(J) = \nu_J(MT)$。此外，$L \neq D$，因为 LT 包含于 T 中每个包含 J的极大理想。因此，ν_L 是一个非零有界函数。根据命题 4.2，Crit(D) ≠Max(D)。□

前面的结果只涉及有限生成理想；不过，如果也能将这些结果推广到主理想，将会很有意思。若几乎戴德金整环满足以下条件，则称其为 [4]:

- 有界，如果每个主理想都有界；
- 完全无界，如果没有真主理想有界。

推论 3.7 刻画了有界的几乎戴德金整环：D 有界，当且仅当 $^{\omega}\mathrm{Crit}(D) = \emptyset$。完全无界整环的情形更加微妙；对于 [4] 提出的此类整环是否存在的问题，我们无法给出一般性回答，但在两种情况下可以给出否定答案，其中第一种情况根据前面的结果显而易见。

命题 4.6. 设 D 是一个 B´ezout 几乎戴德金整环。那么，D 不是完全无界的。

证明. 若 D 是 B´ezout 整环，则每个有限生成理想都是主理想。由定理 4.5 即得结论。□

命题 4.7. 设 D 是一个几乎戴德金整环，且 Jac($^{\omega}T_1$) ≠(0)。那么，D 不是完全无界的。

证明. 令 $I := \bigcap\{P \mid P \in {}^{\omega}\mathrm{Crit}(D)\}$。那么，$I = \mathrm{Jac}(^{\omega}T_1) \cap D$，从而 $I \neq (0)$；此外，$\mathcal{V}(I) = {}^{\omega}\mathrm{Crit}(D)$。由定理 4.5，Crit($D$) ≠$\mathcal{M}$，从而 $I \neq \mathrm{Jac}(D)$；设 $b \in I \setminus \mathrm{Jac}(D$。那么，存在一个 $r \in D$，使得 $a := 1 - rb$ 是 D 的非单位；此外，根据构造，a 不包含于任何 ω-临界理想。由命题 3.4，ν_{aD} 是有界的。结论得证。□

推论 4.8. 设 D 是一个几乎戴德金整环，满足 |Crit(D)| <∞。那么，D 不是完全无界的。

证明. 如果 Crit(D) 是有限的，那么 $^{\omega}$Crit(D) 也是有限的，因此 $^{\omega}T_1$ 是半局部的，特别是其雅各布森根非零。由命题 4.7 可得所述结论。□

推论 4.9。设 D 是一个几乎戴德金整环，且 Jac(D) $\neq$(0)。那么， D 不是完全无界的。

证明。若 Jac(D) $\neq$ (0)，则 Jac($^{\omega}T_1$) $\neq$ (0) 也成立。结论由命题 4.7 得出。□

回顾一下，若一个整环中的每个非零非单位都可以写成不可约元素的有限乘积，则称该整环为原子的。

推论 4.10。设 D 是一个非戴德金的几乎戴德金整环。若 D 是原子的，则 Jac(D) = (0)。

证明。由 [4, 定理 3.15], ，存在 D 的一个上环 T，它是原子的且完全无界。若 Jac(D) $\neq$ (0)，则 Jac(T) $\neq$ (0) 也成立，这与推论 4.9 矛盾。□

5. SP-散布性

每个几乎戴德金整环都有一个非临界极大理想，这一事实对 SP-散布整环有一个非常强有力的推论。

定理 5.1. 设 D 是一个几乎戴德金整环。那么， D 是 SP-散布的。

证明. 设 α 是 D 的 SP-秩，并设 $T_\alpha := \bigcap\{D_M \mid M \in$Crit$_\alpha(D)\}$: 那么， T_α 的极大理想是 Crit$_\alpha$(D) 中各元素的扩张。因此，Crit(T_α) = Max(T_α)，否则集合 Crit$_{\alpha+1}$(D)（它们是 T_α 的临界理想的收缩）将严格包含于 Crit$_\alpha$(D)。由定理 4.5 可知， T_α 必须是一个域，也就是说， D 是 SP-散布的。□

推论 5.2. 设 D 是一个几乎戴德金整环。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，Crit$_\infty$(D) $=^n$Crit$_\infty$(D) = $^{\omega}$Crit$_\infty$(D) $= \emptyset$ 。

证明。我们有 $^{\omega}$Crit$_\infty$(D) $\subseteq$Crit$_\infty$(D)，且由前一个命题可知 Crit$_\infty$(D) $= \emptyset$。结论得证。□

特别地，关于 SP-散布整环的所有结果实际上都适用于每个几乎戴德金整环；我们用 $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{Z})$ 表示拓扑空间 X 上有界支集连续函数所成的群。

命题 5.3. [8, 定理 5.9] 设 D 是一个 SP-秩为 α 的几乎戴德金整环。那么，

$$\mathrm{Inv}(D) \simeq \bigoplus_{i<\alpha} \mathcal{C}_c(\mathrm{Crit}_i(D) \setminus \mathrm{Crit}_{i+1}(D), \mathbb{Z});$$

特别地，Inv(D) 是自由的。

命题 5.4。（[8, 推论 7.5], [9, 命题 7.5]）设 D 是一个几乎戴德金整环，ℓ 是 D 上的奇异长度函数，且 τ 是相应的理想余长度。那么，ℓ 是根，即，

$$\tau(I) = \tau(\mathrm{rad}(I))$$

对每个理想 I。

最后，我们通过证明集合 $\mathcal{M} \setminus \mathrm{Crit}(D)$ 不仅非空，而且在 $\mathcal{M}$ 中稠密，改进定理 4.5；我们需要以下定义。

定义 5.5。设 D 是一个几乎戴德金整环，且 P 是一个极大理想。P 的 SP 高度是满足 $P \in X_\alpha := \mathrm{Crit}_\alpha(D) \setminus \mathrm{Crit}_{\alpha+1}(D)$ 的序数 α；等价地，P 的 SP 高度是满足 $P \in \mathrm{Crit}_\alpha(D)$ 的最大序数 α。

注意，由定理 5.1 可知 $\bigcup_\alpha X_\alpha = \mathcal{M} \setminus \mathrm{Crit}_\infty(D) = \emptyset$，因此这个定义是良定义的。

定理 5.6。设 D 是一个几乎戴德金整环。那么，集合 $\mathcal{M} \setminus \mathrm{Crit}(D)$ 在 $\mathcal{M}$ 中稠密。

证明。令 $Z := \mathcal{M} \setminus \mathrm{Crit}(D)$。设 P是 D的一个素理想；我们对 P的 SP 高度进行归纳。

若高度为 0，则 $P \in Z \subseteq \overline{Z}$。假设 $\alpha > 0$（因此 P 不是临界的），并且对于每个 SP 高度为 $\beta < \alpha$的素理想 Q，都有 $Q \in \overline{Z}$；那么，$\overline{Z}$ 包含 $Z_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$。设 P 的 SP 高度为 α，即 $P \in X_\alpha$。根据定义，PT_α 在 T_α中不是临界的，因此存在 D 的一个有限生成理想 I，使得 IT_α 在 T_α中是根理想，并且 $IT_\alpha \subseteq PT_\alpha$（因此，$I \subseteq P$）。若 $P \notin \overline{Z}$，则 $\mathcal{M}$ 中存在一个包含 P 、但与 $\overline{Z}$ 不相交，因而也与 Z_α 不相交的开子集 Ω；由于 $\mathcal{V}(J)$ 当 J 遍历 D的有限生成理想时构成 $\mathcal{M}$的一个子基，我们可以假设 $\Omega = \mathcal{V}(J)$。令 $I' := I + J$：于是，I'是有限生成的，$I' \subseteq P$，并且 $\mathcal{V}(I') \cap Z_\alpha \subseteq \mathcal{V}(J) \cap Z_\alpha = \emptyset$。此外，若 $M \notin Z_\alpha$，则 $\nu_{I'}(M) \leq \nu_I(M) = \nu_{IT_\alpha}(M) \leq 1$；因此，$I'$是一个根理想。这将意味着 P 是 D 的一个非临界理想，矛盾；故 P 必属于 $\overline{Z}$。由归纳法，$\overline{Z} = \mathcal{M}$，即$Z$ 在 $\mathcal{M}$中稠密。□

References

[1] MichaelR. Darnel。《格序群理论》，纯粹与应用数学专著与教材第187卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，1995年。[2] Max Dickmann、Niels Schwartz和Marcus Tressl。《谱空间》，新数学专著第35卷。剑桥大学出版社，剑桥，2019年。[3] Marco Fontana、Evan Houston和Thomas Lucas。《整环中的理想分解》，意大利数学联合会讲义第14卷。施普林格，海德堡；意大利数学联合会，博洛尼亚，2013年。

[4] Richard Erwin Hasenauer。几乎戴德金整环的范数集与原子性。《交换代数杂志》，8(1):61–75，2016年。[5] Olivier A. Heubo-Kwegna、Bruce Olberding和Andreas Reinhart。完全整闭Pr¨ufer整环的群论与拓扑不变量。《纯粹与应用代数杂志》，220(12):3927–3947，2016年。[6] G. N¨obeling。E. Specker先生一个定理的推广。《数学发明》，6:41–55，1968年。[7] Bruce Olberding。根理想分解。载于《交换环与幺半群的算术性质》，《纯粹与应用数学讲义》第241卷，第363–377页。Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2005年。[8] Dario Spirito。无根式分解的几乎戴德金整环。《数学论坛》，即将刊出。[9] Dario Spirito。根半星运算。《交换代数通讯》，即将刊出。[10] N. H. Vaughan和R. W. Yeagy。将理想分解为半素理想。《加拿大数学杂志》，30(6):1313–1318，1978年。

Dipartimento di Scienze Matematiche, Informatiche e Fisiche, Università degli Studi di Udine, Udine, Italy电子邮箱：dario.spirito@uniud.it