单值数学中符号同态的解环化

´El´eonore Mangel´巴黎萨克雷高等师范学院´
eleonore.mangel@ens-paris-saclay.fr

Egbert Rijke 卢布尔雅那大学
egbert.rijke@fmf.uni-lj.si

arXiv:2301.10011v1 [math.GR] 24 Jan 2023

摘要——在单值数学中，群范畴至少有两种等价的呈现方式。以通常代数形式呈现的群称为抽象群，而以尖连通 1-型呈现的群称为具体群。由于这两种群范畴描述等价，我们发现每个代数群都唯一对应于一个具体群——其去环化；每个抽象群同态也都唯一对应于具体群之间的一个基点映射。

例如，由所有双射 $[n] \simeq [n]$构成的第 n 个抽象对称群 S_n，对应于由所有 n 元类型构成的具体群。因此，从 S_n 到 S_2 的符号同态应当对应于一个基点映射，它从由所有 BS_n n 元类型构成的类型映射到由所有 BS_2 2 元类型构成的类型。借助单值性公理，我们精确刻画了一个基点映射 $BS_n \to_* BS_2$ 何时是符号同态的去环化。随后，我们给出了符号同态去环化的几种构造。值得注意的是，沿用 Cartier 方法的构造无需引用符号同态。我们的结果已在 agda-unimath 库中形式化。

I. 引言

本文介绍了几种在单值数学中构造符号同态去环化的方法 [1]

$$\mathsf{sign} : S_n \to S_2$$

。在同伦类型论和单值数学中，群 G [3] 的去环化是一个尖连通 1-型 BG，并配备群同构

$$G \cong \Omega BG.$$

定义群的去环化有许多方法。一种方法是通过 [4]，的 Rezk 完备化，另一种方法是通过 G-扭子 [5] 的类型。这两种构造都可以扩展到群同态的去环化：群同态 f 的去环化是一个尖映射 $Bf : BG \to_* BH$，并配备一个同伦，以见证方块

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \Omega BG & \xrightarrow[\Omega Bf]{} & \Omega BH \end{array}$$

交换。每个群以及每个群同态都有唯一的去环化。事实上，群范畴等价于带基点连通1-类型[5]。

然而，对于对称群 S_n，其去环化有一个非常自然的描述：根据单值性公理，它就是由所有 n元素类型 [6], [7], [8]构成的类型 BS_n。这表明，符号同态的去环化或许也存在类似自然的描述。回忆一下，符号同态是唯一一个将换位（$i\,j$）映射到 S_2 的非恒等元素的群同态 $S_n \to S_2$。它可以定义为

$$\mathsf{sign}(e) = \begin{cases} 1 & \text{if the number of inversions of } e \text{ is even} \\ -1 & \text{if the number of inversions of } e \text{ is odd,} \end{cases}$$

其中，置换 $e : [n] \simeq [n]$ 的一个逆序是 $[n]$ 中的两个元素组成的一对 (i, j)，满足 $i < j$ 和 $e(i) > e(j)$。换言之，e 的逆序是严格有序的数对，其中e 颠倒了顺序。

因此，本文的目标是构造一个基点映射

$$Q : BS_n \to_* BS_2$$

它能将任意 n 元类型变为一个 2 元类型，并以此方式使 Q 对符号同态去环化。当然，符号同态是唯一的满群同态 $S_n \to S_2$。因此，我们也可以这样表述目标：构造一个基点连通映射

$$BS_n \to_* BS_2.$$

我们将在定理 23 中证明，条件 $Q : BS_n \to_* BS_2$ 是连通的，确实等价于条件 Q 对符号同态去环化。

然而，由于可以通过 Rezk 完备化或扭子轻易构造符号同态的去环化，我们不禁要问，为何还要另辟蹊径，对符号同态进行去环化。我们的动机之一，是更好地理解如何在单值数学中处理有限类型，或者更广泛地说，如何在任何形式的等价不变数学中处理有限类型。也许我们的主要动机很简单：我们想看看从单值化视角出发，经典数学主题呈现出怎样的面貌，以及如何利用这种单值化视角，在 Agda 这样的计算机证明助手中编写涉及数学概念的程序。

具体而言，由于我们的目标是构造一个对符号同态进行降阶的基点映射，因此我们的构造以任意基数为 n 的类型 X 作为输入，

也就是说，不仅仅是标准的 n 元类型 $[n]$。类型 $[n]$ 拥有许多任意 n 元类型所不具备的额外结构，例如全序。事实上，当 $n \geq 2$ 时，不可能从一个 n 元类型 X 中选出一个特定的双射，将其映射到标准的 n 元类型 $[n]$，因为任何这样的双射选择本身都无法在等价下保持不变。出于同样的原因，当 $n \geq 2$ 时，即使基数为 $n \geq 2$ 的有限类型显然是有元素的，也不可能从一个 n 元类型中选出一个元素。虽然这似乎会限制我们能够为任意 n 元类型编写的程序，但我们注意到，恰恰是构造在等价下保持不变这一性质，使我们能够将符号同态降阶为从 n 元类型到 2 元类型的映射。

agda-unimath 库中的形式化

我们的工作已在 agda-unimath 库中完成形式化[9]。这是一个从单值化视角出发的新型形式化数学库，其规模与 Agda 标准库和立方 Agda 库相当。agda-unimath 库包含了相当一部分有限数学内容，因此对我们的项目很有帮助。我们为项目向 agda-unimath 库添加了以下文件：

有限群论.cartier-去环化-符号-同态 有限群论.去环化-符号-同态 有限群论.轨道-置换 有限群论.置换 有限群论.符号-同态 有限群论.simpson-去环化-符号-同态 有限群论.对换

在撰写本文的过程中，我们发现了一些比已形式化的证明更简短或在概念上更清晰的证明。虽然我们的主要结果都已形式化，但本文呈现的部分证明与已形式化的证明并不完全对应。

关于符号同态确实是群同态这一事实的证明，可以在许多标准的本科代数教材中找到，例如 [10], [1]。我们已经形式化了 [10]，的证明，但本文不再详述。

文章概述

在第 II 节中，我们建立一些记号，并回顾单值数学的一些基本事实，这些内容将在本文后续部分用到。在第 III 节中，我们回顾一种通过 Rezk 完备化对群同态进行去环化的一般方法。在第 IV 节中，我们回顾有限类型、有限类型的可判定子类型的定义和基本性质，以及描述有限类型上的可判定等价关系的几种等价方式。

我们的原创贡献始于第五节及后续部分。在定理 15 中，我们证明有限集上的置换类型 X 等价于 X的循环分解类型。这一事实借助单值性公理得以证明；我们还以单值化视角阐释了对换生成对称群这一事实。

在第 VI 节的定理 23中，我们给出基点映射 $Q : BS_n \to_* BS_2$ 的五个条件，这些条件都等价于 Q 是符号同态的去环化。接着，我们给出符号同态去环化的四种方法。在第 VII 节中，我们利用某个 S_n-作用族的不动点对符号同态进行去环化。在第 VIII 节中，我们利用一个类似的 S_n-作用族的轨道来定义第二种去环化方法。推论 25（定理 23）被用于第 IX 节的定理 37中，按照 Simpson 的建议构造符号同态的一种去环化。最后，在第 X 节的定理 44中，我们再次使用推论 25，按照 Cartier 的方法构造符号同态的一种去环化。最后这种方法尤其值得注意，因为它用于定义映射 $BS_n \to_* BS_2$时无需提及符号同态。本文最后在第 XI 节中构造交错群 A_n的去环化。

致谢

本文包含第一作者在第二作者的指导下´，作为巴黎萨克雷高等师范学院硕士课程的一部分所完成的实习项目成果´。项目主题于 2021 年秋季确定，项目从二月持续到 2022 年七月。在项目期间，关于符号同态定义良好性的问题在 Mathoverflow.net 上引起了广泛关注[11]。虽然该问题与符号同态的去环化并无直接关系，但我们受益于 Bjorn Poonen 对此问题的回答。我们还要感谢 Andrej Bauer、Alex Simpson、Ulrik Buchholtz 和 Tom de Jong 在项目期间进行的宝贵讨论。

基金致谢

第二作者谨此感谢美国空军科学研究办公室通过资助项目 FA9550-21-1-0024 提供的支持，以及斯洛文尼亚研究署研究计划 P1-0294 提供的支持。

II. 初步定义

本文将使用[8]中的记号。特别是，我们将广泛使用一个类型宇宙 $\mathcal{U}$，它对于依赖函数类型（Π）、依赖对类型（Σ）、恒等类型（=）、余积类型（+）、积类型（×）以及命题截断封闭。恒等类型的元素称为恒等证明。回顾一下，单值性公理断言，规范映射

$$\text{equiv-eq} : (A = B) \to (A \simeq B)$$

由 equiv-eq(refl):= 定义：对于任意两个类型 A、B : $\mathcal{U}$，id 都是一个等价，其中从 A 到 B 的等价类型 $A \simeq B$ 定义为从 A 到 B 的双可逆映射类型。有关等价和单值性公理的详尽参考，请参见 [2]。

如果一个类型 P 至多包含一个元素，就称它为命题。可判定命题是一个满足 $P + \neg P$ 的命题 P。我们用 dProp 表示可判定命题的类型。类型 X 的子类型就是定义在 X 上的命题族，而 X 的可判定子类型就是定义在 X 上的可判定命题族。

类型索引类型族在等价上的作用

单值性公理的一个推论对本文尤为重要：宇宙的子类型自动对等价封闭。给定宇宙 $\mathcal{U}$ 的子类型 P，以及两个类型 $X, Y : \mathcal{U}$，我们有一个映射

$$(X \simeq Y) \to (P(X) \Leftrightarrow P(Y)).$$

此外，如果我们将 $\mathcal{U}_P$ 记作类型 $\sum_{(X:\mathcal{U})} P(X)$，那么由单值性可得

$$(X =_{\mathcal{U}_P} Y) \simeq (X \simeq Y).$$

这些观察表明，任何以 P 中的类型为索引的类型族 $A : \mathcal{U}_P \to \mathcal{V}$，都有等价上的作用。也就是说，对于 $\mathcal{U}_P$ 中的任意两个类型 X 和 Y，存在唯一的映射 $e \mapsto A_e$，使得下图

$$\begin{array}{ccc} (X = Y) & & \\ {\scriptstyle \text{equiv-eq}}\downarrow & \searrow^{\text{tr}_A} & \\ (X \simeq Y) & \xrightarrow[e \mapsto A_e]{} & (A_X \simeq A_Y) \end{array}$$

交换。由单值性公理可知 equiv-eq 是一个等价，因此这一点立刻成立。换言之，求值映射

$$\left(\prod_{(Y:\mathcal{U})} \prod_{(q:P(Y))} (X \simeq Y) \to (A_X \simeq A_Y) \right) \to (A_X \simeq A_X)$$

在恒等函数处对每个类型 $X : \mathcal{U}_P$ 都是一个等价。具体而言，A 在等价上的作用 $e \mapsto A_e$ 是满足 $A_{\mathsf{id}} = \mathsf{id}$ 的唯一映射族。A 在等价上的作用通常使我们能够绕开传输，或者更好地理解沿着恒等证明进行的传输；这些恒等证明通过单值性对应于等价。

我们还注意到，对于任意一族以 $X : \mathcal{U}_P$ 为指标的映射 $f_X : A_X \to B_X$，以及子宇宙 P 中的每个等价 $e : X \simeq Y$，我们都得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} A_X & \xrightarrow{A_e} & A_Y \\ {\scriptstyle f_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_Y} \\ B_X & \xrightarrow[B_e]{} & B_Y. \end{array}$$

这由等价归纳得出，这是单值性的一个推论，因为 $A_{\mathsf{id}} = \mathsf{id}$ 和 $B_{\mathsf{id}} = \mathsf{id}$。

命题截断

我们简要回顾一下命题截断运算，它在我们的工作中至关重要。命题截断是一种运算 $A \mapsto \|A\|$，它接受任意类型 A并返回一个命题 $\|A\|$。命题 $\|A\|$ 自带一个映射 $\eta : A \to \|A\|$，称为命题截断的单位，并且满足如下泛性质：从 A 到命题 P的任意映射 $A \to P$ 都唯一地通过 η分解，如图所示

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ {\scriptstyle \eta}\downarrow & \searrow & \\ \|A\| & \dashrightarrow & P. \end{array}$$

理解命题 $\|A\|$ 的一种好方法是，它断言类型 A 是有元素的。换句话说，命题截断为我们提供了一种证明或断言某个类型有元素的方法，而无需展示该类型的某个特定元素。事实上，有时我们可以证明某个类型有元素，却无法构造出一个元素。

III. 通过 Rezk 完备化对群同态去环化

对一个群进行去环化的一种基本方法 G 是取只有一个对象的预群胚的 Rezk 完备化 $*$，其态射为$\hom(*,*) := G$。回顾 [4]，一个预范畴C 由一个对象类型，以及对任意两个对象 X 和Y的一个态射集合$\hom(X, Y)$ 组成，并配备满足范畴定律的复合和恒等态射。一个范畴是满足“外部单值性”条件的预范畴：对任意两个对象 X 和 Y，典范映射

$$(X = Y) \to (X \cong Y)$$

从 X 到 Y的恒等证明到从 X 到 Y的同构，是一个等价。预范畴 C 的 Rezk 完备化是一个范畴 $\|C\|_{\mathsf{Rezk}}$，配备函子 $\eta : C \to \|C\|_{\mathsf{Rezk}}$，并满足以下泛性质：对于任意范畴 D，我们都有一个等价

$$- \circ \eta : (\|C\|_{\mathsf{Rezk}} \to D) \simeq (C \to D)$$

范畴之间的等价。显然，Rezk 完备化是函子性的，也就是说，对于预范畴之间的任意函子 $F : C \to D$，都存在唯一的函子 $\|F\|_{\mathsf{Rezk}} : \|C\|_{\mathsf{Rezk}} \to \|D\|_{\mathsf{Rezk}}$，使得以下函子交换图

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ {\scriptstyle \eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ \|C\|_{\mathsf{Rezk}} & \xrightarrow[\|F\|_{\mathsf{Rezk}}]{} & \|D\|_{\mathsf{Rezk}} \end{array}$$

交换。

预群胚就是每个态射都是同构的预范畴，而群胚则是 Rezk 完备的预群胚。请注意，群胚就是 1-类型，而群胚之间的函子就是 1-类型之间的映射。特别地，如果 $f : G \to H$ 是一个群同态，

那么我们可以将 f 视为从单对象预群胚 G 到单对象预群胚 H 的函子，并对 f 作 Rezk 完备化。群 G 的 Rezk 完备化是一个尖连通 1-型 BG，而群同态 $f : G \to H$ 的 Rezk 完备化是一个基点映射 $Bf : BG \to_* BH$。Bf 是群同态 f 的去环化这一事实，可直接由函子交换方块得出

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ BG & \xrightarrow[Bf]{} & BH. \end{array}$$

经 Rezk 完备化得到的函子 $G \mapsto BG$ 是从群范畴到尖连通 1-型范畴的一个等价。特别地，符号同态的去环化存在。然而，经 Rezk 完备化得到的符号同态的去环化，并未描述为一种“自然”的运算，即以与符号同态相匹配的方式，将任意 n 元类型转化为 2 元类型。

IV. 单值数学中的有限类型

本节将回顾有限类型的定义，这是单值数学中通常采用的定义 [6],[7], [8]。我们会省略大部分论断的证明，但要指出的是，这些证明都已形式化。

有限类型

标准有限型是一类类型族 $[-] : \mathbb{N} \to \mathcal{U}$，其递归定义为 $[0] :\equiv \emptyset$ 和 $[k+1] :\equiv [k] + \mathbf{1}$。如果一个类型 X 仅与某个标准有限型等价，则称其为有限的；也就是说，它配备了一个类型为

$$\mathsf{is\text{-}finite}(X) :\equiv \left\| \sum_{(k:\mathbb{N})} [k] \simeq X \right\|$$

类型 $\mathsf{is\text{-}finite}(X)$ 等价于 $\sum_{(k:\ \mathbb{N})} \| [k] \simeq X \|$。特别地，每个有限类型都有唯一且定义良好的、类型为 $\mathbb{N}$ 的基数。

如果一个类型 X 的恒等类型是可判定的，即存在一个元素，则称其为离散类型

$$d(x, y) : (x = y) + (x \neq y)$$

对于每个 x、$y : X$。Hedberg 定理 [12] 断言，离散类型总是集合，因为其恒等类型是命题。这意味着离散性是一种性质，进而意味着所有有限类型都是离散的。

定义 1。n 元类型的类型定义为

$$BS_n :\equiv \sum_{X:\mathcal{U}} \| [n] \simeq X \|.$$

理解 BS_n 的一种好方法是将其看作所有n元素集合构成的群胚。下面的命题是单值性公理的直接推论。注意，这意味着对于 $n \geq 2$，BS_n 不是可缩的。

命题 2。类型 BS_n 是一个有基点的连通类型，其环空间为 $S_n :\equiv ([n] \simeq [n])$。

另一方面，根据单值性公理，类型 $\sum_{(X:\ \mathcal{U})} [n] \simeq X$ 是可缩的。这说明了为何必须使用命题截断来表达 X 是一个 n 元类型，而不能将等价 $[n] \simeq X$ 作为结构施加在 X 上。

以下命题表明，一个带基点的 $(n+1)$ 元类型等价地描述为一个 n 元类型。该等价的底层映射将一个配备了 $x : X$ 的 $(n+1)$ 元类型 X 映射到类型

$$Y :\equiv \sum_{(y:X)} x \neq y,$$

逆映射的底层映射由 $Y \mapsto Y + \mathbf{1}$ 给出。

命题 3. 存在一个等价

$$\left(\sum_{(X:BS_{n+1})} X \right) \simeq BS_n$$

从带基点的 $(n+1)$ 元类型到 n 元类型。

在 $n = 2$ 的特殊情形下，我们得到以下推论，这一点已在 [13] 的定理 II.2 中指出。

推论 4. 带基点的 2 元类型是可缩的。因此，求值映射

$$\mathsf{ev}_0 : ([2] \simeq X) \to X$$

由 $\mathsf{ev}_0(e) :\equiv e(0)$ 给出，是一个等价。

有限类型的可判定子类型

接下来，我们回顾有限类型的可判定子类型理论。回想一下，可判定嵌入 $B \hookrightarrow_{\mathsf{d}} A$ 是一个嵌入 $f : B \hookrightarrow A$，其纤维 f 是可判定的；也就是说，f 配备了一个依赖函数

$$\prod_{(x:X)} \mathsf{fib}_f(x) + \neg \mathsf{fib}_f(x)$$

根据 [8] 的定理 17.4.2，类型 A 的可判定子类型所成的类型等价于

$$\sum_{(X:\mathcal{U})} X \hookrightarrow_{\mathsf{d}} A$$

到 A 中的可判定嵌入所成的类型。对于下面的定义，回想一下，若 $B : \mathcal{U}$ 是一个类型，那么我们记作

$$\mathcal{U}_{(B)} :\equiv \sum_{(X:\mathcal{U})} \| B \simeq X \|.$$

换句话说，类型 $\mathcal{U}_{(B)}$ 是宇宙在 B 处的连通分支。

定义 5. 对于任意两个类型 A 和 B，我们定义二项式类型

$$\binom{A}{B} :\equiv \sum_{Y:\mathcal{U}_{(B)}} Y \hookrightarrow_{\mathsf{d}} A$$

换言之，二项式类型 $\binom{A}{B}$ 是由与 B 大小相同的 A 的可判定子类型构成的类型。特别地，若 A 是一个含 n 个元素的类型，且 B 是一个含 k 个元素的类型，那么 A 的 k 元素子类型所构成的类型 $\binom{A}{B}$ 是一个含 $\binom{n}{k}$ 个元素的类型。

命题 6（定理 17.6.9，见 [8]）。如果 A 和 B 是有限类型，分别有 n 和 k 个元素，那么类型 $\binom{A}{B}$ 是有限的，有 $\binom{n}{k}$ 个元素。

我们特别关注类型 $\binom{X}{[2]}$，它由 X 的可判定二元素子类型构成。注意

$$\binom{X}{[2]} \simeq \sum_{(P:X\to \mathsf{dProp})} \left\| [2] \simeq \textstyle\sum_{(x:X)} P(x) \right\|.$$

有限类型上的可判定等价关系

定义 7。类型 X 上的可判定等价关系是指 X 上的等价关系 R，满足对于每个 $x, y : X$，$R(x, y)$ 都是可判定命题。我们将 X 上所有可判定等价关系构成的类型记为 $\mathsf{Eq\text{-}Rel_d}(X)$。

有限集按等价关系 R 取商后所得的商集是有限的，当且仅当 R 是可判定等价关系。事实上，对 [8] 中的定理 18.2.5 稍作修改即可证明，我们有一个等价

$$\mathsf{Eq\text{-}Rel_d}(X) \simeq \sum_{(Y:\mathbb{F})} X \twoheadrightarrow Y.$$

对于任意有限集 X。我们还将用到以下事实；该事实在 [8]，的练习 18.4 中以更一般的形式陈述，并且也已被形式化：

命题 8. 有限集 X 上的可判定等价关系的类型 $\mathsf{Eq\text{-}Rel_d}(X)$ 等价于以下类型

$$\Sigma\text{-}\mathsf{decomp}_{\mathbb{F}}(X) := \sum_{(Y:\mathbb{F})} \sum_{(Z:Y\to\sum_{(Z:\mathbb{F})}\|Z\|)} X \simeq \textstyle\sum_{(y:Y)} Z(y)$$

X 的有限指标 Σ-分解的类型。

V. 对换

定义 9. 对任意 2 元类型 X，我们将自同构交换$x : X \simeq X$ 定义为以下等价的复合

$$X \xrightarrow{\mathsf{ev}_0^{-1}} ([2] \simeq X) \xrightarrow{\mathsf{succ}^*} ([2] \simeq X) \xrightarrow{\mathsf{ev}_0} X$$

其中 $\mathsf{succ} : [2] \simeq [2]$ 是 $[2]$ 上的后继等价。

二元素集合上的交换函数与恒等函数不齐次同伦，并且是幂等的。交换函数使我们能够在任意类型上定义对换。

定义 10. 离散类型X 上的等价 $e: X \simeq X$ 称为 X 上的换位，当且仅当类型

$$\mathsf{support}(e) := \sum_{(x:X)} e(x) \neq x$$

是 X 的一个二元素可判定子类型。

命题 11. 离散类型 X 的每个二元素可判定子类型都唯一确定一个换位。

证明。考虑 X的一个二元素可判定子类型 P。然后我们定义 $f : X \to X$ 如下：

$$f(x) = \begin{cases} \mathsf{pr}_1(\mathsf{swap}(f(x), p)) & \text{if } p : P(x) \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此可知，f 的支撑等价于二元素可判定子类型 P。

为证明唯一性，假设 f 和 g 是两个支撑为 P的对换。由于假设 X 是离散类型，因此在 P的补集上，$f(x) = g(x)$。此外，由于 P 是 X 的一个二元素子类型，并且在 P 上，$f(x) \neq x$和 $g(x) \neq x$，因此 $f(x) = g(x)$。由此得出 $f = g$。□

我们的下一个目标是证明对换生成对称群 S_n。当然，这一事实可以用通常的代数方法证明，正如我们在 agda-unimath 的形式化中所做的那样。不过，从单值化视角来看，每个置换都可以唯一地（忽略顺序）表示为循环置换的乘积，这一事实颇为优美。

定义 12. 设有限类型 X 的基数为 n。X 上的循环结构类型定义为

$$\mathsf{cycle}(X) := \sum_{(f:X\to X)} \|(\mathbb{Z}/n, \mathsf{succ}) = (X, f)\|$$

有限循环的类型定义为

$$\mathsf{Cycle}_{\mathbb{F}} := \sum_{(X:\mathbb{F})} \mathsf{cycle}(X).$$

若 (X, f) 是一个有限循环，我们将 X 称为底层类型。

我们回顾[5]，类型

$$\mathsf{Cycle}_n := \sum_{(X:BS_n)} \mathsf{cycle}(X)$$

是循环群 $\mathbb{Z}/n$ 的去环化。注意 $\mathbb{Z}/0 = \mathbb{Z}$，因此不存在阶为 0 的有限循环。特别地，每个有限循环的底层类型都有元素。更一般地，循环可以定义为圆上的一个集合丛，且其全空间连通，不过这里我们不需要如此一般的定义。

定义 13. 考虑一个有限集 X。X 的一个循环分解是一个三元组 (Y, C, e)，由一个集合 Y、一个族 $C : Y \to \mathsf{Cycle}_{\mathbb{F}}$（其成员为有限循环）以及一个等价构成

$$e : X \simeq \sum_{y:Y} C(y).$$

我们将 X 的循环分解类型记作 $\mathsf{Cycle\text{-}decomp}(X)$。

引理 14。考虑一个基数为 n 的有限类型 X，以及一个映射 $f : X \to X$。那么命题

$$\|(\mathbb{Z}/n, \mathsf{succ}) = (X, f)\|$$

成立，当且仅当对于每个 $x, y : X$，都存在一个自然数 k，使得

$$f^k(x) = y.$$

证明。在正向上，我们可以假设 $(\mathbb{Z}/n, \mathsf{succ}) = (X, f)$。对于任意两个整数 x和 y，模 n 存在一个自然数 k，使得.....这一事实

$$\mathsf{succ}^k(x) = y$$

模 n 是由 1 是 $\mathbb{Z}/n$的生成元这一事实直接得出的初等结论。

反向上，注意到 X 是有元素的，因此我们可以假设有一个元素 $x : X$。由于 X 的基数为 n，因此对于每个 $y : X$，都存在唯一的自然数 $0 \leq k < n$，使得 $f^k(x) = y$。这就建立了一个双射 $e : \mathbb{Z}/n \equiv X$，使得 $e(k) = f^k(x)$。由此可知，以下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n & \xrightarrow{e} & X \\ {\scriptstyle \mathsf{succ}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{Z}/n & \xrightarrow[e]{} & X \end{array}$$

交换，因此我们得到等同 $(\mathbb{Z}/n, \mathsf{succ}) = (X, f)$。

□

在下面的定理中，我们将通过一个相当冗长的证明，说明 X 上的置换类型等价于 X的循环分解类型。证明这一主张需要一些功夫，因此不妨问问这种单值化方法有什么好处。我们认为它值得关注的一个原因是：与通常的代数方法不同，通常的方法会证明每个置换都是若干循环置换的复合，且该复合在重新排序意义下唯一；而在这里，我们直接断言，X 上的置换类型是将 X 分解为循环类型的模空间。传统方法需要取一个商集，将重新排序后相同的因式分解等同起来；而在这里，我们将改为运用单值性公理。我们的另一个动机是，我们想看看从单值化视角来看数学是什么样的，而我们认为这是一个很有启发性的例子。

定理 15. 设 X 是一个有限集。那么我们有一个等价

$$\mathsf{Cycle\text{-}decomp}(X) \simeq (X \simeq X).$$

证明. 首先，我们注意到，通过重新排列循环分解的数据，可以立即得到一个等价

$$\mathsf{Cycle\text{-}decomp}(X) \simeq \sum_{((Y,Z,e):\Sigma\text{-}\mathsf{decomp}_{\mathbb{F}}(X))} \prod_{(y:Y)} \mathsf{cycle}(Z_y)$$

此外，通过 命题 8 我们得到一个等价

$$\mathsf{Cycle\text{-}decomp}(X) \simeq \sum_{(R:\mathsf{Eq\text{-}Rel}_{\mathsf{d}}(X))} \prod_{(y:X/R)} \mathsf{cycle}(\mathsf{fib}_{q_R}(y))$$

这个等价已经用到了单值性公理。由上述等价可知，只需构造一个等价

$$\left(\sum_{(R:\mathsf{Eq\text{-}Rel}_{\mathsf{d}}(X))} \prod_{(y:X/R)} \mathsf{cycle}(\mathsf{fib}_{q_R}(y))\right) \simeq (X \simeq X). \quad (*)$$

为构造这个等价的底层映射，考虑 X 上的一个可判定等价关系 R。对于任意 $y : X/R$，记 $F_y := \mathsf{fib}_{q_R}(y)$，并在每个 F_y 上考虑一个循环结构 $s_y : F_y \to F_y$。那么每个 s_y 都是一个等价，因此映射

$$\mathsf{tot}(s) : \left(\textstyle\sum_{(y:X/R)} F_y\right) \to \left(\textstyle\sum_{(y:X/R)} F_y\right)$$

由 $\mathsf{tot}(s)(y, z) := (y, s_y(z))$ 给出，是一个等价。由于存在一个典范等价 $e : X \simeq \sum_{(y:X/R)} F_y$，我们得到唯一的等价 $f_{R,s} : X \simeq X$，使得

$$e(f_{R,s}(x)) = \mathsf{tot}(s)(e(x)).$$

这定义了一个映射

$$\psi : \left(\sum_{(R:\mathsf{Eq\text{-}Rel}_{\mathsf{d}}(X))} \prod_{(y:X/R)} \mathsf{cycle}(\mathsf{fib}_{q_R}(y))\right) \to (X \simeq X).$$

为了证明映射 ψ 是一个等价，我们证明，对于每个等价 $f : X \simeq X$，都存在唯一的等价关系 R，它在其每个等价类 $\mathsf{fib}_{q_R}(y)$ 上配备一个循环结构 s_y，使得 $\psi(R, s) = f$。

给定一个等价 $f : X \simeq X$，我们定义由以下内容诱导的等价关系 R_f

$$R_f(x, y) := \exists_{(n:\mathbb{N})} f^n(x) = y.$$

换句话说，R_f 是关系 $x, y \mapsto f(x) = y$的自反传递闭包。注意，由于假设X 是有限的，R_f是对称的。我们将用 $q_f : X \to X/R_f$ 表示商映射。

接下来，我们需要在等价类上构造一个循环结构 $F_y :=$纤维$_{q_f}(y)$，对每个 $y : X/R_f$。注意$f : X \simeq X$ 限制后得到一个等价$s_{f,y} : F_y \simeq F_y$，因为 $R_f(x, f(x))$对每个 $x : X$都显然成立。由引理 14 可立即推出命题

$$\|(\mathbb{Z}/n, \mathsf{succ}) = (F_y, s_{f,y})\|$$

成立。此外，由于$s_{f,y}$ 是通过限制 f定义的，我们有

$$e(f(x)) = \mathsf{tot}(s_f)(e(x)).$$

我们得出 $\psi(R_f, s_f) = f$，因此我们在 $\mathsf{fib}_\psi(f)$ 中构造出了一个收缩中心。

要证明 $\mathsf{fib}_\psi(f)$ 中至多有一个元素，考虑 X 上的等价关系 R，其等价类为 $F_y :=\mathsf{fib}_{q_R}(y)$，其中 $y : X/R$。此外，对每个 $y : X/R$，考虑一个循环结构 $s_y : F_y \to F_y$，使得$\psi(R, s) = f$。那么，f是满足以下条件的唯一等价 $X \simeq X$

$$e(f(x)) = \mathsf{tot}(s)(e(x)),$$

其中 $e : X \simeq \sum_{(y:X/R)} F_y$。由于 s 是定义在 R的等价类上的族循环结构，因此由引理 14 以及 f的唯一刻画可知， $R(x,y)$成立，当且仅当存在一个 $n : \mathbb{N}$，使得 $f^n(x) = y$。这意味着 $R = R_f$。

为了完成证明，我们将使用一种重新校准策略：只需证明，对于等价类 s 上的任意循环结构 R_f，只要 $\psi(R_f, s) = f$成立，就必有 $s = s_f$。将 s 从 R 重新校准为 R_f，使我们得以避开一次复杂的传输操作。关于这一点的进一步说明，见下文备注 17。

尚需证明：若我们有一个循环结构族 $s_y : F_y \to F_y$，定义在 R_f的等价类上，并且满足 $\psi(R_f, s) = f$，那么对每个 $y : X/R_f$，都有 $s_y = s_{f,y}$。由于

$$e(f(x)) = \mathsf{tot}(s)(e(x)) \qquad \text{and} \qquad e(f(x)) = \mathsf{tot}(s_f)(e(x))$$

由此可得 $\mathsf{tot}(s) = \mathsf{tot}(s_f)$。这意味着 $\mathsf{tot}(s)$ 在 F_y 上的限制等于 $\mathsf{tot}(s_f)$ 在F_y上的限制。换言之，$s_y = s_{f,y}$。 □

经过单值化迂回，我们最终得到了经典结果：对换生成对称群。

命题 16. 对换生成有限集 X 的自同构群 $X \simeq X$。

证明。要证明的是，由所列对换复合而成的映射

$$\mathsf{list}\binom{X}{[2]} \to (X \simeq X)$$

是满射。由定理15可知，对于每个自同构$f : X \simeq X$，存在唯一的循环分解(Y, C, e)，使得X 满足

$$e(f(x)) = (y, s_y(z)), \qquad \text{where} \qquad e(x) = (y, z).$$

由于我们正在证明一个命题，因此可以假设 $Y = [m]$，其中 m 是该自同构的循环数 f。于是我们有 $C : [m] \to$ 循环$_{\mathbb{F}}$。此外，可以假设对于每个 $y : [m]$，都有 $(\mathbb{Z}/k, \mathsf{succ}) = C_y$。于是，对于每个 $y : [m]$，存在唯一的自同构 $f_y : X \simeq X$，使得

$$e(f_y(x)) := \begin{cases} (y, \mathsf{succ}(z)) & \text{if } e(x) = (y, z) \text{ for some } z \\ e(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由于映射 f_y的支撑（即满足 $f_y(x) \neq x$ 的元素$x : X$ 的类型）两两不相交，因此我们有

$$f = f_0 \circ \cdots \circ f_{m-1}.$$

因此，只需证明对于任意 $k \geq 1$，后继映射 $\mathsf{succ} : \mathbb{Z}/k \to \mathbb{Z}/k$ 是对换的复合。这很容易：

$$\mathsf{succ} = (0\,1)(1\,2)\cdots((k-2)\,(k-1)).$$ □

备注 17. 证明中使用的重新校准策略定理 15 可以形式化地精确定义。考虑一个类型A，它配备了 $a : A$ 以及一个类型族 B，它定义在 A 上并配备了

with $b : B(a)$。如果以下两个条件成立，那么全空间 $\sum_{(x:A)} B(x)$ 是可缩的：

1) 对于任意一对 $(x, y) : \sum_{(x:\ A)} B(x)$，都有 $a = x$。

2) 对于任意 $y : B(x)$，都有 $b = y$。

事实上，第二个条件蕴含 $B(a)$ 是可缩的。这意味着第一个条件足以证明全空间是可缩的。

注 18. 有限集 X 的自同构类型等价于 X 的循环分解类型，这一想法可以推广到 X 的自同态。映射类型 $X \to X$ 等价于由以下对象组成的四元组 (Y, C, T, e) 的类型：

1) 一个有限类型 Y，2) 一个族 $C : Y \to$ 有限循环的 $\mathsf{Cycle}_{\mathbb{F}}$，其定义在 Y 上；3) 一个族 $T : \prod_{(y:\ Y)} C(y) \to$ 有限（有根）树的 $\mathsf{Tree}_{\mathbb{F}}$，其中

$$\mathsf{Tree}_{\mathbb{F}} := \mathsf{W}_{(X:\mathbb{F})} X,$$

and

4）和等价

$$e : X \simeq \sum_{(y:Y)} \sum_{(z:C(y))} T(y, z),$$

其中，树的底层类型定义为其节点类型。

读者不妨通过如下方式证明这个等价：取有限类型 X 上的自同态 $f : X \to X$，并将顶点为 X、从 x 指向 $f(x)$ 的图想象成若干互不相交的循环，每个循环的每个顶点上都附着一棵有限树。

VI. 检测符号同态的解环

考虑一个基点映射

$$Q : BS_n \to_* BS_2$$

其中 $n \geq 2$，且 $\varphi : Q_{[n]} \simeq [2]$ 见证了 Q 是一个基点映射。在本节中，我们将精确刻画何时 Q 是符号同态的去环化。映射Q 称为符号同态的去环化，如果方块

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\mathsf{sign}} & S_2 \\ {\scriptstyle \text{eq-equiv}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{eq-equiv}} \\ \Omega BS_n & \xrightarrow[\Omega Q]{} & \Omega BS_2 \end{array}$$

交换。请注意，$n = 1$ 这种情况单独处理：基点映射的类型 $BS_1 \to_* BS_2$ 是可缩的，而这个可缩类型中的所有基点映射都是符号同态的去环化。

由等价 φ，我们得到一个基点 $q : Q_{[n]}$。还请注意，通过单值性，我们有一个等价上的作用

$$e \mapsto Q_e : (X \simeq Y) \to (Q_X \simeq Q_Y),$$

以 $X, Y : BS_n$ 为索引；这是使得以下方块成立的唯一映射族

$$\begin{array}{ccc} (X = Y) & \xrightarrow{\mathsf{ap}_Q} & (Q_X = Q_Y) \\ {\scriptstyle \text{equiv-eq}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{equiv-eq}} \\ (X \simeq Y) & \xrightarrow[e \mapsto Q_e]{} & (Q_X \simeq Q_Y) \end{array}$$

交换。此外，我们得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} ([n] = [n]) & \xrightarrow{\Omega Q} & ([2] = [2]) \\ {\scriptstyle \text{equiv-eq}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ ([n] \simeq [n]) & \xrightarrow[e \mapsto Q_e]{} & (Q_{[n]} \simeq Q_{[n]}). \end{array}$$

定义 19。我们将 $\mathsf{sign}^Q : S_n \to S_2$ 定义为由恒等证明所附带的唯一映射

$$\mathsf{sign}^Q(e) = \begin{cases} 1 & \text{if } q = Q_e(q) \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

引理 20。如果对于 $[n]$ 上的每个换位 $(i\,j)$，$Q_{(i\,j)}$ 都交换 $Q_{[n]}$ 的元素，那么 sign 和 sign^Q 在换位上相等。

证明。设 i 和 j 是 $[n]$ 的两个元素，且满足 $i < j$。根据假设，$q \neq Q_{(i\,j)}(q)$。这意味着 $\mathsf{sign}^Q(i\,j) = -1 = \mathsf{sign}(i\,j)$。□

引理 21。考虑一个置换 $e : S_n$。那么这个方块

$$\begin{array}{ccc} Q_{[n]} & \xrightarrow{Q_e} & Q_{[n]} \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ [2] & \xrightarrow[\mathsf{sign}^Q(e)]{} & [2] \end{array}$$

交换。

证明。首先注意，所述方块中的每个类型都是一个二元素类型，且方块中的所有映射都是等价。因此，只需证明它在某个值处交换；也就是说，只需证明

$$\mathsf{sign}^Q(e)(\varphi(q)) = \varphi(Q_e(q)).$$

由于 $Q_{[n]}$ 具有可判定的相等性，我们可以对 $q = Q_e(q)$ 或 $q \neq Q_e(q)$ 进行分类讨论。

若 $q = Q_e(q)$，则有恒等证明 $\mathsf{sign}^Q(e) = 1$ 以及 $\varphi(q) = \varphi(Q_e(q))$。这证明了第一种情形下的结论。

若 $q \neq Q_e(q)$，则有恒等证明 $\mathsf{sign}^Q(e) = -1$ 以及 $\mathsf{swap}(q) = Q_e(q)$。由此可得

$$\mathsf{sign}^Q(e)(\varphi(q)) = \varphi(\mathsf{swap}(q)) = \varphi(Q_e(q)).$$

这证明了第二种情况下的断言。□

命题 22. 假设对于 $[n]$上的每个换位 $(i\,j)$，$Q_{(i\,j)}$ 交换 $Q_{[n]}$ 的元素。那么我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\mathsf{sign}} & S_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ \Omega BS_n & \xrightarrow[\Omega\sigma]{} & \Omega BS_2 \end{array}$$

由此可得 $\mathsf{sign}^Q = \mathsf{sign}$。

证明。只需证明这个方块

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\mathsf{sign}^Q} & S_2 \\ \simeq\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ \Omega BS_n & \xrightarrow[\Omega Q]{} & \Omega BS_2 \end{array}$$

交换。事实上，如果这个方形交换，那么 sign^Q 是群同态。由于置换群S_n 由对换生成，并且对于 $[n]$ 上的每个换位 $(i\,j)$，都有 $\mathsf{sign}(i\,j) = \mathsf{sign}^Q(i\,j)$，因此 sign 和 sign^Q 是相等的群同态。

带有 sign^Q 的方形交换，当且仅当三角形

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{e \mapsto Q_e} & (Q_{[n]} \simeq Q_{[n]}) \\ & {\scriptstyle \mathsf{sign}^Q}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ & & S_2 \end{array}$$

交换。这直接由 引理 21 得出。□

我们得出，σ 是符号群同态的去环化。

定理 23。考虑一个基点映射 $Q : BS_n \to_* BS_2$，其中 $n \geq 2$。以下条件等价：

1) 全空间

$$\sum_{(X : BS_n)} Q_X$$

是连通的。

2) 映射 Q 是连通的。

3) 映射

$$e \mapsto Q_e : S_n \to (Q_{[n]} \simeq Q_{[n]})$$

是满射的。

4) 等价 $Q_{(i\,j)} : Q_{[n]} \simeq Q_{[n]}$ 对于 $[n]$ 上的任意换位 $(i\,j)$，都会交换 $Q_{[n]}$ 的元素。

5) 方形

$$\begin{array}{ccc} S_n & \xrightarrow{\mathsf{sign}} & S_2 \\ \simeq\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ \Omega BS_n & \xrightarrow[\Omega Q]{} & \Omega BS_2 \end{array}$$

交换。

证明。1) 等价于 2) 这一事实，源于 Q 的全空间等价于映射 $Q : BS_n \to_* BS_2$ 的纤维，而这一点已在定理 II.7 中得到证明

的 [13]。2) 等价于 3) 这一事实成立，因为Q 是满射，因此它是连通的，当且仅当 ΩQ是满射，这正是表述 3) 的另一种等价方式。4) 蕴含 3) 是显然的。要证明 3) 蕴含 4)，回想一下，对换生成置换群S_n。因此由 3) 可知，存在一个换位$(i\,j)$ 使得 $Q_{(i\,j)}$ 交换 $Q_{[n]}$的元素。然而，如果其中一个换位交换了 $Q_{[n]}$的元素，那么它们全都会交换这些元素，因为

$$Q_{(a\,b)} = Q_{(a\,c)(b\,d)(a\,b)(b\,d)(a\,c)} = Q_{(c\,d)}.$$

4) 推出 5) 这一事实已在 命题22中证明，而 5) 推出 4) 则显而易见。□

利用符号同态存在去环化这一事实，我们立即得到以下推论。

推论 24. 基点连通映射 $BS_n \to_* BS_2$ 的类型是可缩的。

构造符号同态去环化的一种方法，是从类型族 $D : BS_n \to \mathcal{U}$ 出发，将基点映射 $Q : BS_n \to_* BS_2$ 构造为商类型的族。

推论 25. 设类型族 $D : BS_n \to \mathcal{U}$ 配备了一个点 $d : D_{[n]}$，并设等价关系族 R_X 定义在由 $X : BS_n$ 索引的 D_X 上，且配备了一个基点等价

$$\varphi : D_{[n]}/R_{[n]} \simeq_* [2].$$

若对 $[n]$ 上的每个换位 $(i\,j)$，都有 $\neg R_{[n]}(d, D_{(i\,j)}(d))$，则基点映射

$$X \mapsto D_X/R_X : BS_n \to_* BS_2$$

是符号同态的一个去环化。

证明。首先，我们注意到，对于每个 X，类型 D_X/R_X 确实是一个 2 元类型，因为「是一个 2 元类型」是一种性质，而且我们有等价 φ。因此，我们有一个带基点映射

$$Q : BS_n \to_* BS_2$$

由 $Q_X := D_X/R_X$ 给出。根据条件 d 和 $D_{(i\,j)}(d)$ 不由 $R_{[n]}$ 联系，可知对于 $[n]$ 上的每个换位 $(i\,j)$，$q(d) \neq q(D_{(i\,j)}(d))$，其中 q 是商映射。注意这个方块

$$\begin{array}{ccc} D_X & \xrightarrow{D_e} & D_Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ Q_X & \xrightarrow[Q_e]{} & Q_Y \end{array}$$

对每个等价 $e : X \simeq Y$ 都交换。因此，对于 $[n]$ 上的每个换位 $(i\,j)$，都有 $q(d) \neq Q_{(i\,j)}(q(d))$。这意味着 Q 是符号同态的去环化。□

VII. 带固定点的符号同态降环

定义 26. 考虑一个含 n 个元素的集合 X。那么 S_n 作用于集合

$$A_X := ([n] \simeq X) \to S_2$$

在作用 $(\alpha \cdot f)(h) := \mathsf{sign}(\alpha) \circ f(h \circ \alpha^{-1})$ 下。此外，定义

$$Q_X := \mathsf{fix}(A_X)$$

为 A_X 上 S_n 作用的不动点类型。

命题 27. 存在一个基点等价

$$Q_{[n]} \simeq_* [2].$$

特别地，对于每个 $X : BS_n$，类型 Q_X 有两个元素。

证明. 假设 $f : A_{[n]}$ 是 S_n在$A_{[n]}$上的作用的一个不动点。那么可以推出

$$f(\alpha) = \mathsf{sign}(\alpha) \circ f(\alpha \circ \alpha^{-1}) = \mathsf{sign}(\alpha) \circ f(1).$$

这表明所有不动点都具有 $\alpha \mapsto$符号$(\alpha)\circ(\pm 1)$ 的形式。换句话说，不动点就是 $\pm$符号。我们选择符号作为 $Q_{[n]}$ 的基点。□

定理 28. 基点映射 $Q : BS_n \to_* BS_2$ 是符号同态的去环化。

证明. 根据 定理 23 只需验证 $Q_{(i\,j)}$ 会交换 $Q_{[n]}$ 中的元素，对每个换位 $(i\,j)$ 在 $[n]$上。

首先注意，等价上的作用 $e \mapsto A_e$ 由$A_e(f)(h) := f(e^{-1} \circ h)$给出。容易看出，这个等价上的作用保留不动点，因为 A_{id} 保留不动点，并且它在 Q 上的限制是 Q的等价上的作用。因此

$$Q_{(i\,j)}(\pm\mathsf{sign})(\alpha) = \pm\mathsf{sign}((i\,j) \circ \alpha) = \mp\mathsf{sign}(\alpha).$$

换句话说，$Q_{(i\,j)}$ 交换 $Q_{[n]}$中的元素。□

VIII. Delooping the sign homomorphism with orbits

定义 29. 考虑一个 n-元素类型 X。那么 S_n 作用于集合

$$B_X := ([n] \simeq X) \times S_2$$

其作用为 $\alpha \cdot (h, \sigma) := (h \circ \alpha^{-1}, \mathsf{sign}(\alpha) \circ \sigma)$。我们定义

$$Q_X := B_X/\sim$$

其中，若(h, σ)和(h', σ')属于 S_n的同一轨道，则$(h, \sigma) \sim (h', \sigma')$。

命题 30. 存在一个基点等价

$$Q_{[n]} \simeq_* [2].$$

特别地，对于每个 $X : BS_n$，类型 Q_X 都有两个元素。

证明。注意，

$$(h, \sigma) \sim (1, \mathsf{sign}(h) \circ \sigma)$$

对于任意的 (h,σ)：$B_{[2]}$。这表明恰好有两个轨道：$(1,1)$ 的轨道和 $(1,-1)$ 的轨道。 □

定理31。基点映射 $Q : BS_n \to_* BS_2$ 是符号同态的去环化。

证明。根据 定理 23 只需验证 $Q_{(i\,j)}$ 会交换 $Q_{[n]}$ 中的元素，对于 $(i\,j)$ 在 $[n]$上的每个换位。

首先注意，等价上的作用 $e \mapsto B_e$ 由 $B_e(h,\sigma)) := (e \circ h, \sigma)$ 给出。很容易看出，这个等价上的作用保持轨道，因为 A_{id} 保持轨道；而它到 Q 的商集是 Q 的等价上的作用。由此可得

$$Q_{(i\,j)}([1,\pm 1]_\sim) = [(i\,j),\pm 1]_\sim = [1,\mp 1]_\sim.$$

换言之，$Q_{(i\,j)}$ 会交换 $Q_{[n]}$ 中的元素。 □

IX. 辛普森的符号同态解环

本节将使用 推论 25 基于 Alex Simpson 的一项建议，定义符号同态的一种去环化。这或许是描述符号同态去环化的最简单方式。我们将固定一个自然数 $n \geq 2$。

定义32。我们定义类型族 $E : BS_n \to \mathcal{U}$，如下：

$$E_X := [n] \simeq X.$$

典范元素 d: $E_{[n]}$ 定义为 $d := \mathsf{id}$。

E 对等价的作用描述如下：

$$E_e(f) := e \circ f$$

对于任意等价 $e : X \simeq Y$。

定义33。对于任意 $X : BS_n$，我们定义一个可判定关系$R_X : E_X \to E_X \to$ 可判定命题，如下：

$$R_X(f,g) := \big(\mathsf{sign}(g^{-1} \circ f) = 1\big)$$

引理34。对于任意 $X : BS_n$，关系 R_X 是E_X上的一个等价关系。

证明。R_X 的自反性可由下式得出

$$\mathsf{sign}(f^{-1} \circ f) = \mathsf{sign}(\mathsf{id}) = 1.$$

为证明 R_X 是对称的，假设 $\mathsf{sign}(g^{-1} \circ f) = 1$。于是我们有

$$\mathsf{sign}(f^{-1} \circ g) = \mathsf{sign}(g^{-1} \circ f)^{-1} = 1.$$

为证明 R_X 是传递的，假设 $\mathsf{sign}(h^{-1} \circ g) = 1$且 $\mathsf{sign}(g^{-1} \circ f) = 1$。于是我们有

$$\mathsf{sign}(h^{-1} \circ f) = \mathsf{sign}(h^{-1} \circ g) \circ \mathsf{sign}(g^{-1} \circ f) = 1.$$ □

引理35。对于 $[n]$ 上的任意换位 $(i\,j)$，我们有

$$\neg R_{[n]}(d, E_{(i\,j)}(d)).$$

证明。根据符号同态的定义，我们有 $\mathsf{sign}(i\,j) = -1$。因此可得

$$\mathsf{sign}(E_{(i\,j)}(d)^{-1} \circ d) = \mathsf{sign}(i\,j) = -1 \neq 1.$$ □

引理36。存在一个基点等价

$$\varphi : E_{[n]}/R_{[n]} \simeq_* [2].$$

证明。只需证明 $R_{[n]}$ 恰有两个等价类。由引理35 可知至少存在两个等价类，因此只需证明至多存在两个等价类。考虑 f，$f' : E_{[n]}$ 使得 $\neg R_{[n]}(f, f')$，并考虑 $g : E_{[n]}$。于是可得

$$\mathsf{sign}(f'^{-1} \circ g) \circ \mathsf{sign}(g^{-1} \circ f) = \mathsf{sign}(f'^{-1} \circ f) = -1.$$

这意味着 $\mathsf{sign}(f'^{-1} \circ g)$ 和 $\mathsf{sign}(g^{-1} \circ f)$ 不可能同时为 -1，因此其中一个为 1。 □

定理 37。辛普森映射 $Q : BS_n \to_* BS_2$ 定义为

$$Q_X := E_X/R_X$$

是符号同态的去环化。

证明。在 引理35 中，我们证明了

$$\neg R_{[n]}(d, E_{(i\,j)}(d))$$

对每个换位 $(i\,j)$ 在 $[n]$上都成立；并且在 引理36中，我们构造了一个基点等价

$$\varphi : E_{[n]}/R_{[n]} \simeq_* [2].$$

因此，该断言由 推论 25得出。 □

X. CARTIER 对符号同态的去环化

在本节中，我们将再次使用 推论 25，基于 Cartier 的方法，给出符号同态去环化的另一种定义 [14]。与之前的构造不同，Cartier 映射

$$C : BS_n \to_* BS_2$$

在 定理 44 的陈述中给出的定义并未提及符号同态。当然，为了证明 C 是符号同态的去环化，我们仍会提及符号同态。

回顾一下，有限集 X 上的完全无向图的边，可以等价地描述为 X 的二元（可判定）子集。我们还注意到，有限类型的任何有限子集都自动是可判定的。Cartier 对符号同态进行去环化的核心思想是：有限集X 上的完全无向图的定向类型上存在一个自然的等价关系，其商集是一个二元素集。将一个 n 元素集 X 映射到该商集的运算，便给出了符号同态的去环化。

定义 38。我们将 X 上完全无向图的定向类型 D_X 定义为这样的函数类型：为 X 的每个二元可判定子集选取一个元素，即，

$$D_X := \prod_{P:\binom{X}{[2]}} \sum_{x:X} P(x).$$

典范定向 d: $D_{[2]}$ 定义为

$$d(P) := \max(P).$$

D 在等价上的作用由下式描述:

$$D_e(u, P) := e(u(P \circ e)).$$

事实上，若 $e : X \simeq Y$ 是一个等价，$u : D_X$ 是 X 的完全无向图的一个定向，并且 $P : Y \to$ 可判定命题是 Y 的一个二元可判定子集，那么 $u(P \circ e)$ 是二元可判定子集 $P \circ e$ 的一个元素；此外，等价 e 限制为等价 $\sum_{(x:X)} P(e(x)) \simeq \sum_{(y:Y)} P(y)$。要看出 D_e 确实描述了 D 在等价上的作用，我们必须证明下方交换图对

$$\begin{array}{ccc} (X = Y) & \longrightarrow & (D_X = D_Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X \simeq Y) & \longrightarrow & (D_X \simeq D_Y) \end{array}$$

每个等同 $p : X = Y$ 都交换。这通过对 p 作路径归纳来证明。事实上，$D_{\mathrm{id}}(u, P) = u(P)$ 成立。换句话说，$D_{\mathrm{id}} =$ 是恒等映射。

定义 39。我们分两步定义 D_X 上的可判定关系 R_X：

1) 对于 D_X 中任意两个元素 u 和 v，我们将相对逆序的自然数 $m(u, v)$ 定义为 u 与 v 不同的二元可判定子集的数量。

2) 对于 D_X 中的任意两个元素 u 和 v，我们定义

$$R_X(u, v) := (m(u, v) \equiv 0 \mod 2).$$

引理 40. 对于 $[n]$ 上的任意换位 $(i\,j)$，定向 $D_{(i\,j)}(d)$ 与典范定向 d 不通过 $R_{[n]}$ 相关。

证明. 定义 F 为 $[n]$ 的二元可判定子集的类型，其中 d 和 $D_{(i\,j)}(d)$ 不同。我们的目标是证明 F 的基数为奇数。

注意，换位 $(i\,j)$ 在 $[n]$ 的二元可判定子集集合上诱导出一个 $\mathbb{Z}/2$-作用，其定义如下:

$$P \mapsto P \circ (i\,j).$$

现在我们观察到

$$\big((i\,j)(d(P \circ (i\,j))) = d(P)\big) \Leftrightarrow \big((i\,j)(d(P)) = d(P \circ (i\,j))\big)$$

对于 $[n]$ 的任意二元可判定子集 P。这意味着，如果 $P \in F$，那么 P 的整个轨道都包含在 F 中。包含两个元素的轨道对 F 贡献偶数个元素。因此，只需证明 F 恰好包含一个不动点。不动点是与 $\{i, j\}$ 不相交的二元子集，以及子集 $\{i, j\}$ 本身。如果 P 与 $\{i, j\}$ 不相交，那么

$$D_{(i\,j)}(d, P) = (i\,j)(d(P \circ (i\,j))) = (i\,j)(d(P)) = d(P).$$

显然，这些子集 P 不属于 F。另一方面，如果 $P = \{i, j\}$，那么我们可以得出

$$D_{(i\,j)}(d, P) = (i\,j)(d(P \circ (i\,j))) = (i\,j)(d(P)) = \min(P).$$

因此我们看到 $\{i, j\} \in F$，证明完毕。 □

为了证明 R_X 是一个等价关系，我们证明以下引理。

引理 41. 对于类型 D_X 的任意三个元素 u_1、u_2 和 u_3，我们有

$$m(u_1, u_3) \equiv m(u_1, u_2) + m(u_2, u_3) \mod 2.$$

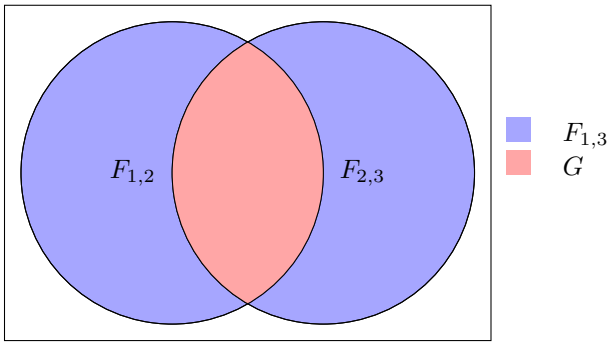
证明。对于每个 i、$j \in \{1, 2, 3\}$，我们定义

$$F_{i,j} := \{P \mid u_i(P) \neq u_j(P)\} \subseteq \tbinom{X}{[2]}.$$

那么，$m(u_i, u_j)$ 是 $F_{i,j}$ 的基数。此外，设 $G := F_{1,2} \cap F_{2,3}$。我们断言

$$F_{1,3} = (F_{1,2} \setminus F_{2,3}) \cup (F_{2,3} \setminus F_{1,2}) = (F_{1,2} \cup F_{2,3}) \setminus G.$$

X 的二元可判定子集



为了看出 $F_{1,3}$ 确实是 $F_{1,2}$ 与 $F_{2,3}$ 的对称差，设 P 是 X 的一个二元可判定子集。若 $P \in F_{1,3}$，也就是说，若 $u_1(P) \neq u_3(P)$，那么命题 $u_1(P) = u_2(P)$ 与 $u_2(P) = u_3(P)$ 不可能同时为假，因为 P 是一个二元素集合；它们也不可能同时为真，因为根据假设，$u_1(P) \neq u_3(P)$。这就证明了 $F_{1,3}$ 包含于 $(F_{1,2} \cup F_{2,3}) \setminus G$。反过来，有两种情况:

1) 若 $P \in F_{1,2} \setminus F_{2,3}$，则有 $u_1(P) \neq u_2(P)$ 且$u_2(P) = u_3(P)$。因此 $u_1(P) \neq u_3(P)$。2) 若 $P \in F_{2,3} \setminus F_{1,2}$，则有 $u_1(P) = u_2(P)$ 且$u_2(P) \neq u_3(P)$。因此 $u_1(P) \neq u_3(P)$。

这就证明了该断言。

由于 $F_{1,3}$ 是 $F_{1,2}$ 与 $F_{2,3}$的对称差，因此

$$|F_{1,3}| = |F_{1,2}| + |F_{2,3}| - 2 \times |G|\,.$$

我们得出结论：$m(u_1, u_3)$与 $m(u_1, u_2)+m(u_2, u_3)$具有相同的奇偶性。 □

推论 42. 关系 R_X 是D_X上的等价关系。

证明。显然，R_X 是自反且对称的。要证明 R_X 具有传递性，设 u_1、u_2 和 u_3 是.....的元素

D_X 使得 $R_X(u_1, u_2)$ 且 $R_X(u_2, u_3)$。根据 引理 41 可得 $m(u_1, u_3) \equiv 0$ 模 2，因此 $R_X(u_1, u_3)$ 且 R_X具有传递性。□

推论 43. 存在一个基点等价

$$\varphi : D_{[n]}/R_{[n]} \simeq_* [2].$$

证明。 只需证明 $R_{[n]}$ 恰有两个等价类。根据 引理 40 可知，至少有两个等价类。为证明 $R_{[n]}$ 至多有两个不同的等价类，设 u 和 u' 是 X 上完全图的定向，且满足 $\neg R_{[n]}(u, u')$，再设 v是第三种定向。那么我们有

$$m(u, v) + m(v, u') \equiv 1 \mod 2.$$

这意味着，要么 $m(u, v) \equiv 0$和 $m(v, u') \equiv 1$模 2，要么 $m(u, v) \equiv 1$ 和 $m(v, u') \equiv 0$ 模 2。因此，要么 v 等价于 u，要么 v 等价于 u'。□

定理 44. Cartier 映射 $C : BS_n \to_* BS_2$ 定义为

$$C_X := D_X/R_X$$

是符号同态的去环化。

证明。 在 引理 40 中，我们证明了

$$\neg R_{[n]}(d, D_{(i\,j)}(d))$$

对每个换位 $(i\,j)$ 在 $[n]$上都成立，而在 推论 43中，我们构造了一个基点等价

$$\varphi : D_{[n]}/R_{[n]} \simeq_* [2].$$

因此，该断言由 推论 25 得出。□

XI. 具体交错群

最后，我们通过构造每个 $n \geq 2$ 对应的具体交错群 A_n 来结束本文。令

$$Q : BS_n \to_* BS_2$$

为符号同态的一个去环化。回想一下，我们在 推论 24 中证明了，符号同态的去环化类型是可缩的，因此我们采用哪种方式构造符号同态并不重要。

定义 45。设 $n \geq 2$ 是一个自然数。我们将具体交错群 BA_n 定义为

$$BA_n := \sum_{X:BS_n} Q_X.$$

我们将记 $A_n :=\Omega BA_n$。

以下定理为我们的定义提供了依据：

定理 46. 具体交错群 BA_n 是一个尖连通 1-型，适合于一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} BA_n & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ {\scriptstyle \mathsf{pr}_1}\downarrow & & \downarrow \\ BS_n & \xrightarrow[Q]{} & BS_2 \end{array}$$

证明。 事实是 BA_n 是尖的，这直接源于 Q 是尖的。由于 BA_n 是一个 1-类型的依赖和，因此 BA_n 是一个 1-类型。 事实是 BA_n是连通的，这可由 定理 23得出。最后一个断言是 [13]的定理 II.7 的特例。□

参考文献

[1] N. Bourbaki，《代数 I》。第 1–3 章，《数学元素》丛书（柏林）。施普林格出版社，柏林，1998 年，法文译本；重印 1989 年英文译本 [MR0979982 (90d:00002)]。[2] 单值基础项目，《同伦类型论：数学的单值基础》。高等研究院：https://homotopytypetheory.org/book，2013 年。[3] U. Buchholtz、F. van Doorn 和 E. Rijke，“同伦类型论中的高阶群”，载于 LICS '18——第 33 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会。ACM，纽约，2018 年。[4] B. Ahrens、K. Kapulkin 和 M. Shulman，“单值范畴与 Rezk 完备化”，载于《2013 年秋季扩展摘要——几何分析、类型论、同伦论与单值基础》，《数学研究视角趋势》丛书，CRM 巴塞罗那，Birkh¨auser/施普林格出版社，尚，2015 年，第 3 卷，第 75–76 页。[5] M. Bezem、U. Buchholtz、P. Cagne、B. I. Dundas 和 D. R. Grayson，“对称性”，https://github.com/UniMath/SymmetryBook。[6] B. Yorgey，“组合物种与标记结构”，2014 年，学位论文。[7] D. Frumin、H. Geuvers、L. Gondelman 和 N. v. d. Weide，“同伦类型论中的有限集”，载于《第七届 ACM SIGPLAN 认证程序与证明国际会议论文集》，CPP 2018 丛书。计算机协会，2018 年，第 201–214 页。[8] E. Rijke，《同伦类型论导论》。剑桥大学出版社，2023 年，即将出版。[9] E. Rijke、E. Bonnevier、J. Prieto-Cubides 等，“Agda 中的单值数学”，2021 年。[在线资源]。可访问：https://github.com/UniMath/agda-unimath/ [10] J. J. Rotman，《群论导论》。施普林格科学与商业媒体，2012 年，第 148 卷。[11] T. Campion，“为什么置换的符号是良定义的？——概念上的解释”，MathOverflow。[在线资源]。可访问：https://mathoverflow.net/q/417690 [12] M. Hedberg，“Martin-L¨of 类型论的相干定理”，《函数式编程杂志》，第 8 卷，第 4 期，第 413–436 页，1998 年。[13] U. Buchholtz 和 E. Rijke，“同伦类型论中的实射影空间”，载于《2017 年第 32 届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会》。IEEE，[皮斯卡塔韦], 新泽西州，2017 年，第 8 页。[14] P. Cartier，“关于置换符号的注记”，Enseign. Math，第 16 卷，第 7–19 页，1970 年。