arXiv:2301.10031v2 [cs.CC] 2 Mar 2023

三次图上的树宽是 NP完全的（及相关结果）

Hans L. Bodlaender[1], ´EdouardBonnet[2], Lars Jaffke[3], Du˘sanKnop[4], Paloma T. Lima[5],Martin Milani˘c[6], Sebastian Ordyniak[7],Sukanya Pandey[1],和Ond˘rej Such´y[4]

[1]乌得勒支大学，荷兰，h.l.bodlaender@uu.nl[2]LIP，里昂高等师范学院，法国，edouard.bonnet@ens-lyon.fr[3]卑尔根大学，挪威，lars.jaffke@uib.no[4]布拉格捷克理工大学，捷克，{dusan.knop,ondrej.suchy}@fit.cvut.cz[5]哥本哈根信息技术大学，丹麦，palt@itu.dk[6]FAMNIT 和 IAM，普里莫斯卡大学，科佩尔，斯洛文尼亚，martin.milanic@upr.si[7]利兹大学，英国，sordyniak@gmail.com

摘要

本文给出了一个非常简单的证明，说明 Treewidth 是 NP 完全的；该证明还表明，这个问题在余二分图类上也是 NP 完全的。随后，我们改进了 Bodlaender 和 Thilikos 于 1997 年 得出的结果：他们证明了在最大度不超过 9 的图上，Treewidth是 NP 完全的；我们则证明了Treewidth 在三次图上是 NP 完全的。

1 引言

树宽是研究最广泛的图参数之一，在理论研究和实际应用中都有许多用途。判定给定图的树宽并求出相应树分解这一问题，单凭自身便催生了大量研究，包括精确算法、针对特殊图类的算法、近似算法、上界和下界启发式、参数化算法等。本文考察一个基本问题：给定图 G和整数 k，判定 G 的树宽是否至多为 k。

该问题于1987年由 Arnborg 等人证明为 NP完全 [1]；他们的证明还表明，该问题在余二分图上也是 NP 完全的。由于图（不含平行边）的树宽在边细分后不会改变，因此很容易得出且众所周知， Treewidth 在二分图上是 NP 完全的。1997年，Bodlaender 和

Thilikos [4] 修改了 Arnborg 等人的构造，并证明将输入限制为最大度为 9 的图时，Treewidth仍然是 NP 完全的。本文将这个上界 9 进一步缩小到 3。我们的证明采用一种简单的变换，其正确性可由关于树宽的众所周知的事实和简单的观察得出。我们还给出了一个更简单的证明，证明 Treewidth 在任意图（以及余二分图）上是 NP 完全的。由这些结果我们得到了若干推论，特别是证明了对于每个固定的 Treewidth ， d-正则图以及可嵌入三维网格的图上， $d \geq 3$均为 NP 完全。

我们的方法基于 [1]和 [4] 中的方法，采用了更精简、简化的论证，并加入了一些新的基础性思路。作为归约的起点，我们使用 NP 完全问题 Cutwidth 在三次图上的问题和 Pathwidth；Monien 和 Sudborough [6] 于 1987年给出了这些问题的 NP 完全性证明。

本文结构如下。第 2 节介绍树宽的基本定义及一些著名结果。第3 节给出 Treewidth 在余二分图上的 NP 完全性的一种简单证明，该证明采用了基于路径宽度的基本变换。第 4 节给出我们的主要结果：证明 Tree-width 在三次图上的 NP 完全性（即每个顶点的度均为 3 的图）。第 5 节推导出一些额外的 NP 完全性结果：对每个固定的 d，在 d -正则图上成立；对可嵌入三维网格的图也成立。第 6 节给出一些总结性评论。

2 定义与预备知识

全文中，我们用 n 表示图 G 的顶点数。本文所考虑的所有图均为无向图。若图 G 的每个顶点的度均为 d，则称其为 d- 正则图。若图 G 是 3- 正则的，则称其为立方 图。若图 G 的每个顶点的度至多为 3，则称 G 为次立方图。所有数均假定为整数，区间 $[a, b]$ 表示整数集合 $\{a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b\}$。此外，对于正整数 a，我们用 $[a]$ 表示区间 $[1, a]$。若图 G 可以通过对图 H 进行零次或多次顶点删除、边删除和边收缩得到，则称图 G 是图 H 的图 *minor* 。对于图 G 及其顶点集 $A \subseteq V$（G），我们将通过在 A 中每一对不同的不相邻顶点之间添加一条边所得到的图记为 $G +$ 团(A)，也就是说，将 A 转化为一个团。

图 G 的树分解 是一个二元组 (T, β)，其中 T 是一棵树， β 是一个映射，为 T 的每个节点 x 指定一个袋 $\beta(x) \subseteq V(G)$，并满足以下条件： G 的每个顶点都属于某个袋；对于 G 的每条边，都存在一个袋包含该边的两个端点；对于 G的每个顶点， T中满足 $v \in \beta(x)$ 的节点集合 x 在 T中诱导出一个连通子树。树分解 (T, β) 的宽度 是 T中所有节点 x 对应的 $|\beta(x)| - 1$ 的最大值。图 G的树宽，记作 $\mathtt{tw}(G)$，是 G的树分解的最小宽度。路径分解和路径宽度（记作 $\mathtt{pw}(G)$）的定义类似，不过

还要求树 T 是一条路径。

我们将用到一些关于树宽和树分解的众所周知的事实。

引理2.1 (民间结果)。 设 G 是一个图，且 (T, β) 是 G的一个宽度为 k的树分解。则以下结论成立。

1。设 G中的一个团为 W。那么， T 中存在一个节点 x，使得 $W \subseteq \beta(x)$。

2. 假设 $v, w \in V(G)$, $\{v, w\} \notin E(G)$。若 T中存在一个节点 x，满足 $v, w \in \beta(x)$，那么 (T, β) 是通过向图 G添加边 $\{v, w\}$ 所得到的图的一个宽度为 k 的树分解。

3. 假设 $W \subseteq V(G)$。那么， T 中存在一个节点 x，使得从 G中移除 $\beta(x)$ 及其所有关联边后， G 的每个连通分量都至多包含 W的 $n/2$ 个顶点。*4.* 设 T的一个叶节点为 y，其邻点为 y'。若 $\beta(y) \subseteq \beta(y')$，那么从树分解 (T, β) 中移除 y 及其袋，将得到 G 的另一个宽度至多为 k的树分解。*5.* 若 G的一个图 *minor* 为 H，则 $\mathtt{tw}(H) \leq \mathtt{tw}(G)$，且 $\mathtt{pw}(H) \leq \mathtt{pw}(G)$。

图 G 是 余二分 的，当且仅当 $V(G) = A \cup B$ 由 A 一个团和 B 一个团组成（也就是说，G 的补图是二分图）。以下事实也广为人知，并可从 Arnborg 等人的证明中隐含地推出。 [1] 为完整起见，我们在此给出证明。

引理 2.2 (例如参见 [1])。 令 G 为一个余二分图，其中 $V(G) = A \cup B$，且 A和 B 是团。那么：

1. $\mathtt{tw}(G) = \mathtt{pw}(G)$.
2. G 有一个路径分解 (P, β)，其宽度等于 $\mathtt{tw}(G)$，使得 $A \subseteq \beta(p_1)$且 $B \subseteq \beta(p_r)$，其中 p_1 和 p_r 是 P的两个端点。

证明。 假设 (T, β) 是 G 的一个树分解，其宽度为 $\mathtt{tw}(G)$。根据引理 2.1(1)，存在一个节点 x 在 T 中满足 $A \subseteq \beta(x)$，以及一个节点 y 在 T 中满足 $B \subseteq \beta(y)$。令 P为从 x 到 y 在 T中的路径。

如果 T有不属于 P的节点，那么我们可以执行以下步骤。取 T中的一个叶节点 z，且该叶节点不属于 P。令 z'为 T中 z的邻点。对于每个 $v \in A \cap \beta(z)$，都有$v \in \beta(z')$，因为 z' 位于从 z 到 x的路径上；对于每个 $v \in B \cap \beta(z)$，都有$v \in \beta(z')$，因为 z' 位于从 z 到 y的路径上。因此，根据引理2.1(4)，我们可以从T 中移除 z，从而得到 G的另一个树分解。只要还能继续执行这一步，就重复执行，最终即可得到所需结果。 □

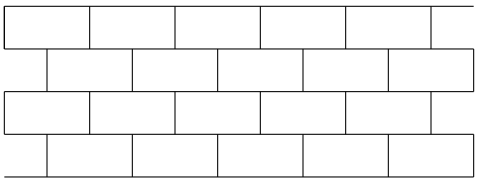


图 1：一面有 5 行、12 列的砖墙。

图 G 的顶点分离数记作 $\mathtt{vsn}(G)$，其定义为：对 G顶点集的所有排序 $\sigma = (v_1、\ldots、v_n)$ 取最小值，再对所有 $i \in \{1,\ldots,n\}$ 取最大值，其中计数的是满足以下条件的顶点 v_j： $j > i$，且 v_j在 $\{v_1,\ldots,v_i\}$中有一个邻点。Kinnersley证明了路径宽度的以下刻画。

定理 2.3 (Kinnersley [5])。每个图的路径宽度都等于其顶点分离数。

Treewidth 是以下判定问题：给定一个图 G 和一个整数 k， G 的树宽是否至多为 k? 问题 Pathwidth 和 Vertex SeparationNumber 的定义类似。

1987年，Arnborg、Corneil 和 Proskurowski 证明了 Tree-width 在余二分图类中是 NP 完全的 [1]。十年后，Bodlaender 和 Thilikos [4] 证明了 Treewidth 在最大度至多为 9 的图上是 NP 完全的。Monien 和 Sudborough [6] 证明了 Vertex Separation Number 在最大度至多为 3 的平面图上是 NP 完全的。将这一结果与定理2.3 直接结合，可得以下结论。

定理 2.4 (Monien 和 Sudborough [6])。 Pathwidth 在最大度至多为3的平面图上是 *NP* 完全的。

一种广为人知的图类型是砖墙。一个有 r 行和 c列的砖墙有 $r \times c$ 个顶点。这里不再给出形式化定义，因为从图1中可以清楚地看出这一概念。

众所周知， $n \times r$ 网格的路径宽度和树宽均为 $\min\{n, r\}$，例如参见引理 87 和 88] [3, 。由于任意砖墙都是网格的子图，因此上界对砖墙也成立，而标准构造给出了以下结果。

引理 *2.5*（民间结果）。设B_{rc} 是一个有 r 行和 c 列的砖墙。那么$\mathtt{tw}(B_{r,c}) \leq \mathtt{pw}(B_{r,c}) \leq c$，并且存在一个 B_r 上的路径分解（P, β），其宽度为 c，其中 $\beta(p_1)$ 是 B_{rc} 第一列上的顶点集合，而 $\beta(p_q)$是B_{rc}最后一列上的顶点集合； p_1 和 p_r 是 P的两个端点。

图 G 的线性排序 是一个双射 $f\colon V(G) \to \{1,\ldots,n\}$。图 G 的割宽是

$$\max_{i \in [n]} \Big| \big\{ \{v,w\} \in E(G) \;\big|\; f(v) \leq i < f(w) \big\} \Big|.$$

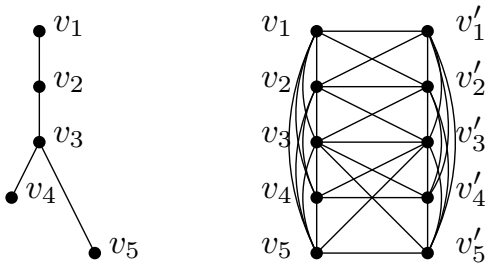


图2：一个包含 F（G）的图 G 。

图 G 的割宽 记作 $\mathtt{cw}(G)$，是图 G 的线性排序的最小割宽。

该 Cutwidth 问题要求：给定一个图 G 和一个整数 k，判断 G 的割宽是否至多为 k。Monien 和 Sudborough [6] 证明了 Cutwidth 在最大度为三的图上是NP完全的（使用问题名称 MinimumCut Linear Arrangement）。由于他们的证明不会生成度为一的顶点，并且细分一条边不会改变图的割宽，因此可以从他们的证明得到下一个结果。

定理2.6 (Monien 和 Sudborough [6]). Cutwidth 在三次图上是*NP*完全的。

3 余二分图的一个更简单证明

本节给出一个简单的证明，说明 Treewidth 是NP完全的。我们的证明借鉴了 Arnborg 等人关于 NP 完全性的证明中的一些思路 [1], ，但改为采用从 Pathwidth出发的一个非常简单的变换。

设 G 是一个图。我们将由 G 按如下方式得到的图记为 F（G）。 F（G）的顶点由两份副本组成：对于每个 $v \in V$（G），都有 v 和 v'；我们分别将集合 V（G）和 $\{v' \mid v \in V$（G）$\}$记为 V和V'。此外，对于每个 $v \in V$（G），图 F（G）都包含一条连接 v 和 v'的边；对于每条边 $\{u, v\} \in E$（G），它包含一条连接 u 和 v' 的边，以及一条连接 v 和 u'的边。最后， F（G）包含 V中的任意一对不同顶点之间的所有边，以及 V'中的任意一对不同顶点之间的所有边。注意，集合 V和 V' 在 F（G）中都是团。特别地，G 是余二分图。图2给出了一个例子。

引理3.1。 设 G 是一个图。那么， $\mathtt{tw}(F(G)) = \mathtt{pw}(F(G)) = n + \mathtt{pw}(G)$，其中$n = |V(G)|$。

证明。 首先，我们证明 $\mathtt{pw}(F(G)) \leq n + \mathtt{pw}(G)$。设 $k = \mathtt{pw}(G)$。取 G 的一个宽度为 k 的路径分解 (P, β)，其中 $P = (p_1, \ldots, p_r)$。现在，令 $\gamma(p_i)$ 为 $F(G)$ 的一个顶点集合，定义如下：

- 对于每个满足存在一个带有 $v \in \beta(p_j)$ 的 $j \geq i$ 的 $v \in V(G)$，将 v 添加到 $\gamma(p_i)$。

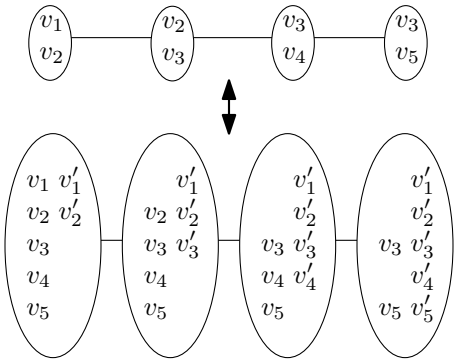


图3：图 G （见图2）的路径分解，以及 F（G）对应的路径分解。

- 对于每个满足存在一个带有 $v \in \beta(p_j)$ 的 $j \leq i$ 的 $v \in V(G)$，将 v' 添加到 $\gamma(p_i)$。

将这一构造应用于图 G 和 F（G）（图2）的示例如图3所示。

我们声称，(P, γ) 是 $F(G)$ 的一个宽度为 $n + k$ 的路径分解。我们首先验证 (P, γ) 是一个路径分解。路径分解的第一和第三个条件显然满足。注意，$V \subseteq \gamma(p_1)$，且 $V' \subseteq \gamma(p_r)$。因此，对于 $F(G)$ 中连接两个属于 V 的顶点或两个属于 V' 的顶点的每条边，在 (P, γ) 中都有一个袋包含该边的两个端点，即分别对应节点 p_1 或 p_r 的袋。考虑一条边 $\{v, v'\}$，其对应顶点为 $v \in V(G)$。存在一个节点 p_v，使得 $v \in \beta(p_v)$，因此 $v, v' \in \gamma(p_v)$。考虑 $F(G)$ 中的一条边 $\{v, w'\}$，它对应于一条边 $\{v, w\} \in E(G)$。存在一个节点 p_{vw}，使得 $v, w \in \beta(p_{vw})$。现在，$v, v', w, w' \in \gamma(p_{vw})$。

为证明宽度为 $n + k$，考虑某个袋 $\gamma(p_i)$ 和一个顶点 $v \in V(G)$。共有三种可能的情况：

1. 对于每个满足 $v \in \beta(p_j)$ 的 j，$j > i$。现在，$v \in \gamma(p_i)$；$v' \notin \gamma(p_i)$。

2. 对于每个满足 $v \in \beta(p_j)$ 的 j，$j < i$。现在，$v' \in \gamma(p_i)$；$v \notin \gamma(p_i)$。

3. 如果前两种情况都不成立，那么存在一个满足 $v \in \beta(p_j)$ 的 $j \leq i$，以及一个满足 $v \in \beta(p_{j'})$ 的 $j' \geq i$。根据路径分解的定义，可得$v \in \beta(p_i)$。根据 γ 的构造，我们有 v, $v' \in \gamma(p_i)$。

在每种情况下，$\gamma(p_i)$ 中的顶点都比 $\beta(p_i)$ 多一个，因此对于每个节点，其 γ-袋的大小恰好比其 β-袋的大小大 n。结论得证。

现在，假设 G 的树宽等于 ℓ。由引理2.2(2)可知，我们可以假设有一个P、γ的路径分解（$F(G)$），其宽度为 ℓ，其中 P具有连续的袋 p_1、p_2、……、p_r，且 $V \subseteq \gamma(p_1)$和 $V' \subseteq \gamma(p_2)$。

现在，我们按如下方式定义P、δ的路径分解 G。对于 x 上的每个节点 P，令 $\delta(x)$ $= \{v \in V \mid v \in \gamma(x) \wedge v' \in \gamma(x)\}$。（注意，这与证明第一部分中的操作相反；参见图3。）

现在验证（P, δ）确实是 G的路径分解。对于每个顶点 v，$\{v, v'\}$ 是 F（G）中的一条边，因此存在一个节点 x_v，使得 v，$v' \in \gamma$（x_v），于是 $v \in \delta$（x_v）。对于每条边 $\{v, w\} \in E$（G），集合 $\{v, v', w, w'\}$ 在 F（G）中构成一个团，因此存在一个节点 x_{vw}，使得 $\{v, v', w, w'\} \subseteq \gamma$（$x_{vw}$）（见引理 2.1(1)）。因此，$v$，$w \in \delta$（$x_{vw}$）。最后，对于每个 $v \in V$（G），由满足 $v \in \delta$（x）的节点组成的集合 x，是满足 $v \in \gamma$（x）的节点集合与满足 $v' \in \gamma$（x）的节点集合的交集；连通子树的交集是连通的，因此路径（树）分解定义中的第三个条件也成立。

最后，我们证明 (P, δ) 的宽度为 $\ell - n$。考虑一个顶点 v，以及 $i \in [r]$。必定存在 i_v，使得 $\{v, v'\} \subseteq \gamma(p_{i_v})$。若 $i \leq i_v$，则 $v \in \gamma(p_i)$；若 $i \geq i_v$，则$v' \in \gamma(p_i)$（利用 $v \in \gamma(p_1)$ 和 $v' \in \gamma($ $p_r)$）。因此，我们有 $\{v, v'\} \cap \gamma(p_i) \neq \emptyset$。

现在，对于每个节点 p_i, $i \in [r]$，以及每个顶点 v，我们有：当 $v \in \delta(p_i)$ 时，$\gamma(p_i)$ 同时包含集合 $\{v, v'\}$ 中的两个顶点；而当 $v \notin \delta(p_i)$ 时，$\gamma(p_i)$ 恰好包含集合 $\{v, v'\}$ 中的一个顶点。因此，$|\gamma(p_i)| = |\delta(p_i)| + n$。由于这对每个袋都成立，我们知道 (P, γ) 的宽度恰好比 (P, δ) 的宽度大 n。由此可得 $\mathtt{pw}(G) \leq \mathtt{tw}(F(G)) - n \leq \mathtt{pw}(F(G)) - n$，从而证明了该结果。 □

引理3.1，结合 Vertex Separation Num-ber [6]的 NP 完全性，以及路径宽度与顶点分离数之间的等价关系（定理 2.3），可得出一个替代性且更简洁的证明，证明 Tree-width 在余二分图类中是 NP 完全的。

推论 3.2。 Treewidth 在余二分图上是 *NP* 完全的。

将上述证明与用砖墙或网格替代网格的技巧结合起来（如 [4] 中或下一节所述），即可得到 Treewidth 在最大度为五的图上的 NP 完全性证明。作为替代，我们将在下一节给出一个从 Cutwidth 归约的证明，并证明 Treewidth 在度为三的图上是 NP 完全的。

4 三次图

本节中，我们给出 Treewidth 在三次图上为 NP 完全的证明。该构造分为几个步骤。第一步是对 Arnborg 等人 [1]给出的 NP 完全性证明的简化版本；第二步遵循 Bodlaender 和 Thilikos [4] 的思路，用网格或砖墙替换团。完成这一步后，我们得到一个最大度为 7 的图。第三步，我们用最大度为 3 的树替换度大于 3 的顶点，并证明这一步不会改变树宽（但确实可能改变路径宽度）。第四步只需通过收缩度为 2 的顶点，使图成为 3-正则图。

定理4.1。 Treewidth在度为 *3* 的正则图上是 *NP* 完全的。

证明。 我们使用一种变换，将 Cutwidth 上的问题归约到 3-正则图上。

设 G 是一个有 n个顶点的 3-正则图， k 是一个整数。通过一系列中间步骤和中间图 G_1、 G_2、 G_3，我们构造一个 3-正则图 G_4，使得： G 的割宽至多为 k，当且仅当 G_4 的树宽至多为 $3n + k + 2$。

步骤 1：从割宽到树宽 第一步是对 Arnborg 等人证明的精简版本。 [1]。对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们取一个集合 $A_v = \{v^1, v^2, v^3\}$，其中包含三个 v的副本。

对于每条边 $e \in E(G)$，我们都有一个集合 $B_e = \{e^1, e^2\}$，其中包含两个代表该边的顶点。

令 $A = \bigcup_{v \in V(G)} A_v$，且 $B = \bigcup_{e \in E(G)} B_e$。我们通过取 $A \cup B$ 作为顶点集，将 A 变为一个团，将 B 变为一个团，并且对于每一对 v、 e （其中 v 是 e的一个端点），在 A_v 中的所有顶点与 B_e中的所有顶点之间添加边，从而构造 G_1。

断言 4.2。 G 和 G_1 如上所述。 $\mathtt{tw}(G_1) = \mathtt{pw}(G_1) = \mathtt{cw}(G) + 3n + 2$。

证明。 首先，假设 G 的割宽为 k，并令 f 为 G 的一个割宽为 k的线性排序，将线性排序中的第 i个顶点记为 $v_i = f^{-1}(i)$。

构造一个路径分解（P， β），其中 P是节点为 p_1，…， p_n的路径。对于$i \in [n]$，设

$$\begin{aligned}\beta(p_i) = &\left\{v_j^a \;\middle|\; j \geq i \wedge a \in \{1,2,3\}\right\} \\ &\cup \left\{e^b \;\middle|\; e = \{v_j, v_{j'}\} \in E(G) \wedge \min\{j, j'\} \leq i \wedge b \in [2]\right\}.\end{aligned}$$

也就是说，我们取顶点 v_i， v_{i+1}， …， v_n的代表，以及所有表示至少有一个端点属于 $\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$的边的顶点。

我们可以验证（P， β）是 G_1的一个路径分解。根据构造可直接得出 $A \subseteq \beta$（p_1）和 $B \subseteq \beta$（p_n）。对于路径分解的第二个条件，还需考察 G_1 中一个顶点形如 v_i^a、另一个顶点形如 e^b的边。必然， v_i 是 e的一个端点，现在可以注意到，这两个顶点都在袋 β（p_i）中。根据构造可直接得出，路径分解的第三个条件也得到满足。

为了证明该路径分解的宽度至多为 $k + 3n + 2$，我们使用一种记账系统。考虑 $\beta(p_i)$。给每个顶点 $v \in V(G)$ 三个额度，但v_i除外，它获得六个额度。每条“跨越割”的边，也就是说，属于集合 $\{\{v, w\} \in E(G) \mid f(v) \leq i < f(w)\}$的边，获得一个额度。所有其他边均不获得额度。我们总共发放了至多 $k + 3n + 3$ 个额度。现在，我们将这些额度重新分配给 $\beta(p_i)$中的顶点。每个顶点 v_j，$j \geq i$都给每个形如 v_j^a，
$a \in \{1,2,3\}$ $e = \{v_j, v_{j'}\}$ $j < i$ $j' < i$ e^1 e^2 的顶点一个额度。对于一条边，其中 和，顶点 和 分别从 v_j 和 $v_{j'}$获得一个额度。对于一条边 $e = \{v_j, v_{j'}\}$，其中 $j \leq i < j'$，顶点 e^1 和 e^2 分别从 v_j 获得一个额度，并从 e获得一个额度。现在，每个

顶点和边都恰好用完其额度：顶点 v_j 在 $j < i$ 时，给其每条关联边一个额度； v_i 给它的每个副本 v_i^1, v_i^2, v_i^3各一个额度，并给其每条关联边一个额度；而 v_j 在 $j > i$ 时，给它的每个副本 v_j^1, v_j^2, v_j^3各一个额度。袋 $\beta(p_i)$中的每个顶点都获得一个额度，因此袋的大小至多为 $k + 3n + 3$。由于这对每个袋都成立，路径分解的宽度至多为 $k + 3n + 2$。

现在，假设我们有一个宽度为 ℓ的 G_1 的树分解（T, γ）。根据引理 2.1(1)，由于 A 和 B 都是团，因此存在一个袋 p_1 ，使得 $A \subseteq \gamma(p_1)$；还存在一个袋 p_r ，使得 $B \subseteq \gamma(p_r)$。如引理 2.2 的证明所示，我们可以删除所有不在 p_1 与 p_r之间路径上的袋，同时仍保留 G_1的树分解。因此，我们可以假设有一个宽度至多为 ℓ 的 G_1的路径分解（P, γ），其中 P 是一条路径，其连续顶点为 $p_1, p_2, \ldots, p_r$，且 $\gamma(p_1) = A$， $\gamma(p_r) = B$。

对于每个 $v \in V(G)$，令 $g(v)$为满足 $\{v^1, v^2, v^3\} \subseteq \beta(p_i)$的最大 i。（由于$\{v^1, v^2, v^3\} \subseteq A \subseteq \beta(p_1)$，$g(v)$是良定义的，且属于 $[r]$。）

取 f的一个线性排序 G，使得对于所有 v， $w \in V(G)$、 $g(v) < g(w) \Rightarrow f(v) < f(w)$。（也就是说，按照 g的值递增的顺序排列顶点；当顶点具有相同的值 $g(v)$ 时，任意打破平局。）我们声称 f 的割宽至多为 $\ell - 3n - 2$。

考虑一个顶点 $v \in V(G)$，并假设 $g(v) = i'$。令 e 为与 v关联的一条边。集合 $\{v^1, v^2, v^3, e^1, e^2\}$是 G_1中的一个团，因此存在一个 i_e，使得 $\{v^1, v^2, v^3, e^1, e^2\} \subseteq \beta(p_{i_e})$。根据路径分解的定义以及 g的构造，我们有$i_e \leq i'$。由于 $\{e^1, e^2\} \subseteq \beta(p_{i_e}) \cap \beta(p_r)$，因此有 $\{e^1, e^2\} \subseteq \beta(p_{i'})$。

现在，考虑一个 $i \in [n]$。令 $v = f^{-1}(i)$ 为排序中的第 i 个顶点，令 $C = f^{-1}[i]$ 为线性排序中的前 i 个顶点。令 E^1 为恰有一个端点位于 C 中的边集，令 E^2 为两个端点都位于 C 中的边集。假设 $g(v) = i'$。现在我们来考察哪些顶点属于 $\beta(p_{i'})$:

- 根据定义， v^1、 v^2、 v^3。
- 对于每个 $w \in V(G) \setminus C$，都存在一个 $i_w \geq i'$，使得 $\{w^1, w^2, w^3\} \subseteq \beta(p_{i_w})$，因此 w^1、w^2 和 w^3 都属于 $\beta(p_{i'})$。（此处利用这些顶点属于 $\beta(p_1)$ 这一点。）这类顶点的数量为 $3n - 3i$。
- 对于每条边 $e \in E^1 \cup E^2$，由上述讨论可知，存在一个 $i_e \leq i'$ ，使得 e^1, $e^2 \in \beta(p_{i_e})$；并且由于这些顶点属于 $\beta(p_r)$，我们有 $\{e^1, e^2\} \subseteq \beta(p_{i'})$。

因此， $\beta(p_{i'})$的大小至少为 $3n - 3i + 3 + 2 \cdot |E_1| + 2 \cdot |E_2|$。由于 C中的每个顶点都恰好关联三条边，我们有 $3i = |E_1| + 2 \cdot |E_2|$。现在， $\ell \geq |\beta(p_{i'})| - 1 \geq 3n - 3i + 2 + 2 \cdot |E_1| + 2 \cdot |E_2| = 3n + 2 + |E_1|$。由此可得，割$\Big|\{\{x, y\} \in E(G) \mid f(x) \leq i < f(y)\}\Big| = |E_1| \leq \ell - 3n - 2$的大小。由于这对每个 $i \in [n]$都成立，因此得到 $\ell - 3n - 2$ 对 f 的割宽的界。

因此，我们证明了 $\mathtt{pw}(G_1) \leq \mathtt{cw}(G) + 3n + 2$，并且 $\mathtt{cw}(G_1) \leq \mathtt{tw}(G_1) - 3n - 2$。结合不等式 $\mathtt{tw}(G_1) \leq \mathtt{pw}(G_1)$，即可证明该结论。 □

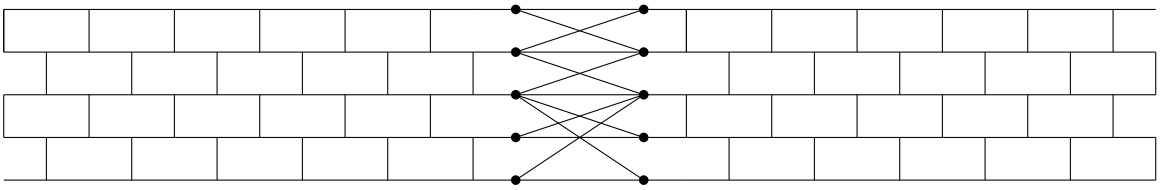


图4：砖墙构造示意图。这里，该构造应用于图 2中的图，所示列数少于实际构造中的列数。

步骤 2：砖墙构造 第二步中，我们使用了 Bodlaender 和 Thilikos [4] 的一种技术。我们通过删除图 G_1 中 A 内顶点之间的边以及 B 内顶点之间的边，从图 G_1 构造出图 G_2；然后，添加一个有 $3n$ 行、$24n$ 列的砖墙，并将砖墙最后一列中的顶点与 A 中的顶点进行匹配。类似地，我们再添加一个有 $3n$ 行、$24n$ 列的砖墙，并将该砖墙第一列中的顶点与 B 中的顶点进行匹配。

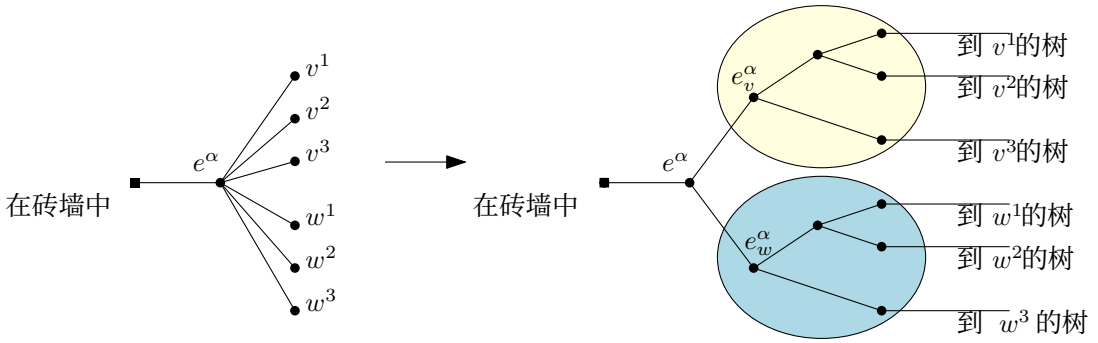
由于将砖墙构造应用于第一步得到的图会很繁琐，因此图4 展示了将砖墙构造应用于上一节中的图。

断言 4.3。 $\mathtt{tw}(G_1) = \mathtt{pw}(G_1) = \mathtt{tw}(G_2) = \mathtt{pw}(G_2)$。此外，$G_2$ 存在一个最优宽度的路径分解，其中有一个节点 x_A 满足 $A \subseteq \beta(x_A)$，还有一个节点 x_B 满足$B \subseteq \beta(x_B)$。

证明。假设我们有一个 G_2 的最优宽度 k树分解 (T, β)。根据引理2.1(3)，存在一个节点 x，使得 $G_2 \setminus \beta(x)$的每个连通分量都至多包含左侧砖墙的 $36n^2$ 个顶点。注意，$\beta(x)$必须包含左侧砖墙每一行中的一个顶点。假设并非如此。砖墙中每一对相邻列都是连通的；至少有 $12n - |\beta(x)|$ 对互不相交的列不包含 $\beta(x)$中的顶点。这些列上的所有顶点在 $G_2 \setminus \beta(x)$中彼此连通，因为它们与 $\beta(x)$中没有顶点的那一行相交。由于这些列中的顶点数大于 $36n^2$，且 $k \leq |E(G)| = 3n/2$，因此得到矛盾。

根据引理 2.1(2)，(T, β)也是由G_2 通过在 $\beta(x)$ 中的每对顶点之间添加边所得到的图的一个树分解。对右侧砖墙执行相同的步骤。于是，(T, β) 是一个宽度为 k 的树分解，其对应的图在左侧砖墙的每一对行之间都包含一条连接这两行中一对顶点的边，右侧砖墙也同样如此。现在，如果将左侧砖墙的每一行收缩到 A中的邻点，并将右侧砖墙的每一行收缩到 B中的邻点，我们就得到以 G_1 为图 minor：G_1 是一个树宽为 k的图的 minor，因此其树宽至多为 k。

根据引理 2.2，$\mathtt{tw}(G_1) = \mathtt{pw}(G_1)$，并且存在 P，γ 的路径分解 G_1，其最优宽度为 ℓ，使得 $A \subseteq \gamma(p_1)$ 且 $B \subseteq \gamma(p_q)$，其中 p_1 和 p_q 是



Fig图 5：将 e^α 中的一个顶点替换为一棵树；这里 e 是边 $\{v, w\}$.

P 的端点。

我们现在可以如下构造 G_2 的路径分解，使其宽度与 ℓ 相同：首先，依次取左侧砖墙的路径分解中的袋，其宽度为 $3n$，并以一个包含 A 的所有顶点的袋结束。然后，取 (P, γ) 的袋。接着，加入右侧砖墙的路径分解，其宽度为 $3n$，并以一个包含 B 中所有顶点的袋开始。 □

步骤 3：将图变为次三次图 注意， G_2 中一个顶点的最大度为七。 A 中的一个顶点在砖墙中有一个邻点，在 B 中有六个邻点（它所代表的顶点有三条关联边，每条边由两个顶点表示）。类似地， B 中的一个顶点的度为七：同样，它在砖墙中有一个邻点，在 A 中有六个邻点（它所代表的边的每个端点都由三个顶点表示）。砖墙中的顶点的度至多为三。

给定 G_2，我们构造一个次三次图 G_3。具体做法是将 A 和 B 中的每个顶点替换为一棵树，并将连接到 A 和 B 中顶点的边替换为连接到这些树的叶子或根的边。

对于 A 中的顶点 v^α（其中 $v \in V(G)$， $\alpha \in [3]$），我们取一棵任意的树，其根的度为 2，其他所有内部顶点的度为 3，并且有六个叶子。根（我们用原顶点 v^α 的名称表示）与砖墙中 v^α 的邻点相邻。

每个顶点 $e^\alpha \in B$（其中 $e \in E(G)$， $\alpha \in [2]$）也替换为一棵树，其根的度为 2，其他所有内部顶点的度为 3，并且有六个叶子；不过这里我们需要采用一种特定形状的树。设 e 的端点为 v 和 w。图 5 展示了这棵树。特别要注意，根与砖墙中 e^α 的邻点相邻；通向表示 v 的子树的叶子聚在一起，通向表示 w 的子树的叶子也聚在一起。

v^α 中的一个顶点 A 与 $e^{\alpha'}$中的一个顶点 B 之间的每条边，现在都变成从表示 v^α 的树的一个叶节点到表示$e^{\alpha'}$的树的一个叶节点的边； $\alpha \in [3]$、 $\alpha' \in [2]$。树的根与砖墙中的一个顶点相邻；该顶点就是原来 G_2中顶点的砖墙邻点。

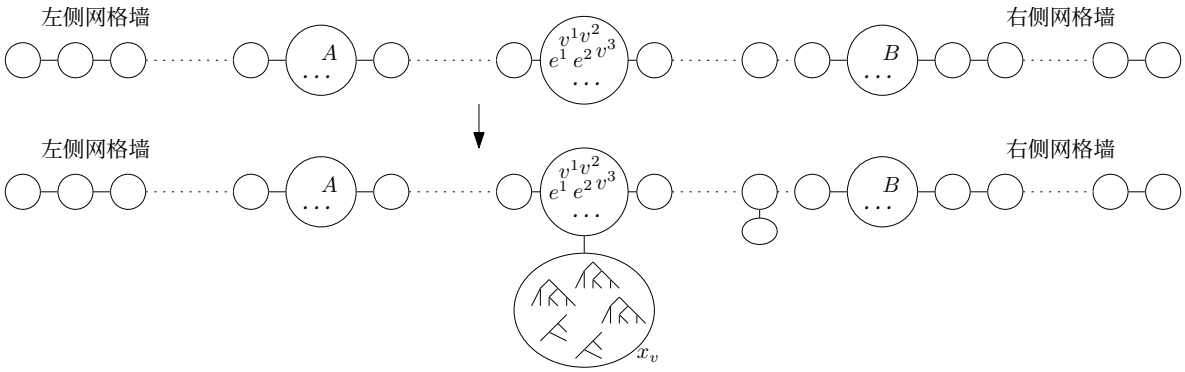


图6：证明示意图。添加新节点 x_v 前后的路径分解。

断言4.4。 设 $\mathtt{tw}(G_2) \geq 68$。则 $\mathtt{tw}(G_2) = \mathtt{pw}(G_2) = \mathtt{tw}(G_3)$。

证明。 我们已经证明了 $\mathtt{tw}(G_2) = \mathtt{pw}(G_2)$。

首先，注意到 G_2 是 G_3的图 minor：我们通过将每棵新树收缩到其原始顶点，便可从 G_3 得到 G_2 。由引理 2.1(5)，可得 $\mathtt{tw}(G_2) \leq \mathtt{tw}(G_3)$。

假设我们有P, β的一个路径分解 G_2 ，其最优宽度为 $\ell = \mathtt{pw}(G_2)$ =$\mathtt{tw}(G_2)$。根据断言 4.3，还可以假设存在一个袋包含 A中的所有顶点，并且存在一个袋包含 B中的所有顶点。

对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们断言存在一个节点 p_{i_v}，使得 $v^1, v^2, v^3 \in \beta(p_{i_v})$，并且对于每条与 v 关联的边 e，都有 $e^1, e^2 \in \beta(p_{i_v})$。证明如下。对图 $G+$，(P, β) 也是一个路径分解；该图由团(A) 与团(B)构成，是通过在 A 中每对顶点之间以及在 B 中每对顶点之间添加边（因为存在一个袋包含 A 的所有顶点，且存在一个袋包含 B 的所有顶点，并由引理 2.1(2)）从 G_2 得到的。注意到这九个顶点（v^1, v^2, v^3，以及对于每条与 v 关联的边对应的 e^1, e^2 ）在团(A) + 团(B)中构成一个团，即可由引理 2.1(1) 得出该断言。

现在，我们可以如下构造 G_3 的树分解。取 (P, β)。将 A 中的每个顶点以及 B 中的每个顶点替换为其所表示的树的根。对于每个顶点 $v \in V$ （G），我们在树分解中添加一个额外的袋；这个袋成为树分解的一个叶节点。（注意，完成此步骤后，我们不再拥有路径分解。）

考虑一个顶点 $v \in V$（G）。取一个新节点 x_v，并在树中将 x_v 与 p_{i_v} 相邻接。令 x_v 的袋包含以下顶点：表示 v^1、 v^2、 v^3的子树中的所有顶点；对于每条以 e 为 v 端点的边，包含顶点 e^1、 e^1_v、 e^2、 e^2_v，以及 e^1_v 和 e^2_v 在各自子树中的后代（图 5中黄色区域内的顶点，假设 $e = \{v, w\}$）。

A 中的每个顶点都由一棵二叉树表示，其根的度为二，且有六个叶子，因此共有十一个顶点。对于与 v 相接的三条边，我们各取两棵子树中的六个顶点，因此这个新袋的总大小为

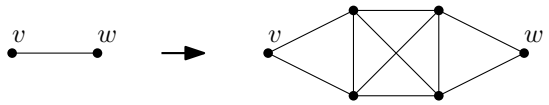


图7：将两个相邻顶点的度各增加1。

$3 \cdot 11 + 3 \cdot 2 \cdot 6 = 69$。很容易验证，我们得到的是 G_3 的树分解；由于当 $\ell \geq 68$ 时，原有的袋大小保持不变，因此我们得到 G 的一个宽度至多为 ℓ 的树分解。

□

取一个足够大的 n （例如 $n \geq 22$ 就可以），我们可以假设 $\ell \geq 68$。

步骤4：使图成为3-正则图 第四步很简单。注意，当一个图的树宽至少为3时，将度不超过2的顶点收缩到一个邻点上（见 [2]）不会改变树宽；此过程中可以移除平行边。我们尽可能多地应用这一步，并令 G_4 为所得的图。图 G_4 是一个3-正则图，并且当 $n \geq 22$时，其树宽等于 G_1的树宽，即 $\mathtt{cw}(G) + 3n + 2$。由于我们可以在多项式时间内构造 G_4，这就完成了该变换，因此可以得出结论： Treewidth 在3-正则图上是NP完全的。

□

5 特殊情形

本节给出两个针对特殊图类的 Treewidth NP 完全性证明，这些证明只需对定理4.1的证明稍作修改即可得到。我们首先注意到，对于任意固定的 $d \geq 4$， Treewidth 在 d-正则图上是 NP 完全的。

命题5.1。 对于每个 $d \geq 3$， Treewidth 在 d-正则图上是 *NP* 完全的。

证明。 关于 $d = 3$ 的结果已作为定理4.1给出。

稍微修改定理4.1的证明，即可得到 4-正则图的结果：不使用砖墙，而改用网格。在该网格的边界处，存在度小于 3 的顶点。我们可以先收缩度为 2 的顶点来避开这些顶点，然后注意到网格两侧度为 3 的顶点之间存在完美匹配。如图7所示，将该匹配中的每条边替换为一个小子图。注意，这一步会使 v 和 w 的度各增加 1；而当 G 的树宽至少为 5 时，这一步不会改变图的树宽。

在将度为 7 的顶点替换为一棵小树，从而把它们变为度为 3 的顶点这一步中，我们改用一棵树：其根有两个子节点，每个子节点又有三个子节点。这些根与网格相邻。现在，根的度为 3；我们在 A 中的这些根顶点之间添加一个任意的完美匹配，并对 B 也做同样处理。（注意，在构造中，有一个包含 A 所有根的袋，对 B 也同样如此；这些集合的大小均为偶数。）由此得到 $d = 4$ 的结果。

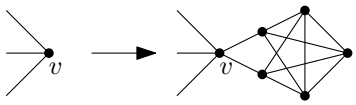


图8：增加顶点的度：如果 $\texttt{tw}(G) \geq 4$，则这一步会将 v 的度从 3 增加到 5，但不会改变树宽。

考虑以下构件。取一个含有 $d+1$ 个顶点的团，并从该团中删去一条边，例如 $\{x, y\}$。对于图 G中的一个顶点 v，添加一条从 x 到v的边，并添加一条从 y 到 v的边。见图 8。

如果 G 的树宽至少为 d，那么这一步会在不改变树宽的情况下将 v 的度增加 2。现在，如果 d 是奇数，我们可以取一个关于 3-正则图的困难性证明中的实例，并为该实例的每个顶点添加 $(d-3)/2$ 个此构件的副本。我们得到一个等价实例，它是 d-正则的。如果 d 是偶数，我们就在关于 4-正则图的困难性证明中的一个实例上添加 $(d-4)/2$ 个此构件的副本。

□

一个 d维网格图 是无限 d维网格的有限诱导子图。注意， d维网格图的度至多为 $2d$，特别是三维网格图的度至多为 6。由于将困难实例的度从 9 降至至多 6，我们可以证明，计算三维网格图的树宽是 NP完全的。既然我们已将困难实例的度降至至多 3，甚至可以证明如下结论。

命题5.2。 Treewidth在次立方*3*维网格图上是*NP*完全的。

证明。 论证很简单：每个 n顶点（次）立方图都存在一个多项式规模的细分，使其成为3维网格图。我们给出这样一种简单的嵌入。

我们从 Treewidth 在三次图上的情形归约而来；根据定理4.1，该问题是NP难的。设 G 是任意一个三次图， v_0、 v_1、……、 v_{n-1} 是其顶点， e_1、 e_2、……、 $e_{3n/2}$ 是其边。我们构造 $(6n-1) \times (3n+1) \times 3$ 网格的一个次立方诱导子图 H，使其为 G的细分。特别地， $\texttt{tw}(H) = \texttt{tw}(G)$，且 H 有 $O(n^2)$ 个顶点和边，因此我们可以得出结论。

对于每个 $i \in [0, n-1]$，顶点 v_i 由一条路径编码，该路径由5个顶点（x， 0， 0）构成，并带有 $x \in [6i, 6i+4]$。我们任意地将（$6i$， 0， 0）、（$6i+2$， 0， 0）、（$6i+4$， 0， 0）分别与 G 中 v_i 的三个不同邻点对应，记作$v_{i(0)}$、 $v_{i(1)}$、 $v_{i(2)}$。

$e_k = \{v_i, v_j\}$ 中每条边 G （满足 $i < j$ ）都按以下方式编码。设 a、 $b \in [0, 2]$ 满足 $i(a) = j$ 且 $j(b) = i$。我们用 2度顶点构造一条从 $(6i+2a, 0, 0)$ 到 $(6j+2b, 0, 0)$ 的路径：首先对 $y \in [2k]$ 添加所有顶点 $(6i+2a, y, 0)$ 和 $(6j+2b, y, 0)$，然后通过添加 $(6i+2a, 2k, 1)(6i+2a, 2k, 2)(6i+2a+1, 2k, 2)(6i+2a+2, 2k, 2) \ldots (6j+2b-1, 2k, 2)(6j+2b, 2k, 2)(6j+2b, 2k, 1)$，连接 $(6i+2a, 2k, 0)$ 和 $(6j+2b, 2k, 0)$。

这就完成了 H 的构造。除了位于 $(6i+2, 0, 0)$ 的顶点度为 3 之外，其余顶点的度均为 2。很容易看出， H 是 G 的细分（每条边至多细分 $12n+5$ 次）。

□

我们可以轻松地调整前面的证明，从而证明在 $\infty \times \infty \times 2$ 网格的有限次立方（非诱导）子图中，该问题仍然是困难的。

6 结论

本文给出了若干关于 Treewidth 的 NP 完全性证明。第一个证明是一个初等归约，将余二分图上的 Pathwidth 归约为 Treewidth ；虽然这一困难性结果早已为人所知，但我们的新证明非常简单，几分钟内即可讲清。我们的第二个主要结果是证明了三次图上的 Treewidth 为 NP 完全，这将已有 25 多年、针对度为 9 的界进一步改进。

本文最后提出几个尚未解决的问题。一个长期悬而未决的问题是 Treewidth 在平面图上的复杂度。著名的捕鼠器算法能够在多项式时间内解决相关的 Branchwidth 问题 [7], ，但目前仍不清楚 Treewidth 在平面图上能否在多项式时间内求解，还是属于 NP 完全问题。此外，目前还没有关于 Treewidth 在有界亏格图上，或 H对于某个固定的 H 的图 minor 自由图上的 NP 困难性证明。一个可能较容易的开放问题是研究有界度图上 Branchwidth 的复杂度，我们猜想 Branchwidth 在三次图上是 NP 完全的。

虽然“我们的”归约很简单，但 Treewidth 的 NP 困难性是从 Pathwidth 或 Cutwidth的 NP 困难性推导出来的。因此，若能为 Pathwidth 和/或 Cutwidth 找到简单的 NP 困难性证明，将会很有帮助；最好是以 Satisfiability这类“经典” NP 困难问题、Clique这类基础图问题，或 Bin Packing为基础。

我们的困难性证明中的归约会使参数增加一个关于 n的线性项，因此无法揭示 Treewidth的参数化复杂性。因此，若能得到参数化归约（即将 k 变为一个由 k的函数所界定的值的归约），并进一步为 Treewidth的参数化复杂性寻找下界（例如基于 (S)ETH 的下界），将会很有意义。

致谢。本研究于2022年10月24日至28日在荷兰莱顿的洛伦兹中心举行的研讨会“图分解：小宽度，大挑战”期间开展。Martin Milaniˇc 感谢斯洛文尼亚研究机构的支持（ I0-0035、研究计划 P1-0285，以及研究项目 N1-0102、N1-0160、J1-3001、J1-3002、J1-3003 和 J1-4008）。Duˇsan Knop 和 Ondˇrej Such´y 感谢 OP VVV MEYS 资助的项目 CZ.02.1.01/0.0/0.0/16 019/0000765“信息学研究中心”的支持。

参考文献

[1] S. Arnborg、D. G. Corneil 和 A. Proskurowski。寻找 k-树嵌入的复杂性。*SIAM* 代数离散方法期刊，8(2):277–284，1987年。 doi:10.1137/

0608024。

[2] S. Arnborg 和 A. Proskurowski。部分 3-树的刻画与识别。*SIAM*《代数离散方法杂志》，7(2):305–314，1986年。doi:10.1137/0607033。[3] H. L. Bodlaender。具有有界树宽的图的部分 k-树木园。《理论计算机科学》，209(1-2):1–45，1998年。doi:10.1016/S0304-3975(97)00228-4。[4] H. L. Bodlaender 和 D. M. Thilikos。弦性较小的图的树宽。《离散应用数学》，79(1-3):45–61，1997年。doi:10.1016/S0166-218X(97)00031-0。[5] N. G. Kinnersley。图的顶点分离数等于其路径宽度。《信息处理快报》，42(6):345–350，1992年。doi:10.1016/0020-0190(92)90234-M。[6]B. Monien 和 I. H. Sudborough。边加权树上的最小割是 NP完全的。《理论计算机科学》，58(1-3):209–229，1988年。doi:10.1016/0304-3975(88)90028-X。[7] P. D. Seymour 和 R. Thomas。呼叫路由与捕鼠器。《组合学》，14(2):217– 241，1994年。 doi:10.1007/BF01215352。