arXiv:2301.10039v1 [math.CT] 24 Jan 2023

幺半范畴的广义对偶理论

and

应用



Stefan Jens
Zetzsche 汉堡大学

一篇为获得数学理学硕士学位而
提交的论文 2018年9月

目录

1 引言 5

2 经典对偶理论 11

2.1 幺半范畴.11 2.2 刚性幺半范畴.12 2.3 内 Hom.14 2.4 辫带幺半范畴.15

3 G广义对偶理论 17

3.1 $\star$-自伴范畴.17 3.2 线性分配范畴.20 3.3 †-弗罗贝尼乌斯伪幺半群.24

4 应用 35

4.1 正合自函子.35 4.1.1 有限范畴.35 4.1.2 端与余端.37 4.1.3 中山函子.39 4.2 分次向量空间.41 4.2.1 二次型.42 4.2.2 分次向量空间的带状结构.44 4.2.3 分次向量空间的广义对偶.46 4.2.4 弱二次型.48 4.2.5 分次向量空间的广义带结构.56 4

.3 拓扑向量空间.58

4.3.1 chu 和拓扑向量空间范畴.59 4.3.2 弱拓扑与麦基拓扑向量空间 . . . . . 60 4.3.3 $\star$- 自对偶结构 chu.62 4.3.4 $\star$- 自对偶结构 TVS_w 和 TVS_m .63

5 附录 69

5.1 证明.69

第1章

引言

自 Mac Lane 和 Eilenberg 于20世纪40年代引入范畴论以来，范畴论凭借其简洁性而非尽管其简洁性，证明了自身具有普遍的重要性。具体而言，它应用于域论的数学方面（例如 [Ati88], [FRS02]）、量子计算（例如 [Vic12], [AC04]）、纽结理论、逻辑和证明论（例如 [DV16], [Mel09],[And]）。本学位论文的主要研究主题是幺半范畴中的对偶概念及其应用。

最突出的对偶例子之一，或许可以在某个线性对偶中找到

$$V^\star := \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, \Bbbk)$$

某个$\Bbbk$-向量空间 V的。为此，我们考虑这样一个范畴：其对象是任意维数的$\Bbbk$-向量空间，态射是$\Bbbk$-线性映射。这个范畴具有多种典型性质。首先，它配备了通常的向量空间张量积 $\otimes$ ，因而是幺半 范畴。张量积的单位元是域$\Bbbk$，因为对于任意$\Bbbk$-向量空间 V，其底层$\Bbbk$-作用给出了 $V \otimes \Bbbk \cong \Bbbk \otimes V \cong V$。此外，幺半结构是对称的，因为对于任意一对向量空间 V, W，都存在一个自然同构 $V \otimes W \cong W \otimes V$。它还是闭 的，即对于任意两个空间 V, W，都存在一个向量空间 Hom(V, W)；在此情形下，该空间是态射集 $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V, W)$，并带有其自然的向量空间结构~~，且~~存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U \otimes V, W) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, \underline{\mathrm{Hom}}(V, W)). \tag{1.1}$$

向量空间及其线性对偶之间存在以下关系。对于每个态射$f : V \to W$，都可以定义一个对偶态射 $f^\star : W^\star \to V^\star$，其定义为 $f^\star(w')(v) = w'(f(v))$。此外，对于向量空间 V，存在一个求值映射 $\varepsilon : V \otimes V^\star \to \Bbbk$，定义为 $\varepsilon(v \otimes v') := v'(v)$；对于有限维向量空间 V，存在一个余评价映射$\eta : \Bbbk \to V^\star \otimes V$，定义为 $\eta(1) := \sum_i v_i' \otimes v_i$，其中 $(v_i)_{i\in I}$是 V的一组有限基，$(v_i')_{i\in I}$ 是 $V^\star$ 对应的对偶基，且 $v_i'(v_j) := \delta_{ij}$。可以证明， η 的定义不依赖于所选的基 $(v_i)_{i\in I}$。这两个映射都满足以下关系

$$\begin{aligned} (V \cong V \otimes \Bbbk \overset{\mathrm{id}\otimes\eta}{\to} V \otimes (V^\star \otimes V) \cong (V \otimes V^\star) \otimes V \overset{\varepsilon\otimes\mathrm{id}}{\to} \Bbbk \otimes V \cong V) &= \mathrm{id}_V, \\ (V^\star \cong \Bbbk \otimes V^\star \overset{\eta\otimes\mathrm{id}}{\to} (V^\star \otimes V) \otimes V^\star \cong V^\star \otimes (V \otimes V^\star) \overset{\mathrm{id}\otimes\varepsilon}{\to} V^\star \otimes \Bbbk \cong V^\star) &= \mathrm{id}_{V^\star} \end{aligned} \tag{1.2}$$

以及它的一个对称变体。因此，如果 V 是有限维的，那么由 $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ 给出的映射 $V \to V^{\star\star}$ （其中 $\mathrm{ev}_v(v') := v'(v)$，对 $v' \in V^\star$ 成立）证明了 V 与其双对偶之间存在同构，

$$V \cong V^{\star\star} = \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(V, \Bbbk), \Bbbk). \tag{1.3}$$

另一个观察表明，对于有限维向量空间 V，W 存在一个自然同构

$$\mathrm{Hom}_\Bbbk(V \otimes W, \Bbbk) \cong \mathrm{Hom}_\Bbbk(V, W^\star) \cong \mathrm{Hom}_\Bbbk(W, V^\star) \tag{1.4}$$

该同构由柯里化给出，即将一个形式 $\kappa : V \otimes W \to \Bbbk$ 映射为一个线性映射 $V \to W^\star$，其定义为 $v \mapsto (w \mapsto \kappa(v \otimes w))$.

在范畴论中，对偶的概念通常以内在的方式刻画。事实上，如果对于每个 $x \in \mathsf{C}$，都存在一个对象 $x^\star \in \mathsf{C}$ 以及态射 $\varepsilon : x \otimes x^\star \to \mathbb{1}$,$\eta : \mathbb{1} \to x^\star \otimes x$，满足 (1.2)，那么对称幺半范畴 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})$（其张量积为 $\otimes$，张量单位为 $\mathbb{1}$）便是刚性的。这一界定可以直接推广到非对称情形。随着时间推移，刚性已被证明适用于许多情形，且表现稳健。然而，有些情形下它似乎过于严格。现在我们将讨论其中一种。

例如，设 $X \neq \varnothing$ 是一个非空集合。幂集 $\mathsf{P}(X)$ 诱导出一个范畴，其对象为子集 $A \subseteq X$，对象 $A, B \subseteq X$ 之间存在态射 $A \to B$，当且仅当 $A \subseteq B$。这个范畴可以赋予对称幺半结构 $(\mathsf{P}(X), \cap, X)$，其张量积由集合 $\cap$ 的交集给出，张量单位为 X。对于每个子集 $A \subseteq X$，都存在一个候选对偶，即补集 $A^c = X \smallsetminus A$。取补集是反变的，因为 $A \subseteq B$ 当且仅当 $B^c \subseteq A^c$。幺半范畴 $(\mathsf{P}(X), \cap, X)$ 是闭的，其内 Hom $\mathrm{Hom}_\cap(A, B) = A^c \cup B$，其中 $A, B \subseteq X$。取补集可以用内 Hom 表示为 $A^c = \underline{\mathrm{Hom}}_\cap(A, \varnothing)$。因此，由于每个子集都等于其双对偶，

$$A = (A^c)^c = \underline{\mathrm{Hom}}_\cap(\underline{\mathrm{Hom}}_\cap(A, \varnothing), \varnothing). \tag{1.5}$$

但是，$(\mathsf{P}(X), \cap, X)$ 不可能是刚性的，因为不存在余评价 $X \to A^c \cap A$。事实上，对于每个子集 $A \subseteq X$，$X \subseteq A^c \cap A = \varnothing$ 都不成立。不过，确实存在态射 $V \otimes V^\star \to \varnothing$ 和 $\varnothing \to V^\star \otimes V$，它们与求值和余评价的关系，是通过将幺半单位 X 替换为其对偶 $X^c = \varnothing$ 得到的。类似地，方程 (1.5) 与方程 (1.3) 相关。事实上，这预示着我们也可以同样选择由 $\mathsf{P}(X)$ 诱导的范畴 $(\mathsf{P}(X), \cup, \varnothing)$，其张量积由并集 $\cup$ 给出，张量单位为 $\varnothing$。

刻画前一个例子中对偶性的概念，体现在 $\star$-自对偶范畴的定义中。 [Bar79] 中最初的定义针对对称幺半范畴，而 [Bar95] 将其推广到了可能非对称的幺半范畴。在陈述定义之前，请注意，在任意闭对称范畴 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 中，条件 (1.1) 保证了对任意 $x, k \in \mathsf{C}$，以下自然同构的存在：$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(x, k), \mathrm{Hom}(x, k)) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(x, k) \otimes x, k)$ and $\underline{\mathrm{Hom}}(x \otimes \underline{\mathrm{Hom}}(x, k)\ k) \cong$

$\mathrm{Hom}(x, \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(x,k)\ k))$。利用对称性，可以将二者合并，并将恒等态射 $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(x,k)}$ 与一个唯一的态射对应起来

$$x \to \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(x,k),k). \tag{1.6}$$

定义 1.0.1。对称 $\star$-自伴范畴 由一个闭对称幺半范畴 $(\mathsf{C}\ \otimes, \mathbb{1})$ 及其内 Hom $\mathrm{Hom}(-,-)$，和一个称为对偶化对象的对象 $k \in \mathsf{C}$ 给出，使得所诱导的态射 (1.6) 是同构

$$x \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(x,k),k)$$

对所有 $x \in k$ 均成立。

每个带对偶 $(-)^\star$ 的对称刚性范畴，若其幺半单位为 $\mathbb{1}$，则它是闭的，其内 Hom 为 $\mathrm{Hom}(x,y) := \underline{y \otimes x^\star}$，并且是 $\star$-自伴的，对偶化对象为 $k := \mathbb{1}$。特别地，有限维 $\Bbbk$-向量空间构成的刚性范畴是 $\star$-自伴的，对偶化对象为 $k := \Bbbk$。在这种情况下，态射 (1.6) 将元素 $v \in V$ 映射为 $\mathsf{ev}_v \in V^{\star\star}$，其中 $\mathsf{ev}_v(v') = v'(v)$，对 $v' \in V^\star$ 成立。幺半范畴 $(\mathsf{P}(X) \cap, X)$ 的内 Hom 为 $\mathrm{Hom}_\cap(A,B) = B^c \smallsetminus A$。它不是刚性的，但却是 $\star$-自伴的，对偶化对象为 $k := \varnothing = X^c$。由于对任意子集 $A \subseteq X$ 均有 $(A^c)^c = A$，态射 (1.6) 由恒等映射给出。

$\star$-自伴范畴的概念在广泛的领域中都有应用。例如，在 [See87]中，研究表明，这类范畴为 Girard 线性逻辑提供了模型，这与笛卡尔闭范畴和 λ-演算 [Lam80]之间的关系类似。线性逻辑可用于对资源使用逻辑建模。在 [Gir87]中，Girard 指出：“一种全新的方法由此开启，适用于构造性逻辑与计算机科学之间的整个领域”。在 [BD11] $\star$-自伴范畴的研究中，这类范畴被称为*Grothendieck-Verdier* 范畴。本学位论文的主要目标是概述 $\star$-自伴范畴的理论，并给出各种实例。

本学位论文其余部分的安排如下。在作为预备内容的第 2 章中，我们将回顾相关定义和基本事实。大部分材料已见于文献，例如 [EGNO15]。我们将介绍幺半范畴的弦图记法，给出刚性范畴的定义，并回顾受纽结理论启发的相关概念，例如编织和扭结。

在第 3 章中，我们将介绍可能非对称的 $\star$-自治范畴。特别地，在命题 3.1.1 中，我们将证明 $\star$-自治范畴的多种不同定义彼此等价。例如，我们希望通过将 $\star$-自治范畴定义为一个对称幺半范畴 $(\mathsf{C}\ \otimes,\ \mathbb{1})$，连同一个对象 $k \in \mathsf{C}$、一个等价 $(-)^\star : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$ 以及自然同构，来推广 (1.3)，而不是 (1.4)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x \otimes y, k) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y^\star).$$

A事实上，这两种定义是等价的，正如我们将在命题 3.1 中看到的那样。 1.

除此之外，我们将强调 $\star$-自治范畴与刚性范畴之间的细微差别。例如，对于每个刚性范畴 $(\mathsf{C}\ \otimes,\ \mathbb{1})$，

对偶 $(–)^\star : (\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1}) \to (\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})^{\mathrm{opp}(0,1)}$ 是幺半的，其中后者表示通过反转态射和张量积，由 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 诱导出的范畴。对于每个 $\star$-自治范畴，这一点不一定成立（然而，通过一个非平凡的证明可知，双对偶仍然是必要的幺半结构 [BD11, 命题 4.2]），这促使我们在 C 上定义第二个张量积 $\otimes'$：

$$x \otimes' y := {}^\star(y^\star \otimes x^\star) \tag{1.7}$$

对于 $x, y \in \mathsf{C}$ 和 ${}^\star(–) : \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \to \mathsf{C}$，对偶函子 $(–)^\star : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$ 的拟逆。在张量积由子集交集给出的 $\star$-自反范畴 $(\mathsf{P}(X), \cap, X)$ 中，正如预期的那样，第二个张量积对应于子集并集，$\cup$。事实上，利用定义 (3.14) 和德摩根定律，可以得到

$$(B^c \cap A^c)^c = A \cup B,$$

对于 $A, B \subseteq X$。这表明 $\star$-自反范畴成对出现，形成由对偶和自然同构联系起来的对称幺半范畴；在这个特定例子中，$(\mathsf{P}(X), \cap, X)$ 和 $(\mathsf{P}(X), \cup, \varnothing)$ 满足 $(–)^c$。强调这一观点，[CS92] 表明，$\star$-自反范畴对应于带对偶的线性分配范畴。我们在定义 3.2.1 中引入这一概念，并在第 3.2 节中详细讨论。

除了应用广泛之外，$\star$-自对偶范畴的另一个有趣之处在于它们与*Frobenius*代数的关系。弗罗贝尼乌斯代数是一个有限维$\Bbbk$-代数 A，配备一个非退化形式 $\sigma : A \otimes A \to \Bbbk$，满足$\sigma(ab \otimes c) = \sigma(a \otimes bc)$，其中 $a, b, c \in A$。早在20世纪初，人们就已开始研究它们 [Nak39], [Nak41], [Nak39], [BN37], ；近年来，由于它们与二维量子场论的联系，人们对它们的兴趣再度升温 [Abr96]。弗罗贝尼乌斯伪幺半群 将弗罗贝尼乌斯代数推广到了双范畴。一类特殊的弗罗贝尼乌斯伪幺半群，其乘法和单位态射都具有右伴随，通常称为†-*Frobenius* 伪幺半群。一个伴随函子 $\mathsf{C} \nrightarrow \mathsf{D}$ 定义为函子 $\mathsf{D}^{\mathrm{opp}} \times \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$。根据 [Str04]的一则简短说明，$\star$-自对偶范畴对应于伴随函子双范畴中的†-弗罗贝尼乌斯伪幺半群。在定理 3.3.2 和定理 3.3.3 中，我们将对这一论述给出完整证明。

本学位论文第4章专门介绍了多种例子。基于 [FSS16], 中的一项观察，我们在第4.1节讨论有限线性范畴上（左正合或右正合）自函子范畴的 a $\star$-自主结构。为此，我们重述广义中山函子的概念，并给出一系列与端和余端演算相关的结果。本节的主要成果是引理 4.1.5 和引理 4.1.7。特别地，我们证明第二个张量积仍由自函子的复合给出。

在第4.2节中，我们推广了已知的适用于分次向量空间的经典对偶理论。对于有限群G，域 $\Bbbk$ 上的有限维（f.d.） G分次向量空间 V 表示为由 G索引的有限维 $\Bbbk$-向量空间的直和 $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$。两个有限维 G分次向量空间的直和按分量定义。每个有限维 G 分次向量空间都是半单的，即可表示为简单对象的直和

由 $(\Bbbk_g)_h := \delta_{gh}\Bbbk$定义的有限维 G分次向量空间 $\Bbbk^g$ 。自然地，我们将有限维 G分次向量空间 V 的分次对偶空间 $V^\star$ 定义为

$$(V^\star)_g := (V_{g^{-1}})^\star. \tag{1.8}$$

连同张量积 $V \otimes W := \oplus_{g\in G,\ hk=g} V_h \otimes W_k$ 这定义了有限维 G-分次向量空间的刚性幺半范畴 G–vect$_\Bbbk$ 。根据 Eilenberg 和 MacLane 的一个结果（参见 [EML50]），若 G 是阿贝尔的，则 G–vect$_\Bbbk$ 的辫状幺半群结构（即结合子、编织）对应于二次型集合 QF(G, $\Bbbk^\times$)，其中的二次型取值于 $\Bbbk^\times$。本节的主要结果定理 4.2.2 针对 G–vect$_\Bbbk$ 上任意 $\star$-自主结构，给出了关于带状结构的类似结论。为此，我们在定义 4.2.10 中定义了弱二次型的概念，并在定理 4.2.1 中证明，它们可以唯一分解为 G 上一个二次型与一个特征的乘积。

最后，第 4.3 节基于 Barr [Bar00] 的工作，探讨了拓扑向量空间的对偶结构。范畴 chu 由对象 $(U, V, –, –)$ 组成，其中 U, V 是某个域 $\Bbbk$ 上的向量空间，而 $–, – : U \otimes V \to \Bbbk$ 是一个线性配对，并配有适当的态射。Barr 证明 chu 是具有平凡对偶的 $\star$-自主范畴

$$(U, V, \langle –, – \rangle)^\star := (V, U, \langle –, – \rangle \circ \tau_{V,U}),$$

其中 $\tau_{V,U} : V \otimes U \to U \otimes V$ 表示交换参数的典范辫编。利用 chu 与弱拓扑向量空间范畴以及 Mackey 拓扑向量空间范畴之间的等价关系，可以在后两类范畴上诱导出 $\star$-自主结构，分别记为 TVS$_w$ 和 TVS$_m$。在引理 4.3.8 中，我们证明其中一个张量积具有类似但较弱的泛性质，即所谓的射影张量积所具有的泛性质。这促使我们对 Barr 最初提出的对偶结构作出某种推广。

总而言之，我们对这篇学位论文的贡献包括：引理 3.3.1、引理 3.3.3、定理 3.3.2 和定理 3.3.3 的证明、引理 4.1.5、推论 4.1.1、引理 4.1.7、引理4.2.3、引理 4.2.4、引理 4.2.5、引理 4.2.7、引理 4.2.8、定理 4.2.1、引理 4.2.9、推论 4.2.4、引理 4.2.10、引理 4.2.11、命题 4.2.1、定理 4.2.2、引理 4.3.3、引理 4.3.4、引理 4.3.5、引理 4.3.6、引理 4.3.8。

致谢

首先，我想感谢我的导师 Prof. Dr. Christoph Schweigert，是他向我提出了这篇学位论文的研究主题。我非常感激他给予我的鼓励、耐心指导以及对我工作的支持。我还要感谢我的共同导师 Jun.-Prof. Dr. Simon Lentner，尤其感谢他就第4.2节与我进行的富有帮助的讨论。我从与 Vincent Koppen 的交流中获益良多。此外，我还要感谢 Jamie Vicary，尤其感谢*Globular*，这款证明助手帮助我绘制了这篇学位论文中的弦图。最后，我想感谢父母一直以来对我的爱、支持和信任。

第 2 章

经典对偶理论

2.1 幺半范畴

幺半群是一个集合 M，配备一个结合的乘法 $M \times M \to M$ 和一个单位元 1_M。范畴论与幺半群的概念密切相关。例如，在每个范畴 C 中，任意对象 $x \in$ C 的自同态集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x)$ 构成一个幺半群，其运算为复合，单位元为恒等态射 $\mathrm{id}_x : x \to x$。反过来，每个幺半群都会诱导出一个单对象范畴。除此之外，本学位论文中将要遇到的大多数范畴本身就是幺半的——它们带有额外的结构，从而成为范畴化幺半群。幺半范畴的定义源自 Mac Lane 的工作，参见 [ML63], [ML98]。

定义 2.1.1（幺半范畴）。幺半范畴 (C $\otimes$, 1) := (C $\otimes$, 1, α, λ, ϱ) 由一个范畴 C、一个称为张量积的双函子 $\otimes$: C $\times$C $\to$ C、一个单位对象 $\mathbb{1} \in$C 以及三个自然同构组成，它们满足五边形公理和三角形公理（参见 [EGNO15]）：结合子 $\alpha : \otimes \bigcirc (\otimes \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \otimes \bigcirc (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \otimes)$、左单位子 $\lambda : \otimes \bigcirc (\mathbb{1} \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$，以及右单位子 $\varrho : \otimes \bigcirc (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \mathbb{1}) \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$。若 α、λ 和 ϱ 都是恒等态射，则幺半范畴 (C $\otimes$, 1, α, λ, ϱ) 是严格的。

结合子保证，任意两个由有限多个对象构成的张量积彼此同构。五边形公理保证这样的同构恰好一个。后一结果称为*Mac Lane* 相干定理。

定义 2.1.2（幺半函子）。设 (C $\otimes_{\mathcal{C}}, \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$) 和 (D $\otimes_{\mathcal{D}}, \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$) 为幺半范畴。一个（松）幺半函子 ($F$, Φ, ϕ) : (C $\otimes_{\mathcal{C}}$, 1C) $\to$ (D $\otimes_{\mathcal{D}}$, 1D) 由一个函子 F : C $\to$ D、一个自然变换 $\Phi : \otimes_{\mathcal{D}} \bigcirc (F \otimes_{\mathcal{C}} F) \Rightarrow F \bigcirc \otimes_{\mathcal{C}}$ 以及一个态射 $\phi : \mathbb{1}_{\mathrm{D}} \to F(\mathbb{1}_{\mathcal{C}})$ 给出，并满足三个交换性约束（参见 [EGNO15]）。若 Φ 和 ϕ 可逆，则幺半函子 (F, Φ, ϕ) 是强的；若 Φ 和 ϕ 为恒等，则它是严格的。

幺半范畴的例子包括集合范畴 Set，其幺半结构由集合的笛卡尔积给出；Vect$_{\Bbbk}$ 范畴，其中对象是任意维数的$\Bbbk$-向量空间，幺半结构由通常的张量积给出；以及 End(C) := Fun(C,C) 范畴，它由某个范畴 C 上的自函子构成，

其幺半结构由函子的复合给出；还有某个任意维数 $\Bbbk$ 双代数 A 的表示范畴 A–Rep。

对于任意范畴 C，都存在一个对偶范畴 $\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$，它与 C 相同，但态射的方向相反。对于每个函子 $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$，都定义对偶函子 $F^{\mathrm{opp}(1)} : \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \to \mathsf{D}^{\mathrm{opp}(1)}$ 为 $F_{\mathrm{opp}(1)}(x) := F(x)$，且 $F_{\mathrm{opp}(1)}(f : x \to y) := (F(f) : F(x) \to F(y))$。不要将其与下一个定义中的对偶范畴混淆。

定义 2.1.3（反范畴）。设 $\mathsf{C} = (\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \varrho)$ 是一个幺半范畴，且 $\tau : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C} \times \mathsf{C}$ 是交换两个参数的函子。那么，反范畴 $\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(0)}$ 是幺半范畴 $\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(0)} := (\mathsf{C}, \otimes \circ \tau, \mathbb{1}, (\alpha^{-1}_{Z,Y,X})_{X,Y,Z \in \mathcal{C}}, \varrho, \lambda)$。

特别地，我们将用 $\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(0,1)}$ 表示幺半范畴 $(\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(0)})^{\mathrm{opp}(1)} = (\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)})^{\mathrm{opp}(0)}$。

Mac Lane 的严格性定理 [ML13] 保证，每个幺半范畴都与某个严格幺半范畴幺半等价。因此，除非另有说明，我们都假设所讨论的是严格幺半范畴。

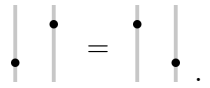
特别地，我们将使用 Street、Joyal 等人提出的严格幺半范畴弦图图形演算（例如 [JS91], [And]）。图从下往上读取。对象对应于弦，态射对应于点。态射的复合通过将弦竖直连接来表示。多个弦或多个对象水平并列时，应理解为它们的张量积。通常省略张量单位。某个严格幺半范畴 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 中态射的可能图形表示例如有



对于图形演算，有一个特定的恒等式非常有用。关于态射 $f : a \to b$, $f' : b \to c$ 和 $g : x \to y$, $g' : y \to z$ 的互换律 指出 $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$。特别地，代入适当的恒等态射后，可得

$$(\mathrm{id}_b \otimes g) \circ (f \otimes \mathrm{id}_c) = f \otimes g = (f \otimes \mathrm{id}_d) \circ (\mathrm{id}_a \otimes g),$$

这在图形表示中对应于恒等式



(2.1)

2.2 刚性幺半范畴

一个 $\Bbbk$-向量空间 V 及其线性对偶 $V^\star := \mathrm{Hom}(V, \Bbbk)$ 之间存在一些显著的关系。本节的核心是以下观察。首先，存在一个映射 $\varepsilon : V \otimes V^\star \to \Bbbk$，定义为 $\varepsilon(v \otimes v') := v'(v)$。其次，若 V 是有限维的，则存在一个映射 $\eta : \Bbbk \to V^\star \otimes V$，定义为 $\eta(1) := \sum_i v'_i \otimes v_i$，其中 $(v_i)_{i \in I}$ 是 V 的一组有限基，而

$(v_i')_{i\in I}$ 是 $V^\star$ 的一组对应对偶基，满足 $v_i'(v_j) := \delta_{ij}$。可以证明，η 的定义不依赖于所选的基 $(v_i)_{i\in I}$。第三，若 V 是有限维的，则这两个映射满足以下关系

$$\begin{aligned}(V \cong V\otimes \Bbbk \overset{\mathrm{id}\otimes\eta}{\to} V\otimes(V^\star\otimes V)\cong (V\otimes V^\star)\otimes V \overset{\varepsilon\otimes\mathrm{id}}{\to} \Bbbk\otimes V\cong V) &= \mathrm{id}_V,\\ (V^\star \cong \Bbbk\otimes V^\star \overset{\eta\otimes\mathrm{id}}{\to} (V^\star\otimes V)\otimes V^\star\cong V^\star\otimes(V\otimes V^\star) \overset{\mathrm{id}\otimes\varepsilon}{\to} V^\star\otimes\Bbbk\cong V^\star) &= \mathrm{id}_{V^\star}\end{aligned} \tag{2.2}$$

以及它的一个对称变体。下一个定义用范畴论术语概括了前面的观察。

定义 2.2.1（刚性范畴）。设 $(\mathsf{C},\otimes,\mathbb{1},\alpha,\lambda,\varrho)$ 是一个幺半范畴。$x\in\mathsf{C}$ 的一个**左对偶**是一个对象 ${}^\star x\in\mathsf{C}$，配有态射 $\varepsilon_x : {}^\star x\otimes x\to\mathbb{1}$ 和 $\eta_x:\mathbb{1}\to x\otimes {}^\star x$，分别称为（左）**求值**和（左）**余评价**，并满足所谓的**之字形**（或**蛇形**）恒等式

$$\varrho_x\circ(\mathrm{id}_x\otimes\varepsilon_x)\circ\alpha_{x,{}^\star x,x}\circ(\eta_x\otimes\mathrm{id}_x)\circ\lambda_x^{-1} = \mathrm{id}_x, \tag{2.3}$$

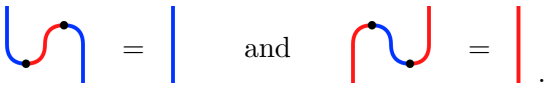
$$\lambda_{{}^\star x}\circ(\varepsilon_x\otimes\mathrm{id}_{{}^\star x})\circ\alpha^{-1}_{{}^\star x,x,{}^\star x}\circ(\mathrm{id}_{{}^\star x}\otimes\eta_x)\circ\varrho^{-1}_{{}^\star x} = \mathrm{id}_{{}^\star x}. \tag{2.4}$$

$x\in\mathsf{C}$ 的一个**右对偶**是一个对象 $x^\star\in\mathsf{C}$，配有（右）求值 $\widetilde{\varepsilon}_x : x\otimes x^\star\to\mathbb{1}$ 和（右）余评价 $\widetilde{\eta}_x:\mathbb{1}\to x^\star\otimes x$，并满足类似的之字形恒等式。如果对每个对象 $x\in\mathsf{C}$，都存在左、右对偶 ${}^\star x$, $x^\star$，则称 $(\mathsf{C},\otimes,\mathbb{1})$ 是**刚性**的，并具有对偶 $(-)^\star$ 和 ${}^\star(-)$。

在严格幺半范畴的图形演算中，左求值和左余评价通常表示如下：

$\varepsilon_x \equiv$  $: {}^\star x\otimes x\to\mathbb{1}$, $\eta_x \equiv$  $:\mathbb{1}\to x\otimes {}^\star x$.

为加以区分，我们用蓝色表示对象 $x\in\mathsf{C}$，用红色表示其左对偶 ${}^\star x\in\mathsf{C}$。蛇形恒等式 (2.3)、(2.4) 可表述为



(2.5)

类似地，也可以表示右求值、右余评价及相应的蛇形恒等式。

根据构造，有限维向量空间范畴 $\mathsf{vect}_\Bbbk$ 是刚性的。另一个非平凡的例子是表示范畴 $H\text{–}\mathsf{Rep}_{\mathsf{f.d.}}$：它由某个有限维 $\Bbbk$-霍普夫代数 H 上的有限维模构成，该代数具有反粒子 $S:H\to H$ 和斜反粒子 $T:H\to H$。在这种情况下，某个 H-模 V 的左对偶和右对偶分别是向量空间 $V^\star$，其作用分别为

$$(h.v')(v) := v'(S(h).v) \quad\text{and}\quad (h.v')(v) := v'(T(h).v))$$

对于 $v'\in V^\star$，$v\in V$，$h\in H$。特别地，某个有限群 G 的群代数 $\Bbbk[G]$ 的表示范畴 $\Bbbk[G]\text{–}\mathsf{Rep}_{\mathsf{f.d.}}$ 是刚性的。其他例子还包括

配边范畴 Cob(n)、预函子范畴 Prof，以及 G-分次有限维向量空间的范畴 G–vect$_{\Bbbk}$，其中 G 是一个群。

可以通过以下方式将对偶的概念从对象推广到态射。对于刚性范畴 (C $\otimes$, $\mathbb{1}$, α, λ, ϱ) 中的态射 $f : x \to y$，其左求值为ε_y : ${}^\star y \otimes y \to \mathbb{1}$，左余求值为 $\eta_x : \mathbb{1} \to x \otimes {}^\star x$，定义左对偶态射${}^\star f$: ${}^\star y \to {}^\star x$ 为

$$ {}^\star f := \lambda_{{}^\star x} \circ (\varepsilon_y \otimes \mathrm{id}_{{}^\star x}) \circ \alpha^{-1}_{{}^\star y, y, {}^\star x} \circ (\mathrm{id}_{{}^\star y} \otimes (f \otimes \mathrm{id}_{{}^\star x})) \circ (\mathrm{id}_{{}^\star y} \otimes \eta_x) \circ \varrho^{-1}_{{}^\star y}, $$

类似地，定义右对偶态射 $f^\star$: $y^\star \to x^\star$。如下结果（参见 [EGNO15，第 2.10 节]）表明，这一构造具有函子性、反变性，并且在同构意义下可逆。

引理 2.2.1。 设 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 是一个刚性范畴。对偶 $(-)^\star$ 可以赋予幺半群等价的结构

$$ (-)^\star : \quad (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}) \to (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})^{\mathrm{opp}(0,1)} $$

具有拟逆 ${}^\star(-)$。

2.3 内 Hom

定义 2.3.1 （模范畴）。 设 (C $\otimes$, $\mathbb{1}$) 是一个幺半范畴，M 是一个任意范畴。C 在 M 上的一个作用 是一个强幺半函子 F : (C $\otimes$, $\mathbb{1}$) $\to$(End(M), $\bigcirc$, id$_{\mathcal{M}}$)。若存在这样的作用，我们称cM := (M F) 是一个 C 上的（左）模范畴。

在 M 上给出 (C $\otimes$, $\mathbb{1}$) 的一个作用，等价于给出一个函子 $\triangleright$: C$\times$M $\to$ M 和自然同构 $(\alpha_{x,y,m} : (x \otimes y) \triangleright m \cong x \triangleright (y \triangleright m))_{x,y\in\mathcal{C},m\in\mathcal{M}}$ 以及 $(\lambda_m : \mathbb{1} \triangleright m \cong m)_{m\in\mathcal{M}}$，使得一个五边形图和一个三角形图交换，参见 [EGNO15，命题 7.1.3]。

定义 2.3.2 （内 Hom）。 设 (C $\otimes$, $\mathbb{1}$) 是一个幺半范畴，且设 cM 是一个左 C-模范畴。M 在 C 中的一个内 *Hom* 是一个函子

$$ \underline{\mathrm{Hom}}(-,-) : \mathcal{M}^{\mathrm{opp}} \times \mathcal{M} \to \mathcal{C} $$

使得对于每个 $m \in$ M，函子 Hom(m, –) : M $\to$ C 是函子– $\triangleright$ m :C $\to$ M 的右伴随，即存在自然同构

$$ \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(x \triangleright m, n) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, \underline{\mathrm{Hom}}(m, n)) $$

对所有 $x \in$ C 和 $m, n \in$ M 均成立。

定义 2.3.3 （闭范畴）。 设 (C $\otimes$, $\mathbb{1}$) 是一个幺半范畴。若存在内 Hom Hom^l(–, –)，使得 C 通过从左侧进行张量积成为左 C-模范畴，则称 (C $\otimes$, $\mathbb{1}$) 是左闭的。若存在内 Hom Hom^r(–, –)，使得 C 通过从右侧进行张量积成为左 C$^{\mathrm{opp}(0)}$-模范畴，则称 (C $\otimes$, $\mathbb{1}$) 是右闭的。既是左闭又是右闭的幺半范畴称为双闭范畴。

换言之，如果存在自然同构，则幺半范畴 $(\mathsf{C},\otimes,\mathbb{1})$ 关于内 Hom $\mathrm{Hom}^l(-,-)$ 是左闭的

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y,z)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\underline{\mathrm{Hom}}^l(y,z)),\tag{2.6}$$

对所有 $x,y,z\in\mathsf{C}$，且它是右闭的，其内 Hom 为 $\mathrm{Hom}^r(-,-)$，若存在自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y,z)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,z))\tag{2.7}$$

对所有 $x,y,z\in\mathsf{C}$。

米田引理蕴含，左内 Hom 和右内 Hom 分别在唯一自然同构意义下唯一。特别地，若双闭范畴 $(\mathsf{C},\otimes,\mathbb{1},\mathrm{Hom}^l,\mathrm{Hom}^r)$ 是对称的，则米田引理蕴含左内 Hom 和右内 Hom 同构，$\mathrm{Hom}^l\cong\mathrm{Hom}^r$。因此，对称双闭范畴有时简称为闭范畴。

以下结果（参见 [EGNO15，命题 2.10.8] ）表明，每个刚性范畴都是双闭的，反之亦然。

引理 2.3.1。 设 $(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{1})$ 是一个具有对偶 $(-)^\star$ 和拟逆 ${}^\star(-)$ 的刚性范畴。则通过定义，$(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{1})$ 是双闭的

$$\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,y):=y\otimes{}^\star x\quad\text{and}\quad\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,y):=x^\star\otimes y\tag{2.8}$$

在 $x,y\in\mathcal{C}$ 上。反过来，每个带有内 *Hom* $\mathrm{Hom}^l(-,-)$ 和 $\mathrm{Hom}^r(-,-)$ 的双闭范畴 $(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{1})$ 都可通过定义而成为刚性范畴

$${}^\star x:=\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,\mathbb{1})\quad\text{and}\quad x^\star:=\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,\mathbb{1}).\tag{2.9}$$

事实上，根据唯一性，在每个刚性双闭范畴中，对偶与内 *Hom* 通过自然同构满足 (2.8) 和 (2.9) 。

在刚性双闭对称幺半范畴 $(\mathrm{vect}_{\Bbbk},\otimes,\Bbbk)$ 中，存在同构 $V\cong V^{\star\star}=\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V,\Bbbk),\Bbbk)$ 和 $\mathrm{Hom}(V\otimes W,\Bbbk)\cong\mathrm{Hom}(V,W^\star)\cong\mathrm{Hom}(W,V^\star)$。引理 2.3.1 特别给出了这些同构对任意刚性范畴的非对称推广。事实上，在任意刚性双闭范畴 $(\mathsf{C},\otimes,\mathbb{1},(-)^\star,{}^\star(-))$ 中，若其内 Hom 为 $\mathrm{Hom}^l(-,-)$ 和 $\mathrm{Hom}^r(-,-)$，则可得到同构

$$\underline{\mathrm{Hom}}^r(\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,\mathbb{1}),\mathbb{1})=({}^\star x)^\star\cong x\cong{}^\star(x^\star)=\underline{\mathrm{Hom}}^l(\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,\mathbb{1}),\mathbb{1}),$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,{}^\star y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y,\mathbb{1})\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,x^\star).$$

2.4 带状幺半范畴

正如幺半范畴将幺半群的概念范畴化一样，下面的定义将交换幺半群的概念范畴化。按照范畴论的思想，性质 $x\otimes y=y\otimes x$ 被替换为一种结构，即同构 $x\otimes y\cong y\otimes x$。

定义 2.4.1（辫子范畴）。 幺半范畴 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 上的编织是一个自然同构

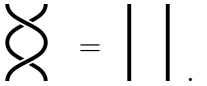
$$\gamma_{x,y} : x \otimes y \to y \otimes x$$

使得两个六边形图可交换（参见 [EGNO15，第 8.1] 节）。辫状幺半范畴 是由一个幺半范畴和一个编织组成的偶对。

对于任意编织 γ，反向辫结构 γ' 定义为 $\gamma'_{x,y} := \gamma^{-1}_{y,x}$。可以验证 γ' 确实是一个编织，即满足两个六边形图。编织和反向辫结构通常表示为

$\gamma_{x,y} \equiv$, $\gamma'_{x,y} \equiv$  .

等式 $\gamma'_{y,x} \bigcirc \gamma_{x,y} = \mathrm{id}_{x\otimes y}$ 对应于以下合理的拓扑陈述

 (2.10)

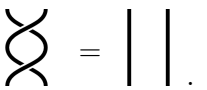
定义 2.4.2（对称范畴）。 如果一个辫状幺半范畴 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1}, \gamma)$ 满足以下条件，则称其为对称：

$$\gamma_{y,x} \circ \gamma_{x,y} = \mathrm{id}_{x\otimes y} \tag{2.11}$$

对于所有 $x, y \in \mathsf{C}$。

对称辫状幺半范畴的例子包括 Set、$\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$，A–Rep（其中A 是任意维数的 $\Bbbk$-双代数 A），以及阿贝尔群 G上的 G-分次任意维向量空间范畴 G–$\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ 。在所有情况下，编织都由因子的交换给出。

请注意，(2.11) 对应于非平凡的拓扑条件（与 (2.10) 相比）。



定义 2.4.3（带状范畴）。 辫刚性幺半范畴 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1}, \gamma, (-)^\star)$ 上的扭结 是一个自然自同构 $\theta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$，满足

$$\theta_{x\otimes y} = (\theta_x \otimes \theta_y) \circ \gamma_{y,x} \circ \gamma_{x,y}$$

对所有 $x, y \in \mathsf{C}$。若扭结满足带状结构，则称其为带状结构。

$$(\theta_x)^\star = \theta_{x^\star}$$

对所有 $x \in \mathsf{C}$。带状范畴 是配备带状结构的辫刚性幺半范畴。

第 3 章

广义对偶理论

本章将介绍本学位论文的主要研究对象，$\star$-自对偶范畴。

3.1 $\star$-自对偶范畴

设 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 是一个双闭幺半范畴，其内 Hom 为 Hom^l 和 Hom^r。简记 $\mathcal{C}(-,-) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(-,-)$，则对于任意对象 $x, k \in \mathsf{C}$，存在自然同构

$$\mathcal{C}\langle \underline{\mathrm{Hom}}^l(x,k), \underline{\mathrm{Hom}}^l(x,k)\rangle \cong \mathcal{C}\langle \underline{\mathrm{Hom}}^l(x,k)\otimes x, k\rangle \cong \mathcal{C}\langle x, \underline{\mathrm{Hom}}^r(\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,k),k)\rangle,$$

$$\mathcal{C}\langle \underline{\mathrm{Hom}}^r(x,k), \underline{\mathrm{Hom}}^r(x,k)\rangle \cong \mathcal{C}\langle x\otimes \underline{\mathrm{Hom}}^r(x,k), k\rangle \cong \mathcal{C}\langle x, \underline{\mathrm{Hom}}^l(\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,k),k)\rangle.$$

这尤其意味着，我们可以将 $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}^l(x,k)}$ 和 $\mathrm{id}^{\mathrm{Hom}^r(x,k)}$ 视为唯一的态射

$$x \to \underline{\mathrm{Hom}}^r(\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,k),k) \quad \text{and} \quad x \to \underline{\mathrm{Hom}}^l(\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,k),k). \tag{3.1}$$

定义 3.1.1（对偶化对象）。设 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 是一个双闭幺半范畴，其内 Hom 为 Hom^l 和 Hom^r。若由此诱导的态射 (3.1) 对所有 $x \in \mathsf{C}$ 都是同构，则称对象 $k \in \mathsf{C}$ 为对偶化对象。

在下面的命题及其证明中，我们总结了 [Bar79], [Bar95] and [BD11] 中的结果。为清晰起见，我们将使用字母 D 而不是符号 * 来表示对偶函子。

命题 3.1.1。设 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 是一个幺半范畴。以下条件等价：

1. $\mathcal{C}$ 上存在左、右内 *Hom*，以及一个对偶化对象 $k \in \mathcal{C}$。
2. 存在一个等价 $D : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}$ 以及自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y\otimes z})). \tag{3.2}$$

3. 存在一个等价 $D:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}$、一个对象 $k\in\mathcal{C}$以及自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y,k)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y})). \tag{3.3}$$

4. 存在一个等价 $D:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}$、一个对象 $k\in\mathcal{C}$，以及自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y,k)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y,D^{-1}(\overline{x})). \tag{3.4}$$

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：定义 $D:=\underline{\mathrm{Hom}}^l(-,k)^{\mathrm{opp}(1)}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^{\mathrm{opp}(1)}$ 和 $D^{-1}:=\underline{\mathrm{Hom}}^r(-,k):\mathbb{C}^{\mathrm{opp}(1)}\to\mathbb{C}$。同构 (3.1) 表明 D 确实是一个等价，其拟逆为 D^{-1}。此外，利用结合子，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z}))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y,\underline{\mathrm{Hom}}^l(z,k))\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x\otimes y\otimes z,k)\\&\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,\underline{\mathrm{Hom}}^l(y\otimes z,k))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y\otimes z})).\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)：计算

$$\mathcal{C}\langle x\otimes y,z\rangle\cong\mathcal{C}\langle x\otimes y,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{D^{-1}(\overline{z})})\rangle\overset{(3.2)}{\cong}\mathcal{C}\langle x,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y\otimes D^{-1}(\overline{z})})\rangle,$$

$$\mathcal{C}\langle x\otimes y,z\rangle\overset{D^{\mathrm{opp}(1)}}{\cong}\mathcal{C}\langle D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z}),D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x\otimes y})\rangle\overset{(3.2)}{\cong}\mathcal{C}\langle\mathbb{1},D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z})\otimes x\otimes y})\rangle$$
$$\overset{(3.2)}{\cong}\mathcal{C}\langle D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z})\otimes x,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y})\rangle\overset{D^{-1}}{\cong}\mathcal{C}\langle y,D^{-1}(\overline{D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z}\otimes x)})\rangle$$

表明 $\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,y):=D^{\mathrm{opp}(1)}(x\otimes D^{-1}(\overline{y}))$ 和 $\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,y):=D^{-1}(\overline{D^{\mathrm{opp}(1)}(y)\otimes x})$ 定义了左、右内 Hom。此外，米田引理和

$$\mathcal{C}\langle x,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{\mathbb{1}})\rangle\overset{(3.2)}{\cong}\mathcal{C}\langle\mathbb{1},D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x\otimes\mathbb{1}})\rangle\overset{D^{-1}}{\cong}\mathcal{C}\langle x,D^{-1}(\overline{\mathbb{1}})\rangle \tag{3.5}$$

证明 $D^{\mathrm{opp}(1)}(\mathbb{1})\cong D^{-1}(\mathbb{1})=:\overline{k}$。由于 D 和 D^{-1} 互为拟逆，并且

$$\underline{\mathrm{Hom}}^l(\overline{x},k)=D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x\otimes D^{-1}(\overline{k})})\cong D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x\otimes D^{-1}(\overline{D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{\mathbb{1}})})})\cong D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x}),$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}^r(\overline{x},k)=D^{-1}(\overline{D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{D^{-1}(\overline{\mathbb{1}})})\otimes x})\cong D^{-1}(\overline{x}),$$

由此可知 k 是对偶化的。

(2) $\Rightarrow$ (3)：定义 $k:=D^{\mathrm{opp}(1)}(\mathbb{1})\overset{(3.5)}{\cong}D^{-1}(\mathbb{1})$。于是

$$\mathcal{C}\langle x\otimes y,k\rangle\cong\mathcal{C}\langle x\otimes y,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{\mathbb{1}})\rangle\overset{(3.2)}{\cong}\mathcal{C}\langle x,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y\otimes\mathbb{1}})\rangle\cong\mathcal{C}\langle x,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y})\rangle.$$

(3) $\Rightarrow$ (2)：利用结合子，可以证明

$$\mathcal{C}\langle x\otimes y,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z})\rangle\overset{(3.3)}{\cong}\mathcal{C}\langle(x\otimes y)\otimes z,k\rangle\cong\langle x\otimes(y\otimes z),k\rangle\overset{(3.3)}{\cong}\mathcal{C}\langle x,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y\otimes z})\rangle.$$

(3) $\Leftrightarrow$ (4)：这分别由应用 D 和 D^{-1} 立即得出。 □

定义 3.1.2 （$\star$-自反范畴）。 具有命题 3.1.1 中某一种结构的幺半范畴称为 $\star$-自反范畴。特别地，具有 (3) 或 (4) 中所述结构的幺半范畴也称为 $Grothendieck$-$Verdier$ 范畴（参见 [BD11]）。

根据引理 2.3.1，每个刚性幺半范畴都是双闭的，并且是 -自对偶的，其对偶化对象为幺半单位。因此，在 BD11 中，将对偶化对象为幺半单位的 -自对偶范畴称为 *r*-范畴 。由此可知，每个刚性范畴都是 r-范畴。然而，反之并不成立（参见 BD11，例 0.）。

在 BD11，命题 1. 中指出，对偶化对象仅在与可逆对象作张量积的意义下唯一；也就是说，若 C 是一个对偶化对象，且 C 是一个可逆对象，那么 和 也都是对偶化对象。

据我们所知，目前文献中尚无关于 -自对偶范畴的态射的公认概念。事实上，适宜为命题 3.1.1 中引入的所有结构分别定义若干种态射概念，然后将命题 3.1.1 推广为范畴等价。

例如，按照命题 3.1.1 的第 3. 种形式，两个 $\star$-自主范畴 $(\mathcal{C}\ \otimes_{\mathcal{C}},\ \mathbb{1}_{\mathcal{C}}\ k_{\mathcal{C}},\ D_{\mathcal{C}},\ D_{\mathcal{C}}^{-1})$ 和 $(\mathcal{D}\ \otimes_{\mathcal{D}},\ \mathbb{1}_{\mathcal{D}}\ k_{\mathcal{D}},\ D_{\mathcal{D}},\ D_{\mathcal{D}}^{-1})$ 之间的一个候选态射可以是一个松幺半函子

$$(F,\Phi,\phi):(\mathcal{C},\otimes_{\mathcal{C}},\mathbb{1}_{\mathcal{C}})\to(\mathcal{D},\otimes_{\mathcal{D}},\mathbb{1}_{\mathcal{D}}) \tag{3.6}$$

以及一个态射

$$k_F:F(k_{\mathcal{C}})\to k_{\mathcal{D}}. \tag{3.7}$$

和一个松自然变换

$$F(D_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x}))\to D_{\mathcal{D}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{F(x)}), \tag{3.8}$$

使得以下相干图表可交换

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}\langle x\otimes y,k_{\mathcal{C}}\rangle & \xrightarrow{(3.3)} & \mathcal{C}\langle x,D_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y})\rangle \\
\Big\downarrow{\scriptstyle F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F} \\
\mathcal{D}\langle F(x\otimes y),F(k_{\mathcal{C}})\rangle & & \mathcal{D}\langle F(x),F(D_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y}))\rangle \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \Phi,k_F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (3.8)} \\
\mathcal{D}\langle F(x)\otimes F(y),k_{\mathcal{D}}\rangle & \xrightarrow{(3.3)} & \mathcal{D}\langle F(x),D_{\mathcal{D}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{F(y)})\rangle.
\end{array} \tag{3.9}$$

事实上，正如 [Mel16, Remark, p.27] 所示，松自然变换 (3.8) 可以按以下方式从数据 (3.6) 、 (3.7) 推导出来。首先，对于任意元素 $x\in\mathsf{C}$，我们可以通过 C 的自然同构 (3.3)，将恒等态射 $\mathrm{id}_{D^{\mathrm{opp}(1)}(x)}$ 识别为一个唯一的态射

$$D_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x})\otimes_{\mathcal{C}}x\to k_{\mathcal{C}}. \tag{3.10}$$

因此，我们可以构造一个态射

$$F(D_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x}))\otimes_{\mathcal{D}}F(x)\overset{\Phi}{\to}F(D_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x})\otimes_{\mathcal{C}}x)\overset{(3.10)}{\to}F(k_{\mathcal{C}})\overset{(3.7)}{\to}k_{\mathcal{D}},$$

并通过 D 的自然同构 (3.3) 将其识别为一个唯一的态射

$$F(D_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x}))\to D_{\mathcal{D}}^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{F(x)}).$$

O可以检验，这一构造给出了一个满足 (3.9) 的自然变换。鉴于前述说明，我们给出以下定义。

定义 3.1.3. 在 $\star$-自主范畴 (C $\otimes_{\mathcal{C}}$、$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$ $k_{\mathcal{C}}$) 和 (D $\otimes_{\mathcal{D}}$、$\mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ $k_{\mathcal{D}}$) 之间的一个（松） $\star$-自主函子 由一个松幺半函子给出

$$F:(\mathcal{C},\otimes_{\mathcal{C}},\mathbb{1}_{\mathcal{C}})\to(\mathcal{D},\otimes_{\mathcal{D}},\mathbb{1}_{\mathcal{D}}) \tag{3.11}$$

以及一个态射

$$k_F:F(k_{\mathcal{C}})\to k_{\mathcal{D}}. \tag{3.12}$$

现在我们转向另一个方面。作为定义 2.4.1 和定义 2.4.3 的推广，我们采用 [BD11] 中的以下定义。

定义 3.1.4。若一个 $\star$-自对偶范畴的底层幺半结构配备了编织，则称其为编织的。类似地，编织的 $\star$-自对偶范畴上的扭结 是底层编织幺半结构上的扭结。带对偶 D 的编织 $\star$-自对偶范畴 C 的（弱）带状结构 是一个扭结 θ，使得

$$D(\theta_x)=\theta_{D(x)}$$

对所有 $x\in$C 均成立。

我们将在定义 4.2.13 中再次遇到 $\star$-自对偶范畴的弱带状结构。

3.2 线性分配范畴

$\star$-自对偶范畴与刚性范畴的一个重要区别在于对偶函子（–）*的幺半结构。在引理 2.2.1 中，我们看到，对于每个刚性范畴 (C $\otimes$，$\mathbb{1}$)，诱导的对偶（–）* :C $\to$C$^{\mathrm{opp}(1)}$ 可以配备幺半群等价的结构

$$(-)^\star:(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{1})\to(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{1})^{\mathrm{opp}(0,1)}. \tag{3.13}$$

对于每个 $\star$-自对偶范畴 (C $\otimes$，$\mathbb{1}$，(–)*)，情况未必如此（不过，经过一项非平凡的证明，双对偶在上述意义下仍是必要的幺半结构[BD11，命题 4.2]），这促使我们定义 C 上的第二个张量积 $\otimes'$，其定义为

$$x\otimes' y:={}^\star(y^\star\otimes x^\star) \tag{3.14}$$

对于 $x,\ y \in \mathsf{C}$，以及 ${}^{\star}(\text{–}) : \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \to \mathsf{C}$ 对偶 $(\text{–})^{\star} : \mathsf{C} \to \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1}$ 的拟逆 ）.

例如，设 X 是一个集合，并令 $(\mathsf{P}(X),\ \cap,\ X,\ (\text{–})^c)$ 为我们在引言中定义的 $\star$-自对偶范畴——其张量积由集合的交集 $\cap$ 给出，张量单位为 X，自逆对偶 $(\text{–})^c$ 由集合论补集给出。由 $(\text{–})^c$ 诱导的 $\mathsf{P}(X)$ 上的第二个张量积，在 $A,\ B \subseteq X$ 上由 $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$ 给出，这用到了德摩根定律。换言之，与 (3.13) 不同，对偶 $(\text{–})^c$ 诱导出一个幺半群等价

$$(-)^c : (\mathcal{P}(X), \cap, X) \to (\mathcal{P}(X), \cup, \varnothing)^{\mathrm{opp}(0,1)}.$$

令人惊讶的是，要刻画 $\star$-自对偶范畴，只需关注张量积 $\otimes,\ \otimes'$ 与对偶 $(\text{–})^{\star}$ 之间的关系。为此，我们引入以下定义。不过请注意，从历史上看，线性分配范畴这一概念最初称为弱分配范畴，由 Cockett 和 Seely 在 [CS97], 中定义，后来才与 $\star$-自对偶范畴联系起来。

定义 3.2.1（线性分配范畴）。 线性分配范畴 是一个范畴 C，带有两种幺半结构 $(\otimes_1,\ \mathbb{1}_1,\ \alpha_1,\ \lambda_1,\ \varrho_1)$、$(\otimes_2,\ \mathbb{1}_2,\ \alpha_2,\ \lambda_2,\ \varrho_2)$，以及不一定可逆的自然变换

$$(\delta^L)_{x,y,z} : x \otimes_1 (y \otimes_2 z) \to (x \otimes_1 y) \otimes_2 z,$$
$$(\delta^R)_{x,y,z} : (x \otimes_2 y) \otimes_1 z \to x \otimes_2 (y \otimes_1 z),$$

称为分配子，它们满足六个五边形约束和四个三角形约束，用以描述分配子与结合子之间的相互作用（例如参见 [Mel09], [CS97]）。如果两种幺半结构都是对称的，则线性分配范畴是对称的。

如果分配子可逆，则可以通过反转幺半结构的顺序并分别定义 $\delta'_L := (\delta^R)^{-1}$ 和 $\delta'_R := (\delta^L)^{-1}$，来定义第二种线性分配结构。

每个幺半范畴 $(\mathsf{C},\ \otimes,\ \mathbb{1},\ \alpha,\ \lambda,\ \varrho)$ 都可以通过将两种幺半结构选为相同的 $(\otimes,\ \mathbb{1},\ \alpha,\ \lambda,\ \varrho)$，并将分配子选为 $\delta^L = \alpha^{-1}$ 和 $\delta^R = \alpha$，分别诱导出一个线性分配范畴。请注意，在这种情况下，上述构造不会产生新的线性分配范畴。

定义 3.2.2（带对偶的线性分配范畴）。 设 C 是一个线性分配范畴，其幺半群结构为 $(\otimes_1,\ \mathbb{1}_1,\ \alpha_1,\ \lambda_1,\ \varrho_1)$，$(\otimes_2,\ \mathbb{1}_2,\ \alpha_2,\ \lambda_2,\ \varrho_2)$。 $x \in \mathsf{C}$ 的一个线性左对偶是一个对象 ${}^{\star}x \in \mathsf{C}$，带有态射 $\varepsilon_x :\ {}^{\star}x \otimes_1 x \to \mathbb{1}_2$ 和$\eta_x : \mathbb{1}_1 \to x \otimes_2 {}^{\star}x$，分别称为（左）求值和（左）余评价，满足所谓的锯齿（或蛇形）恒等式

$$\varrho_2 \circ (\mathrm{id}_x \otimes_2 \varepsilon_x) \circ \delta^R \circ (\eta_x \otimes_1 \mathrm{id}_x) \circ \lambda_1^{-1} \quad = \quad \mathrm{id}_x, \tag{3.15}$$
$$\lambda_2 \circ (\varepsilon_x \otimes_2 \mathrm{id}_{{}^{\star}x}) \circ \delta^L \circ (\mathrm{id}_{{}^{\star}x} \otimes_1 \eta_x) \circ \varrho_1^{-1} \quad = \quad \mathrm{id}_{{}^{\star}x}. \tag{3.16}$$

$x \in \mathsf{C}$ 的右线性对偶 是一个对象 $x^{\star} \in \mathsf{C}$，带有一个（右）求值映射 $\widetilde{\varepsilon}_x : x \otimes_1 x^{\star} \to \mathbb{1}_2$和一个（右）余评价 $\widetilde{\eta}_x : \mathbb{1}_1 \to\ x^{\star} \otimes_2 x$，并满足类似的之字形恒等式。如果对每个对象 $x \in \mathsf{C}$，都存在左、右线性对偶 ${}^{\star}x,\ x^{\star}$，我们就说 C带有对偶。

请注意，由于逻辑中的一些例子，Cockett 和 Seely 最初使用否定 一词，而不是对偶。此外，有时也会使用线性伴随 一词，并记作 $x \dashv y$；其中 y 分别是 x的右对偶， x 是 y的左对偶。

可以按以下方式，将线性分配范畴中对象的对偶概念推广到态射。对于态射 $f : x \to y$、左求值 $\varepsilon_y : {}^\star y \otimes_1 y \to \mathbb{1}_2$ 和左余求值 $\eta_x : \mathbb{1}_1 \to x \otimes_2 {}^\star x$，定义左对偶态射 ${}^\star f : {}^\star y \to {}^\star x$ 为

$$\begin{aligned} {}^\star f &:= \lambda_2 \circ (\varepsilon_y \otimes_2 \mathrm{id}_{{}^\star x}) \circ \delta^L \circ (\mathrm{id}_{{}^\star y} \otimes_1 (f \otimes_2 \mathrm{id}_{{}^\star x})) \circ (\mathrm{id}_{{}^\star y} \otimes_1 \eta_x) \circ \varrho_1^{-1} \\ &= \lambda_2 \circ (\varepsilon_y \otimes_2 \mathrm{id}_{{}^\star x}) \circ ((\mathrm{id}_{{}^\star y} \otimes_1 f) \otimes_2 \mathrm{id}_{{}^\star x}) \circ \delta^L \circ (\mathrm{id}_{{}^\star y} \otimes_1 \eta_x) \circ \varrho_1^{-1}, \end{aligned}$$

利用 δ^L 的自然性。类似地，可以定义右对偶态射 $f^\star : y^\star \to x^\star$。如下结果所示（参见 [Mel17，命题 9]），这一构造具有函子性、反变性，并且在自然同构意义下可逆。

引理 3.2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是带对偶的线性分配范畴$(-)^\star$，其幺半结构为 $(\otimes_1, \mathbb{1}_1, \alpha_1, \lambda_1, \varrho_1)$ 和 $(\otimes_2, \mathbb{1}_2, \alpha_2, \lambda_2, \varrho_2)$。对偶$(-)^\star$ 可以赋予幺半群等价的结构

$$(-)^\star : \quad (\mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_1) \to (\mathcal{C}, \otimes_2, \mathbb{1}_2)^{\mathrm{opp}(0,1)}$$

带拟逆 ${}^\star(-)$。

正如每个幺半范畴都会导出一个线性分配范畴，刚性 幺半范畴也会导出一个带对偶的线性分配范畴，而引理 3.2.1 可视为引理 2.2.1 的相应推广。反之则不成立，例如范畴 $(\mathbf{P}(X), \cap, X, (-)^c)$ 再次说明了这一点。

在引理 2.3.1 中，我们已经看到每个刚性范畴都可以赋予双闭范畴的结构。以下结果（参见 [Mel09，命题 4.10.4、命题 4.10.5]）为带对偶的线性分配范畴给出了类似的构造。

引理 3.2.2。 设$\mathcal{C}$ 是一个带对偶的线性分配范畴$(-)^\star$，带有拟逆${}^\star(-)$，以及幺半结构$(\otimes_1, \mathbb{1}_1, \alpha_1, \lambda_1, \varrho_1)$、$(\otimes_2, \mathbb{1}_2, \alpha_2, \lambda_2, \varrho_2)$。则 $(\mathcal{C}, \otimes_1, \mathbb{1}_1)$ 是双闭的，其定义如下：

$$\underline{\mathrm{Hom}}^l(x, y) := y \otimes_2 {}^\star x \quad \text{and} \quad \underline{\mathrm{Hom}}^r(x, y) := x^\star \otimes_2 y$$

推论 3.2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有幺半群结构$(\otimes_1, \mathbb{1}_1, \alpha_1, \lambda_1, \varrho_1)$,$(\otimes_2, \mathbb{1}_2, \alpha_2, \lambda_2, \varrho_2)$的线性分配范畴。设 $x, y \in \mathcal{C}$是具有对偶的对象。则存在自然同构

$$\mathcal{C}\langle x \otimes_1 y, \mathbb{1}_2 \rangle \cong \mathcal{C}\langle y, x^\star \rangle \cong \mathcal{C}\langle x, {}^\star y \rangle,$$

$$\mathcal{C}\langle \mathbb{1}_1, y \otimes_2 x \rangle \cong \mathcal{C}\langle x^\star, y \rangle \cong \mathcal{C}\langle {}^\star y, x \rangle.$$

此外，任意一对形式 $x \otimes_1 y \to \mathbb{1}_2$ 和 $\mathbb{1}_1 \to y \otimes_2 x$ 构成线性伴随$x \dashv y$，当且仅当相应的态射 $y \to x^\star$ 和 $x^\star \to y$ 互为逆。

除此之外，引理 3.2.2 特别意味着，对于所有 $x \in \mathsf{C}$，$\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,\mathbb{1}_2) \cong {}^\star x$ 以及 $\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,\mathbb{1}_2) \cong x^\star$。因此，由于引理 3.2.1 表明 $(-)^\star$ 与 ${}^\star(-)$ 互为拟逆，我们得到

$$\underline{\mathrm{Hom}}^l(\underline{\mathrm{Hom}}^r(x,\mathbb{1}_2),\mathbb{1}_2) \cong x \cong \underline{\mathrm{Hom}}^r(\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,\mathbb{1}_2),\mathbb{1}_2).$$

可以证明，这两个同构都等于通过（3.1）得到的那些态射。因此，$\mathbb{1}_2$ 是双闭幺半范畴 $(\mathsf{C}\ \otimes_1,\ \mathbb{1}_1)$ 的对偶化对象，即 C 是 $\star$-自对偶的。

Seely 和 Cockett 的一个结果（参见 [CS97，定理 4.5]）表明，在对称情形下，反过来也成立：一个对称的 $\star$-自对偶范畴会诱导出一个带对偶的对称线性分配范畴。原始表述称：“带否定的对称弱分配范畴与（对称）$\star$-自对偶范畴的概念是一致的”。然而，据我们的理解，该证明实际上只给出了一个存在性陈述，并未使用任何同构概念。因此，我们给出以下变体。

命题 3.2.1。每个带对偶的对称线性分配范畴都会诱导出一个对称的 $\star$-自对偶范畴，反之亦然。

事实上，这一陈述可以推广到非对称版本。若 $(\mathsf{C}\ \otimes_1,\mathbb{1})$ 是一个具有对偶 $(-)^\star$，${}^\star(-)$、对偶化对象 k 和内 Hom $\mathrm{Hom}^l,\mathrm{Hom}^r$ 的非对称 $\star$-自对偶范畴，则按照 (3.14) 在 C 上定义第二个张量积 $\otimes_2$，~~即在~~ ~~x,y~~ $\in \mathsf{C}$ 上令

$$x \otimes_2 y := {}^\star(y^\star \otimes x^\star).$$

由于内 Hom 能将自身内化，我们可以将其识别为

$$\begin{aligned} x \otimes_2 y = {}^\star(y^\star \otimes x^\star) &\cong \underline{\mathrm{Hom}}^r(\underline{\mathrm{Hom}}^l(y,k) \otimes \underline{\mathrm{Hom}}^l(x,k),k) \\ &\cong \underline{\mathrm{Hom}}^r(\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,k),\underline{\mathrm{Hom}}^r(\underline{\mathrm{Hom}}^l(y,k),k)) \cong \underline{\mathrm{Hom}}^r(\underline{\mathrm{Hom}}^l(x,k),y) \\ &\cong \underline{\mathrm{Hom}}^r(x^\star,y). \end{aligned} \tag{3.17}$$

然后，例如，对于一个具有张量积 $\otimes_1,\otimes_2$ 的线性分配范畴 C，可以通过以下方式推出左分配子 $\delta^L_{x,y,z} : x \otimes_1 (y \otimes_2 z) \to (x \otimes_1 y) \otimes_2 z$

$$\cdot \circ \dfrac{(3.2)\ \dfrac{(x \otimes_1 y)^\star \to (x \otimes_1 y)^\star}{(x \otimes_1 y)^\star \otimes_1 x \to y^\star} \qquad \dfrac{\dfrac{\underline{\mathrm{Hom}}^r(y^\star,z) \to \underline{\mathrm{Hom}}^r(y^\star,z)}{y^\star \otimes_1 \underline{\mathrm{Hom}}^r(y^\star,z) \to z}\,(2.7)}{y^\star \to \underline{\mathrm{Hom}}^l(\underline{\mathrm{Hom}}^r(y^\star,z),z)}\,(2.6)}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(x \otimes_1 y)^\star \otimes_1 x \to \underline{\mathrm{Hom}}^l(\underline{\mathrm{Hom}}^r(y^\star,z),z)}{(x \otimes_1 y)^\star \otimes_1 x \otimes_1 \underline{\mathrm{Hom}}^r(y^\star,z) \to z}\,(2.6)}{x \otimes_1 \underline{\mathrm{Hom}}^r(y^\star,z) \to \underline{\mathrm{Hom}}^r((x \otimes_1 y)^\star,z)}\,(2.7)}{x \otimes_1 (y \otimes_2 z) \to (x \otimes_1 y) \otimes_2 z}\,(3.17)}$$

3.3 †-Frobenius伪幺半群

本节的主要目标是将 $\star$-自对偶范畴与伴随函子双范畴中的 †-Frobenius 伪幺半群联系起来。

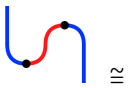
弗罗贝尼乌斯代数是一种有限维$\Bbbk$-代数 A，配备一个非退化的弗罗贝尼乌斯型 $\sigma : A \otimes A \to \Bbbk$，满足 $\sigma(ab \otimes c) = \sigma(a \otimes bc)$，其中 $a, b, c \in A$。早在20世纪初，人们就已开始研究它们（参见 [Nak39], [Nak41], [BN37]）；近年来，由于它们与二维量子场论的联系，人们对它们的兴趣再度兴起（参见 [Abr96]）。

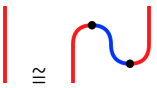
Frobenius代数的例子包括$\Bbbk$-代数 $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$，即元素取自某个域 $\Bbbk$ 的 $n \times n$ 阶矩阵代数，以及其迹；有限群 G 的群代数$\Bbbk[G]$，其弗罗贝尼乌斯型由两个自变量乘积中单位元 1_G 的系数给出；此外，根据 Larson 和 Sweedler 的一个结果，每个有限维霍普夫代数都是一个例子（参见 [LS69]）。

我们的下一个目标是将幺半范畴中弗罗贝尼乌斯代数的现有定义（参见 [FS09]）推广到幺半双范畴，并证明它们之间的等价性。主要方法是将性质（即 1-态射之间的关系）替换为结构（即 2-态射）。我们首先将刚性的概念（参见定义 2.2.1）推广到幺半双范畴。

定义 3.3.1（双正合配对）。设 $(\mathbf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 为一个严格幺半双范畴。对象 $x, y \in \mathbf{C}$ 之间的双正合配对 $x \dashv y$由一个 1-态射 $\varepsilon_1 \equiv$  $: x \otimes y \to \mathbb{1}$、一个 1-态射 $\eta_1 \equiv$  $: \mathbb{1} \to y \otimes x$，以及$\bar{1}$-态射给出

$$\varepsilon_2 : \quad \cong \quad \text{and} \quad \eta_2 : \quad \cong \quad . \tag{3.18}$$





若存在双正合配对 $x \dashv y$，则称 x 为 y 的左对偶，称 y 为 x 的右对偶。

请注意，在 [Mel13 的定义 8 中，除了我们的定义之外，2-态射还受到一些约束。

在下面的引理中，我们证明幺半双范畴中右对偶的唯一性。证明推迟到附录中给出。该命题也可以改述为左对偶的唯一性。

引理 3.3.1. 设 $(\mathbf{C}, \otimes, 1)$ 是一个严格幺半双范畴，且 $A, B, B' \in \mathbf{C}$。假设$A \dashv B$ 和 $A \dashv B'$ 由 ε_1, η_1 及 ε_1', η_1'见证。那么存在 *1*-态射 $\alpha : B \to B'$ 和 $\beta : B' \to B$，以及可逆 *2*-态射 $\beta \bigcirc \alpha \cong id_B$ 和 $\alpha \bigcirc \beta \cong id_{B'}$。*1*-态射 α 以如下意义保持求值态射和余求值态射：存在可逆 *2*-态射 $\varepsilon_1' \bigcirc (id_A \otimes \alpha) \cong \varepsilon_1$ 和 $(\alpha \otimes id_A) \bigcirc \eta_1 \cong \eta_1'$。此外，$\alpha$ 在如下意义下是唯一的：对于任何以这种方式保持求值态射和余求值态射的其他 *1*-态射 $\tilde{\alpha} : B \to B'$，都存在一个可逆 *2*-态射 $\alpha \cong \tilde{\alpha}$。

下面的引理 3.3.2 将推论 3.2.1 推广到了双范畴。利用之字形 2-态射 (3.18) 可以直接得到该结论。

引理 3.3.2。 设 $(\mathcal{C}\ \otimes, \mathbb{1})$ 是一个严格幺半双范畴，具有 $x, y, x^\star, {}^\star y \in \mathcal{C}$ 以及双正合配对 $x \dashv x^\star, {}^\star y \dashv y$。那么存在范畴等价

$$\mathcal{C}\langle x \otimes y, \mathbb{1}_2\rangle \cong\ \mathcal{C}\langle y, x^\star\rangle \cong\ \mathcal{C}\langle x,\ {}^\star y\rangle,$$

$$\mathcal{C}\langle \mathbb{1}, y \otimes_2 x\rangle \cong\ \mathcal{C}\langle x^\star, y\rangle \cong\ \mathcal{C}\langle {}^\star y, x\rangle.$$

此外，任意一对 1-态射 $x \otimes y \to \mathbb{1}$ 和 $\mathbb{1} \to y \otimes x$ 构成双正合配对$x \dashv y$，当且仅当相应的 1-态射 $y \to x^\star$ 和 $x^\star \to y$ 在相差2-态射的意义下互为逆。

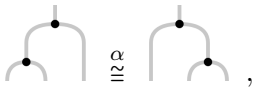
理解代数，尤其是弗罗贝尼乌斯代数，的核心是幺半群这一概念。我们已经接触过幺半范畴的概念。令人惊讶的是，在幺半范畴中还可以定义幺半群的另一种范畴化——幺半对象 （参见 [ML13]）。这可以视为微观—宏观宇宙原理的一个例子。下面给出一些幺半对象的例子。Set 中的幺半对象是经典幺半群。某个范畴 C 的自函子范畴 End(C,C) 中的幺半对象是 C 上的单子。但最重要的是，$\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ 范畴中的幺半对象是一个$\Bbbk$-代数。

通过以下定义，将幺半对象的概念推广到幺半双范畴。

定义 3.3.2 （伪幺半群）。 幺半双范畴 (C $\otimes$,$\mathbb{1}$) 中的一个伪幺半群 (A, μ, η) := $(A, \mu, \eta, \alpha, \lambda, \varrho)$ 是对象 $A \in \mathsf{C}$，并赋有 1-态射 $\mu \equiv$:$A \otimes A \to A$ 和 $\eta \equiv$: $\mathbb{1} \to A$，



称为 A 的乘法 和单位 ，以及 可逆 2-胞



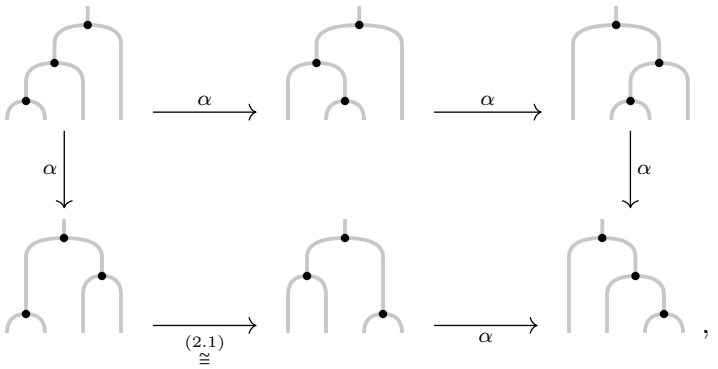
, (3.19)

称为结合子，以及

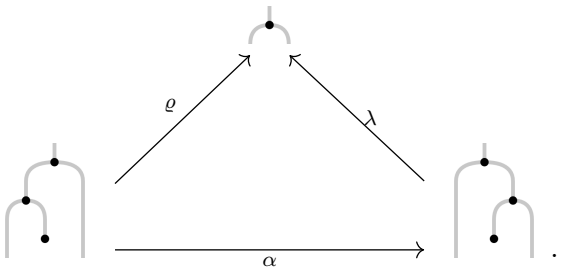


, (3.20)

称为左单位子和右单位子，并满足以下交换性约束



, (3.21)



(3.22)

可逆 2-胞 α，λ，ϱ，是伪幺半群数据的一部分，不过，以下若非明确需要，为方便起见，我们会在记号中省略它们。

一个伪余幺半群$(A,\delta,\varepsilon) := (A,\delta,\varepsilon,\alpha,\lambda,\varrho)$ 是双范畴 $(\mathbf{C}\ \otimes,\mathbb{1})$ 中的一个伪幺半群。

例如，小幺半范畴是小范畴的双范畴 Cat 中的一个伪幺半群。

以下结果表明，与经典的弗罗贝尼乌斯代数以及幺半范畴中的 Frobenius代数类似，在幺半双范畴中，所谓的弗罗贝尼乌斯伪幺半群存在多种等价定义。为清晰起见，我们将证明推迟至附录；该证明大量使用图形演算。

引理 3.3.3. 设$(A,\ \mu \equiv$ $: A \otimes A \to A,\ \eta \equiv$ $: \mathbb{1} \to A)$ 是幺半双范畴$(\mathcal{C}\ \otimes,\mathbb{1})$中的一个伪幺半群。以下各项等价：

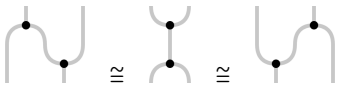
1. 存在 $\varepsilon \equiv$ $: A \to \mathbb{1}$，使得：$A \otimes A \to$ 正合配对 $A \dashv A$的求值映射。

2. 存在：$A \otimes A \cdot$ 它是双正合配对 $A \dashv A$的求值映射，以及一个可逆的 2-胞。



(3.23)

3. 在 A 上存在一个伪余幺半群结构 $(A,\ \delta \equiv$ $: A \cdot$ $A,\ \varepsilon \equiv$ $: A \to \mathbb{1})$ 满足两个可逆的2-胞。



(3.24)

请注意，我们仅给出存在性陈述，并不试图证明由伪幺半群上的结构所张成的范畴等价，因为这超出了本学位论文的范围。

定义 3.3.3 （Frobenius伪幺半群）。 具有引理 3.3.3 中某一种结构的伪幺半群称为*Frobenius*。

请注意，在 [Mel13] 中，还要求 Mac Lane 五边形图的一个变体可交换。

接下来，我们将定义一个用于考察 Frobenius伪幺半群的双范畴：伴随函子的幺半双范畴。

关于富化范畴的介绍，参见例如 [BS00]。

定义 3.3.4 (V–Cat)。 设 $(\mathsf{V}, \otimes, \mathbb{1})$ 是一个对称闭幺半范畴。令 V–Cat 为小型 V-富集范畴、V-函子和 V-自然变换构成的对称闭双范畴，其定义如下。V-富集范畴 C ⊗D 的张量积是一个 V-富集范畴，其对象为 ob(C⊗D) = ob(C)×ob(D)，态射为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}}((x,y),(x',y')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,x') \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(y,y') \in \mathcal{V}.$$

对于 $x, x' \in \mathsf{C}$ $y, y' \in \mathsf{D}$。关于此张量积的幺半单位由单对象范畴 $\star$ 给出，满足 Hom(⋆, ⋆) = 𝟙 ∈ V。V–Cat 的对称编织由 V 的对称编织诱导。两个 V-富集范畴的内 Hom Hom(C,D) 是一个 V-富集范畴，其对象为 V-富集函子 $F : \mathsf{C} \to$ ~~D,~~ 态射则为端（参见定义 4.1.2）

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,G) = \int_{x\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\overline{x}), G(x)) \in \mathcal{V}. \tag{3.25}$$

这可以看作是小范畴的 Set-富集范畴 Cat 的推广（参见 (3.25) 与 (4.5)）。

定义 3.3.5 (V–Mod)。 假设 V 是余完备的。闭对称幺半双范畴 V–Mod 与 V–Cat 具有相同的对象和幺半结构，但其态射定义为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\text{-Mod}}(\mathcal{C},\mathcal{D}) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\text{-Cat}}(\mathcal{D}^{\mathrm{opp}(1)} \otimes \mathcal{C}, \mathcal{V}).$$

态射 $F \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\text{-Mod}}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ 称为从 C到 D 的伴随函子（或模、分配子），通常记作 $F : \mathsf{C} \nrightarrow \mathsf{D}$。伴随函子 $F : \mathsf{A} \nrightarrow \mathsf{B}$ 和 $G : \mathsf{B} \nrightarrow \mathsf{C}$ 的复合定义为余端（参见定义 4.1.2），

$$(G \circ F)(\overline{c}, a) = \int^{b\in\mathcal{B}} F(\overline{b}, a) \otimes G(\overline{c}, b), \quad c \in \mathcal{C}, a \in \mathcal{A}, \tag{3.26}$$

且在同构意义下满足结合律。由于 V–Mod 的对象是小范畴，且 V 余完备，因此余端存在（参见 [ML13，推论 5.2]）。当 $\mathsf{V} = (\mathrm{Set}, \times, \{\star\})$ 时，通常记作 Prof := V–Mod，并称其为伴随函子范畴。

“模”这一术语可由以下观察得到启发。考虑 $\mathsf{V} = \mathrm{Vect}_{\Bbbk}$，则 V–Mod 中范畴的态射空间是 𝕜-向量空间，且复合是双线性的。特别地，V–Mod 中只有一个对象的范畴 $\star$ 与以复合作为乘法的 𝕜-代数之间存在双射。范畴 A $F :$ 与 B $\nrightarrow$之间的一个模

于是可以看作一个 (A,B)-双模 $M := F(\star,\star)$，其代数 $A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\star,\star)$ 和 $B := \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\star,\star)$ 的作用ρ_A, ρ_B分别由 $\rho_A(a) := F(\mathrm{id}_\star, a)$ 和 $\rho_B(b) := F(b, \mathrm{id}_\star)$ 给出。

现在我们将定义从 V–Cat 到 V–Mod 的包含。为此，请注意，每个函子 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 都会得到由下式定义的模 $F_\star : \mathsf{C} \nrightarrow \mathsf{D}$ 和 $F^\star : \mathsf{D} \nrightarrow \mathsf{C}$

$$F_\star(\overline{d}, c) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(d, F(c)) \quad \text{and} \quad F^\star(\overline{c}, d) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \tag{3.27}$$

对于 $c \in \mathsf{C}$ $d \in \mathsf{D}$。此外，每个 V-函子的 V-自然变换 $\eta : F \Rightarrow G$ ， $G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 都会得到由下式定义的 V-自然变换 $\eta_\star : F_\star \Rightarrow G_\star$ 和 $\eta^\star : G^\star \Rightarrow F^\star$： $(\eta_\star)^{(d,c)} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathrm{id}_d, \eta_c)$ 和 $(\overline{\eta^\star})^{(d,c)} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\eta_c, \mathrm{id}_d)$。

引理 3.3.4. 将 $\mathcal{V}$-范畴映射到自身，分别将 $\mathcal{V}$-函子 F 映射到 $F_\star$ 和 $F^\star$，并将 $\mathcal{V}$-自然变换 η 映射到 $\eta_\star$ 和 $\eta^\star$，可得到幺半 *2*-函子

$$(-)_\star : \mathcal{V}\text{–Cat} \to \mathcal{V}\text{–Mod} \quad \text{and} \quad (-)^\star : \mathcal{V}\text{–Cat} \to (\mathcal{V}\text{–Mod})^{\mathrm{opp}(1,2)}. \tag{3.28}$$

这里$(-)^{\mathrm{opp}(1,2)}$ 表示反转1-胞和2-胞。

若存在函子 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，使得$G = F_\star$，则称 $G : \mathsf{C} \nrightarrow \mathsf{D}$ 是可表的。以下结果（参见 [Bor, 命题 7.9.1]）特别表明，对于伴随函子，存在右伴随意味着它是可表的。

引理 3.3.5. 对于局部小范畴$\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$之间的任意函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，伴随函子 $F^\star$ 在$\mathcal{V}$–Mod中是 $F_\star$ 的右伴随，

$$F_\star \dashv F^\star. \tag{3.29}$$

反过来，每个具有右伴随的伴随函子 $G : \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}$ 都是可表的，即存在某个 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，使得 $G = F_\star$。

我们不陈述完整的证明，但指出余评价 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow F^\star \bigcirc F_\star$ 由 F 在同态空间上的作用给出，

$$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(\overline{c}, c') \xrightarrow{F} (F^\star \circ F_\star)(\overline{c}, c') \cong \int^{d \in \mathcal{D}} {}_{\mathcal{D}}\langle F(c), d\rangle \otimes {}_{\mathcal{D}}\langle d, F(c')\rangle \cong {}_{\mathcal{D}}\langle F(c), F(c')\rangle.$$

若施加柯西完备这一温和条件，所有伴随函子都是可表的（参见 [Bor, Theor. 7.9.3]）。不过，这里我们将转而着重讨论具有右伴随这一条件。

定义 3.3.6 （†-Frobenius 伪幺半群）。设 $(\mathsf{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 为幺半双范畴。C 中的 Frobenius 伪幺半群 $(A, \mu : A \otimes A \to A, \eta : \mathbb{1} \to A, \sigma : A \otimes A \to \mathbb{1})$，若 μ 和 η 有右伴随，则称为†-*Frobenius* 伪幺半群。

本节的主要结果如下。

定理 3.3.1. Prof 中的 *†-Frobenius* 伪幺半群会诱导出一个 $\star$-自对偶范畴，反之亦然。

该论述基于 [Str04]，且已广为人知。若能将其推广为范畴等价，将很有价值，但还需要进一步思考。这里我们分两部分给出完整证明。

我们将广泛使用以下事实（参见 [FS16，推论 5]）：对于任意范畴 C 以及任意一对对象 $u, v \in \mathsf{C}$，函子 $\mathcal{C}u, - \times \mathcal{C}-, v : \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \times \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ 的余端（参见定义 4.1.2）存在，且可表示为

$$\int^{x \in \mathcal{C}} \mathcal{C}\langle u, x\rangle \times \mathcal{C}\langle x, v\rangle = \mathcal{C}\langle u, v\rangle. \tag{3.30}$$

T定理 3.3.2. Prof 中的一个 *†-Frobenius* 伪幺半群诱导出一个 $\star$-自主范畴 *ry.*

证明. 1. 设 $(\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)}, \mu, \eta, \alpha, \lambda, \varrho, \sigma)$ 是幺半自主双范畴 Prof 中的一个 †-Frobenius 伪幺半群。根据定义，μ 和 η 具有右伴随，因此由引理 3.3.5 可知它们是可表的；也就是说，存在函子 $\otimes_{\mathcal{C}} : \mathsf{C} \times \mathsf{C} \to \mathsf{C}$ 和 $\eta_{\mathcal{C}} : \mathbb{1}_{\mathsf{Cat}} \to \mathsf{C}$，使得

$$\mu = (\otimes_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)})_{\star} \quad \text{and} \quad \eta = (\eta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)})_{\star}. \tag{3.31}$$

现在我们将在 C 上构造一个幺半结构，其张量积为 $\otimes_{\mathcal{C}}$，单位元为 $\eta_{\mathcal{C}}(\star)$。首先，根据 $(-)_{\star}$ 的定义以及 μ 的前述表示，对于 $x, y, z \in \mathsf{C}$，有

$$\mu(x, \overline{y}, \overline{z}) \cong \mathcal{C}\langle y \otimes_{\mathcal{C}} z, x\rangle. \tag{3.32}$$

Prof 中的结合子 $\alpha : \mu \bigcirc (\mu \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}) \xrightarrow{\simeq} \mu \bigcirc (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \times \mu)$ 以如下方式给出 Cat 中的结合子 $\alpha_{\mathcal{C}} : \otimes_{\mathcal{C}} \bigcirc (\otimes_{\mathcal{C}} \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\simeq} \otimes_{\mathcal{C}} \bigcirc (\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \times \otimes_{\mathcal{C}})$。对于 $a, b, c, d \in \mathsf{C}$，我们发现

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}})(a, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}) &= \int^{(\overline{x}, \overline{y}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} (\mu \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}})(x, y, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}) \times \mu(a, \overline{x}, \overline{y}) \\
&= \int^{(\overline{x}, \overline{y}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} \mu(x, \overline{b}, \overline{c}) \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(y, \overline{d}) \times \mu(a, \overline{x}, \overline{y}) \\
&= \int^{(\overline{x}, \overline{y}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} \mathcal{C}\langle b \otimes_{\mathcal{C}} c, x\rangle \times \mathcal{C}\langle d, y\rangle \times \mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y, a\rangle \\
&= \int^{(\overline{x}, \overline{y}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} \mathcal{C}\langle (b \otimes_{\mathcal{C}} c) \otimes_{\mathcal{C}} d, x \otimes_{\mathcal{C}} y\rangle \times \mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y, a\rangle \cong \mathcal{C}\langle (b \otimes_{\mathcal{C}} c) \otimes_{\mathcal{C}} d, a\rangle.
\end{aligned}$$

类似地，可以证明

$$\mu \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \times \mu)(a, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}) \cong \mathcal{C}\langle b \otimes_{\mathcal{C}} (c \otimes_{\mathcal{C}} d), a\rangle.$$

因此，对于固定的 $b, c, d \in \mathsf{C}$ 和任意 $a \in \mathsf{C}$，结合子 α 给出了一个自然同构 $\mathcal{C}(b \otimes_{\mathcal{C}} c) \otimes_{\mathcal{C}} d, a \cong \mathcal{C}b \otimes_{\mathcal{C}} (c \otimes_{\mathcal{C}} d)\ a$。最后，米田引理蕴含一个同构的存在

$$(\alpha_{\mathcal{C}})_{b,c,d} : (b \otimes_{\mathcal{C}} c) \otimes_{\mathcal{C}} d \xrightarrow{\simeq} b \otimes_{\mathcal{C}} (c \otimes_{\mathcal{C}} d).$$

根据构造本身，对于任意 $a,b,c,d \in \mathbf{C}$，我们得到一个伴随函子的自然同构

$$\alpha_{a,\overline{b},\overline{c},\overline{d}} \cong ((\alpha_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)})_{\star})_{a,\overline{b},\overline{c},\overline{d}}. \tag{3.33}$$

类似地，Prof 中的左单位子 $\lambda : \mu \bigcirc (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \times \eta) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}$ 和右单位子 $\varrho : \mu \bigcirc (\eta \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}$，以下述方式在 Cat 中诱导出左、右单位约束 $\lambda_{\mathcal{C}}$，$\varrho_{\mathcal{C}}$。对于 a，$b \in \mathbf{C}$，我们有

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \times \eta)(a,\overline{b},\overline{\star}) &= \int^{(\overline{x},\overline{y}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \times \eta)(x,y,\overline{b},\overline{\star}) \times \mu(a,b,\overline{x},\overline{y}) \\
&= \int^{(\overline{x},\overline{y}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(x,\overline{b}) \times \eta(y,\overline{\star}) \times \mu(a,\overline{x},\overline{y}) \\
&= \int^{(\overline{x},\overline{y}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} \mathcal{C}\langle b,x\rangle \times \mathcal{C}\langle \eta_{\mathcal{C}}(\star),y\rangle \times \mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y,a\rangle \\
&= \int^{(\overline{x},\overline{y}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} \mathcal{C}\langle b \otimes_{\mathcal{C}} \eta_{\mathcal{C}}(\star), x \otimes_{\mathcal{C}} y\rangle \times \mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y,a\rangle \\
&= \mathcal{C}\langle b \otimes_{\mathcal{C}} \eta_{\mathcal{C}}(\star),a\rangle.
\end{aligned}$$

此外，由于 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(a,b) = \overline{\mathcal{C}}b,a$，可知左单位子 λ 给出一个同构 $\mathcal{C}b \otimes_{\mathcal{C}} \eta_{\mathcal{C}}(\star)\ a \cong \mathcal{C}b,a$。因此，米田引理给出一个自然同构 $(\lambda_{\mathcal{C}})_b : b \otimes_{\mathcal{C}} \eta_{\mathcal{C}}(\star) \xrightarrow{\simeq} b$。类似地，可以构造右单位子 $\varrho_{\mathcal{C}}$。同样，根据构造本身，对于任意 a，$b \in \mathbf{C}$，我们得到伴随函子的同构

$$\lambda_{a,\overline{b},\overline{\star}} \cong ((\lambda_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)})_{\star})_{a,\overline{b},\overline{\star}} \quad \text{and} \quad \varrho_{a,\overline{b},\overline{\star}} \cong ((\varrho_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)})_{\star})_{a,\overline{b},\overline{\star}}. \tag{3.34}$$

综上，这给出了一个幺半范畴 $(\mathbf{C}\ \otimes_{\mathcal{C}}, \eta_{\mathcal{C}}(\star)\ \alpha_{\mathcal{C}}, \lambda_{\mathcal{C}}, \varrho_{\mathcal{C}})$。

2. 根据假设，形式 $\sigma : \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \times \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \nrightarrow \mathbb{1}_{\mathsf{Prof}}$ 给出了一个双正合偶对 $\mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \dashv \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$，并带有某个余评价 $\widetilde{\sigma} : \mathbb{1}_{\mathsf{Prof}} \nrightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \times \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$。因此，引理 3.3.2 得出两个互为准逆的预函子 $\tilde{D} : \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \nrightarrow \mathbf{C}$ 和 $\tilde{D}^{-1} : \mathbf{C} \nrightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$，它们与形式 σ 相关，满足

$$\sigma(\overline{\star},\overline{x},\overline{y}) = \tilde{D}(\overline{x},\overline{y}). \tag{3.35}$$

每个等价都可以细化为伴随等价。因此，我们可以假设互为准逆的预函子 $\tilde{D}$ 和 $\tilde{D}^{-1}$ 处于伴随关系中。由引理 3.3.5 可知，$\tilde{D}$ 和 $\tilde{D}^{-1}$ 是可表的，即存在函子 $D : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$ 和 $D^{-1} : \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \to \mathbf{C}$，使得

$$\tilde{D} \cong (D^{\mathrm{opp}(1)})_{\star} \quad \text{and} \quad \tilde{D}^{-1} \cong ((D^{-1})^{\mathrm{opp}(1)})_{\star}. \tag{3.36}$$

事实上，函子 D 和 D^{-1} 互为拟逆。确实，对于任意 a，$b \in \mathbf{C}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\langle b,a\rangle \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(a,\overline{b}) \cong \widetilde{D} \circ \widetilde{D}^{-1}(a,\overline{b}) &\overset{(3.36)}{\cong} (D^{\mathrm{opp}(1)})_{\star} \circ ((D^{-1})^{\mathrm{opp}(1)})_{\star}(a,\overline{b}) \\
&\overset{(3.28)}{\cong} ((D \circ D^{-1})^{\mathrm{opp}(1)})_{\star}(a,\overline{b}) \overset{(3.27)}{\cong} \mathcal{C}\langle D \circ D^{-1}(b),a\rangle,
\end{aligned}$$

根据米田引理，这会诱导出自然同构 $b \cong D \bigcirc D^{-1}(b)$。类似地，可以证明 $b \cong D^{-1} \bigcirc D(b)$。由前面的结果可得

$$\sigma(\star, \overline{x}, \overline{y}) \overset{(3.35)}{=} \tilde{D}(\overline{x}, \overline{y}) \overset{(3.36)}{\cong} (D^{\mathrm{opp}(1)})_{\star}(\overline{x}, \overline{y}) \overset{(3.27)}{=} \mathcal{C}\langle x, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y})\rangle. \tag{3.37}$$

3. 根据假设，存在一个可逆 2-胞

$$\sigma \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}) \equiv$$



$$\cong$$

$$\equiv \sigma \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \otimes \mu). \tag{3.38}$$

对于左边，我们计算得

$$\begin{aligned}
&\sigma \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}})(\overline{\star}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \overset{(3.26)}{=} \int^{(\overline{a},\overline{b})\in(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} (\mu \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}})(a, b, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \times \sigma(\overline{\star}, \overline{a}, \overline{b}) \\
&= \int^{(\overline{a},\overline{b})\in(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} \mu(a, \overline{x}, \overline{y}) \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(b, \overline{z}) \times \sigma(\overline{\star}, \overline{a}, \overline{b}) \\
&\overset{(3.32),(3.37)}{=} \int^{(\overline{a},\overline{b})\in(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2} \mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y, a\rangle \times \ \mathcal{C}\langle z, b\rangle \times \ \mathcal{C}\langle a, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{b})\rangle \\
&\overset{(3.30)}{\cong} \int^{\overline{b}\in\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{b})\rangle \times \ \mathcal{C}\langle z, b\rangle \\
&\overset{D^{-1}}{\cong} \int^{\overline{b}\in\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \mathcal{C}\langle b, D^{-1}(\overline{x \otimes_{\mathcal{C}} y})\rangle \times \ \mathcal{C}\langle z, b\rangle \overset{(3.30)}{\cong} \ \mathcal{C}\langle z, D^{-1}(\overline{x \otimes_{\mathcal{C}} y})\rangle \\
&\overset{D}{\cong} \ \mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z})\rangle.
\end{aligned}$$

类似地，可以得出右边成立

$$\sigma \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \otimes \mu)(\overline{\star}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \cong \ \mathcal{C}\langle x, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y \otimes_{\mathcal{C}} z})\rangle.$$

因此，(3.38) 给出了一个自然同构

$$\mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z})\rangle \cong \ \mathcal{C}\langle x, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y \otimes_{\mathcal{C}} z})\rangle.$$

这表明，幺半范畴 $(\mathbb{C} \ \otimes_{\mathcal{C}}, \eta_{\mathcal{C}}(\star) \ \alpha_{\mathcal{C}}, \lambda_{\mathcal{C}}, \varrho_{\mathcal{C}})$ 是 $\star$-自对偶的，其对偶为 $D : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\mathrm{opp}(1)}$。

□

定理 3.3.3。 *A $\star$-自主范畴在 Prof 中诱导出一个†-Frobenius 伪幺半群。*

证明。 1. 在我们的情形中，将 $\star$-自主范畴视为命题 3.1.1 的 2. 中的对象较为方便，即将其视为一个幺半范畴 $(\mathbb{C} \ \otimes_{\mathcal{C}}, \mathbb{1}_{\mathcal{C}} \ \alpha, \ \lambda, \ \varrho)$，并配备一个等价 $D : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\mathrm{opp}(1)}$ 以及一个自然同构

$$\mathcal{C}\langle x \otimes_{\mathcal{C}} y, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{z})\rangle \cong \ \mathcal{C}\langle x, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y \otimes_{\mathcal{C}} z})\rangle, \quad x, y, z \in \mathcal{C}. \tag{3.39}$$

由于每个等价都可以细化为伴随等价，因此我们可以假设 D 是一个伴随等价，并且在计算过程中会频繁用到这一事实。

2. 幺半单位$\mathbb{1}_{\mathcal{C}}$给出了一个从单对象范畴到 $\mathbf{C}$ 的唯一函子 $\eta_{\mathcal{C}} : \mathbb{1}_{\mathsf{Cat}} \to \mathbf{C}$，使得 $\eta_{\mathcal{C}}(\star) = \mathbb{1}_{\mathcal{C}}$。由引理 3.3.5 可知，伴随函子

$$\mu := (\otimes_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)})_\star : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)} \times \mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)} \nrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}, \quad (x, \overline{y}, \overline{z}) \mapsto \ {}_{\mathcal{C}}\langle y \otimes_{\mathcal{C}} z, x\rangle \tag{3.40}$$

and

$$\eta := (\eta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{opp}(1)})_\star : \mathbb{1}_{\mathsf{Prof}} \nrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}, \quad (x, \star) \mapsto \ {}_{\mathcal{C}}\langle \mathbb{1}_{\mathcal{C}}, x\rangle. \tag{3.41}$$

连同

$$(\alpha^{\mathrm{opp}(1)})_\star, (\lambda^{\mathrm{opp}(1)})_\star, (\varrho^{\mathrm{opp}(1)})_\star \tag{3.42}$$

共同构成 Prof 中的一个伪幺半群 $(\mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)}, \mu, \eta)$，使得 μ 和 η 有右伴随。

3. 方程 (3.39)通过以下方式给出了一个形式 $\sigma : \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \times \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \nrightarrow \mathbb{1}_{\mathsf{Prof}}$ 的定义：

$$\sigma(\overline{\star}, \overline{x}, \overline{y}) := \ {}_{\mathcal{C}}\langle x, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y})\rangle = (D^{\mathrm{opp}(1)})_\star(\overline{x}, \overline{y}), \quad x, y \in \mathcal{C}. \tag{3.43}$$

类似地，可以如下定义一个伴随函子 $\tilde{\sigma} : \mathbb{1}_{\mathsf{Prof}} \nrightarrow \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \otimes \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$：

$$\tilde{\sigma}(x, y, \star) := \ {}_{\mathcal{C}}\langle D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{x}), y\rangle = ((D^{-1})^{\mathrm{opp}(1)})_\star(x, y), \quad x, y \in \mathcal{C}.$$

简单计算可知，我们可以将 σ 识别为 $(D^{\mathrm{opp}(1)})_\star$，将 $\tilde{\sigma}$ 识别为 $((D^{-1})^{\mathrm{opp}(1)})_\star$，其意义见引理 3.3.2。此外，由于 $(D^{\mathrm{opp}(1)})_\star$ 和 $((D^{-1})^{\mathrm{opp}(1)})_\star$ 互为逆，σ 和 $\tilde{\sigma}$ 证明了双精确配对 $\mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \dashv \mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$的存在。具体而言，对于 $a, b \in \mathbf{C}$，我们有

$$\begin{aligned}
&(\sigma \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \otimes \tilde{\sigma})(a, \overline{b}) \equiv (\sigma \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}) \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \otimes \tilde{\sigma})(\overline{\star}, a, \overline{b}, \star) \\
&\overset{(3.26)}{=} \int^{(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^3} (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \otimes \tilde{\sigma})(x, y, z, \overline{b}, \star) \times (\sigma \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}})(\overline{\star}, a, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \\
&= \int^{(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^3} \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(x, \overline{b}) \otimes \tilde{\sigma}(y, z, \star) \times \sigma(\overline{\star}, \overline{x}, \overline{y}) \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(a, \overline{z}) \\
&= \int^{(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in (\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^3} {}_{\mathcal{C}}\langle b, x\rangle \times \ {}_{\mathcal{C}}\langle D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y}), z\rangle \times \ {}_{\mathcal{C}}\langle x, D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{y})\rangle \times \ {}_{\mathcal{C}}\langle z, a\rangle \\
&\overset{(3.30)}{\cong} \ {}_{\mathcal{C}}\langle b, a\rangle = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(a, \overline{b}).
\end{aligned}$$

另一个锯齿恒等式 (3.18) 可类似地得出。

4. 还需证明存在一个可逆 2-胞

$$\sigma \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}) \cong \sigma \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}} \otimes \mu) \tag{3.44}$$

如 (3.23) 所示。对于 $x,y,z\in\mathsf{C}$，我们计算

$$\begin{aligned}
&\sigma\circ(\mu\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}})(\overline{\star},\overline{x},\overline{y},\overline{z})\overset{(3.26)}{=}\int^{(\overline{a},\overline{b})\in(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2}(\mu\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}})(a,b,\overline{x},\overline{y},\overline{z})\times\sigma(\overline{\star},\overline{a},\overline{b})\\
&=\int^{(\overline{a},\overline{b})\in(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2}\mu(a,\overline{x},\overline{y})\times\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}(b,\overline{z})\times\sigma(\overline{\star},\overline{a},\overline{b})\\
&=\int^{(\overline{a},\overline{b})\in(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2}{}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}\langle\overline{a},\overline{x\otimes_{\mathcal{C}}y}\rangle\times\ {}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}\langle\overline{b},\overline{z}\rangle\times\ {}_{\mathcal{C}}\langle a,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{b})\rangle\\
&=\int^{(\overline{a},\overline{b})\in(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)})^2}{}_{\mathcal{C}}\langle x\otimes_{\mathcal{C}}y,a\rangle\times\ {}_{\mathcal{C}}\langle z,b\rangle\times\ {}_{\mathcal{C}}\langle a,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{b})\rangle\\
&\overset{(3.30)}{\cong}\int^{\overline{b}\in\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}{}_{\mathcal{C}}\langle x\otimes_{\mathcal{C}}y,D^{\mathrm{opp}(1)}(\overline{b})\rangle\times\ {}_{\mathcal{C}}\langle z,b\rangle\\
&\overset{D^{-1}}{\cong}\int^{\overline{b}\in\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}{}_{\mathcal{C}}\langle b,D^{-1}(\overline{x\otimes_{\mathcal{C}}y})\rangle\times\ {}_{\mathcal{C}}\langle z,b\rangle\\
&\overset{(3.30)}{\cong}{}_{\mathcal{C}}\langle z,D^{-1}(\overline{x\otimes_{\mathcal{C}}y})\rangle.
\end{aligned}$$

类似地，可以证明

$$\sigma\circ(\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}(1)}}\otimes\mu)(\overline{\star},\overline{x},\overline{y},\overline{z})\cong\ {}_{\mathcal{C}}\langle y\otimes_{\mathcal{C}}z,D^{-1}(\overline{x})\rangle,\quad x,y,z\in\mathcal{C}.$$

由 (3.39) 以及 D 的伴随性可得

$${}_{\mathcal{C}}\langle z,D^{-1}(\overline{x\otimes_{\mathcal{C}}y})\rangle\cong\ {}_{\mathcal{C}}\langle y\otimes_{\mathcal{C}}z,D^{-1}(\overline{x})\rangle,\quad x,y,z\in\mathcal{C},$$

进而可用于复合 2-胞 (3.44)。

总而言之，我们证明了 $(\mathbf{C}^{\mathrm{opp}(1)},\ \mu,\ \eta,\ \sigma)$ 是 Prof 中的一个 †-Frobenius 伪幺半群。□

分别比较 (3.31)、(3.33)、(3.34)、(3.37) 与 (3.40)、(3.41)、(3.42)、(3.43)，可知定理 3.3.2 和定理 3.3.3 的构造互为逆，且相差一个函子的自然同构。

第4章

应用

4.1 正合自函子

本节将继续讨论 [FSS16，注3.17]，，其中证明了某个有限线性范畴的正合自函子范畴存在一种 $\star$-自主结构。具体而言，我们证明，在某些条件下，这种 $\star$-自主结构由刚性诱导，因此，第二个张量积（参见（3.14））同构于第一个张量积，而后者定义为自函子的复合。

4.1.1 有限范畴

在本小节中，设$\Bbbk$ 为一个固定的代数闭域。若一个范畴具有有限乘积 $\prod$ （或等价地，具有有限余积 $\coprod$），且每个态射空间都具有阿贝尔群结构，并且复合是双线性的，则称该范畴是加性的。加性范畴 C,D之间的函子 $F:\mathsf{C}\to\mathsf{D}$若其诱导映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(x),F(y)) \tag{4.1}$$

是阿贝尔群的同态。因此，特别地，对所有 $x,y\in\mathsf{C}$，诱导的态射 $F(x)\coprod F(y)\to F(x\prod y)$ 都是同构。

此外，若加性范畴 C 的所有态射空间都具有$\Bbbk$-线性结构，且复合是 $\Bbbk\Bbbk$-线性的，则称 C 为$\Bbbk$-线性范畴。若函子 F介于$\Bbbk$-线性范畴 C,D 之间，且对所有$x,y\in\mathsf{C}$，诱导映射 (4.1) 都是$\Bbbk$-线性的，则称该函子是$\Bbbk$-线性的。本节的主要研究对象是特殊的$\Bbbk$-线性范畴：有限范畴。

定义 4.1.1（有限线性范畴）。若$\Bbbk$-线性阿贝尔范畴 C 满足以下条件，则称其为有限（线性的）：

- C 的所有态射空间都是有限维的；
- C 的每个对象都有有限长度；
- C 中的每个简单对象都有一个投射覆盖；

- 简单对象的同构类只有有限多个。

关于文中出现的概念，参见 [EGNO15]。有限范畴的例子包括有限维$\Bbbk$-代数 A的有限维表示范畴 A–mod。事实上，下面的结果表明，这些范畴构成了有限范畴的一般例子。

引理 4.1.1。 一个$\Bbbk$-线性阿贝尔范畴是有限范畴，当且仅当它作为线性范畴等价于某个有限维 $\Bbbk$代数 A上的有限维（左或右）模范畴 A–mod 。

两个有限维$\Bbbk$-代数 A 和 B 称为*Morita* 等价，若它们的表示范畴 A–mod 和 B–mod 作为$\Bbbk$-线性范畴等价。对于每个有限范畴，引理 4.1.1 都给出一个代数 A ，其在 Morita 等价意义下唯一。

本章将广泛使用这一事实：每个有限线性范畴 C 都是 $\mathsf{vect}_{\Bbbk}$ 上的模范畴（参见 [FSS16，第 8]页）。具体而言，对于 $c \in \mathsf{C}$ 和 $v \in \mathsf{vect}_{\Bbbk}$，元素$c \otimes v \cong v \otimes c \in \mathsf{C}$ 的定义如下：

$$c\langle c', v \otimes c\rangle \cong v \otimes_{\Bbbk} c\langle c', c\rangle \quad \text{and} \quad c\langle v \otimes c, c'\rangle \cong v^{\star} \otimes_{\Bbbk} c\langle c, c'\rangle \tag{4.2}$$

对所有 $c' \in \mathsf{C}$。

在给出下一个定理之前，我们需要介绍一些更多的定义。

首先注意，某个 $\Bbbk$-代数 A 的底层向量空间通过乘法构成一个有限维的自身上的双模。此外，一般而言，对于每个 (A, B)-双模V，其线性对偶 $V^{\star}$ 也是一个 (B, A)-双模。因此，特别地，线性对偶 $A^{\star}$ 仍是一个 A-双模。

其次，如果一个 $\Bbbk$-线性函子保持短左正合列，或等价地，保持有限极限（参见 [ML13]），则称其为左正合。我们将有限线性范畴 C,D 之间左正合函子 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 的集合记为 $\mathrm{L}ex(\mathsf{C}, \mathsf{D})$。类似地，可以定义右正合 函子，并将其集合记为 $\mathrm{R}ex(\mathsf{C},\mathsf{D})$。如果 $F : A\text{–mod} \to B\text{–mod}$ 是一个 $\Bbbk$-线性函子，且 $V \in A$–mod 是某个左 A-模，则可以证明 $F(V)$ 不仅是一个左 B-模，实际上还可以赋予其 (B, A)-双模结构（参见 [FSS16]）。

下一个定理是 *Eilenberg-Watts* 定理 的一个变体（参见 [Eil60], [Wat60]）。

定理 4.1.1。 设 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是有限线性函子之间的函子。以下陈述等价：

- $F \in \mathrm{L}ex(\mathsf{C}, \mathsf{D})$。
- F 有一个左伴随。

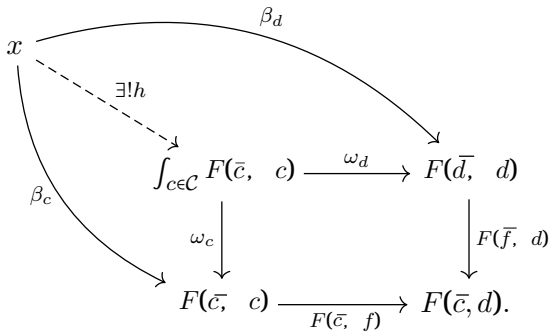
同样，以下各项等价：

- $G \in \mathrm{R}ex(\mathsf{C},\mathsf{D})$.
- G存在一个右伴随

4.1.2 端与余端

定义 4.1.2 （端与余端）。 函子 $F:\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)}\times\mathsf{C}\to\mathsf{D}$ 的端 由一个对象 $\int_{c\in\mathcal{C}}F(\bar{c},c)\in\mathsf{D}$ 及态射 $(\omega_c:\int_{c\in\mathcal{C}}F(\bar{c},c)\to F(\bar{c},c))_{c\in\mathcal{C}}$ in D 给出，并满足$F(f,d)\bigcirc\ \omega_d = F(c,f)\bigcirc\ \omega_c$对所有 $f:\overline{c}\to d$ 成立，且具有如下泛性质：

> 设 $x\in\mathsf{D}$ 和 $\{\beta_c:x\to F(\bar{c},c)\}_{c\in\mathcal{C}}$ 满足 $F(f,d)\bigcirc\ \beta_{\overline{d}} = F(c,f)\bigcirc\ \beta_c$ 对所有$f:c\to d$ 成立。则存在唯一态射 $h:x\to\int_{c\in\mathcal{C}}F(\bar{c},c)\in\mathsf{D}$，属于 D，使得对所有 $c\in\mathsf{C}$，$\beta_c=\omega_c\bigcirc h$ 成立，



$F:\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)}\times\mathsf{C}\to\mathsf{D}$ 的余端由一个对象 $\int^{c\in}\mathcal{C}F(\bar{c},\ c)\in\mathsf{D}$ 以及态射 $(\omega_c:F(\bar{c},\ c)\to\int^{c\in}\mathcal{C}F(\bar{c},\ c))_{c\in\mathcal{C}}$ 给出，它以对偶的方式满足泛性质。

泛性质蕴含：端和余端（若存在）分别在唯一同构意义下唯一。

端与余端具有许多有趣的性质。特别是，接下来的两个结果（参见 [ML13]）对我们的目的很有帮助。

引理 4.1.2。 设 $\mathcal{C}$ 为任意范畴，$\mathcal{D}$ 为线性范畴。

- 设 $F:\mathcal{C}^{opp}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为一个其端存在的函子。则存在一个自然同构

$$\mathcal{D}\langle -,\int_{c\in\mathcal{C}}F(\bar{c},c)\rangle\cong\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}\langle -,F(\bar{c},c)\rangle. \tag{4.3}$$

- 设 $F:\mathcal{C}^{opp}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为一个其余端存在的函子。则存在一个自然同构

$$\mathcal{D}\langle\int^{c\in\mathcal{C}}F(\bar{c},c),-\rangle\cong\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}\langle F(\bar{c},c),-\rangle. \tag{4.4}$$

引理 4.1.3。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为任意范畴。对于任意一对函子 $F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，存在一个双射

$$\mathrm{Nat}(F,G)\cong\int_{c\in\mathcal{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c),G(c)), \tag{4.5}$$

其中 $\mathrm{Nat}(F,G)$ 表示从 F 到 G 的自然变换集合。

以下是有限范畴情形下经典向量空间张量积的类似形式。

定义 4.1.3（Deligne积）。 设 C 和 D 为有限线性范畴。*Deligne*积 C ⊠ D 是一个有限线性范畴，并配有一个双函子 ⊠ : C ×D →C ⊠D，它在两个变量上均为右正合，且满足以下泛性质：

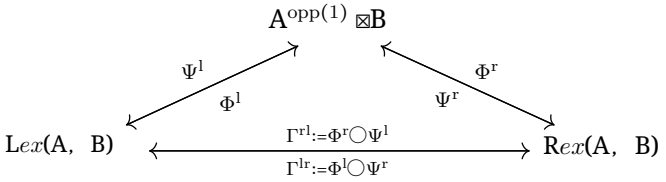
> 设 A 为一个有限线性范畴，并配有一个双函子 F : C ×D → A，它在两个变量上均为右正合，则存在唯一的右正合函子 $\bar{F}$: C ⊠ D → A，使得 $F\bigcirc$ ⊠ = F。

定义 4.1.4（Eilenberg-Watts函子）。 设 A 和 B 为有限线性范畴。A 和 B 的（抽象）*Eilenberg-Watts*函子是以下四个线性函子：

$$
\begin{aligned}
\Phi^{\mathrm{l}} \equiv \Phi^{\mathrm{l}}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}: \quad & \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \boxtimes \mathcal{B} \to \mathcal{L}ex(\mathcal{A},\mathcal{B}) \\
& \bar{a} \boxtimes b \mapsto b \otimes_{\Bbbk} {}_{\mathcal{A}}\langle a, - \rangle, \\
\Psi^{\mathrm{l}} \equiv \Psi^{\mathrm{l}}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}: \quad & \mathcal{L}ex(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \boxtimes \mathcal{B} \\
& F \mapsto \int^{a\in\mathcal{A}} \bar{a} \boxtimes F(a), \\
\Phi^{\mathrm{r}} \equiv \Phi^{\mathrm{r}}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}: \quad & \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \boxtimes \mathcal{B} \to \mathcal{R}ex(\mathcal{A},\mathcal{B}) \\
& \bar{a} \boxtimes b \mapsto b \otimes_{\Bbbk} {}_{\mathcal{A}}\langle -, a \rangle^{\star}, \\
\Psi^{\mathrm{r}} \equiv \Psi^{\mathrm{r}}_{\mathcal{A},\mathcal{B}}: \quad & \mathcal{R}ex(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to \mathcal{A}^{\mathrm{opp}} \boxtimes \mathcal{B} \\
& G \mapsto \int_{a\in\mathcal{A}} \bar{a} \boxtimes G(a).
\end{aligned}
$$

以下结果（参见 [FSS16，定理 3.2]）称为范畴 *Eilenberg-Watts* 定理。

定理 4.1.2。 对于任意一对有限线性范畴 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$，三角形中的函子



构成伴随等价的拟逆对

$$\mathcal{L}ex(\mathcal{A},\mathcal{B}) \cong \mathcal{A}^{\mathrm{opp}(1)} \boxtimes \mathcal{B} \cong \mathcal{R}ex(\mathcal{A},\mathcal{B}).$$

利用 (4.3)、(4.4)，可以证明 Γ^{rl} 和 Γ^{rl} 满足以下恒等式（参见 [FSS16]）。我们将在引理 4.1.5 的证明中用到这些恒等式。

引理 4.1.4。 设$\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 为有限线性范畴。对于 $F \in \mathcal{L}ex(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 和 $G \in \mathcal{R}ex(\mathcal{A},\mathcal{B})$，有

$$\Gamma^{\mathrm{rl}}(F) \cong \int^{a\in\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}\langle -, a \rangle^{\star} \otimes F(a) \quad \text{and} \quad \Gamma^{\mathrm{lr}}(G) \cong \int_{a\in\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}\langle a, - \rangle \otimes G(a). \tag{4.6}$$

我们的下一个结果可以理解为表明 Γ^{rl} 和 Γ^{lr}在多大程度上不是幺半的。注意，函子 Γ^{rl} 和 Γ^{lr} 的定义域实际上可以扩展到所有自函子构成的范畴（参见 [FSS16，第24]页）。证明留待附录给出。

引理 4.1.5. 设$\mathcal{X}$是一个有限线性范畴，且 $F, G \in \mathcal{L}ex(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 是两个左正合函子。那么

$$\Gamma^{\mathrm{rl}}(F) \circ \Gamma^{\mathrm{rl}}(G) \cong \Gamma^{\mathrm{rl}}(\Gamma^{\mathrm{rl}}(F) \circ G). \tag{4.7}$$

另一方面，设 $F, G \in \mathcal{R}ex(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 是两个右正合函子。那么

$$\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ \Gamma^{\mathrm{lr}}(G) \cong \Gamma^{\mathrm{lr}}(\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ G). \tag{4.8}$$

4.1.3 中山函子

设 A 是一个有限维$\Bbbk$-代数。为简便起见，下文将

$$ {}_A\langle -,-\rangle := \mathrm{Hom}_{A-\mathsf{mod}}(-,-), \quad \text{and} \quad {}_{A^{\mathrm{opp}}}\langle -,-\rangle := \mathrm{Hom}_{\mathsf{mod}-A}(-,-)$$

分别表示有限维左 A-模与右 A-模之间的 A-线性映射空间。代数 A 可通过乘法视为其自身上的有限维双模${}_AA_A$ 。右正合反变转置函子$(-)^t$ 定义如下

$$(-)^t := {}_A\langle -,\ {}_AA_A\rangle : A-\mathsf{mod} \to \mathsf{mod}-A \tag{4.9}$$

其作用为 $(f.a)(m) := f(a.m)$，其中 $f \in ({}_AM)^t$，$a \in A$，$m \in M$。左正合反变转置函子定义为

$$(-)^{t^{\mathrm{opp}}} := {}_{A^{\mathrm{opp}}}\langle -,\ {}_AA_A\rangle : \mathsf{mod}-A \to A-\mathsf{mod} \tag{4.10}$$

其作用为 $(a.f)(m) := f(m.a)$，其中 $f \in (M_A)^{t^{\mathrm{opp}}}$，$a \in A$，$m \in M$。结合正合反变对偶 $(-)^\star$，我们得到右正合协变中山函子

$$\mathrm{N}^{\mathrm{r}}_A := (-)^\star \circ (-)^t = {}_A\langle -, {}_AA_A\rangle^\star : A-\mathsf{mod} \to A-\mathsf{mod} \tag{4.11}$$

以及左正合协变中山函子逆函子

$$\mathrm{N}^{\mathrm{l}}_A := (-)^{t^{\mathrm{opp}}} \circ (-)^\star = {}_{A^{\mathrm{opp}}}\langle (-)^\star, {}_AA_A\rangle : A-\mathsf{mod} \to A-\mathsf{mod}. \tag{4.12}$$

分别限制在有限维投射 A-模和内射 A-模构成的子范畴上，中山函子给出拟逆等价A–Projmod $\overset{\cong}{\longleftrightarrow}$ A–Injmod（参见 [Iva12，第 3] 节）。

经典 Eilenberg-Watts 定理的一个应用见下述结果（参见 [Iva12，命题 3.1], [ASS06，引理 III.2.9]）。

命题 4.1.1. 存在自然同构

$$\mathrm{N}^{\mathrm{r}}_A \cong ({}_AA_A)^\star \otimes_A - \qquad \text{and} \qquad \mathrm{N}^{\mathrm{l}}_A \cong {}_A\langle ({}_AA_A)^\star, -\rangle.$$

令人意外的是，这种表示使我们能够将定理 4.1.2 中定义的等价 Γ^{lr} and Γ^{rl} 与 Nakyama 函子 (4.11)、(4.12) 联系起来。

引理 4.1.6. 对于一个有限线性范畴$\mathcal{A} \cong A$-模，存在自然同构

$$\Gamma^{\mathrm{rl}}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}) \cong ({}_A A_A)^\star \otimes_A - \quad \text{and} \quad \Gamma^{\mathrm{lr}}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}) \cong {}_A\langle ({}_A A_A)^\star, - \rangle \tag{4.13}$$

鉴于引理 4.1.6 和命题 4.1.1，给出以下定义是合理的。

定义 4.1.5（中山函子）。 有限线性范畴 X 的中山函子 是自函子

$$\mathrm{N}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{X}} := \Gamma^{\mathrm{rl}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) = \int^{x\in\mathcal{X}} x \otimes_{\Bbbk} {}_{\mathcal{X}}\langle -, x\rangle^\star \in \mathcal{R}ex(\mathcal{X},\mathcal{X}). \tag{4.14}$$

中山函子 $\mathcal{X}$ 的左正合类似物是函子

$$\mathrm{N}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{X}} := \Gamma^{\mathrm{lr}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) = \int_{x\in\mathcal{X}} x \otimes_{\Bbbk} {}_{\mathcal{X}}\langle x, - \rangle \in \mathcal{L}ex(\mathcal{X},\mathcal{X}). \tag{4.15}$$

一个有趣的问题是，上述中山函子在什么情况下互为拟逆。在经典情形（4.11）、（4.12）中，我们已经看到，它们在有限维投射 A-模和内射A-模构成的子范畴上互为拟逆。事实上，只需要求有限维代数 A 是自内射的，即它作为自身上的左模或右模时是内射的（参见例如 [ARS97，命题 IV.3.1]）。此外，如果 A 具有弗罗贝尼乌斯代数结构，那么它也必定是自内射的。更准确地说，若 A 是带有弗罗贝尼乌斯型$\sigma : A \otimes A \to \Bbbk$的弗罗贝尼乌斯代数，则中山自同构 是自同构 $\nu : A \to A$，满足$\sigma(a, \nu(b)) = \sigma(b, a)$，对所有 $a, b \in A$均成立。于是，中山函子 $\mathrm{N}^{\mathrm{l}}_A$，$\mathrm{N}^{\mathrm{r}}_A$ 等价于用中山自同构扭结 A 的左作用或右作用。特别地，若 A 是对称的，则中山自同构为恒等映射，因此中山函子与恒等函子同构。

由于对称弗罗贝尼乌斯性质在 Morita 等价下保持不变，因此为有限线性范畴给出如下定义（参见 [FSS16]）是合理的。

定义 4.1.6（对称弗罗贝尼乌斯范畴）。 有限线性范畴称为对称弗罗贝尼乌斯，当且仅当它作为线性范畴等价于某个非对称 Frobenius $\Bbbk$-代数的模范畴。

以下结果归功于 [FSS16，命题 3.24]。

命题 4.1.2。 设$\mathcal{X}$ 是有限线性范畴。中山函子$\mathrm{N}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{X}}$ 和$\mathrm{N}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{X}}$ 同构于恒等函子，$\Gamma^{\mathrm{lr}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) \cong \mathrm{id}_{\mathcal{X}} \cong \Gamma^{\mathrm{rl}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}})$，当且仅当$\mathcal{X}$ 是对称弗罗贝尼乌斯范畴。

下述推论表明，X 是对称 Frobenius 范畴不仅意味着恒等函子 $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ 在 Γ^{lr} 和 Γ^{rl}下保持不变（差一个自然同构），事实上，X 的所有左正合与右正合自函子分别也都保持不变。

推论 4.1.1. 设$\mathcal{X}$ 是一个对称 *Frobenius* 有限线性范畴。对于 $F \in \mathcal{R}ex(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 和 $G \in \mathcal{L}ex(\mathcal{X}, \mathcal{X})$，存在自然同构 $\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \cong F$和 $\Gamma^{\mathrm{rl}}(G) \cong G$.

证明。 根据假设，中山函子与恒等函子自然同构，即 $\mathrm{N}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{X}} = \Gamma^{\mathrm{lr}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) \cong \mathrm{id}_{\mathcal{X}} \cong \Gamma^{\mathrm{rl}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) = \mathrm{N}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{X}}$。因此，对于 $F \in \mathrm{R}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ 和 $G \in \mathrm{L}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X})$，利用引理 4.1.5，我们计算得:

$$\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) = \Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ \mathrm{id}_{\mathcal{X}} \cong \Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ \Gamma^{\mathrm{lr}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) \overset{(4.8)}{\cong} \Gamma^{\mathrm{lr}}(\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ \mathrm{id}_{\mathcal{X}}) = \Gamma^{\mathrm{lr}}(\Gamma^{\mathrm{lr}}(F)),$$

$$\Gamma^{\mathrm{rl}}(G) = \Gamma^{\mathrm{rl}}(G) \circ \mathrm{id}_{\mathcal{X}} \cong \Gamma^{\mathrm{rl}}(G) \circ \Gamma^{\mathrm{rl}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) \overset{(4.7)}{\cong} \Gamma^{\mathrm{rl}}(\Gamma^{\mathrm{rl}}(G) \circ \mathrm{id}_{\mathcal{X}}) = \Gamma^{\mathrm{rl}}(\Gamma^{\mathrm{rl}}(G)).$$

由于根据定理 4.1.2， Γ^{rl} 和 Γ^{lr} 构成一个（伴随）等价，分别与其逆复合即可得到所述结论。 □

注意，这尤其意味着，对于任意对称 Frobenius 有限线性范畴 X，都有 $\mathrm{R}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \mathrm{L}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X})$。

引理 4.1.7。 设 $\mathcal{X}$是一个对称 *Frobenius* 有限线性范畴。那么，$(\mathcal{R}ex(\mathcal{X}, \mathcal{X}) = \mathcal{L}ex(\mathcal{X}, \mathcal{X}), \circ, \mathrm{id}_{\mathcal{X}})$ 关于由取左伴随或右伴随所给出的对偶是刚性的。此外，左伴随和右伴随自然同构，$(-)^{\mathrm{l.a.}} \cong (-)^{\mathrm{r.a.}}$。

证明。比较伴随函子的定义（例如 [ML13]）与刚性的定义（参见定义 2.2.1），可知在以复合作为张量积的自函子幺半范畴中，对偶与伴随函子相一致。经典的 Eilenberg-Watts 定理（参见定理 4.1.1）保证左伴随和右伴随的存在。此外， [FSS16, 推论 3.9] 指出，对于任意 $F \in \mathrm{R}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \mathrm{L}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X})$，均有 $\Gamma^{\mathrm{rl}}(F^{\mathrm{r.a.}}) = (\Gamma^{\mathrm{lr}}(F))^{\mathrm{l.a.}}$. 因此应用推论 4.1.1 即得所述结论， $F^{\mathrm{r.a.}} \cong F^{\mathrm{l.a.}}$.

□

设 X 是任意有限线性范畴，不一定是对称 Frobenius 范畴。在 [FSS16, 备注 3.17] 中，有人提出可以定义一个带有由对偶化对象 $N^{\mathrm{r}}_{\mathcal{X}}$ 见证的 $\star$-自对偶结构的幺半范畴 $(\mathrm{R}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X}), \bigcirc, \mathrm{id}_{\mathcal{X}})$。相应的对偶函子定义为 $G \mapsto \Gamma^{\mathrm{rl}}(G^{\mathrm{r.a.}}) \cong (\Gamma^{\mathrm{lr}}(G))^{\mathrm{l.a.}}$，其中 $G \in \mathrm{R}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X})$（参见 [FSS16, 推论 3.9]）。一个有趣的问题是，所诱导的第二个张量积（参见 (3.14)）是否与第一个张量积同构。

在 X 是对称 Frobenius 有限线性范畴的特殊情形下，我们可以回答这个问题。事实上，推论 4.1.1 表明，相应的 $(\mathrm{R}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = \mathrm{L}ex(\mathrm{X}, \mathrm{X}), \bigcirc, \mathrm{id}_{\mathcal{X}})$ 对偶归结为 $G \mapsto G^{\mathrm{r.a.}} \cong G^{\mathrm{l.a.}}$。然而，这恰好就是引理 4.1.7 中定义的刚性结构。由引理 2.2.1 可知，$\star$-自主结构的第二个张量积与第一个张量积同构：自函子复合。

4.2 分次向量空间

本节将介绍 $\star$-自对偶范畴结构在 G-分次向量空间范畴上的一个族，并刻画这些范畴上的弱带状结构。

4.2.1 二次型

定义 4.2.1（二次型）。设 G 是一个有限群。定义在 G上的、取值于 $\Bbbk^\times$ 的二次型 是一个映射

$$q: \quad G \to \Bbbk^\times,$$

使得

$$q(g) = q(g^{-1})$$

并且使函数

$$\begin{aligned} \beta_q: \quad & G \times G \to \Bbbk^\times \\ & (g_1, g_2) \mapsto q(g_1 g_2) q(g_1)^{-1} q(g_2)^{-1} \end{aligned} \tag{4.16}$$

是一个双同态。取值于 $\Bbbk^\times$ 的 G 上的二次型全体以典范方式构成一个阿贝尔群，我们将其记为 $\mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times)$。有时我们会使用 $\mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times)$ 上由 $\sim$ 定义的等价关系

$$q_1 \sim q_2 \ :\Leftrightarrow \ \exists f \in \mathrm{Aut}(G) : q_1 = f^\star q_2.$$

对于 $q_1, q_2 \in$二次型$(G, \Bbbk^\times)$。

文献中常见的一种二次型定义包含公理 $q(g^k) = q(g)^{k^2}$ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 成立（有时写成加法记号），而不是 $q(g) = q(g^{-1})$。我们随后将根据引理 4.2.10 得出这两种定义等价。

定义 4.2.2（群上同调）。设 G 是一个有限群。G 上的一个 k-余链 取值于 $\Bbbk^\times$，是一个函数

$$\kappa: \quad G^k \equiv G \times \ldots \times G \to \Bbbk^\times,$$

若 κ 的某个自变量为单位元 $1_G \in G$时，其值为 $1 \in \Bbbk^\times$，则称 κ 是归一化的。G 上的 k-余链全体以一种典范方式构成一个群，记作 $C^k(G, \Bbbk^\times)$。余边界算子

$$d = d_k: \quad C^k(G, \Bbbk^\times) \to C^{k+1}(G, \Bbbk^\times)$$

定义如下

$$\begin{aligned} d\kappa(g_1, \ldots, g_{k+1}) = \kappa(g_2, g_3, \ldots, g_{k+1}) \kappa(g_1 g_2, g_3, \ldots, g_{k+1})^{-1} \kappa(g_1, g_2 g_3, \ldots, g_{k+1}) \\ \ldots \kappa(g_1, g_2, \ldots, g_k g_{k+1})^{(-1)^k} \kappa(g_1, g_2, \ldots, g_k)^{(-1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

子群

$$Z^k(G, \Bbbk^\times) := \ker(d_k) \subseteq C^k(G, \Bbbk^\times)$$

称为 k-上循环，而子群

$$B^{k+1}(G, \Bbbk^\times) := \mathrm{im}(d_k) \subseteq C^{k+1}(G, \Bbbk^\times)$$

称为 $(k+1)$-上边界。k 阶上同调群 $H^k(G, \Bbbk^\times)$ 定义为 G 的商群

$$H^k(G, \Bbbk^\times) := Z^k(G, \Bbbk^\times) / B^k(G, \Bbbk^\times).$$

定义 4.2.3（阿贝尔群上同调）。设 G 是一个有限阿贝尔群。阿贝尔 *2*-上链 是普通的 2-上链。阿贝尔 3-上链 是一个偶对

$$(\psi, \Omega)$$

由普通 3-上链 $\psi \in C^3(G, \Bbbk^\times)$ 和普通 2-上链 $\Omega \in C^2(G, \Bbbk^\times)$ 构成。若 ψ 和 Ω 均为归一化的普通上链，则称其为归一化。阿贝尔 3-上链 (ψ, Ω) 是一个阿贝尔 *3*-上循环，如果 $d\psi = 1$ 和

$$\begin{aligned} \psi(g_2, g_3, g_1)^{-1}\Omega(g_1, g_2g_3)\psi(g_1, g_2, g_3)^{-1} &= \Omega(g_1, g_3)\psi(g_2, g_1, g_3)^{-1}\Omega(g_1, g_2), \\ \psi(g_3, g_1, g_2)\Omega(g_1g_2, g_3)\psi(g_1, g_2, g_3) &= \Omega(g_1, g_3)\psi(g_1, g_3, g_2)\Omega(g_2, g_3). \end{aligned} \tag{4.17}$$

阿贝尔 2-上链 $\kappa \in C^2(G, \Bbbk^\times)$ 的阿贝尔余边界 $d_{\mathrm{ab}}(\kappa)$ 定义为

$$d_{\mathrm{ab}}(\kappa) := (d\kappa, \kappa_{\mathrm{comm}}),$$

κ 的交换子上循环 κ_{comm} 定义为

$$\kappa_{\mathrm{comm}}(g_1, g_2) := \kappa(g_1, g_2)\kappa(g_2, g_1)^{-1}.$$

G 的第三阿贝尔上同调群 $H^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$ 定义为群 $Z^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$ 的商群，其中该群由归一化阿贝尔 3-上循环组成；再除以其子群 $B^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$，该子群由归一化阿贝尔 2-余链的阿贝尔余边界组成。

我们将使用由下式定义的 $\sim$ 在 $H^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$上的等价关系

$$[(\psi_1, \Omega_1)] \sim [(\psi_2, \Omega_2)] :\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Aut}(G) : [(\psi_1, \Omega_1)] = [(f^\star\psi_2, f^\star\Omega_2)]$$

对于（ψ_1, Ω_1），（ψ_2, Ω_2）$\in Z^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$。请注意，若（$\psi_1, \Omega_1$）和（$\psi_2, \Omega_2$）在$H^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$中等价，那么它们相对于 $\sim$也等价，见证即为恒等映射。

在 [EL53]（另见 [JS93]）中，已证明映射 $[(\psi, \Omega)] \mapsto q_\Omega$，其中$q_\Omega(g) := \Omega(g, g)$，给出了一个同构 $H^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times) \cong$二次型$(G, \Bbbk^\times)$。这里我们给出这一陈述的一个变体，该变体涉及等价关系 $\sim$。

引理 4.2.1. 设 G 是一个有限阿贝尔群。映射

$$\begin{aligned} \mathrm{EM}: \quad H^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)/\sim &\to \mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times)/\sim \\ [(\psi, \Omega)] &\mapsto [q_\Omega] \quad \text{with} \quad q_\Omega(g) := \Omega(g, g) \end{aligned}$$

是阿贝尔群的一个同构。此外，对于相应的双同态，有

$$\beta_{q_\Omega}(g_1, g_2) = \Omega(g_1, g_2)\Omega(g_2, g_1). \tag{4.18}$$

证明。我们只需说明与原陈述的区别。首先，若 $[(\psi_1, \Omega_1)] \sim [(\psi_2, \Omega_2)]$,，则根据定义，存在某个 $f \in \mathrm{Aut}(G)$ 和 $\kappa \in C^2(G, \Bbbk^\times)$，使得特别有 $\Omega_1 = f^\star(\Omega_2) \cdot \kappa_{\mathrm{comm}}$。因此可得

$$q_{\Omega_1}(g) = \Omega_1(g, g) = \Omega_2(f(g), f(g))\kappa_{\mathrm{comm}}(g, g) = \Omega_2(f(g), f(g)) = f^\star q_{\Omega_2}(g),$$

这意味着 $q_{\Omega_1} \sim q_{\Omega_2}$。反过来，注意到若 $(\psi, \Omega) \in Z^3_{\mathrm{ab}}(G, \mathrm{k}^\times)$，则对所有 $f \in \mathrm{Aut}(G)$，也有 $(f^\star\psi, f^\star\Omega) \in Z^3_{\mathrm{ab}}(G, \mathrm{k}^\times)$。设 $q, q' \in \mathrm{QF}(G, \mathrm{k}^\times)$，使得 $q \sim q'$，其见证为 $f \in \mathrm{Aut}(G)$。此外，设 $(\psi_q, \Omega_q), (\psi_{q'}, \Omega_{q'})$ 分别为逆的代表元，即 $q(g) = \Omega_q(g,g)$ 且 $q'(g) = \Omega_{q'}(g,g)$。那么

$$q_{f^\star\Omega_{q'}}(g) = f^\star\Omega_{q'}(g,g) = \Omega_{q'}(f(g), f(g)) = q'(f(g)) = q(g) = \Omega_q(g,g) = q_{\Omega_q}(g),$$

这意味着 $[(\psi_q, \Omega_q)] = [(f^\star\psi_{q'}, f^\star\Omega_{q'})]$。这表明 $[(\psi_q, \Omega_q)] \sim [(\psi_{q'}, \Omega_{q'})]$。由于 $\sim$ 在 $H^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$ 上的等价关系比在 $H^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$ 上的原等价关系更粗，EM 的满射性由经典结论推出。类似地，如果 $q_\Omega \sim 1$，那么对于某个 $f \in \mathrm{Aut}(G)$，有 $q_\Omega = f^\star 1 = 1$。因此，利用原映射所具有的单射性，$[(\psi_q, \Omega_q)] = [(1,1)] = [(f^\star 1, f^\star 1)]$。这表明 $(\psi_q, \Omega_q) \sim (1,1)$，从而得到 EM 的单射性。 □

4.2.2 分次向量空间的辫带结构

在本小节中，我们将介绍有限维 G-分次向量空间的范畴 $G\text{–}\mathrm{vect}_\Bbbk$，并回顾一个令人惊讶的事实：二次型与 $G\text{–}\mathrm{vect}_\Bbbk$ 的带状结构有关。

定义 4.2.4（G-分次向量空间）。设 G 是一个有限群。定义在 $\Bbbk$ 上的 G-分次向量空间 V 是一个直和 $V = \oplus_{g\in G} V_g$，其各项为由 G 索引的 $\Bbbk$-向量空间 V_g。若对所有 $g \in G$，V_g 都是有限维的，我们称 V 为有限维。在下文中，我们将用 V_h 表示由元素 $h \in G$ 索引的 $V = \oplus_{g\in G} V_g$ 所对应的向量空间。G-分次 $\Bbbk$-向量空间 V, W 的直和 $V \oplus W$ 定义为

$$(V \oplus W)_g := V_g \oplus W_g,$$

张量积 $V \otimes W$ 定义为

$$(V \otimes W)_g := \bigoplus_{hk=g} V_h \otimes W_k. \tag{4.19}$$

我们用 $\Bbbk_g$ 表示满足 $(\Bbbk_g)_h = \delta_{gh}\Bbbk$ 的 G-分次向量空间，也就是说，它表示由 G 中的元素索引的简单对象（同构类的代表元）。特别地，我们将 $\Bbbk := \Bbbk_{1_G}$ 简记为由单位元 1_G（属于 G）索引的简单对象。

G-分次 $\Bbbk$-向量空间的范畴 $G\text{–}\mathrm{Vect}_\Bbbk$，其对象为 G-分次 $\Bbbk$-向量空间，态射为 $\Bbbk$-线性映射 $f : V \to W$，满足 $f(V_g) \subseteq W_g$，对所有 $g \in G$ 均成立。有限维 G-分次向量空间构成的子范畴记为 $G\text{–}\mathrm{vect}_\Bbbk$。

一个重要的例子是超向量空间，它们是 $\mathbb{Z}_2$-分次向量空间。

范畴 $G\text{–}\mathrm{vect}_\Bbbk$ 可以配备一个幺半结构 $(\otimes, \Bbbk, \alpha, \lambda, \varrho)$，其张量积为 (4.19)，张量单位为 $\Bbbk = \Bbbk_{1_G}$，结合子 α 和左、右单位约束 λ, ϱ 继承自 $\mathrm{vect}_\Bbbk$。此外，配备此幺半结构的 $G\text{–}\mathrm{vect}_\Bbbk$ 关于对偶 $(\text{–})^\star$ 是刚性的；该对偶在 $V \in G\text{–}\mathrm{vect}_\Bbbk$ 的指标 $g \in G$ 处定义为

$$(V^\star)_g := (V_{g^{-1}})^\star \in \mathrm{vect}_\Bbbk. \tag{4.20}$$

定义 4.2.5（带状幺半结构）。设 G 是一个有限阿贝尔群，令 RMS(G, $\Bbbk$) 表示 G-vect$_\Bbbk$ 上带状幺半结构的集合，也就是说，RMS(G, $\Bbbk$) 的元素是三元组

$$(\alpha, \gamma, \theta),$$

其中 $\alpha : \otimes\bigcirc(\otimes\times\mathrm{id}_{G\text{-vect}_\Bbbk}) \cong \otimes\bigcirc(\mathrm{id}_{G\text{-vect}_\Bbbk}\times\otimes)$，$\gamma : \otimes \cong \otimes\bigcirc\tau$ 和 $\theta : \mathrm{id}_{G\text{-vect}_\Bbbk} \cong \mathrm{id}_{G\text{-vect}_\Bbbk}$ 是自然同构，使得 $(\otimes, \Bbbk, \alpha, \lambda, \varrho, \gamma, \theta)$ 定义了关于对偶 (4.20) 的 G-vect$_\Bbbk$ 上的带状幺半结构。可以在 RMS(G, $\Bbbk$) 上定义等价关系 $\sim$:

$$(\alpha_1, \gamma_1, \theta_1) \sim (\alpha_2, \gamma_2, \theta_2),$$

当且仅当存在一个辫状幺半等价

$$(F, \Phi, \phi) : (G\text{-vect}_\Bbbk, \otimes, \Bbbk, \alpha_1, \lambda, \varrho, \gamma_1) \cong (G\text{-vect}_\Bbbk, \otimes, \Bbbk, \alpha_2, \lambda, \varrho, \gamma_2),$$

使得 $F((\theta_1)_{\Bbbk_g}) = (\theta_2)_{F(\Bbbk_g)}$。

定义 4.2.6。设 G 是一个有限阿贝尔群。对于 $(\psi, \Omega) \in Z^3_{\mathrm{ab}}(G, \Bbbk^\times)$，其中 Ω 是归一化阿贝尔 3-余循环，且 $q : G \to \mathbb{C}^\times$ 是任意映射，令自然同构 $\alpha_\psi : \otimes\bigcirc(\otimes\times\mathrm{id}_{G\text{-vect}_\Bbbk}) \cong \otimes\bigcirc(\mathrm{id}_{G\text{-vect}_\Bbbk}\times\otimes)$、$\gamma_\Omega : \otimes \cong \otimes\bigcirc\tau$ 和 $\theta_q : \mathrm{id}_{G\text{-vect}_\Bbbk} \cong \mathrm{id}_{G\text{-vect}_\Bbbk}$ 定义如下

$$\begin{aligned}
(\alpha_\psi)_{g_1,g_2,g_3} : \quad (\Bbbk_{g_1}\otimes\Bbbk_{g_2})\otimes\Bbbk_{g_3} &\to (\Bbbk_{g_1}\otimes\Bbbk_{g_2})\otimes\Bbbk_{g_3}\\
(1_{g_1}\otimes 1_{g_2})\otimes 1_{g_3} &\mapsto \psi(g_1,g_2,g_3)1_{g_1}\otimes(1_{g_2}\otimes 1_{g_3}),\\
(\gamma_\Omega)_{g_1,g_2} : \quad \Bbbk_{g_1}\otimes\Bbbk_{g_2} &\to \Bbbk_{g_2}\otimes\Bbbk_{g_1}\\
1_{g_1}\otimes 1_{g_2} &\mapsto \Omega(g_2,g_1)1_{g_2}\otimes 1_{g_1},\\
(\theta_q)_g : \quad \Bbbk_g &\to \Bbbk_g\\
1_g &\mapsto q(g)1_g.
\end{aligned}$$

下面的引理 4.2.2 是一个已知推广（从辫状幺半群结构推广到带状幺半结构），见 [EML50]（另见 [EGNO15，命题 2.6.1]）。

为此，我们分别在 $\sim(G, \Bbbk^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G, \{\pm 1\})$ 和 $\mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G, \{\pm 1\})$ 上定义等价关系

$$([(\psi,\Omega)],\eta) \sim ([(\psi',\Omega')],\eta') :\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Aut}(G) : [(\psi,\Omega)] = [(f^\star\psi', f^\star\Omega')],\ \eta = f^\star\eta'$$

and

$$(q,\eta) \sim (q',\eta') :\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Aut}(G) : q\eta = f^\star(q'\eta').$$

引理 4.2.2。设 G 是一个有限阿贝尔群。映射

$$\begin{aligned}
(H^3_{\mathrm{ab}}(G,\Bbbk^\times)\oplus\mathrm{Hom}(G,\{\pm1\}))/\sim \ &\to \mathrm{RMS}(G,\Bbbk)/\sim\\
[((\psi,\Omega),\eta)] &\mapsto [(\alpha_\psi,\gamma_\Omega,\theta_{q_\Omega\eta})]
\end{aligned}$$

是一个双射。

稍后我们将把以下推论作为定理 4.2.2 的一个特例推出。

推论 4.2.1. 设 G 是一个有限阿贝尔群。存在一个双射

$$(\mathrm{QF}(G,\Bbbk^\times)\oplus \mathrm{Hom}(G,\{\pm 1\}))/\sim \ \cong\ \mathrm{RMS}(G,\Bbbk)/\sim$$

G 上取值于 $\Bbbk^\times$ 的二次型群胚与 G-$\mathrm{vect}_\Bbbk$上的编织幺半结构群胚之间。

证明。 结合引理 4.2.2 和引理 4.2.1。 □

4.2.3 分次向量空间的广义对偶

定义4.2.7。 设 G 为有限群，且 $V,W\in G\text{–}\mathsf{Vect}_\Bbbk$ 为 G-分次向量空间。若线性映射 $f:V\to W$ 的次数为 $g\in G$，则

$$f(V_h)\subseteq W_{gh}\quad \text{for all } h\in G.$$

T从 V 到 W 的次数为 g 的态射集合记作 $\mathbf{Hom}_g(V,W$).

引理4.2.3。 设 G 是一个有限群，且设 $(\otimes,\Bbbk\ \alpha',\lambda,\rho)$ 是$G\text{–}\mathsf{Vect}_\Bbbk$ 上的一个幺半结构，如(4.19)中所示，但结合子 α'可以不同。那么

$$\underline{\mathrm{Hom}}(V,W)_g:=\mathrm{Hom}_g(V,W) \tag{4.21}$$

在 $(G\text{-}\mathrm{vect}_\Bbbk,\otimes,\Bbbk\ \alpha',\lambda,\varrho)$中定义了一个内 ***Hom***。

证明。 我们需要证明，对于任意 G-分次向量空间 U,V,W ，都存在一个自然双射

$$\mathrm{Hom}(U\otimes V,W)\cong \mathrm{Hom}(U,\underline{\mathrm{Hom}}(V,W)).$$

˜设给定 $f:U\otimes V\to W$。按如下方式定义 $\underline{f}:U\to\mathbf{Hom}(V,W)$。对于 $g,h\in G$ 和$x\in U_g,y\in V_h$ ，令

$$\tilde{f}(x)(y):=f(x\otimes y)\in W_{gh}.$$

˜反过来，设给定 $f:\underline{U\to}\mathbf{Hom}(V,W)$。按如下方式定义 $f:U\otimes V\to W$。对于g,h,k，使得 $hk=g$且 $x\in U_h,y\in V_k$，令

$$\tilde{f}(x\otimes y):=f(x)(y)\in W_{hk}=W_g.$$

根据定义可立即得出，这两种构造互为逆。

□

定义 4.2.8 (对偶空间 V^{g_0})。 设 G 是一个有限群。对于一个 G-分次向量空间 $V\in G\text{–}\mathsf{Vect}_\Bbbk$ 以及 $g_0\in G$，定义 V^{g_0} 为

$$V^{g_0}:=\underline{\mathrm{Hom}}(V,\Bbbk_{g_0}).$$

引理 4.2.4。 设 G 是一个有限群。对于一个 G-分次向量空间 $V \in G\text{–}\mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ 以及g、 g_0、$g_1 \in G$ ，有

$$(V^{g_0})_g = (V_{g^{-1}g_0})^\star. \tag{4.22}$$

因此，若 V 是有限维的， $V \in G$–向量空间$_{\Bbbk}$，则存在一个向量空间同构

$$((V^{g_0})^{g_1})_g \cong V_{g_1^{-1}gg_0}. \tag{4.23}$$

证明。 展开定义可得

$$\begin{aligned}(V^{g_0})_g &= \underline{\mathrm{Hom}}(V, \Bbbk_{g_0})_g = \mathrm{Hom}_g(V, \Bbbk_{g_0}) = \{f : V \to \Bbbk_{g_0} \mid f(V_h) \subseteq (\Bbbk_{g_0})_{gh} \text{ for all } h \in G\} \\ &= \{f : V \to \Bbbk_{g_0} \mid f(V_{g^{-1}g_0}) \subseteq \Bbbk \wedge f(V_h) = 0 \text{ for all } h \in G \setminus \{g^{-1}g_0\}\} \\ &= \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V_{g^{-1}g_0}, \Bbbk) = (V_{g^{-1}g_0})^\star.\end{aligned}$$

由此可知

$$((V^{g_0})^{g_1})_g = ((V^{g_0})_{g^{-1}g_1})^\star = (V_{(g^{-1}g_1)^{-1}g_0})^{\star\star} \cong V_{g_1^{-1}gg_0}.$$

□

对偶 $(\text{–})^{g_0}$ 可以按如下方式扩展为一个反变函子。若 $f : V \to W$ 是 G-分次向量空间之间的一个态射，则定义态射$f^{g_0} : W^{g_0} \to V^{g_0}$如下:

$$f^{g_0}(w')(v) := w'(f(v)),$$

其中 $w' \in (W^{g_0})_g = (W_{g^{-1}g_0})^\star$ 且 $v \in V_{g^{-1}g_0}$。

假设 G 不仅是有限的，而且是阿贝尔的，且 V 是有限维的，可得以下结果。

推论 4.2.2. 设 G 是有限阿贝尔群， $V \in G\text{–}\mathsf{vect}_{\Bbbk}$ 是有限维的 G-分次向量空间，且 $g_0 \in G$，则

$$(V^{g_0})^{g_0} \cong V.$$

定义 4.2.9 （张量积 $\otimes_{g_0}$）。 设 G 是有限群，且 $g_0 \in G$。对于 G-分次向量空间 V，$W \in G\text{–}\mathsf{vect}_{\Bbbk}$

$$V \otimes_{g_0} W := (V^{g_0} \otimes W^{g_0})^{g_0}. \tag{4.24}$$

引理 4.2.5. 设 G 是有限阿贝尔群， g、 $g_0 \in G$ 和 V、 $W \in G\text{–}\mathsf{vect}_{\Bbbk}$ 是有限维 G-分次向量空间。则有

$$(V \otimes_{g_0} W)_g \cong (V \otimes W)_{gg_0}. \tag{4.25}$$

证明. 该断言由下式得出

$$(V \otimes_{g_0} W)_g = ((V^{g_0} \otimes W^{g_0})^{g_0})_g \overset{(4.22)}{=} ((V^{g_0} \otimes W^{g_0})_{g^{-1}g_0})^\star = (\bigoplus_{hk=g^{-1}g_0} (V^{g_0})_h \otimes (W^{g_0})_k)^\star$$
$$\overset{(4.22)}{=} (\bigoplus_{hk=g^{-1}g_0} (V_{h^{-1}g_0})^\star \otimes (W_{k^{-1}g_0})^\star)^\star \cong \bigoplus_{hk=g^{-1}g_0} V_{h^{-1}g_0} \otimes W_{k^{-1}g_0} \cong \bigoplus_{h'k'=gg_0} V_{h'} \otimes W_{k'}$$
$$= (V \otimes W)_{gg_0}.$$

□

以下是一个标准结果，我们不予证明。

引理4.2.6。 设$(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \mathbb{1}, \alpha, \lambda, \varrho)$是一个幺半范畴，$\mathcal{D}$是任意范畴。假设存在一个底层范畴之间的等价 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其拟逆为 F^{-1}。那么$\mathcal{D}$ 可以赋予幺半结构，使得张量积由下式给出

$$x \otimes^F_{\mathcal{D}} y := F(F^{-1}(x) \otimes_{\mathcal{C}} F^{-1}(y)).$$

此外，函子 F 可以赋予强幺半函子$(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, \mathbb{1}) \to (\mathcal{D}, \otimes^F_{\mathcal{D}}, F(\mathbb{1}))$的结构。

推论4.2.3。 设 G 是一个有限群。对于任意 $g_0 \in G$，存在一个幺半结构$(\otimes_{g_0}, \Bbbk g_0, {}^{\alpha_{g_0}}, \lambda_{g_0}, \varrho_{g_0})$ 定义在 G–vect$_\Bbbk$上，使得张量积由(4.24)给出。范畴$(G\text{–vect}_\Bbbk, \otimes, \Bbbk\ \alpha, \lambda, \varrho)$ 是 $\star$-自对偶范畴，其内 *Hom* 为(4.21)，对偶化对象为$\Bbbk g_0$。对偶函子

$$(-)^{g_0} = \underline{\mathrm{Hom}}(-, \Bbbk_{g_0}) : \quad (G\text{–vect}_\Bbbk, \otimes, \Bbbk) \to (G\text{–vect}_\Bbbk, \otimes_{g_0}, \Bbbk_{g_0})^{\mathrm{opp}(0,1)}.$$

给出强幺半等价。

证明。 对于第一个结论，我们使用引理4.2.6，其中取 C $= (G\text{–vect}_\Bbbk, \otimes, \Bbbk)$、D $= G$–vect$_\Bbbk$以及 $F = F^{-1} = (-)^{g_0}$。还需证明 $F(\Bbbk) = \Bbbk g_0$。但对任意 $g, h \in G$，都有 $(\Bbbk_g)^h \cong \Bbbk_{hg^{-1}}$。因此，特别地， $F(\Bbbk) = F(\Bbbk_{1_G}) = (\Bbbk_{1_G})^{g_0} \cong \Bbbk_{g_0}$。此外，由内 Hom 的定义（4.21）和推论 4.2.2 可知，$\Bbbk_{g_0}$ 是一个对偶化对象。根据一般结果引理 3.2.1以及张量积 $\otimes_{g_0}$的定义，对偶 $(-)^{g_0}$ 在上述意义下是强幺半的。 □

4.2.4 弱二次型

在推论 4.2.1 中，我们已经看到，相对于 1_G 对称的二次型，与相对于对偶 $(-)^{1_G}$ 的 G–vect$_\Bbbk$ 上的带状结构相关。本第4.2.4节和接下来的第4.2.5节旨在给出这一陈述的一个一般版本。我们仍需定义相对于这种宽松对偶的适当带状结构概念——这将在第4.2.5节中完成。另一方面，将二次型的对称性公理 $q(g) = q(g^{-1}1_G)$ 推广为任意 $g_0 \in G$ 下的 $q(g) = q(g^{-1}g_0)$，似乎很自然。事实上，我们将证明，在某些条件下，根本无需引入这样的公理，而是可以直接推出对称性。

定义 4.2.10（弱二次型）。设 G 是一个有限群。定义在 G 上、取值于 $\Bbbk^\times$ 的弱二次型是一个映射

$$q\colon \quad G \to \Bbbk^\times,$$

使得函数

$$\begin{aligned} \beta_q\colon \quad & G \times G \to \Bbbk^\times \\ & (g_1, g_2) \mapsto q(g_1 g_2) q(g_1)^{-1} q(g_2)^{-1} \end{aligned} \tag{4.26}$$

是一个双同态。取值于 $\Bbbk^\times$ 的 G 上弱二次型的集合以一种典范方式构成阿贝尔群，我们将其记为 $\mathrm{WQF}(G, \Bbbk^\times)$。我们有时会用到 $\mathrm{WQF}(G, \Bbbk^\times)$ 上由 $\sim$ 定义的等价关系

$$q_1 \sim q_2 \ :\Leftrightarrow \ \exists f \in \mathrm{Aut}(G) : q_1 = f^\star q_2.$$

对于 q_1，$q_2 \in$ 弱二次型$(G,\ \Bbbk^\times)$。

证明定理 4.2.1 需要以下两个技术性结果。

引理 4.2.7. 设 q 是 $\mathbb{Z}_n$ 上的一个弱二次型。则有

$$q(k) = q(1)^k \beta_q(1,1)^{\binom{k}{2}} \tag{4.27}$$

对于 $k \geq 2$。

证明。我们对 k 作简单归纳，并对 $\mathbb{Z}_n$使用加法记号。对于 $k = 2$，定义 (4.16) 得出

$$q(2) = q(1+1) = q(1)q(1)\beta_q(1,1) = q(1)^2 \beta(1,1)^{\binom{2}{2}}.$$

假设该命题对 $k \geq 2$成立。再次利用 (4.16)，我们得到

$$q(k+1) = q(k)q(1)\beta_q(1,1)^k \overset{(4.27)}{=} q(1)^{k+1}\beta_q(1,1)^{\binom{k}{2}+k} = q(1)^{k+1}\beta_q(1,1)^{\binom{k+1}{2}}.$$

最后一个等式由一般结果 $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ 得出。 □

L引理 4.2.8. 设 q 是 $\mathbb{Z}_n$ 上取值于 $\Bbbk^\times$ 的弱二次型。那么它 *lds*

$$q(n) = 1. \tag{4.28}$$

证明。我们对 $\mathbb{Z}_n$ 使用加法记号。由于 β_q 是双同态，因此有

$$\beta_q(n,k) = \beta(n+n,k) = \beta(n,k)^2.$$

由此可得

$$\beta_q(n,k) = 1.$$

此外，利用（4.16）可以验证

$$1 = \beta_q(n,k) = q(n+k)q(n)^{-1}q(k)^{-1} = q(k)q(n)^{-1}q(k)^{-1} = q(n)^{-1},$$

这就推出了结论 $q(n) = 1$。 □

定理 4.2.1。 设 G 是一个有限阿贝尔群，且 $q \in$ 弱二次型$(G, \Bbbk^\times)$。存在一个特征 $\eta : G \to \Bbbk^\times$ 以及一个二次型 $\tilde{q} \in$ 二次型$(G, \Bbbk^\times)$ 定义在 G 上，取值于 $\Bbbk^\times$，使得

$$q = \tilde{q} \cdot \eta.$$

此外，相关的双线性形式相同， $\beta_q = \beta_{\tilde{q}}$。

证明。 1. 我们从 $G = \mathbb{Z}_n$ 开始。注意，我们将对 $\mathbb{Z}_n$ 使用加法记号。简记 $B := \beta(1,1)$ 和 $C := q(1)$。由于 β 是双同态，因此有 $B^n = 1$。定义

$$\eta(k) := \begin{cases} (CB^{-\frac{1}{2}})^k, & 2 \mid n \\ (CB^{-l})^k, & 2 \nmid n,\ 2l = n-1 \end{cases}$$

and

$$\tilde{q}(k) := \begin{cases} (B^{\frac{1}{2}})^k B^{\binom{k}{2}}, & 2 \mid n \\ (B^l)^k B^{\binom{k}{2}}, & 2 \nmid n,\ 2l = n-1. \end{cases}$$

由 (4.27) 可知，在两种情况下， $q(k) = \tilde{q}(k)\eta(k)$。接下来只需证明 η 和 $\tilde{q}$ 定义良好，且 $\tilde{q} \in \mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times)$。

- 我们证明，对于 $2 \mid n$， $\eta(k) = (CB^{-\frac{1}{2}})^k$ 定义良好。显然， η 关于 k 是线性的。注意， $1 \overset{(4.28)}{=} q(n) \overset{(4.27)}{=} C^n B^{\binom{n}{2}}$ 蕴含 $C^n B^{-\frac{n}{2}} = B^{-\frac{n^2}{2}}$。由此可得 —

$$\eta(n) = (CB^{-\frac{1}{2}})^n = C^n B^{-\frac{n}{2}} = B^{-\frac{n^2}{2}} = (B^n)^{-\frac{n}{2}} = 1^{-\frac{n}{2}} = 1,$$

  其中在最后一个等式中，我们用了 $\frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$。

- 我们证明，对于 $2 \nmid n$， $\eta(k) = (CB^{-l})^k$ 良定义。显然，η 关于 k也是线性的。此外， $1 = C^n B^{\binom{n}{2}}$ 蕴含 $C^n B^{-ln} = B^{-\frac{n}{(n-1)/2}} B^{-ln}$。因此可得 ——

$$\eta(n) = (CB^{-l})^n = C^n B^{-ln} = B^{-\frac{n(n-1)}{2}} B^{-ln} = (B^n)^{-\frac{n-1}{2}} (B^n)^{-l} = 1,$$

  其中在最后一个等式中，我们用了 $(n-1)/2, l \in \mathbb{Z}$。

- 我们证明，对于 $2 \mid n$， $\tilde{q}(k) = (B^{\frac{1}{2}})^k B^{\binom{k}{2}}$ 良定义。对于 $a, k \in \mathbb{Z}$，我们得到

$$\tilde{q}(a+kn) = (B^{\frac{1}{2}})^{a+kn} B^{\binom{a+kn}{2}} = (B^{\frac{1}{2}})^a (B^n)^k B^{\frac{(a+kn)(a+kn-1)}{2}} = (B^{\frac{1}{2}})^a B^{\frac{a^2-a}{2}} = \tilde{q}(a).$$

  此外， $\tilde{q}$ 是对称的。事实上，

$$\tilde{q}(-k) = (B^{\frac{1}{2}})^{-k} B^{\binom{n-k}{2}} = (B^{\frac{1}{2}})^{-k} B^{\frac{k^2+k}{2}} = (B^{\frac{1}{2}})^{-k} B^{\frac{k^2-k}{2}} (B^{\frac{1}{2}})^{2k} = \tilde{q}(k).$$

  由于 η 是线性的，因此可得

$$\beta_q(k_1, k_2) = \frac{q(k_1+k_2)}{q(k_1)q(k_2)} = \frac{f(k_1+k_2)\tilde{q}(k_1+k_2)}{f(k_1)\tilde{q}(k_1)f(k_2)\tilde{q}(k_2)} = \frac{\tilde{q}(k_1+k_2)}{\tilde{q}(k_1)\tilde{q}(k_2)} = \beta_{\tilde{q}}(k_1, k_2).$$

  因此我们证明了 $\tilde{q} \in$ 二次型$(G, \Bbbk^\times)$。

- 与前一点类似，可以证明，对于 $2 \nmid n$ with $2l = n-1$，映射 $\tilde{q}(k) = (B^l)^k B^{\binom{k}{2}}$ 是一个定义良好的二次型。

2. 现在我们考虑任意有限阿贝尔群。不失一般性，我们可以假设 $G = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{n_i}$，其中某个 $n \in \mathbb{N}$。设 q 是 G 上的一个弱二次型。定义 $\mathbb{Z}_{n_i}$ 上的弱二次型 $q_i := q|_{\mathbb{Z}_{n_i}}$ 为 q 的限制。

- 容易验证，

$$q(k_1, ..., k_n) = \prod_{i=1}^n q_i(k_i) \prod_{i<j} \beta_q(k_i, k_j).$$

- 我们已经证明，可以将弱二次型 q_i 分解为 $q_i = \eta_i \cdot \widetilde{q_i}$，其中 $i = 1,..., n$。因此

$$q(k_1, ..., k_n) = \prod_{i=1}^n \eta_i(k_i) \prod_{i=1}^n \widetilde{q_i}(k_i) \prod_{i<j} \beta_q(k_i, k_j) = \eta(k_1, ..., k_n) \cdot \tilde{q}(k_1, ..., k_n)$$

其映射为

$$\eta(k_1, ..., k_n) := \prod_{i=1}^n \eta_i(k_i)$$

and

$$\tilde{q}(k_1, ..., k_n) := \prod_{i=1}^n \widetilde{q_i}(k_i) \prod_{i<j} \beta_q(k_i, k_j).$$

- 映射 η 关于 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{n_i}$ 是线性的，因为映射 η_i 关于 $\mathbb{Z}_{n_i}$ 是线性的。此外，$\tilde{q}$ 是对称的，因为所有 $\tilde{q}_i$ 都是对称的，并且 β_q 是双线性的。
- 相应的双线性形式相同，$\beta_q = \beta_{\tilde{q}}$。事实上，利用 $\beta_{q_i} = \beta_{\widetilde{q_i}}$，我们可得对于 $x, y \in \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{n_i}$，有

$$\begin{aligned}\beta_q(x,y) &= \frac{q(x+y)}{q(x)q(y)} = \prod_{i=1}^n \frac{q_i((x+y)_i)}{q_i(x_i)q_i(y_i)} \prod_{i<j} \frac{\beta_q((x+y)_i, (x+y)_j)}{\beta_q(x_i, x_j)\beta_q(y_i, y_j)} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\widetilde{q_i}((x+y)_i)}{\widetilde{q_i}(x_i)\widetilde{q_i}(y_i)} \prod_{i<j} \frac{\beta_q((x+y)_i, (x+y)_j)}{\beta_q(x_i, x_j)\beta_q(y_i, y_j)} = \frac{\tilde{q}(x+y)}{\tilde{q}(x)\tilde{q}(y)} = \beta_{\tilde{q}}(x,y).\end{aligned}$$

□

我们在 $\mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G, \Bbbk^\times)$ 上定义一个等价关系 $\sim$，其定义为

$$(\widetilde{q}, \eta) \sim (\widetilde{q}', \eta') :\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Aut}(G) : \widetilde{q}\eta = f^\star(\widetilde{q}'\eta').$$

引理 4.2.9. 设 G 是一个有限阿贝尔群。*Theorem* 4.2.1中的分解诱导出一个良定义的双射

$$\begin{aligned} F: \quad \mathrm{WQF}(G, \Bbbk^\times)/\sim \; &\to (\mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G, \Bbbk^\times))/\sim \\ [q] &\mapsto [(\widetilde{q}, \eta)]. \end{aligned} \tag{4.29}$$

证明. 根据定义，若 $q \sim q'$ 属于 $\mathrm{WQF}(G,\Bbbk^\times)$，则存在某个 $f \in \mathrm{Aut}(G)$，使得$q = f^\star q'$。因此，若 $\widetilde{q},\widetilde{q}' \in$属于 $\mathrm{QF}(G,\mathrm{k}^\times)$，且 $\eta,\eta' \in$属于 $\mathrm{Hom}(G,\mathrm{k}^\times)$，并且 $q = \widetilde{q}\eta$和 $q' = \widetilde{q}'\eta'$，则根据 $\sim$ 的定义可知，$(\widetilde{q},\eta) \sim (\widetilde{q},\eta)$ 属于 $(\mathrm{QF}(G,\mathrm{k}^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G,\mathrm{k}^\times))$。$F$ 的一个规范逆候选为

$$G: \quad (\mathrm{QF}(G,\Bbbk^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G,\Bbbk^\times))/\sim \to \mathrm{WQF}(G,\Bbbk^\times)/\sim, \quad [(\widetilde{q},\eta)] \mapsto [\widetilde{q}\eta].$$

同样，由等价关系的定义可知，G 是良定义的。根据构造，有 $G \bigcirc F = \mathrm{id}_{\mathrm{WQF}(G,\Bbbk^\times)/\sim}$。反过来，我们发现 $F \bigcirc G([(\widetilde{q},\eta)]) = F([(\widetilde{q}\eta)]) =: [(\widetilde{q}',\eta')] = [(\widetilde{q},\eta)],$，因为 $\widetilde{q}\eta = \widetilde{q}'\eta'$。□

下面这个定理 4.2.1 的推论表明，对于弱二次型，在一定条件下，定义 4.2.1 意义下二次型对称性的一种广义移位版本成立。

推论 4.2.4。设 G 是一个有限阿贝尔群，$q = \tilde{q}\cdot\eta$ 是定义在G 上、取值于$\Bbbk^\times$的弱二次型。若存在某个 $g_0 \in G$，使得 $\eta(g) = \beta_q(g,g_0)$，则可得

$$q(g) = \frac{\tilde{q}(gg_0)}{\tilde{q}(g_0)}.$$

这尤其意味着，q 关于 $\tilde{g}_0 := g_0^{-2}$是对称的，

$$q(g) = q(\tilde{g}_0 g^{-1}).$$

证明。第一个陈述由以下内容得出

$$q(g) = \tilde{q}(g)\beta_q(g,g_0) = \tilde{q}(g)\frac{q(gg_0)}{q(g)q(g_0)} = \tilde{q}(g)\frac{\beta_q(gg_0,g_0)\tilde{q}(gg_0)}{\beta_q(g,g_0)\tilde{q}(g)\beta_q(g_0,g_0)\tilde{q}(g_0)} = \frac{\tilde{q}(gg_0)}{\tilde{q}(g_0)}.$$

q 的平移对称性由 $\tilde{q}$的对称性诱导，

$$q(\tilde{g}_0 g^{-1}) = q(g_0^{-2}g^{-1}) = \frac{\tilde{q}(g_0^{-2}g^{-1}g_0)}{\tilde{q}(g_0)} = \frac{\tilde{q}(g_0^{-1}gg_0^2)}{\tilde{q}(g_0)} = \frac{\tilde{q}(gg_0)}{\tilde{q}(g_0)} = q(g).$$

□

鉴于推论 4.2.4，给出以下定义是合理的。

定义 4.2.11（可表示二次型）。设 G 是一个有限阿贝尔群。G 上取值于$\Bbbk^\times$ 的弱可表示二次型群胚为

$$\mathrm{WRQF}(G,\Bbbk^\times) := \{(q,\eta,g_0) \in \mathrm{QF}(G,\Bbbk^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G,\Bbbk^\times) \oplus G \mid \eta(g) = \beta_q(g,g_0)\}.$$

可以在 $\mathrm{WRQF}(G,\Bbbk^\times)$ 上定义等价关系 $\sim$，其定义如下：

$$(q,\eta,g_0) \sim (q',\eta',g_0') :\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Aut}(G) : q\eta = f^\star(q'\eta'), f(g_0) = g_0'.$$

定义 4.2.12（弱对称二次型）。设 G 是有限阿贝尔群。取值于 $\Bbbk^\times$ 的、关于 G 的弱对称二次型群胚为

$$\mathrm{WSQF}(G,\Bbbk^\times) := \{(q,g_0) \in \mathrm{WQF}(G,\Bbbk^\times) \oplus G \mid q(g) = q(g^{-1}g_0)\forall g \in G\}.$$

可以在 $\mathrm{WSQF}(G,\ \Bbbk^\times)$ 上定义等价关系 $\sim$

$$(q,g_0) \sim (q',g_0') :\Leftrightarrow \exists f \in \mathrm{Aut}(G) : q = f^\star(q'),\ f(g_0) = g_0'.$$

以下两个技术性结果尤其是命题 4.2.1 证明所必需的。为此，令 $\mathrm{sum}_< : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 递归定义为 $\mathrm{sum}_<(0) = 0$，且 $\mathrm{sum}_<(n) = \mathrm{sum}_<(n-1) + (n-1)$。明确地说，$\mathrm{sum}_<(n)$ 是小于 n 的所有严格更小自然数之和，$\mathrm{sum}_<(n) = 1 + 2 + \ldots + (n-1)$。

引理 4.2.10。设 G 是有限阿贝尔群，且 $(q,g_0) \in$ 弱对称二次型$(G,\Bbbk^\times)$ 是关于 g_0 对称的弱二次型，即对所有 $g \in G$，$q(g) = q(g^{-1}g_0)$。那么

$$\begin{aligned} q(g^k) &= q(g)^{k^2-\mathrm{sum}_<(k)} q(gg_0)^{\mathrm{sum}_<(k)}, \\ q(g^{-k}) &= q(g)^{\mathrm{sum}_<(k)} q(gg_0)^{k^2-\mathrm{sum}_<(k)}, \end{aligned} \tag{4.30}$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$。

证明。首先注意到，利用 $q(g) = q(g^{-1}g_0)$，特别是 $q(g_0) = q(1) = 1$，以及 β_q 的双线性，

$$\frac{q(g^{-1})}{q(g^2)q(g)} = \frac{q(g_0g)}{q(g^2)q(g)} = \frac{q(g^2g_0g^{-1})}{q(g^2)q(g_0g^{-1})} \overset{(4.26)}{=} \beta_q(g^2,g_0g^{-1}) = \beta_q(g,g_0)^2\beta_q(g,g)^{-2}$$
$$\overset{(4.26)}{=} \frac{q(gg_0)^2}{q(g)^2q(g_0)^2}\frac{q(g)^4}{q(g^2)^2} = \frac{q(g^{-1})^2q(g)^2}{q(g^2)^2}.$$

这意味着

$$q(g^2) = q(g)^3q(g^{-1}) = q(g)^3q(gg_0). \tag{4.31}$$

我们对 k 使用归纳法。对于 $k = 0$，两个陈述都成立且相等。对于 $k = 1$，第一个陈述成立，因为显然 $q(g) = q(g)$；第二个陈述也成立，因为 q 关于 g_0 对称，$q(g^{-1}) = q(gg_0)$。现在设这两个陈述对某个固定的 $k \geq 1$ 都成立。于是，利用 β_q 的双线性性、$\mathrm{sum}_<$ 的递归定义，以及如上所示的 $q(g^2) = q(g)^3q(gg_0)$，我们计算得

$$\begin{aligned} q(g^{k+1}) = q(gg^k) &\overset{(4.26)}{=} \beta_q(g,g^k)q(g)q(g^k) \overset{(4.26)}{=} q(g^2)^kq(g)^{-2k}q(g)q(g^k) \\ &\overset{(4.31),(4.30)}{=} q(g)^{3k}q(gg_0)^kq(g)^{-2k}q(g)q(g)^{k^2-\mathrm{sum}_<(k)}q(gg_0)^{\mathrm{sum}_<(k)} \\ &= q(g)^kq(g)^{k^2-\mathrm{sum}_<(k)+1}q(gg_0)^{\mathrm{sum}_<(k)+k} \\ &= q(g)^{k^2+k+1-\mathrm{sum}_<(k)}q(gg_0)^{\mathrm{sum}_<(k+1)} \\ &= q(g)^{k^2+k+1-(\mathrm{sum}_<(k+1)-k)}q(gg_0)^{\mathrm{sum}_<(k+1)} \\ &= q(g)^{(k+1)^2-\mathrm{sum}_<(k+1)}q(gg_0)^{\mathrm{sum}_<(k+1)}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
q(g^{-(k+1)}) = q(g^{-k}g^{-1}) &\overset{(4.26)}{=} \beta_q(g^{-k},g^{-1})q(g^{-k})q(g^{-1}) = \beta_q(g,g)^k g(g^{-k})q(gg_0)\\
&\overset{(4.26)}{=} q(g^2)^k q(g)^{-2k} g(g^{-k})q(gg_0)\\
&\overset{(4.31),(4.30)}{=} q(g)^{3k} q(gg_0)^k q(g)^{-2k} q(gg_0)^{k^2-\mathrm{sum}_<(k)} q(g)^{\mathrm{sum}_<(k)} q(gg_0)\\
&= q(g)^{k+\mathrm{sum}_<(k)} q(gg_0)^{k+1+k^2-\mathrm{sum}_<(k)}\\
&= q(g)^{\mathrm{sum}_<(k+1)} q(gg_0)^{k+1+k^2-(\mathrm{sum}_<(k+1)-k)}\\
&= q(g)^{\mathrm{sum}_<(k+1)} q(gg_0)^{(k+1)^2-\mathrm{sum}_<(k+1)}.
\end{aligned}$$

□

特别地，对于定义 4.2.1 意义下关于 $g_0 = 1_G$ 对称的二次型，可得 $q(g^k) = q(g)^{k^2} = q(g^{-k})$。事实上，人们常常要求对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $q(g^k) = q(g)^{k^2}$，而不是在二次型的定义中要求对称性 $q(g) = q(g^{-1})$。这里我们特别证明了这两种定义等价。

引理 *4.2.11.* 设 G 为有限阿贝尔群，并设 (q_0, g_0)、$(q_1, g_1) \in WSQF(G, k^\times)$ 是关于 $g_0, g_1 \in G$ 对称的弱二次型，即对所有 $g \in G$，$q_0(g) = q_0(g^{-1}g_0)$ 且 $q_1(g) = q_1(g^{-1}g_1)$。假设 $\beta_{q_0} = \beta_{q_1}$，则存在特征$\eta \in Hom(G, \Bbbk^\times)$，使得

$$q_0 = q_1 \cdot \eta.$$

特别地，若 $g_0 = g_1 = 1$，则可得 $\eta \in \mathrm{Hom}(G,\{\pm 1\})$。反过来，这样的分解意味着 $\beta_{q_0} = \beta_{q_1}$。

证明。利用引理 4.2.10，我们得到 $i = 0,1$

$$\beta_{q_i}(g,g) = \frac{q_i(g^2)}{q_i(g)^2} = \frac{q_i(g)^3 q_i(gg_i)}{q_i(g)^2} = q_i(g)q_i(gg_i).$$

这表明，在假设 $\beta_{q_0} = \beta_{q_1}$ 下，$\eta(g) := {}^{q_0(g)}\, {}^{q_1(g) =}\, {}^{q_1(gg_1)}\, {}^{q_0(gg_0)}$。特别地，对于 $g_0 = g_1 = 1$，有 $\eta = \eta^{-1}$，即 $\eta(g) \in \{\pm 1\}$。容易验证，等式$\beta_{q_1} = \beta_{q_0} = \beta_{q_1\eta}$ 蕴含 η 的线性性。反过来，若 $q_0 = q_1 \cdot \eta$，则由 η 的线性性可知 $\beta_{q_0} = \beta_{q_1}$。

□

我们称群 G 有平方根，如果对于所有 $g \in G$，都存在某个元素 $g^{\frac{1}{2}} \in G$，使得$g^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} = g$。

命题 4.2.1. 设 G 是一个有平方根的有限阿贝尔群。映射

$$\begin{aligned}
F: \quad \mathrm{WRQF}(G,\Bbbk^\times)/\sim &\to \mathrm{WSQF}(G,\Bbbk^\times)/\sim,\\
[(q,\eta,g_0)] &\mapsto [(q\eta, g_0^{-2})]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

是一个定义良好的双射。

证明。设 $(q,\eta,g_0)\in$弱可表示二次型$(G,\Bbbk^\times)$，则由推论 4.2.4 可知 $(q\eta,g_0^{-2})\in$弱对称二次型$(G,\Bbbk^\times)$。此外，若 $(q,\eta,g_0)\sim(q',\eta',g_0')$ 属于弱可表示二次型$(G,\Bbbk^\times)$，则根据定义，存在某个 $f\in\mathrm{Aut}(G)$，使得 $q\eta=f^*(q'\eta')$ 且 $f(g_0)=g_0'$。因此，利用 f 的线性性，可得 $f(g_0^{-2})=f(g_0)^{-2}=(g_0')^{-2}$。这表明 $(q\eta,g_0^{-2})\sim(q'\eta',(g_0')^{-2})$，即 F 是定义良好的。

定义一个逆映射的候选映射为

$$G:\quad \mathrm{WSQF}(G,\Bbbk^\times)/\sim\to\mathrm{WRQF}(G,\Bbbk^\times)/\sim,\ [(q,g_0)]\mapsto[(\widetilde{q},\eta,g_0^{-\frac{1}{2}})],$$

其中 $\widetilde{q}\in\mathrm{QF}(G,\Bbbk^\times)$ 和 $\eta\in\mathrm{Hom}(G,\Bbbk^\times)$ 由定理 4.2.1 给出，即 $q=\widetilde{q}\eta$。

设 $(q,g_0)\in\mathrm{WSQF}(G,\Bbbk^\times)$、$\widetilde{q}\in\mathrm{QF}(G,\Bbbk^\times)$ 和 $\eta\in\mathrm{Hom}(G,\Bbbk^\times)$，使得 $q=\widetilde{q}\eta$。那么引理 4.2.11 蕴含 $\beta_q=\beta_{\widetilde{q}}$；并且由于 $\widetilde{q}$ 关于 G 的单位元 1_G 对称，故 $\eta(g)=q(g)\,\widetilde{q}(g)^{-1}=\widetilde{q}(g)\,q(gg_0)$。这意味着 $q(gg_0)=\widetilde{q}(g)\,\eta(g)\,\widetilde{q}(g)=\widetilde{q}(g)^2\,\eta(g)$。利用这一点以及 $q(g_0)=1$，可得

$$\begin{aligned}\beta_{\widetilde{q}}(g,g_0^{-\frac{1}{2}})&=\beta_q(g,g_0^{-\frac{1}{2}})=\beta_q(g,g_0)^{-\frac{1}{2}}=\Big(\frac{q(gg_0)}{q(g)q(g_0)}\Big)^{-\frac{1}{2}}=\Big(\frac{q(gg_0)}{q(g)}\Big)^{-\frac{1}{2}}\\&=\Big(\frac{\widetilde{q}(g)^2}{q(g)^2}\Big)^{-\frac{1}{2}}=\frac{q(g)}{\widetilde{q}(g)}=\eta(g).\end{aligned}$$

这表明 $(\widetilde{q},\eta,g_0^{-1})\in\mathrm{WRQF}(G,\Bbbk^\times)$。

设 $(q,g_0)\sim(q',g_0')$ 属于 $\mathrm{WSQF}(G,\Bbbk^\times)$，则根据定义，存在某个 $f\in\mathrm{Aut}(G)$，使得 $q=f^*q'$ 且 $f(g_0)=g_0'$。若 $\widetilde{q},\widetilde{q}'\in\mathrm{QF}(G,\Bbbk^\times)$ 且 $\eta,\eta'\in\mathrm{Hom}(G,\Bbbk^\times)$，$1^-$满足 $q=\widetilde{q}\eta$ 且 $q'=\widetilde{q}'\eta'$，则由假设及 f 的线性性可得 $(\widetilde{q},\eta,g_0^{-1})\sim(\widetilde{q},\eta,g_0^{-1})$ 属于 $\mathrm{WRQF}(G,\Bbbk^\times)$。因此，$G$ 定义良好。

还需证明 F 与 G 互为逆。我们发现

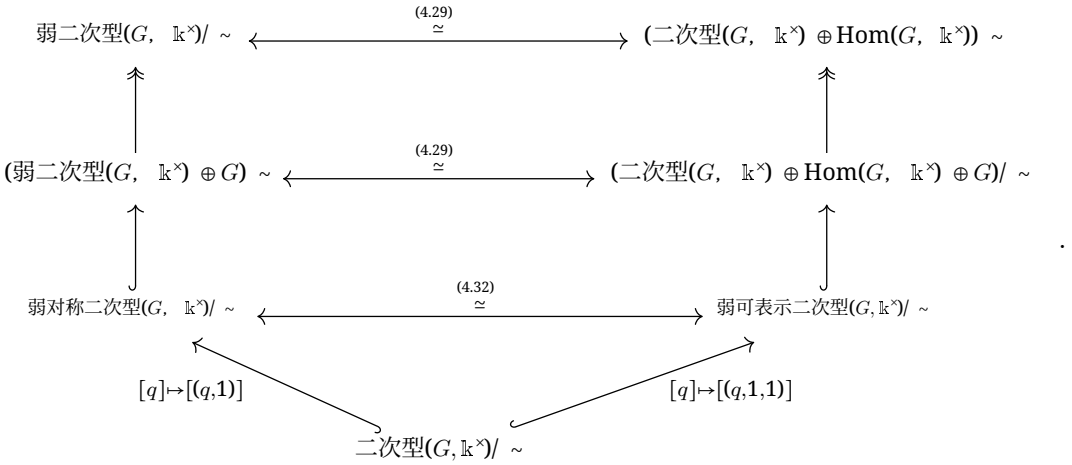
$$G\circ F([(q,\eta,g_0)])=G([(q\eta,g_0^{-2})])=[(q',\eta',g_0)]=[(q,\eta,g_0)],$$

因为 $q'\eta'=q\eta$；并且

$$F\circ G([q,g_0])=F([\widetilde{q},\eta,g_0^{-\frac{1}{2}}])=[(\widetilde{q}\eta,g_0)]=[(q,g_0)].$$

□

有限阿贝尔群 G 存在平方根时的结果总结如下图所示：



4.2.5 分次向量空间的广义带状结构

本小节旨在针对我们在定义 4.2.8 中定义的 G–vect$_{\Bbbk}$ 上的广义对偶 $(-)^{g_0}$，引入适当的带状结构概念，并将其与我们在定义 4.2.10 中定义的弱二次型概念联系起来，类似于推论 4.2.1。

定义 4.2.13（弱带幺半结构）。令 WRMS$(G,\Bbbk)$ 为 G-vect$_{\Bbbk}$ 上的弱带幺半结构 的集合，也就是说，WRMS$(G,\Bbbk)$ 的元素为四元组

$$(\alpha,\gamma,\theta,g_0)$$

其中 $\alpha:\otimes\bigcirc(\otimes\times\mathrm{id}_{G\text{-vect}_{\Bbbk}})\cong\otimes\bigcirc(\mathrm{id}_{G\text{-vect}_{\Bbbk}}\times\otimes)$、$\gamma:\otimes\cong\otimes\bigcirc\tau$和 $\theta:\mathrm{id}_{G\text{-vect}_{\Bbbk}}\cong\mathrm{id}_{G\text{-vect}_{\Bbbk}}$ 均为自然同构，且 $g_0\in G$，使得 $(\otimes,\Bbbk,\alpha,\lambda,\varrho,\gamma,\theta)$（参见（4.24））在 G-vect$_{\Bbbk}$ 上定义了关于由 $(-)^{g_0}$ 定义的 $\star$-自对偶对偶（参见定义 3.1.4）的弱带幺半结构，依据的是

$$(V^{g_0})_g:=\underline{\mathrm{Hom}}(V,\Bbbk_{g_0})=(V_{g^{-1}g_0})^\star.$$

可以通过定义以下内容，在 WRMS$(G,\Bbbk)$ 上定义一个等价关系 $\sim$

$$(\alpha,\gamma,\theta,g_0)\sim(\alpha',\gamma',\theta',g_0'),$$

当且仅当存在一个辫状幺半群等价

$$(F,\Phi,\phi):(G\text{-vect}_{\Bbbk},\otimes,\Bbbk,\alpha,\lambda,\varrho,\gamma)\cong(G\text{-vect}_{\Bbbk},\otimes,\Bbbk,\alpha',\lambda,\varrho,\gamma'),$$

使得 $F(\theta_{\Bbbk_g})=\theta'_{F(\Bbbk_g)}$。

定理 4.2.2。 设 G 是一个有限阿贝尔群。映射

$$\begin{aligned}\mathrm{WRQF}(G,\Bbbk^\times)/\sim &\to \mathrm{WRMS}(G,\Bbbk)/\sim\\ [(q,\eta,g_0)] &\mapsto [(\alpha_{\psi_q},\gamma_{\Omega_q},\theta_{q\eta},g_0^{-2})],\end{aligned}$$

对于 $(\psi_q,\Omega q)\in Z^3_{\mathrm{ab}}(G,\Bbbk^\times)$，使得 $\mathrm{EM}([(\psi_q,\Omega q)])=q$ 是一个双射。

证明。（概要）设 $(q,\eta,g_0)\in$ 弱可表示二次型$(G,\Bbbk^\times)$ 且 $(\psi_q,\Omega q)\in Z^3_{\mathrm{ab}}(G,\Bbbk^\times)$，使得 $\mathrm{EM}([(\psi_q,\Omega q)])=q$。那么 $(\otimes,\Bbbk^{\alpha_{\psi_q}},\lambda,\varrho,\gamma_{\Omega_q},\theta_{q\eta})$ 在对偶 $(-)^{g_0^{-2}}$ 下为 G–$\mathrm{vect}_\Bbbk$ 定义了一个弱带状幺半结构。事实上，它是幺半的，因为五边形公理由 $d\psi_q=1$ 推出，且由于 ψ_q 已归一化，三角形公理成立。它是辫状幺半的，因为六边形公理由 (4.17) 推出。此外，$\theta_{q\eta}$ 是一个扭结，因为扭结条件 $(\theta_{q\eta})_{g_1g_2}=(\gamma_{\Omega_q})_{g_2,g_1}\bigcirc(\gamma_{\Omega_q})_{g_1,g_2}\bigcirc((\theta_{q\eta})_{g_1}\otimes(\theta_{q\eta})_{g_2})$ 对应于

$$q(g_1g_2)\eta(g_1g_2)=\Omega_q(g_2,g_1)\Omega_q(g_1,g_2)q(g_1)\eta(g_1)q(g_2)\eta(g_2),$$

由 (4.18) 和 η 的线性性可知这一点成立。最后，根据推论 4.2.4，弱二次型 $q\eta$ 关于 g_0^{-2} 对称，这表明 $\theta_{q\eta}$ 关于对偶 $(-)^{g_0^{-2}}$ 是带状的。因此，我们证明了 $(\alpha_{\psi_q},\ \gamma_{\Omega_q},\ \theta_{q\eta},\ g_0^{-2})\in$ 弱黎曼度量结构$(G,\ \Bbbk)$。

若 $(q,\eta,g_0)\sim(q',\eta',g_0')$，则根据定义，存在某个群自同构 $f\in\mathrm{Aut}(G)$，使得 $q\eta=f^\star(q'\eta')$ 且 $f(g_0)=g_0'$。这意味着 $[(\psi_q,\Omega q)]=[(f^\star\psi_{q'},f^\star\Omega q')]$。因此，存在某个归一化阿贝尔 2-余链 $\kappa\in C^2(G,\Bbbk^\times)$，使得 $(\psi_q,\Omega q)=(f^\star(\psi_{q'})\cdot d\kappa,f^\star(\Omega q')\cdot\kappa_{\mathrm{comm}})$。由此得到一个辫状幺半函子的候选

$$(F,\Phi,\psi):(G\text{-}\mathrm{vect}_\Bbbk,\otimes,\Bbbk,\alpha_{\psi_q},\lambda,\varrho,\gamma_{\Omega_q})\to(G\text{-}\mathrm{vect}_\Bbbk,\otimes,\Bbbk,\alpha_{\psi_{q'}},\lambda,\varrho,\gamma_{\Omega_{q'}}).$$

由 $F(\Bbbk_g):=\Bbbk_{f(g)}$、$F(\mathrm{id}^{\Bbbk}{}_g)=\mathrm{id}^{\Bbbk}{}_{f(g)}$、$\Phi_{g_1,\ g_2}:=\kappa(g_1,g_2)\mathrm{id}^{\Bbbk}{}_{f(g_1g_2)}$ 和 $\psi=\mathrm{id}_\Bbbk$ 定义。根据定义，$F(\Bbbk_{1_G})=\Bbbk_{f(1_G)}=\Bbbk_{1_G}$。此外，利用 $d\kappa$、κ_{comm} 的定义以及 κ 是归一化的这一点，可以验证这确实是一个辫状幺半群函子。等式 $F((\theta_{q\eta})^{\Bbbk_g})=(\theta_{q'\eta'})^{F(\Bbbk_g)}$ 由 $q\eta(g)=(q'\eta')(f(g))$ 见证。这表明 $(\alpha_{\psi_q},\gamma_{\Omega_q},\theta_{q\eta},g_0^{-2})\sim(\alpha_{\psi_{q'}},\gamma_{\Omega_{q'}},\theta_{q'\eta'},(g_0')^{-2})$。

反过来，设 $(\alpha,\gamma,\theta,g_0)\in$ 弱黎曼度量结构$(G,\Bbbk)$。于是，对于任意 $g,g_1,g_2,g_3\in G$ 个标量 $\psi_\alpha(g_1,g_2,g_3),\Omega\gamma(g_2,g_1)\ \Theta_\theta(g)\in\Bbbk^\times$，使得

$$\alpha((1_{g_1}\otimes1_{g_2})\otimes1_{g_3})=\psi_\alpha(g_1,g_2,g_3)1_{g_1}\otimes(1_{g_2}\otimes1_{g_3}),$$

$$\gamma(1_{g_1}\otimes1_{g_2})=\Omega_\gamma(g_2,g_1)1_{g_2}\otimes1_{g_1},$$

$$\theta(1_g)=\Theta_\theta(g)1_g.$$

可以通过以下方式证明 $(\psi_\alpha,\Omega\gamma)\in Z^3_{\mathrm{ab}}(G,\Bbbk^\times)$。首先，由三角形公理可知 $\psi_\alpha,\Omega\gamma$是归一化的；由五边形公理可知 $d\psi=1$；最后，由六边形公理可得 (4.17)。此外，θ的扭结条件蕴含 $\beta_{\Theta_\theta}=\beta_{q_{\Omega_\gamma}}$。由于根据引理 4.2.1，有 $q_{\Omega_\gamma}\in\mathrm{QF}(G,\Bbbk^\times)$，因此

$\beta_{q_{\Omega_\gamma}}$，因而 β_{Θ_θ}，是双线性的。此外，θ关于对偶 $(-)^{g_0}$ 的带状条件蕴含，对于所有 $g \in G$，$\Theta_\theta(g^{-1}g_0) = \Theta_\theta(g)$。综上可知，$(\Theta_\theta, g_0) \in \mathrm{WSQF}(G, \Bbbk^\times)$。因此，引理 4.2.11 蕴含存在某个特征 $\eta \in \mathrm{Hom}(G, \Bbbk^\times)$，使得 $q_{\Omega_\gamma}\eta = \Theta_\theta$ 且 $^{\Theta_\theta}(g)\,{}^{q_{\Omega_\gamma}}(g) = \eta(g) = {}^{q_{\Omega_\gamma}}(g)\,\Theta_\theta(gg_0)$。利用倒数第二步中的 $\Theta_\theta(g_0) = \Theta_\theta(g_0^{-1}g_0) = \Theta_\theta(1) = 1$，可得

$$\beta_{q_{\Omega_\gamma}}(g, g_0^{-\frac{1}{2}}) = \beta_{\Theta_\theta}(g, g_0)^{-\frac{1}{2}} = \Big(\frac{\Theta(gg_0)}{\Theta_\theta(g)\Theta_\theta(g_0)}\Big)^{-\frac{1}{2}} = \Big(\frac{q_{\Omega_\gamma}(g)^2}{\Theta_\theta(g)^2\Theta_\theta(g_0)}\Big)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\Theta_\theta(g)\Theta_\theta(g_0)^{\frac{1}{2}}}{q_{\Omega_\gamma}(g)} = \frac{\Theta_\theta(g)}{q_{\Omega_\gamma}(g)} = \eta(g).$$

这表明 $(q_{\Omega_\gamma}, \eta, g_0^{-\frac{1}{2}}) \in$ 弱可表示二次型$(G, \Bbbk^\times)$。

若 $(\alpha, \gamma, \theta, g_0) \sim (\alpha', \gamma', \theta', g_0')$，则根据定义存在一个辫状幺半群等价

$$(F, \Phi, \phi) : (G\text{–vect}_\Bbbk, \otimes, \Bbbk, \alpha, \lambda, \varrho, \gamma) \cong (G\text{–vect}_\Bbbk, \otimes, \Bbbk, \alpha', \lambda, \varrho, \gamma').$$

使得 $F(\theta_{\Bbbk_g}) = \theta'_{F(\Bbbk_g)}$。定义 $f : G \to G$使得 $F(\Bbbk_g) \cong \Bbbk_{f(g)}$得到一个自同构 $f \in \mathrm{Aut}(G)$。事实上，f 的可逆性由 F的可逆性诱导，而 f 的线性性由

$$\Bbbk_{f(g_1)f(g_2)} \cong \Bbbk_{f(g_1)} \otimes \Bbbk_{f(g_2)} \cong F(\Bbbk_{g_1}) \otimes F(\Bbbk_{g_2}) \cong F(\Bbbk_{g_1} \otimes \Bbbk_{g_2}) \cong F(\Bbbk_{g_1g_2}) \cong \Bbbk_{f(g_1g_2)}.$$

等式 $F(\theta_{\Bbbk_g}) = \theta'_{F(\Bbbk_g)}$ 得出 $\Theta_\theta(g) = \Theta_{\theta'}(f(g))$，这转化为 $q_{\Omega_\gamma}\eta(g) = f^*(\Omega_{\gamma'}\eta')(g)$。此外，同构 $F((\Bbbk_g)^{g_0^{-\frac{1}{2}}}) \cong F(\Bbbk_g)^{(g_0')^{-\frac{1}{2}}}$意味着 $f(g_0^{-\frac{1}{2}}) = (g_0')^{-\frac{1}{2}}$。综上可得 $(q_{\Omega_\gamma}, \eta, g_0^{-\frac{1}{2}}) \sim (q_{\Omega_{\gamma'}}, \eta', (g_0')^{-\frac{1}{2}})$。

经过仔细考察，我们可以看出这两种构造互相逆转。 □

这使我们能够从以下复合推出推论 4.2.1，即 $(\mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G, \{\pm 1\}))/\sim \cong \mathrm{RMS}(G, \Bbbk)/\sim$：$(\mathrm{QF}(G, \Bbbk^\times) \oplus \mathrm{Hom}(G, \{\pm 1\}))/\sim \to \mathrm{WSQF}(G, \Bbbk^\times)/\sim \hookrightarrow \mathrm{WRQF}(G, \Bbbk^\times)/\sim \to \mathrm{WRMS}(G, \Bbbk)/\sim \to \mathrm{RMS}(G, \Bbbk)/\sim$，其定义为

$$[(q, \eta)] \mapsto [(q\eta, 1_G)] \mapsto [(q, \eta, 1_G)] \mapsto [(\alpha_{\psi_q}, \gamma_{\Omega_q}, \theta_{q\eta}, 1_G)] \mapsto [(\alpha_{\psi_q}, \gamma_{\Omega_q}, \theta_{q\eta})].$$

4.3 拓扑向量空间

本节探讨基于 Barr[Bar00] 的拓扑向量空间对偶。设 $\Bbbk$为任意域。除非另有说明，$\Bbbk$-向量空间可以是无限维的。

4.3.1 chu chu 与 拓扑向量空间范畴

定义 4.3.1（偶对）。偶对是由 k-向量空间 V、W 以及称为配对的线性映射 $-,-:V\otimes W\to \mathbb{k}$ 组成的三元组 $(V,W,-,-)$。偶对 $(V_1,W_1,-,-_1)$ 和 $(V_2,W_2,-,-_2)$ 的偶对态射是由线性映射 $f:V_1\to V_2$ 和 $g:W_2\to W_1$ 构成的二元组 (f,g)，使得

$$\langle f(v),w\rangle_2 = \langle v,g(w)\rangle_1 \tag{4.33}$$

对所有 $v\in V_1$ 和 $w\in W_2$ 均成立。

典范偶对由 $\mathbb{k}:=(\mathbb{k},\mathbb{k},\cdot)$ 给出，其中乘法作为配对。

定义 4.3.2（分离的、外延的）。若偶对 $(V,W,-,-)$ 所诱导的映射 $V\to W^\star$，$v\mapsto v,-$ 是单射，则称其为分离的。若偶对 $(V,W,-,-)$ 所诱导的映射 $W\to V^\star$，$w\mapsto -,w$ 是单射，则称其为外延的。

定义 4.3.3（chu 范畴）。分离且外延对范畴及偶对态射所构成的范畴，记作 chu = chu(Vect $\mathbb{k}$)，名称源自 P.H. Chu。

设 X 是一个集合，T $\subseteq$P(X) 是 X 的一个子集族。若满足 $\varnothing, X\in$ T；T 中任意元素的并集仍是 T 的元素；且 T 中有限多个元素的交集仍是 T 的元素，则称 T 为 X 上的拓扑。$x\in X$ 的邻域是一个子集 $U\subseteq X$，满足存在集合 $T\in$ T，使得 $x\in T\subseteq U$。$x\in X$ 的邻域全体记作 U (x)。$x\in X$ 的邻域基是 x 的邻域构成的子集 B(x) $\subseteq$U (x)，并且对于所有 $U\in$ U (x)，都存在一个 $B\in$B(x)，使得 $B\subseteq U$。若对每一对 $x,y\in X$ $x\neq y$，都存在分别属于 x 的邻域 $U\in$U (x) 和属于 y 的邻域 $V\in$U(y)，使得 $U\cap V=\varnothing$，则称拓扑空间 (X, T) 为豪斯多夫空间。

若一个域 $\mathbb{k}$ 赋有一种拓扑，使得加法和乘法作为映射拓扑域 $\times\mathbb{k}\to\mathbb{k}$都是连续的，其中 $\mathbb{k}\times\mathbb{k}$ 赋有积拓扑，则称其为拓扑域。若向量空间 V 是拓扑域$\mathbb{k}$上的向量空间，并赋有一种拓扑，使得向量加法 $V\times V\to V$和数乘 $\mathbb{k}\times V\to V$都是连续的，其中这些积再次赋有积拓扑，则称其为拓扑向量空间。

定义 4.3.4（凸、平衡、吸收）. 设 V 是$\mathbb{k}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$上的向量空间。称子集 $C\subseteq V$ 为

1. 凸，若对所有 $x,y\in C$ 和 $0\le t\le 1$，可得 $tx+(1-t)y\in C$；
2. 平衡，若对所有 $x\in C,\lambda\in\mathbb{k}$，满足 $|\lambda|\le 1$，可得 $\lambda x\in C$；
3. 吸收，若对所有 $x\in V$，存在一个 $r\in\mathbb{R}$，使得对所有满足 $|\lambda|\ge r$的 $\lambda\in\mathbb{k}$，可得 $x\in\lambda C$。

定义 4.3.5（局部凸）。若拓扑向量空间 V具有由平衡、吸收且凸的集合构成的邻域基，则称其为局部凸。

定义 4.3.6（拓扑向量空间）。豪斯多夫局部凸拓扑向量空间及其连续线性映射所构成的范畴记为 TVS。

请注意，豪斯多夫局部凸拓扑向量空间有时也简称为拓扑向量空间，因为在泛函分析中，这些前提条件被视为标准条件。

范畴 chu 和 TVS 可以通过以下方式建立联系。设 $V \in$TVS 是一个豪斯多夫局部凸拓扑向量空间，其拓扑对偶为

$$V' := \{f \in V^\star \mid f \text{ continuous}\}.$$

我们可以定义一个偶对

$$T(V) := (V, V', \mathrm{eval})$$

其配对由求值映射给出。注意，V 的拓扑结构编码在拓扑对偶 $V\prime$ 中。根据构造，诱导的配对 $V\prime \to V^\star$ 是单射，即 $T(V)$ 是外延的。此外，哈恩-巴拿赫分离定理指出，在豪斯多夫局部凸拓扑向量空间中，点可以被分离，即对于所有 $x, y \in V$，若有 $x \neq y$，则存在一个连续线性泛函 $f \in V\prime$，使得 $f(x) \neq f(y)$。特别地，对于每个 $x \neq 0$，存在一个线性泛函 $f \in V\prime$，使得 $f(x) \neq 0$。这表明 $T(V)$ 也是分离的，因此 $T(V) \in$ chu。在态射上进一步定义 $T(f) = (f, f^\star)$，即可得到一个函子

$$T : \mathsf{TVS} \to \mathsf{chu}. \tag{4.34}$$

在下一节中，我们将引入拓扑向量空间的子范畴，使得 T 成为一个等价。

4.3.2 弱拓扑和 Mackey 拓扑向量空间

定义 4.3.7（对偶拓扑）。设 $(V, W, -, -) \in$ chu 是一个分离且延拓的偶对。在 V 上的一个对偶拓扑 是指满足以下条件的拓扑 T：$(V, \mathsf{T}) \in$ 拓扑向量空间，且单射 $W \to V^\star$ 诱导出一个同构

$$W \simeq (V, \mathcal{T})'.$$

例如，若 $(V, \mathsf{T}) \in$ 拓扑向量空间是一个豪斯多夫局部凸拓扑向量空间，则根据定义，T 是关于偶对 $T(V) = (V, (V, \mathsf{T})', \text{求值映射}) \in$chu 的对偶拓扑。

一般而言，一个偶对可能存在多个对偶拓扑。下面给出两个极端选择。

给定某个集合 X 上的两个拓扑 T_1,T_2，若 T_1 比 T_2, 更弱，且 T_2 比 T_1, 更强，则称 $\mathsf{T}_1 \subseteq \mathsf{T}_2$。

定义 4.3.8（弱拓扑、强拓扑）。设 $(V, W, -, -) \in$ chu 是一个分离且外延的配对。弱拓扑 $\sigma(V, W, -, -)$ 是相对于偶对 $(V, W, -, -)$ 定义在 V 上的最弱对偶拓扑。强拓扑 $\tau(V, W, -, -)$ 是相对于偶对 $(V, W, -, -)$ 定义在 V 上的最强对偶拓扑。若上下文已明确配对 $-, -$，则将 $\sigma(V, W)$ 简写为 $:= \sigma(V, W, -, -)$，并将 $\tau(V, W)$ 简写为 $:= \tau(V, W, -, -)$

定义 4.3.9（弱拓扑、麦基空间）。设 $V \in$TVS 是一个拓扑向量空间，且 $V' \in \mathsf{Vect}_{\Bbbk}$ 是其拓扑对偶。拓扑 $\sigma(V,V')$ 称为 V 上的弱拓扑。拓扑向量空间 $V_\sigma := (V, \sigma(V,V')) \in$ TVS 称为弱拓扑化的。拓扑 $\sigma(V'V)$ 称为 V' 上的弱-* 拓扑，并简写为 $(V')_\sigma := (V'\sigma(V'V))$。拓扑 $\tau(V,V')$ 称为 V 上的麦基拓扑。拓扑向量空间 $V_\tau := (V, \tau(V,V')) \in$TVS 称为麦基空间。

麦基-阿伦斯定理 （参见 [Mac46], [Bou77]）保证了麦基拓扑和弱拓扑的存在。

拓扑向量空间 $V \in$ 上的弱拓扑 $\sigma(V,V\prime)$ 是始拓扑的一个例子。特别是，它具有如下泛性质:

> 函数 $f : U \to V_\sigma$ 从某个拓扑向量空间 U 到 V 连续，当且仅当对于所有连续线性泛函$v' \in V'$， $v' \bigcirc f$ 连续，

$$\begin{array}{ccc} V_\sigma & \xrightarrow{\;v'\;} & \Bbbk \\ {\scriptstyle f}\uparrow & \nearrow_{v'\circ f} & \\ U & & \end{array} \quad . \tag{4.35}$$

定义 4.3.10 （范畴 TVS$_w$、TVS$_m$）。 令 TVS$_w$ 表示由弱拓扑向量空间构成的 TVS 满子范畴，TVS$_m$ 表示麦基空间的满子范畴。

在（4.34）中定义的函子 $T : \mathsf{TVS} \to \mathsf{chu}$ 限制为函子 $T_w : \mathsf{TVS}_w \to \mathsf{chu}$ 和 $T_m : \mathsf{TVS}_m \to \mathsf{chu}$。反过来，按以下方式定义函子 $L : \mathsf{chu} \to \mathsf{TVS}_m$ 和 $R : \mathsf{chu} \to \mathsf{TVS}_w$。对于 $(V, W, -, -) \in \mathsf{chu}$，令

$$L((V,W,\langle -,-\rangle)) := (V, \tau(V,W)) \quad \text{and} \quad R((V,W,\langle -,-\rangle)) := (V, \sigma(V,W))$$

并且在态射上令 $L((f,\ g)) = R((f,\ g)) := f$。以下结果归功于 [Bar00，第 4.5] 节。

定理 4.3.1。图表中的函子

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathsf{chu} & & \\ & {\scriptstyle T_m}\nearrow \;\; \swarrow{\scriptstyle L} & & {\scriptstyle R}\nearrow \;\; \swarrow{\scriptstyle T_w} & \\ \mathsf{TVS}_m & & & & \mathsf{TVS}_w \end{array} \tag{4.36}$$

提供准逆伴随等价。

4.3.3 $\star$-自对偶结构 chu

对于每个偶对 $\mathbf{V} = (V, W, -, -) \in \mathsf{chu}$，都存在一个对偶偶对

$$\mathcal{V}^\star := (W, V, \langle -, - \rangle) \in \mathsf{chu}$$

其配对由 $\mathbf{V} \in \mathsf{chu}$ 的配对借助张量积的对称性诱导而来。类似地，对于 chu 中偶对 V, W 之间的态射 $(f, g) : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$，可以定义一个对偶态射

$$(f, g)^\star := (g, f).$$

根据定义，便有

$$\mathcal{V}^{\star\star} = \mathcal{V} \quad \text{and} \quad (f, g)^{\star\star} = (f, g),$$

这与有限维向量空间的情形类似。

注意，chu 中偶对 V,W 之间的态射集合 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathbf{V},\mathbf{W})$ 可以自然地赋予向量空间结构。

定义 4.3.11. 给定 chu 中的偶对 $\mathbf{V}_1 = (V_1, W_1, -, -_1)$ 和 $\mathbf{V}_2 = (V_2, W_2, -, -_2)$，令 $\mathrm{Hom}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ 为偶对 $(\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)\ V_1 \otimes W_2, -, -)$，其配对为

$$\langle (f, g), v \otimes w \rangle := \langle f(v), w \rangle_2 = \langle v, g(w) \rangle_1$$

对于 $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ 和 $v \in V_1, w \in W_2$。

可以证明（参见 [Bar00，第 4.2] 节），偶对 $\mathrm{Hom}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ 是分离且外延的，即 $\mathrm{Hom}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) \in \mathsf{chu}$。

事实上，Barr 还证明了许多其他性质（参见 [Bar00，第 4.1] 节），如下述结果所列。

定理 4.3.2。对于$\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$、$\mathcal{W} \in \mathsf{chu}$ 中的任意偶对，均有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathbb{k}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}); \tag{4.37}$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{U}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{V}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{U}, \mathcal{W})); \tag{4.38}$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{W}^\star, \mathcal{V}^\star); \tag{4.39}$$

$$\mathcal{V}^\star \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{V}, \mathbb{k}). \tag{4.40}$$

可以利用这些同构赋予 chu 对称幺半闭范畴的结构，如下述结果所示（参见 [Bar00,Theorem2.6]）。

引理 4.3.1。范畴chu 是一个对称幺半闭范畴，其张量积 $\otimes$定义为

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{W} := \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{V}, \mathcal{W}^\star)^\star \tag{4.41}$$

对于定义 *4.3.11* 中定义的偶对 $\mathcal{V},\mathcal{W} \in \mathsf{chu}$ 和内 *Hom* $\mathrm{Hom}(-, -)$。

证明。 对于偶对 U、V、W $\in$ chu，我们得到

$\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(U \otimes V, W)$ (4.41)$= \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathrm{Hom}(U, V^\star)^\star, W)$ (4.37)$= \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathbb{k}, \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{Hom}(U, V^\star)^\star, W))$ (4.39)$\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathbb{k}, \mathrm{Hom}(W^\star, \mathrm{Hom}(U, V^\star)))$ (4.38)$\cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}(\mathbb{k}, \underline{\mathrm{Hom}}(U, \mathrm{Hom}(W^\star, V^\star)))$ ~~(4.39)~~$\cong$ ~~$\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}$~~$(\mathbb{k}, \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)))$ ~~(4.37)~~$=$ ~~$\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}$~~$(U, \mathrm{Hom}(V, W))$.

对称性由 $V^{\star\star} = V$ 和 (4.39) 得出。幺半单位由偶对$\mathbb{k} \in$ chu 给出。

□

特别地，(4.40) 意味着偶对 $\mathbb{k} \in$chu 是一个对偶化对象，

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{\star\star} \cong \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{V}, \mathbb{k}), \mathbb{k}).$$

引理 4.3.2. 范畴 chu 可以赋予对称 $\star$- 自治范畴的结构，其张量积为 (4.41)，内 *Hom* 如定义 *4.3.11* 所述，对偶化对象为 $\mathbb{k} \in$ chu。

4.3.4 $\star$-自对偶结构：拓扑向量空间$_w$ 和 拓扑向量空间$_m$

如定理 4.3.1 所示，chu、拓扑向量空间$_w$ 和拓扑向量空间$_m$之间的等价，在范畴拓扑向量空间$_w$ 和拓扑向量空间$_m$上诱导出一种 $\star$-自对偶结构。本节将以非常具体的方式描述这两种结构。下文中，$\otimes_{\mathbb{k}}$ 表示 $\mathbb{k}$-向量空间的代数张量积。

定义 4.3.12. 令 Hom(–, –) 和 $(-)^\star$ 分别表示 chu 的内 Hom 和对偶。此外，令 R, L, T_m, T_w 为式 (4.36) 中的函子。

- $\mathrm{Hom}_w := R \bigcirc \mathrm{Hom} \bigcirc (T_{反(1)w} \times T_w)$: 拓扑向量空间$_{反(1)w}$ × 拓扑向量空间$_w \to$ 拓扑向量空间$_w$,
- $\mathrm{Hom}_m := L \bigcirc \mathrm{Hom} \bigcirc (T_{反(1)m} \times T_m)$: 拓扑向量空间$_{反(1)m}$ × 拓扑向量空间$_m \to$ 拓扑向量空间$_m$,
- $D_w := R_{\mathsf{opp(1)}} \circ (-)^\star \circ T_w$: 拓扑向量空间$_w \to$ 拓扑向量空间$_{\mathsf{opp(1)}w}$,
- $D_m := L_{\mathsf{opp(1)}} \circ (-)^\star \circ T_m$: 拓扑向量空间$_m \to$ 拓扑向量空间$_{\mathsf{opp(1)}m}$,
- $V \otimes^1_w W := D_w(\mathrm{Hom}_w(V, D_w(W)))$ V, $W \in$拓扑向量空间$_w$,
- $V \otimes^1_m W := D_m(\mathrm{Hom}_m(V, D_m(W)))$ V, $W \in$拓扑向量空间$_m$。
- $V \otimes^2_w W := D_w^{-1}(D_w(W) \otimes^1_w D_w(V))$ V, $W \in$拓扑向量空间$_w$,
- $V \otimes^2_m W := D_m^{-1}(D_m(W) \otimes^1_w D_m(V))$ V, $W \in$拓扑向量空间$_m$.

推论 *4.3.1.* 范畴 拓扑向量空间$_m$ 和 拓扑向量空间$_w$ 可以赋予 $\star$-自对偶范畴的结构。更确切地说，存在对称闭幺半结构 *(*拓扑向量空间$_m, \otimes^1_m, L(\mathbb{k}), \mathit{Hom}_m)$* 和 *(*拓扑向量空间$_w, \otimes^1_w, R(\mathbb{k}), \mathit{Hom}_w)$*，其对偶化对象分别为 *$(D_m \bigcirc L)(\mathbb{k})$* 和 *$(D_w \bigcirc R)(\mathbb{k})$*。

引理 4.3.3。 内 *Hom* $\mathrm{Hom}_m(-,-)$:拓扑向量空间$_m^{\mathrm{opp}(1)}$ × 拓扑向量空间$_m$ → 拓扑向量空间$_m$ 和$\mathrm{Hom}_w(-,-)$:拓扑向量空间$_w^{\mathrm{opp}(1)}$ × 拓扑向量空间$_w$ → 拓扑向量空间$_w$ 满足

$$\underline{\mathrm{Hom}}_w(V,W) \cong (L(V,W), \sigma(L(V,W), V \otimes_{\Bbbk} W')), \quad V,W \in \mathsf{TVS}_w,$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_m(V,W) \cong (L(V,W), \tau(L(V,W), V \otimes_{\Bbbk} W')), \quad V,W \in \mathsf{TVS}_m.$$

此处 $L(V,W)$ 表示连续线性映射 $V \to W$ 的空间。

证明。 根据 chu 中内 Hom 的定义，我们可推得

$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Hom}} \circ (T_w^{\mathrm{opp}(1)} \times T_w))(V,W) &= \underline{\mathrm{Hom}}((V,V',\mathrm{eval}),(W,W',\mathrm{eval}))\\ &= (\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}((V,V',\mathrm{eval}),(W,W',\mathrm{eval})), V \otimes_{\Bbbk} W', \langle -,-\rangle).\end{aligned}$$

配对 $-,-$ 定义在 $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}((V,V\prime,\text{求值映射}),(W,W',\text{求值映射}))$ 上，并且 $v \otimes w' \in V \otimes_{\Bbbk} W'$ 为

$$\langle (f,g), v \otimes w' \rangle = w'(f(v)) = g(w')(v).$$

根据定义 $g = f^*$，这是与 f 的预复合。此外， $f : V \to W$ 是连续的，因为对于所有 $w' \in W'$，$w' \bigcirc f = g(w') \in V\prime$ 都是连续的（参见泛性质 (4.35)）。因此，映射 $(f,g) \mapsto f$ 和 $\mathrm{id}_{V \otimes W'}$ 定义了一个同构

$$(\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}((V,V',\mathrm{eval}),(W,W',\mathrm{eval})), V \otimes_{\Bbbk} W', \langle -,-\rangle) \cong (L(V,W), V \otimes_{\Bbbk} W', \langle -,-\rangle_L)$$

偶对，其中 $L(V,W)$ 表示从 V 到 W 的连续函数空间，而配对 $f, v \otimes w'_L$ 定义为 $w'(f(v))$。由此可得

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Hom}}_w(V,W) = (R \circ \underline{\mathrm{Hom}} \circ (T_w^{\mathrm{opp}(1)} \times T_w))(V,W) &\cong R(L(V,W), V \otimes_{\Bbbk} W', \langle -,-\rangle_L)\\ &= (L(V,W), \sigma(L(V,W), V \otimes_{\Bbbk} W')).\end{aligned}$$

这意味着 $\mathrm{Hom}_w(\underline{V,\ W}) \cong L(V,\ W)$ 配备了最弱拓扑，使得诱导的单射 $V \otimes_{\Bbbk} W\prime \hookrightarrow L(V,\ W)^\star$ 定义为 $v \otimes w' \mapsto (f \mapsto w'(f(v)))$ 限制后成为一个同构

$$V \otimes_{\Bbbk} W' \cong L(V,W)'.$$

将 R 替换为 L，即可类似地得出第二个结论。 □

引理 4.3.4. 函子 D_m :拓扑向量空间$_m$ → 拓扑向量空间$_m^{\mathrm{opp}(1)}$ 和 D_w : 拓扑向量空间$_w$ → 拓扑向量空间$_w^{\mathrm{opp}(1)}$ 满足

$$D_w(V) = (V', \sigma(V',V)) = (V')_\sigma \quad \text{and} \quad D_m(V) = (V', \tau(V',V)) = (V')_\tau.$$

此外， $D_w^2 \cong \mathrm{id}_{\mathsf{TVS}_w}$ 和 $D_m^2 \cong \mathrm{id}_{\mathsf{TVS}_m}$ 成立。

证明。 设 $V \in$拓扑向量空间$_w$，则

$$\begin{aligned}D_w(V) = (R^{\mathrm{opp}(1)} \circ (-)^\star \circ T_w)(V) &= (R^{\mathrm{opp}(1)} \circ (-)^\star)(V,V',\mathrm{eval})\\ &= R^{\mathrm{opp}(1)}(V',V,\mathrm{eval}) = (V', \sigma(V',V)) = (V')_\sigma,\end{aligned}$$

也就是说， V' 配备弱-* 拓扑。将 $R^{\mathrm{opp}(1)}$ 替换为 $L^{\mathrm{opp}(1)}$，即可类似地得到第二个结论。由弱拓扑的定义可知

$$D_w^2(V) = (((V')_\sigma)')_\sigma \cong V_\sigma \cong V.$$

同样，使用最强拓扑而非最弱拓扑，即可证明其余部分。

□

引理 4.3.5. 张量积 $\otimes_w^1$: 拓扑向量空间$_w$ ×拓扑向量空间$_w$ → 拓扑向量空间$_w$ 和 $\otimes_m^1$: 拓扑向量空间$_m$ ×拓扑向量空间$_m$ →拓扑向量空间$_m$ 满足

$$\begin{aligned} V \otimes_w^1 W &\cong (V \otimes_{\Bbbk} W, \sigma(V \otimes_{\Bbbk} W, L(V, (W')_\sigma))), \quad V, W \in \mathsf{TVS}_w, \\ V \otimes_m^1 W &\cong (V \otimes_{\Bbbk} W, \tau(V \otimes_{\Bbbk} W, L(V, (W')_\tau))), \quad V, W \in \mathsf{TVS}_m. \end{aligned}$$

证明. 利用引理 4.3.3 和引理 4.3.4，我们计算得

$$\begin{aligned} V \otimes_w^1 W &= D_w(\underline{\mathrm{Hom}}_w(V, D_w(W))) \cong D_w(\underline{\mathrm{Hom}}_w(V, (W')_\sigma) \\ &\cong D_w\Big(L(V, (W')_\sigma), \sigma\big(L(V, (W')_\sigma), V \otimes_{\Bbbk} ((W')_\sigma)'\big)\Big) \\ &\cong D_w\Big(L(V, (W')_\sigma), \sigma\big(L(V, (W')_\sigma), V \otimes_{\Bbbk} W\big)\Big) \\ &\cong \Big(L(V, (W')_\sigma), \sigma\big(L(V, (W')_\sigma), V \otimes_{\Bbbk} W\big)\Big)'_\sigma \end{aligned}$$

这表明 $V \otimes_w^1 W$ 同构于带有最弱拓扑的向量空间 $V \otimes_{\Bbbk} W$，其中该拓扑使得单射 $L(V, (W')_\sigma) \hookrightarrow (V \otimes_{\Bbbk} W)^\star$, $f \mapsto (v \otimes w \mapsto f(v)(w))$ 限制后成为一个同构

$$L(V, (W')_\sigma) \cong (V \otimes_w^1 W)'.$$

将 R 替换为 L，即可类似地得到第二个断言。 □

引理 4.3.6. 张量积 $\otimes_w^2$: 拓扑向量空间$_w$ ×拓扑向量空间$_w$ → 拓扑向量空间$_w$ 和 $\otimes_m^2$: 拓扑向量空间$_m$ ×拓扑向量空间$_m$ →拓扑向量空间$_m$ 满足

$$V \otimes_w^2 W \cong (L(W'_\sigma, V), \sigma(L(W'_\sigma, V), W' \otimes_{\Bbbk} V')), \quad V, W \in \mathsf{TVS}_w;$$

$$V \otimes_m^2 W \cong (L(W'_\tau, V), \sigma(L(W'_\tau, V), W' \otimes_{\Bbbk} V')), \quad V, W \in \mathsf{TVS}_m.$$

证明. 利用引理 4.3.4 和引理 4.3.5，我们对 $V, W \in$ 拓扑向量空间$_w$ 计算得,

$$\begin{aligned} &V \otimes_w^2 W = (W'_\sigma \otimes_w^1 V'_\sigma)'_\sigma \cong (W' \otimes_{\Bbbk} V', \sigma(W' \otimes_{\Bbbk} V', L(W'_\sigma, (V'_\sigma)'_\sigma)))'_\sigma \\ &\cong (W' \otimes_{\Bbbk} V', \sigma(W' \otimes_{\Bbbk} V', L(W'_\sigma, V)))'_\sigma \cong (L(W'_\sigma, V), \sigma(L(W'_\sigma, V), W' \otimes_{\Bbbk} V')). \end{aligned}$$

类似地，可以验证麦基拓扑情形下的断言。 □

引理 4.3.7。 拓扑向量空间$_w$ 和拓扑向量空间$_m$上的两个张量积分别满足如下关系：

$$(V \otimes_w^2 W)'_\sigma \cong (W')_\sigma \otimes_w^1 (V')_\sigma, \quad V, W \in \mathsf{TVS}_w;$$

$$(V \otimes_m^2 W)'_\tau \cong (W')_\tau \otimes_m^1 (V')_\tau, \quad V, W \in \mathsf{TVS}_m.$$

证明。 这直接由定义得出。 □

最后，我们希望分别将定义在拓扑向量空间$_w$ 和拓扑向量空间$_m$上的两个张量积，与射影 和 单射 张量积联系起来（参见 [Tr`e67]）。具体而言，拓扑向量空间$W \in$ 上的射影张量积 $V \otimes_{\Bbbk} W$ for$V$, 上的 $\pi$-拓扑，即射影拓扑，是使典范双线性映射 $V \times W \to V \otimes_{\Bbbk} W$ 连续的最强局部凸拓扑，其中 $V \times W$ 赋予积拓扑。赋予 $\pi$-拓扑后，空间 $V \otimes_{\Bbbk} W$ 记作 $V \otimes_\pi W$。射影拓扑具有如下泛性质（参见 [Tr`e67，命题 43.4]）：

> 设 $V, W \in$ 为拓扑向量空间。那么 $V \otimes_\pi W$ 赋予 $V \otimes_{\Bbbk} W$ 唯一的拓扑，使得对于任意拓扑向量空间 $U \in$，由张量积 $V \otimes_{\Bbbk} W$的泛性质所给出的双线性映射的同构 $V \times W \to U$ 与线性映射 $V \otimes_{\Bbbk} W \to U$，限制后成为（联合）连续双线性映射 $V \times W \to U$与连续线性映射 $V \otimes_\pi W \to U$之间的同构。

我们的下一个结果表明，当我们将范围限制为 $U = \Bbbk$ 和分别连续双线性映射，而不是联合连续双线性映射时，对于张量积 $\otimes_w^1$ 和 $\otimes_m^1$ 也成立类似的结论。请注意，联合连续蕴含分别连续，但反之不成立。明确地说，以下内容不是射影张量积的泛性质。

引理 4.3.8。 张量积 $\otimes_w^1$: 拓扑向量空间$_w$ ×拓扑向量空间$_w$ → 拓扑向量空间$_w$ 和 $\otimes_m^1$: 拓扑向量空间$_m$ ×拓扑向量空间$_m$ →拓扑向量空间$_m$ 满足以下性质：

> 设 V、$W \in$拓扑向量空间$_w$。那么， $V \otimes_w^1 W$*(*$V \otimes_m^1 W$*)* 在最弱（最强）拓扑下，使得由张量积 $V \otimes_{\Bbbk} W$ 的泛性质给出的双线性映射同构 $V \times W \to \Bbbk$ 和线性映射 $V \otimes_{\Bbbk} W \to \Bbbk$，限制为分别连续双线性映射 $V \times W \to \Bbbk$ 与连续线性映射 $V \otimes_w^1 W \to \Bbbk$ （$V \otimes_m^1 W \to \Bbbk$）的同构。

证明。 我们利用 $R(R^{-1}(V) \otimes_{\mathsf{chu}} R^{-1}(W)) \cong V \otimes_w^1 W$。对于任意 $V \in$拓扑向量空间$_w$，都有 $R^{-1}(V) = T_w(V)$ =(V， $V\prime$，求值映射)。因此我们得到

$$\begin{aligned} R^{-1}(V) \otimes_{\mathsf{chu}} R^{-1}(W) &= (\underline{\mathrm{Hom}}((V, V', \mathrm{eval}), (W, W', \mathrm{eval})^\star))^\star \\ &= (\underline{\mathrm{Hom}}((V, V', \mathrm{eval}), (W', W, \mathrm{eval})))^\star \\ &= (\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}((V, V', \mathrm{eval}), (W', W, \mathrm{eval})), V \otimes_{\Bbbk} W, \langle -, - \rangle)^\star \\ &= (V \otimes_{\Bbbk} W, \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}((V, V', \mathrm{eval}), (W', W, \mathrm{eval})), \langle -, - \rangle) \end{aligned}$$

配对为

$$\langle v \otimes w, (f,g)\rangle = f(v)(w) = g(w)(v)$$

对于 $v \in V$，$w \in W$和 $f : V \to W'$，$g : W \to V\prime$。根据构造，每个 $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}((V, V\prime, \mathrm{eval}), (W', W, \mathrm{eval}))$ 都诱导出一个分别连续的双线性形式 $T_{(f,g)} : V \times W \to \mathbb{k}$，其定义为

$$T_{(f,g)}(v,w) = f(v)(w) = g(w)(v).$$

事实上，$\mathrm{Hom}_{\mathsf{chu}}((V, V\prime, \mathrm{eval}), (W\prime W, \mathrm{eval}))$ 同构于分别连续双线性形式 $V \times W \to \mathbb{k}$ 所构成的空间 $\mathrm{B}(V, W)$。令 $B(V, W)$ 表示双线性映射 $V \times W \to \mathbb{k}$ 所构成的空间。张量积的泛性质给出了一个向量空间之间的线性映射

$$\varphi : B(V,W) \to (V \otimes_{\mathbb{k}} W)^\star. \tag{4.42}$$

令 $\iota : \mathrm{B}(V, W) \hookrightarrow B(V, W)$ 为包含映射。该偶对的配对

$$R^{-1}(V) \otimes_{\mathsf{chu}} R^{-1}(W) \cong (V \otimes_{\mathbb{k}} W, \mathcal{B}(V,W), \langle -,-\rangle) \tag{4.43}$$

定义为 $v \otimes w$，$f = (\varphi \bigcirc \iota)(f)(v \otimes w)$。这诱导出一个单射

$$\varphi \circ \iota : \mathcal{B}(V,W) \to (V \otimes_{\mathbb{k}} W)^\star. \tag{4.44}$$

由 (4.43) 和 R 的定义可知

$$V \otimes_w^1 W \cong R(R^{-1}(V) \otimes_{\mathsf{chu}} R^{-1}(W)) \cong (V \otimes_{\mathbb{k}} W, \sigma(V \otimes_{\mathbb{k}} W, \mathcal{B}(V,W))).$$

根据定义，$V \otimes_w^1 W$ 为 $V \otimes_{\mathbb{k}} W$ 赋予满足 (4.44) 的最弱拓扑，因此 φ限制为一个同构

$$\mathcal{B}(V,W) \cong (V \otimes_w^1 W)'.$$

对于最强拓扑，同样可以证明这一结论。 □

除了联合连续/分别连续这一方面之外，张量积 $\otimes_w^1$、$\otimes_m^1$ 与射影张量积 $\otimes_\pi$ 之间的一个主要区别是，引理 4.3.8 中的性质仅对 $\mathbb{k}$ 拓扑向量空间成立，而在射影张量积的情形下，它对每个 U 拓扑向量空间都成立。

为解决这一问题，似乎有必要推广定义 4.3.1 和定义 4.3.7，然后以类似于本节所采用的方式继续进行。下面简要概述其主要思想；完整发展这一理论超出了本学位论文的范围。

定义 4.3.13. 设 $U \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{k}}$ 是一个 k-向量空间。一个 U-偶对是由 k-向量空间 V, W 组成的三元组 $(V, W, -, -)$，并配有一个称为配对的线性映射 $-,- : V \otimes_{\mathbb{k}} W \to U$。从 $(V_1, W_1, -, -_1)$ 到 $(V_2, W_2, -, -_2)$ 的 U-偶对态射是由线性映射 $f : V_1 \to V_2$ 和 $g : W_2 \to W_1$ 构成的元组 (f, g)，满足

$$\langle f(v), w\rangle_2 = \langle v, g(w)\rangle_1 \in U \tag{4.45}$$

对于所有 $v \in V_1$ 和 $w \in W_2$。

定义 4.3.14. 设 $U \in$ 拓扑向量空间是一个拓扑向量空间。设 $(V, W, -, -)$ 是一个分离且外延的 U-偶对。关于此 U-偶对定义在 V 上的一个对偶拓扑 是一个拓扑 T，使得 $(V, \mathsf{T}) \in$ 是拓扑向量空间，并且单射 $W \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U)$ 诱导出一个同构

$$W \simeq \{f : (V, \mathcal{T}) \to U \text{ continuous}\} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, U).$$

第5章

附录

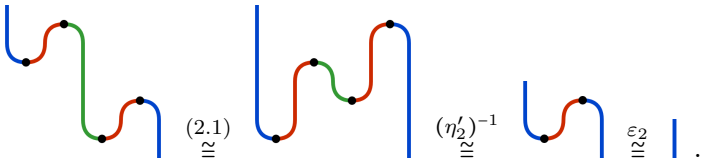
5.1 证明

引理 3.3.1 的证明

引理。设 $(C\ \otimes, 1)$ 是一个严格幺半双范畴，且 $A, B, B' \in C$。假设$A \dashv B$和 $A \dashv B'$由 ε_1, η_1和 ε_1', η_1'见证。那么存在 *1*-态射 $\alpha : B \to B'$ 和 $\beta : B' \to B$，以及可逆*2*-态射 $\beta \bigcirc \alpha \cong id_B$ 和 $\alpha \bigcirc \beta \cong id_{B'}$。*1*-态射 α 以如下意义保持求值态射和余求值态射：存在可逆 *2*-态射 $\varepsilon_1' \bigcirc (id_A \otimes \alpha) \cong \varepsilon_1$和 $(\alpha \otimes id_A) \bigcirc \eta_1 \cong \eta_1'$。此外，$\alpha$在如下意义下是唯一的：对于任何其他以此方式保持求值态射和余求值态射的*1*-态射 $\tilde{\alpha} : B \to B'$，都存在一个可逆*2*-态射 $\alpha \cong \tilde{\alpha}$。

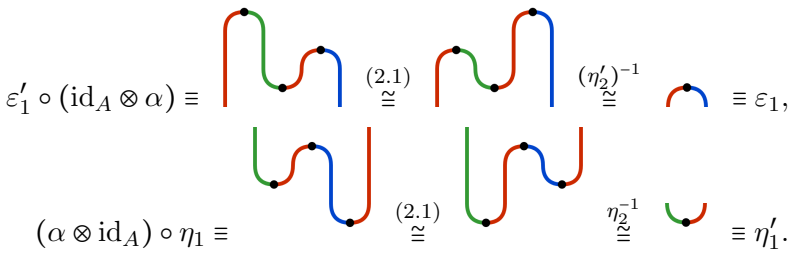
证明。我们分别用红色、蓝色和绿色表示 A, B, B'。对于偶对 $A \dashv B$，给定 1-态射 $\varepsilon_1 \equiv$, $\eta_1 \equiv$ 以及 2-态射 ε_2, η_2 ,  .18) 所  类似地，对于偶对 $A \dashv B'$，给定 1-态射 $\varepsilon_1' \equiv$,$\eta_1' \equiv$ 以及 2-态射 ε_2', η_2'。定义 1-态射 $\alpha :=$ 和 $\beta :=$  下 2-态  复合给出一个可逆 2-态射 $\beta \bigcirc \alpha \cong \mathrm{id}_B$:



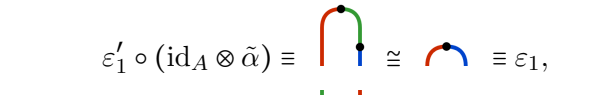


类似地，可以证明存在一个可逆的 2-态射 $\alpha \bigcirc \beta \cong \mathrm{id}_{B'}$。此外，1-态射 α 保持单位和余单位，也就是说，存在可逆的

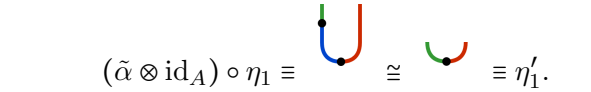
2-态射的复合



假设存在另一个1-态射 $\tilde{\alpha} \equiv$ $: B \to B'$，以及可逆2-态射

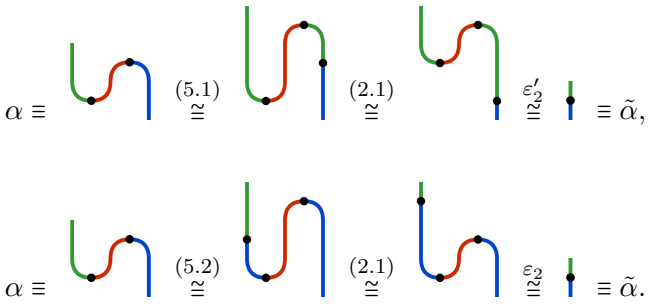


$$\varepsilon_1' \circ (\mathrm{id}_A \otimes \tilde{\alpha}) \equiv \cong \equiv \varepsilon_1, \tag{5.1}$$



$$(\tilde{\alpha} \otimes \mathrm{id}_A) \circ \eta_1 \equiv \cong \equiv \eta_1'. \tag{5.2}$$

于是我们可以定义 α 和 $\tilde{\alpha}$ 之间的以下可逆2-态射：



□

引理 3.3.3 的证明

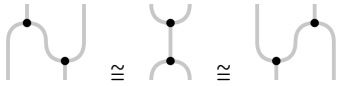
引理。设 $(A,\ \mu \equiv$ $A \to A,\ \eta \equiv$ $: \mathbb{1} \to A)$ 是幺半双范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1})$ 中的一个伪幺半群。以下条件等价：

1. 存在一个态射 $\varepsilon \equiv$ $: A \to \mathbb{1}$，得 $\sigma \equiv$ $: A \otimes A \to$ 正合配对 $A \dashv A$ 的求值映射。

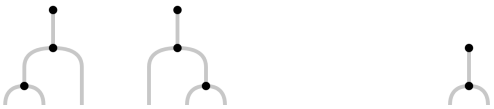
2. 存在一个态射 $\sigma \equiv$ $: A \otimes A$ 它是双正合配对 $A \dashv A$ 的求值映射，以及一个可逆的2-胞



3. 在 A 上存在一个伪余幺半群结构(A, $\delta \equiv$ $: A \cdot$  A, $\varepsilon \equiv$ $: A \to \mathbb{1}$)  以及两个可逆的2-胞

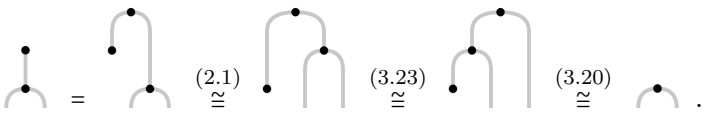


证明。 (1) ⇒ (2)：我们遵循 [Str04，命题 3.2] 中的论证。定义 $\sigma :=$ ，接下  构造一个可逆 2-胞 (3.23)。根据伪幺半群的定义，存在一个可逆 2-态射 $\alpha :$ $\cong$ ，如 (3.19) 所示。考虑可逆 2- 胞 $\mathrm{id}_\varepsilon \alpha :$  顾 $\sigma \equiv$ 可知，该定义是恰当的。



(2) ⇒ (1) ：只需构造一个态射 $\varepsilon \equiv$ ，使得 $\cong$ 。令  。于是可得 

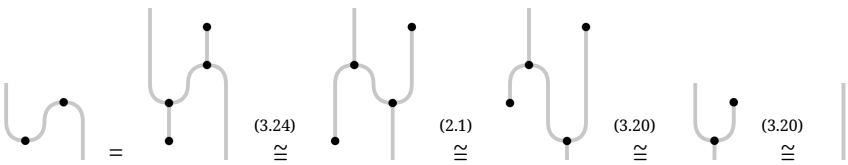




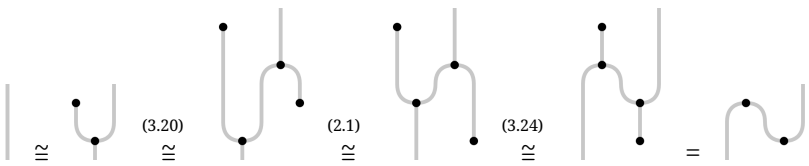
(3) ⇒ (2) : 这是对幺半范畴情形 [FS09] 的直接推广。

定义 $\sigma :=$  $:=$ 。  (1) ⇒(2)，将可逆 2-胞 $\mathrm{id}_\varepsilon \alpha$ 视为 (3.23) 的见证。双正合配对 $A \dashv A$ 的余评价由 :=给出。事实上，我们得到以下可逆 2-胞 



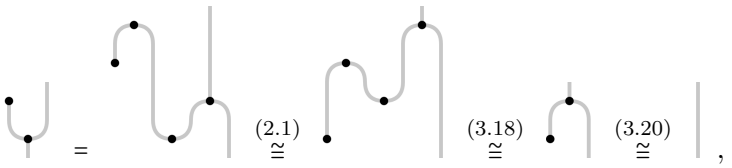


$$\varepsilon_2 := \quad = \quad \overset{(3.24)}{\cong} \quad \overset{(2.1)}{\cong} \quad \overset{(3.20)}{\cong} \quad \overset{(3.20)}{\cong} \quad , \tag{5.3}$$

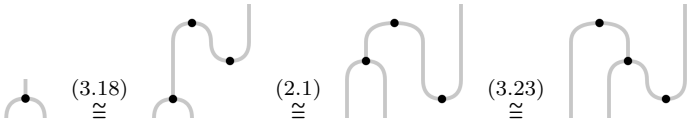


$$\eta_2 := \quad \cong \quad \overset{(3.20)}{\cong} \quad \overset{(2.1)}{\cong} \quad \overset{(3.24)}{\cong} \quad = \quad . \tag{5.4}$$

(2) ⇒ (3) ：将双正合配对 $A \dashv A$ 的余评价记为 。令 $\varepsilon =$ 和 $\delta =$ 。要得到伪余结构 (A, δ, ε)，义适当的可逆 2-胞。将见证余单位性的一个可逆 2-胞定义为以下复合

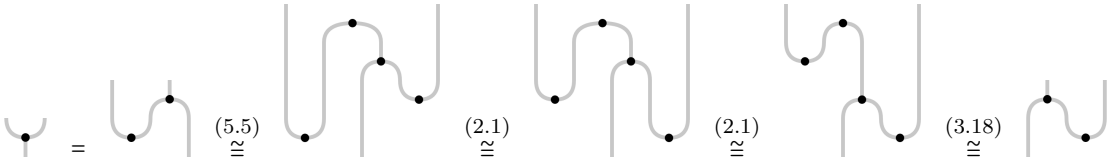


第二个也可以类似地得到。关于余结合性，首先注意到我们可以找到可逆2-态射



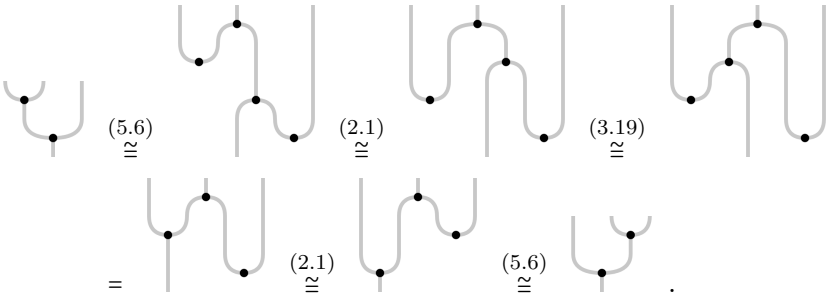
(5.5)

因此，余乘法可以改写为

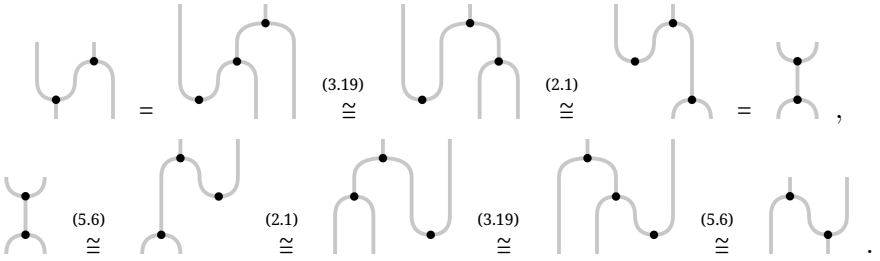


(5.6)

最后，余结合性由可逆2-胞的复合见证



2-胞 (3.24) 由以下复合给出



□

引理 4.1.5 的证明

引理。 设 $\mathcal{X}$是一个有限线性范畴，且 $F, G \in \mathcal{L}ex(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ 是两个左正合函子。那么

$$\Gamma^{\mathrm{rl}}(F) \circ \Gamma^{\mathrm{rl}}(G) \cong \Gamma^{\mathrm{rl}}(\Gamma^{\mathrm{rl}}(F) \circ G). \tag{5.7}$$

另一方面，设 F、$G \in \mathcal{R}ex(\mathcal{X}$、$\mathcal{X})$ 是两个右正合函子。那么

$$\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ \Gamma^{\mathrm{lr}}(G) \cong \Gamma^{\mathrm{lr}}(\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ G). \tag{5.8}$$

证明。 对于 $y \in \mathbf{X}$，可计算得

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathrm{rl}}(F) \circ \Gamma^{\mathrm{rl}}(G)(y) &\overset{(4.6)}{=} \Gamma^{\mathrm{rl}}(F)\Big(\int^{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle y, x\rangle^* \otimes G(x)\Big) \\
&\overset{(4.6)}{=} \int^{x'\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\Big\langle \int^{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle y, x\rangle^* \otimes G(x), x'\Big\rangle^* \otimes F(x') \\
&\overset{(4.4)}{\cong} \int^{x'\in\mathcal{X}} \Big(\int_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\Big\langle_{\mathcal{X}} \langle y, x\rangle^* \otimes G(x), x'\Big\rangle\Big)^* \otimes F(x') \\
&\cong \int^{x'\in\mathcal{X}} \int^{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\Big\langle_{\mathcal{X}} \langle y, x\rangle^* \otimes G(x), x'\Big\rangle^* \otimes F(x') \\
&\overset{(4.2)}{\cong} \int^{x'\in\mathcal{X}} \int^{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle y, x\rangle^* \otimes \ \mathcal{x}\langle G(x), x'\rangle^* \otimes F(x') \\
&\overset{\text{Fubini}}{\cong} \int^{x\in\mathcal{X}} \int^{x'\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle y, x\rangle^* \otimes \ \mathcal{x}\langle G(x), x'\rangle^* \otimes F(x') \\
&\cong \int^{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle y, x\rangle^* \otimes \ \int^{x'\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle G(x), x'\rangle^* \otimes F(x') \\
&\overset{(4.6)}{=} \int^{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle y, x\rangle^* \otimes \ \Gamma^{\mathrm{rl}}(F)(G(x)) \overset{(4.6)}{=} \Gamma^{\mathrm{rl}}(\Gamma^{\mathrm{rl}}(F) \circ G)(y)
\end{aligned}$$

这就证明了第一个断言。对于第二个断言，我们类似地计算得

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ \Gamma^{\mathrm{lr}}(G)(y) &\overset{(4.6)}{=} \Gamma^{\mathrm{lr}}(F)\Big(\int_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle x, y\rangle \otimes G(x)\Big) \\
&\overset{(4.6)}{=} \int_{x'\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\Big\langle x', \int_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle x, y\rangle \otimes G(x)\Big\rangle \otimes F(x') \\
&\overset{(4.3)}{\cong} \int_{x'\in\mathcal{X}} \int_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\Big\langle x', \mathcal{x}\langle x, y\rangle \otimes G(x)\Big\rangle \otimes F(x') \\
&\overset{(4.2)}{\cong} \int_{x'\in\mathcal{X}} \int_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle x, y\rangle \otimes \ \mathcal{x}\Big\langle x', G(x)\Big\rangle \otimes F(x') \\
&\overset{\text{Fubini}}{\cong} \int_{x\in\mathcal{X}} \int_{x'\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle x, y\rangle \otimes \ \mathcal{x}\Big\langle x', G(x)\Big\rangle \otimes F(x') \\
&\cong \int_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle x, y\rangle \otimes \ \int_{x'\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\Big\langle x', G(x)\Big\rangle \otimes F(x') \\
&\overset{(4.6)}{=} \int_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{x}\langle x, y\rangle \otimes \ \Gamma^{\mathrm{lr}}(F)(G(x)) \overset{(4.6)}{=} \Gamma^{\mathrm{lr}}(\Gamma^{\mathrm{lr}}(F) \circ G)(y).
\end{aligned}$$

□

记号

$\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)}$	具有 反向态射的对偶范畴	第 2.1 节
$F^{\mathrm{opp}(1)}$	对偶函子	第 2.1 节
$\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(0)}$	带有 扭曲张量积的反范畴	定义 2.1.3
$\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(0,1)}$	定义为 $(\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(0)})^{\mathrm{opp}(1)} \cong$ $(\mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)})^{\mathrm{opp}(0)}$	第 2.1 节
$\mathcal{C}\ -,-$	定义为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$	/
Cat	小范畴 范畴	/
Set	集合范畴	/
$\mathrm{Vect}_{\Bbbk}$，$\mathrm{vect}_{\Bbbk}$	(f.d.)范畴 $\Bbbk$-向量空间	/
A–表示$_{\mathrm{f.d.}}$, A–模	有限维左 A-模	第 4.1.1 节
$\underline{\mathrm{Hom}}, \underline{\mathrm{Hom}}^r, \underline{\mathrm{Hom}}^l$	内 Hom	定义 2.3.2
V–Cat	V-富化范畴的双范畴。 和 V-函子	定义 3.3.4
V–Mod	V-富集范畴的双范畴。 和模	定义 3.3.5
Prof	伴随函子的双范畴	定义 3.3.5
$\mathrm{L}ex(\mathsf{C},\ \mathsf{D})$，$\mathrm{R}ex(\mathsf{C},\ \mathsf{D})$	左（右） 正合函子 $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$	第4.1.1节
$\int_{c\in\mathcal{C}} F(\bar{c},\ c) \in \mathsf{D}$	函子的端 $F : \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \times \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$。	定义 4.1.2
$\int^{c\in} {}_{\mathcal{C}} F(\bar{c}, c) \in \mathsf{D}$	函子的余端 $F : \mathsf{C}^{\mathrm{opp}(1)} \times \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$。	定义 4.1.2
$\mathrm{N}^{\mathrm{r}}_A, \mathrm{N}^{\mathrm{l}}_A$	经典中山引理 函子	第4.1.3节
$\mathrm{N}^{\mathrm{r}}_{\mathcal{X}}, \mathrm{N}^{\mathrm{l}}_{\mathcal{X}}$	中山函子 有限线性范畴 X	定义 4.1.5

二次型$(G,\ \Bbbk^\times)$	二次型范畴 形式 $G \to \Bbbk^\times$	定义 4.2.1
$H^3_{\mathrm{ab}}(G,\ \Bbbk^\times)$	第三阿贝尔上同调群	定义 4.2.3
G–$\mathsf{Vect}_\Bbbk$	G分次范畴 向量空间 over $\Bbbk$	定义 4.2.4
G–向量$_\Bbbk$	G 分次有限维范畴 定义在 $\Bbbk$上的向量空间	定义 4.2.4
RMS$(G,\ \Bbbk)$	带状幺半 G–vect 上的结构 $_\Bbbk$	定义 4.2.5
$(-)^{g_0}$	对偶函子作用于 G–vect$_\Bbbk$ 关于 $g_0 \in G$	定义 4.2.8
$\otimes_{g_0}$	上的张量积 G–向量$_\Bbbk$ 关于 $g_0 \in G$	定义 4.2.9
弱二次型$(G,\ \Bbbk^\times)$	弱二次型 $G \to \Bbbk^\times$	定义 4.2.10
弱可表示二次型$(G,$ $\Bbbk^\times)$	弱可表示 二次型 $G \to \Bbbk^\times$	定义 4.2.11
弱对称二次型$(G, \Bbbk^\times)$	弱对称 二次型 $G \to \Bbbk^\times$	定义 4.2.12
弱黎曼度量结构$(G,$ $\Bbbk)$	弱带状幺半 结构于 G–vect $_\Bbbk$	定义 4.2.13
chu	分离且外延对范畴 偶对	定义 4.3.3
TVS	豪斯多夫局部凸拓扑向量空间范畴 凸拓扑向量空间	定义 4.3.6
V'	连续泛函的拓扑对偶 泛函 $V \to \Bbbk$	定义 4.3.8
$\sigma(V,\ W,\ -,\ -)$	V 上的最弱对偶拓扑 关于 $(V, W, -, -)$	定义 4.3.8
$\tau(V, W, -, -)$	V上的最强对偶拓扑 关于 $(V, W, -, -)$	定义 4.3.8
$\sigma(V,\ V\prime)$	V上的弱拓扑	定义 4.3.9
$\sigma(V\prime V)$	* 上的弱拓扑	定义 4.3.9
$\tau(V,\ V\prime)$	V上的麦基拓扑	定义 4.3.9
TVS_m	麦基 空间	定义 4.3.10
TVS_w	弱范畴的 拓扑化空间	定义 4.3.10

参考文献

[Abr96] Lowell Abrams. 二维拓扑量子场论与Frobenius代数。《结理论及其推广》，5(05):569–587，1996年。[AC04] Samson Abramsky 和 Bob Coecke。量子协议的范畴语义。载于《计算机科学中的逻辑》，2004年。第19届 IEEE 年会论文集，第415–425页。IEEE，2004年。[And] Joyal Andre。《张量演算的几何 II》。[ARS97] Maurice Auslander、Idun Reiten 和 Sverre O Smalo。《Artin代数表示论》，第36卷。剑桥大学出版社，1997年。[ASS06] Ibrahim Assem、Andrzej Skowronski 和 Daniel Simson。《结合代数表示论原本：第 1 卷：表示论技巧》，第 65 卷。剑桥大学出版社，2006年。[Ati88] Michael Atiyah。拓扑量子场论。《高等科学研究所数学出版物》，68(1):175–186，1988年。[Bar79] Michael Barr。 $\star$–自对偶范畴。《数学讲义》，572，1979年。[Bar95] Michael Barr。非对称 $\star$-自对偶范畴。《理论计算机科学》，139(1-2):115–130，1995年。[Bar00] Michael Barr。关于拓扑向量空间的 $\star$-自对偶范畴。《拓扑与微分几何范畴论手册》，41(4):243–254，2000年。[BD11] Mitya Boyarchenko 和 Vladimir Drinfeld。秉承 Grothendieck 与 Verdier 思想的对偶形式体系。arXiv 预印本 arXiv:1108.6020，2011年。[BKV16] Krzysztof Bar、Aleks Kissinger 和 Jamie Vicary。Globular：用于高维重写的在线证明助手。arXiv 预印本 arXiv:1612.01093，2016年。

[BN37] Richard Brauer 和 Cecil Nesbitt。关于代数的正则表示。《美国国家科学院院刊》，23(4):236–240，1937年。[Bor] Francis Borceux。《范畴代数手册 1：范畴论基础》，《数学与应用百科全书》，50。[Bou77] Nicolas Bourbaki。《拓扑向量空间》。《数学原本》。Addison–Wesley，1977年。[BS00] Francis Borceux 和 Isar Stubbe。富化范畴简明导论。载于《操作量子逻辑当前研究》，第167–194页。Springer，2000年。[CS92] J. Robin B. Cockett 和 Robert Andrew George Seely。弱分配范畴。《纯粹与应用代数杂志》，第45–65页，1992年。[CS97] J. Robin B. Cockett 和 Robert Andrew George Seely。弱分配范畴。《纯粹与应用代数杂志》，第133–173页，1997年。[DV16] Lawrence Dunn 和 Jamie Vicary。Frobenius伪幺半群的相干性与线性证明的几何。arXiv 预印本 arXiv:1601.05372，2016年。[EGNO15] Pavel I Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。《张量范畴》，第205卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015年。[Eil60] Samuel Eilenberg。若干基本函子的抽象描述。《印度数学会杂志》，24(1-2):231–234，1960年。[EL53] Samuel Eilenberg 和 Saunders Mac Lane。关于群 H (π, n)，I。《数学年刊》，第55–106页，1953年。[EML50] Samuel Eilenberg 和 Saunders Mac Lane。阿贝尔群的上同调理论与同伦论 I。《美国国家科学院院刊》，36(8):443–447，1950年。[FRS02] Jürgen Fuchs、Ingo Runkel 和 Christoph Schweigert。RCFT 关联函数的 TFT 构造 I：配分函数。《核物理 B》，646(3):353–497，2002年。[FS09] Jürgen Fuchs 和 Carl Stigner。刚性幺半范畴中的弗罗贝尼乌斯代数。arXiv 预印本 arXiv:0901.4886，2009年。[FS16] Jürgen Fuchs 和 Christoph Schweigert。共形场论中的余端。arXiv 预印本 arXiv:1604.01670，2016年。[FSS16] Jürgen Fuchs、Gregor Schaumann 和 Christoph Schweigert。有限范畴的 Eilenberg–Watts 演算与双模 Radford 定理。arXiv 预印本 arXiv:1612.04561，2016年。

[Gir87] Jean-Yves Girard. 线性逻辑。《理论计算机科学》，50(1):1–101, 1987.[Iva12] Sergei Olegovich Ivanov. 中山函子与 Eilenberg-Watts 定理。《数学科学杂志》，页码 1–6, 2012.[JS91] Andr´e Joyal 与 Ross Street. 张量演算的几何，I。《数学进展》，88(1):55–112, 1991.[JS93] Andr´e Joyal 与 Ross Street. 辫子张量范畴。《数学进展》，102(1):20–78, 1993.[Lam80] Joachim Lambek. 从 λ演算到笛卡尔闭范畴。致 HB Curry：《组合逻辑、λ演算与形式主义论文集》，页码 375–402, 1980.[LS69] Richard Gustavus Larson 与 Moss Eisenberg Sweedler. Hopf 代数的结合正交双线性型。《美国数学杂志》，91(1):75–94, 1969.[Mac46] George W Mackey. 关于凸拓扑线性空间。《美国数学会会刊》，60(3):519–537, 1946.[Mel09] Paul-Andr´e Melli`es. 线性逻辑的范畴语义。《全景与综合》，27:15–215, 2009.[Mel13] Paul-Andr´e Melli`es. 对话范畴与 Frobenius 幺半群。载于《计算、逻辑、博弈与量子基础：Samson Abramsky 的多重面向》，页码 197–224。Springer, 2013.[Mel16] Paul-Andr´e Melli`es. 对话范畴与手性。《RIMS 出版物》(PRIMS), 2016.[Mel17] Paul-Andr´e Melli`es. 否定的微观逻辑研究。《纯粹与应用逻辑年刊》，168(2):321–372, 2017.[ML63] Saunders Mac Lane. 自然结合律与交换律。莱斯大学，1963.[ML98] Saunders Mac Lane. 工作数学家的范畴论。《数学研究生教材》。施普林格出版社,, 1998.[ML13] Saunders Mac Lane. 工作数学家的范畴论，第 5 卷。施普林格科学与商业媒体，2013.[Nak39] Tadasi Nakayama. 关于 Frobenius 代数。I.《数学年刊》，页码 611–633, 1939.

[Nak41] Tadasi Nakayama. 关于 Frobenius 代数。II. 数学年刊，页码 1–21, 1941.[See87] Robert Andrew George Seely. 线性逻辑， $\star$-自对偶范畴与余自由余代数。魁北克圣安妮-德-贝尔维尤：CEGEP John Abbott College, 1987.[Str04] Ross Street. Frobenius单子与伪幺半群。《数学物理学杂志》，45(10):3930–3948, 2004.[Tr`e67] Fran$\backslash$cois Tr`eves. 拓扑向量空间、分布与核，学术出版社。纽约，1967, 1967.[Vic12] Jamie Vicary. 高阶量子理论。*arXiv* 预印本 *arXiv:1207.4563*，2012.[Wat60] Charles E Watts. 某些加性函子的内在刻画。美国数学会会刊，11(1):5–8, 1960.

声明¨

本人独立完成了本论文，除所列出的辅助资料外，未使用任何其他资料，尤其未使用参考文献目录中未列出的互联网资料。本论文此前未提交至其他评审程序。提交的书面版本与电子存储介质中的版本完全一致。

汉堡，2018年9月13日，

Stefan Zetzsche