arXiv:2301.10058v1 [math.SP] 8 Jun 2022

由薛定谔 L-系统实现逆斯蒂尔切斯函数（$-m_\alpha(z)$)

S. Belyi 和 E. Tsekanovskii

Abstract. 我们研究原始韦尔-蒂奇马什函数（$-m_\alpha(z)$）的 L-系统实现。当最小对称薛定谔算子非负时，我们描述能够实现逆斯蒂尔切斯函数（$-m_\alpha(z)$）的薛定谔 L-系统。该方法使我们能够推导出函数（$-m_\alpha(z)$）为逆斯蒂尔切斯函数的充要条件。特别地，我们给出了（$-m_\infty(z)$）为逆斯蒂尔切斯函数的判据。此外，数值 $m_\infty(-0)$ 和参数 α 使我们能够描述实现（$-m_\alpha(z)$）的 L- 系统的几何结构。我们还给出了关于参数 α 的条件，以判定实现（$-m_\alpha(z)$）的 L-系统的主算子和伴随算子具有相同还是不同的扇形角；这将该问题与扇形型的扇形扩张之加藤问题联系起来。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 2 3. 逆斯蒂尔切斯函数的扇形类 5 4. Schr¨odinger L-系统的构造 6 5. Schr¨odinger L-系统对 $-m_\infty(z)$、$1/m_\infty(z)$ 和 $m_\alpha(z)$ 的实现 8 6. 累积 Schr¨odinger L-系统 10 7. 示例 15 参考文献 16

1. 引言

本文是该项目的第三部分（项目始于 [7]，并在[6]中继续），研究与薛定谔算子相关的原始韦尔-蒂奇马什函数 $m_\infty(z)$及其线性分式变换 $m_\alpha(z)$的实现。我们考察赫格洛茨-涅万林纳函数 $-m_\infty(z)$和 $1/m_\infty(z)$，以及 $-m_\alpha(z)$和 $1/m_\alpha(z)$，它们均可实现为包含耗散薛定谔主算子 T_h（$\operatorname{Im} h > 0$）的 L-系统的阻抗函数。这些 L-系统

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：47A10；次要分类号：47N50，81Q10。
Key words and phrases. L-系统，Schr¨odinger 算子，传递函数，阻抗函数，赫格洛茨-涅万林纳函数，逆斯蒂尔切斯函数，韦尔-蒂奇马什函数。

在本文余下部分将称为薛定谔 L-系统。一般 L-系统和薛定谔 L-系统的所有正式定义与论述见第2 节和第4节。注意，所有薛定谔 L-系统$\Theta_{\mu,\ h}$ 构成一个二参数族，其成员由一个实值参数 μ 和主耗散算子的一个复边界值 h （$\operatorname{Im} h > 0$）唯一确定。

本文重点研究这样一种情形：实现这些函数的薛定谔 L- 系统基于非负对称薛定谔算子，并且具有耗散主算子和累积状态空间算子。[1] 文献 [1] （另见[8]）证明，具有累积状态空间算子的 L-系统的阻抗函数是逆斯蒂尔切斯函数。沿用我们在 [6] 中的研究方法，本文也重点考察实现函数的累积薛定谔 L-系统为扇形系统的情形（定义见第 2 节），以及函数（$-m_\alpha$（z））属于第 3 节所述的逆斯蒂尔切斯函数扇形类 S^{-1}、$^{\beta}$ 和 S^{-1}、$_{\beta_1}$、$^{\beta_2}$。第 5 节专门介绍文献 [7] 中关于函数（$-m_\infty$（z））、$1/m_\infty$（z）和（$-m_\alpha$（z））的一般实现结果。特别地，我们在该节回顾了（$-m_\infty$（z））、$1/m_\infty$（z）和（$-m_\alpha$（z））分别可实现为薛定谔 L-系统 Θ_{0}、$_i$、Θ_{∞}、$_i$和 $\Theta_{\tan\alpha}$、$_i$的阻抗函数。

第6 节包含本文的主要结果：将第5 节的实现结果应用于具有非负对称薛定谔算子的薛定谔 L-系统，从而获得重要的附加性质。第6 节的第7 条备注为函数 ($-m_\alpha(z)$) 是斯蒂尔切斯函数或逆斯蒂尔切斯函数提供了一组判据。特别是，定理6 和备注7 给出了 ($-m_\infty(z)$) 为逆斯蒂尔切斯函数的充要条件。利用第4节给出的结果，我们获得了 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,i}$ 的新性质，其阻抗函数属于某些逆斯蒂尔切斯函数扇形类。我们强调，这些结果是用定义函数 $m_\alpha(z)$ 的参数 α 来表述的。此外，已知极限值 $m_\infty(-0)$ 和参数 α 的取值，便可确定实现该 L-系统的主算子 $\tilde{T_i}$ 和伴随算子的扇形角精确值，从而与加藤关于扇形型的扇形扩张问题建立联系。

本文最后给出一个示例，以说明主要概念。本文所得的所有结果都有助于进一步发展 M. Livˇsic 于 [21]创立的开放物理系统理论。

2. 预备知识

对于一对希尔伯特空间 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$，我们用 $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]$ 表示从 $\mathcal{H}_1$ 到 $\mathcal{H}_2$的所有有界线性算子的集合。设 A 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的一个闭稠密定义对称算子，该空间的内积为 (f, g) $f, g \in \mathcal{H}$。任何满足以下条件的 $\mathcal{H}$ 中的非对称算子 T

$$\dot{A} \subset T \subset \dot{A}^*$$

称为 A的拟自伴扩张。

考虑装备希尔伯特空间（见 [13], [1]） $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-$，其中 $\mathcal{H}_+ = \operatorname{Dom}(A^*)$，且

$$(f, g)_+ = (f, g) + (\dot{A}^* f, \dot{A}^* g), \quad f, g \in \operatorname{Dom}(A^*). \tag{1}$$

[1]关于实现该 Schr¨odinger L-系统的状态空间算子具有增生性的情形，已在 [6]中得到全面考察。

设 $\mathcal{R}$ 为里斯-别列赞斯基算子 $\mathcal{R}$（见 [13], [1]），它将 $\mathcal{H}_-$ 映射到 $\mathcal{H}_+$，满足 $(f, g) = (f, \mathcal{R}g)_+ (\forall f \in \mathcal{H}_+, g \in \mathcal{H}_-)$，且 $\|\mathcal{R}g\|_+ = \|g\|_-$。注意，将与 $\mathcal{H}_\pm$ 共轭的空间认同为 $\mathcal{H}_\mp$，可得若 $\mathbb{A} \in [\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-]$，则$\mathbb{A}^* \in [\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-]$. 称算子 $\mathbb{A} \in [\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-]$ 为对称算子 A 的自伴双扩张，若 $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$ 且 $\mathbb{A} \supset A$。设 $\mathbb{A}$ 为 A 的自伴双扩张 $\dot{}$　　$\hat{}$，并令 $\mathcal{H}$ 中的算子 A 定义如下：

$$\mathrm{Dom}(\hat{A}) = \{f \in \mathcal{H}_+ : \mathbb{A}f \in \mathcal{H}\}, \quad \hat{A} = \mathbb{A}\restriction \mathrm{Dom}(\hat{A}).$$

算子 $\hat{}A$ 称为自伴双扩张 $\mathbb{A}$ 的准核（见 [28], [1, 第 2.1] 节）。根据冯·诺依曼定理（见 [1, 定理 1.3.1]），$\hat{}$ 算子 A（A 的自伴扩张）的定义域可表示为

$$\mathrm{Dom}(\hat{A}) = \mathrm{Dom}(\dot{A}) \oplus (I + U)\mathfrak{N}_i,$$

其中冯·诺依曼参数 U 是一个从 $\mathfrak{N}_i$ 到 $\mathfrak{N}_{-i}$ 的 (·)（且 (+)）等距算子，并且

$$\mathfrak{N}_{\pm i} = \mathrm{Ker}\,(\dot{A}^* \mp iI)$$

$\dot{}$ 是 A 的亏子空间。

$\dot{}$若对称算子 A 的自伴双扩张 $\mathbb{A}$ 的准核 A 是 $\mathcal{H}$中的自伴算子，则称其为 t-自伴算子 $\hat{}$（见 [1, 定义 4.3.1]）。若算子 $\mathbb{A} \in [\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-]$ 满足 $\mathbb{A} \supset T \supset A$ 和 $\mathbb{A}^* \supset T^* \supset A$.，则称其为算子 $T\dot{}$　　$\dot{}$的准自伴双扩张

我们主要关注以下类型的准自伴双扩张。$\dot{}$设 T 是 A 的一个准自伴扩张，且其预解集 $\rho(T)$非空。若算子 T 的准自伴双扩张 $\mathbb{A}$ 满足 $\mathrm{Re}\,\mathbb{A}$ 是 A的 t-自伴双扩张，则称其为（见 [1, 定义 3.3.5]） T 的（$*$）-扩张$\dot{}$。下文中$\dot{}$假设 A 的亏格指标为 (1, 1)。此时已知[1]，$\dot{}$每个 A 的准自伴扩张 T 均存在（$*$）-扩张。借助里斯-别列赞斯基算子 $\mathcal{R}$ 对所有（$*$）-扩张的描述可见 [1, 第 4 节3]。

回顾一下，希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的线性算子 T 若对所有 $f \in \mathrm{Dom}(T)$ 均满足 $\mathrm{Re}\,(Tf, f) \geq 0$，则称其为增生算子 [19]。若一个增生算子 T β 扇形 [19]，如果存在一个 $\beta \in (0, \pi/2)$ 中的值，使得 1

$$(\cot\beta)|\,\mathrm{Im}(Tf, f)| \leq \mathrm{Re}\,(Tf, f), \qquad f \in \mathrm{Dom}(T). \tag{2}$$

若扇形算子 T 的扇形角 β 是精确的，则称其为 β-扇形算子

$$\tan\beta = \sup_{f \in \mathrm{Dom}(T)} \frac{|\,\mathrm{Im}(Tf, f)|}{\mathrm{Re}\,(Tf, f)}.$$

若增生算子不是任何$\beta \in (0, \pi/2)$ 对应的 β-扇形算子，则称其为极值增生算子。若 $(*)$- 扩张 $\mathbb{A}$ 是 T 的扩张，则称其为增生算子，若对所有 $f \in \mathcal{H}_+$ 均满足 $\mathrm{Re}\,(\mathbb{A}f, f) \geq 0$。这等价于实部 $\mathrm{Re}\,\mathbb{A} = (\mathbb{A} + \mathbb{A}^*)/2$ 是 A 的非负 t-自伴双扩张$\dot{}$。

算子 T 的 $(*)$-扩张 $\mathbb{A}$ 称为累积算子（见[1]），如果

$$(\mathrm{Re}\,\mathbb{A}f, f) \leq (\dot{A}^* f, f) + (f, \dot{A}^* f), \quad f \in \mathcal{H}_+. \tag{3}$$

下面给出的是 L-系统定义的“简化版”，适用于输入输出空间为一维的散射 L-系统。该定义针对 L-系统的对称算子亏格指标为 (1,1) 的情形。L-系统的一般定义见 [1, 定义 6.3.4]（非规范版本另见[11]）。

Definition 1. 一个数组

$$\Theta = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & K & 1 \\ \mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_- & & \mathbb{C} \end{pmatrix} \tag{4}$$

称为 L-系统，当且仅当：

(1) T是对称算子 A 的耗散性（$\mathrm{Im}(Tf, f) \geq 0$, $f \in \mathrm{Dom}(T)$）拟自伴扩张，其亏格指标为 (1,1)；(2) $\mathbb{A}$ 是 T的 $(*)$-扩张；(3) $\mathrm{Im}\,\mathbb{A} = KK^*$，其中 $K \in [\mathbb{C}, \mathcal{H}_-]$ 和 $K^* \in [\mathcal{H}_+, \mathbb{C}]$。

算子 T 和 $\mathbb{A}$ 分别称为系统 Θ的主算子和状态空间算子，而 K 是通道算子。容易看出，系统 (4) 的算子 $\mathbb{A}$ 满足 $\mathrm{Im}\,\mathbb{A} = (\cdot, \chi)\chi$, $\chi \in \mathcal{H}_-$，并选取 $Kc = c \cdot \chi$, $c \in \mathbb{C}$（见[1]）。若系统 Θ 中的算子 A 在 $\mathcal{H}$中是素算子，即不存在非平凡的约化不变子空间 $\mathcal{H}$，使其在该子空间上诱导出一个自伴算子，则称 (4) 中的系统为极小系统。文献 [5]也研究了输入输出空间为一维的 (4) 型极小 L-系统。

我们将函数与 L-系统 Θ 相关联

$$W_\Theta(z) = I - 2iK^*(\mathbb{A} - zI)^{-1}K, \quad z \in \rho(T), \tag{5}$$

该函数称为 L-系统 Θ的传递函数。我们还考虑函数

$$V_\Theta(z) = K^*(\mathrm{Re}\,\mathbb{A} - zI)^{-1}K, \tag{6}$$

它称为阻抗函数，属于 Θ 形式为（4）的 L-系统。传递函数 $W_\Theta(z)$ 与 L-系统 Θ 以及函数 $V_\Theta(z$形式为（6）之间满足以下关系，该关系在 $\mathrm{Im}\ z \neq 0, z \in \rho(T)$ 时成立，

$$V_\Theta(z) = i[W_\Theta(z) + I]^{-1}[W_\Theta(z) - I],$$
$$W_\Theta(z) = (I + iV_\Theta(z))^{-1}(I - iV_\Theta(z)).$$

我们称形式为（4）的 L-系统 Θ 为增生 L-系统（[10],[16]），如果其状态空间算子算子 $\mathbb{A}$是增生的，即对于所有$f \in \mathcal{H}_+$，$\mathrm{Re}\,(\mathbb{A}f, f) \geq 0$；如果其状态空间算子 $\mathbb{A}$ 是累积的，即满足（3），则称其为累积的（[9]）。容易看出，如果一个 L-系统是累积的，那么（3）意味着˙该系统的算子 A 是非负的，并且两个算子 T 和 $T^{*\tilde{}}$都是增生的。我们还将另一个算子 $\mathbb{A}$ 与累积 L-系统Θ相关联。它由下式给出

$$\tilde{\mathbb{A}} = 2\,\mathrm{Re}\,\dot{A}^* - \mathbb{A}, \tag{7}$$

˙ ˙˜其中 A^*属于 $[\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-]$。显然，Re $A^* \in [\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-]$且 $\mathbb{A} \in [\mathcal{H}_+, \mathcal{H}_-]$。显然，˜ $\mathbb{A}$ 是 A 的双扩张，并且当且仅当 $\mathbb{A}$ 是累积的时，它才是增生的。还不难看出，尽管 $\mathbb{A}$ 不是算子 T 的（$*$）扩张，但˜的形式（$\mathbb{A}f$, f）满足：$f \in \mathcal{H}_+$扩张了形式（f, Tf），且 $f \in$包含于 Dom(T)。如果增生 L-系统的算子 $\mathbb{A}$ 是扇形的，即对于某个$\beta \in$ (0, $\pi/2$) 及所有 $f \in \mathcal{H}_+$，都满足（2），则称该系统为扇形的。类似地，如果累积 L-系统的算子 $\mathbb{A}$ （其形式为（7））是扇形的，则称该系统为扇形的。

3. 逆斯蒂尔切斯函数的扇形类

众所周知，若标量函数 V（z）在 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上全纯，关于实轴对称，即 V（z）$^* = V$（$\bar{z}$），$z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$，且满足正性条件 $\operatorname{Im} V$（z）≥ 0，$z \in \mathbb{C}_+$，则称其为赫格洛茨-涅万林纳函数。所有可实现为 L系统阻抗函数的赫尔格洛茨-涅万林纳函数所构成的类的完整描述见 [1], [5],[15], [17]。若标量赫格洛茨-涅万林纳函数 V（z）在 Ext$[0,+\infty)$ 中全纯，并且

$$\frac{\operatorname{Im}[zV(z)]}{\operatorname{Im} z} \geq 0. \tag{8}$$

现在我们转而定义逆斯蒂尔切斯函数（见 [18], [1]）。若标量赫格洛茨-涅万林纳函数 $V(z)$ 在 Ext$[0,+\infty)$ 内全纯，且 $V(z)$，则称其为逆斯蒂尔切斯函数。

$$\frac{\operatorname{Im}[V(z)/z]}{\operatorname{Im} z} \geq 0. \tag{9}$$

我们将考虑满足（见 [18]）以下积分表示的逆斯蒂尔切斯函数 $V(z)$

$$V(z) = \gamma + \int_0^\infty \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right) dG(t), \tag{10}$$

其中 $\gamma \leq 0$ 和 $G(t)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的非递减函数，且满足 $\int_0^\infty \frac{dG(t)}{t+t^2} < \infty$. 。以下定义描述了逆斯蒂尔切斯函数的一个可实现子类。若表示式 (10) 中的测度 $G(t)$ 无界，则标量逆斯蒂尔切斯函数 $V(z)$ 属于类 $S_0^{-1}(R)$。文献 [1, 第 9 节 9] 证明，函数 $V(z)$ 属于类 $S_0^{-1}(R)$，当且仅当它可以实现为形式 (4) 的累积 L-系统 Θ of 的阻抗函数，其中包含一个非负、稠密定义的对称算子 A。

标量逆斯蒂尔切斯函数的扇形子类 $S^{-1,\beta}$ 的定义如下。若逆斯蒂尔切斯函数 $V(z)$ 满足以下条件，则它属于 $S^{-1,\beta}$：

$$K_\beta = \sum_{k,l=1}^{n} \left[\frac{V(z_k)/z_k - V(\bar{z}_l)/\bar{z}_l}{z_k - \bar{z}_l} - (\cot\beta)\,\frac{V(\bar{z}_l)}{\bar{z}_l}\frac{V(z_k)}{z_k}\right] h_k\bar{h}_l \geq 0, \tag{11}$$

对于任意复数序列 $\{z_k\}$、(Im $z_k > 0$) 和 $\{h_k\}$、(k =1, ..., n)。对于 $0 < \beta_1 < \beta_2 < \frac{\pi}{2}$，我们有

$$S^{-1,\beta_1} \subset S^{-1,\beta_2} \subset S^{-1},$$

其中 S^{-1} 表示所有逆斯蒂尔切斯函数构成的类（对应于 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 的情形）。

设 Θ 是形式为 (4) 的累积极小L-系统。在[12] 中证明了，由 ($V_\Theta(z)$ 定义的阻抗函数 (6) 属于类 $S^{-1,\,\beta}$ 当且仅当~与 L-系统 $\mathbb{A}$ 相关联的形式为 (7) 的算子 Θ 是 β-扇形的。

令 $0 \leq \beta_1 < \frac{\pi}{2}$、$0 < \beta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ 和 $\beta_1 \leq \beta_2$。我们称类 $S_0^{-1}(R)$ 中的标量逆斯蒂尔切斯函数 $V(z)$ 属于类 $S^{-1,\,\beta_1,\,\beta_2}$，当且仅当

$$\tan(\pi-\beta_1) = \lim_{x\to 0} V(x), \qquad \tan(\pi-\beta_2) = \lim_{x\to-\infty} V(x). \tag{12}$$

文献[12]确立了类 S^{-1}、$_{\beta}$ 与 S^{-1}、$_{\beta_1}$、$_{\beta_2}$ 之间的如下联系。设 Θ 是形式为 (4) 的累积 L-系统，其稠密定义的对称算子 A非˙ ˜负。再设形式为 (7) 的 $\mathbb{A}$ 是 β-扇形的。那么，由 (6) 定义的阻抗函数 $V_\Theta(z)$属于类 S^{-1}、$_{\beta_1}$、$_{\beta_2}$。此外， Θ 的算子 T是（$\beta_2-\beta_1$）-扇形的，其精确扇形角为（$\beta_2-\beta_1$），并且 $\tan\beta_2 \le \tan\beta$。注意，当算子˜$\mathbb{A}$ 是增生的，但对任何 $\beta \in (0,\pi/2)$都不是 β-扇形时，这一结论仍然成立。还可得出，在相同假设下，若 β 是算子T的精确扇形角，则 $V_\Theta(z) \in S^{-1}$、0、$^{\beta}$，且满足 (10) 中的 $\gamma = 0$。

设 Θ 是上述形式 (4) 的极小累积 L-系统。另设 ˜$\mathbb{A}$ 由 (7) 定义。文献 [12] 证明，若阻抗函数 $V_\Theta(z)$ 属于类 S^{-1,β_1,β_2}，且 $\beta_2 \neq \pi/2$，则 $\tilde{\mathbb{A}}$ 是 β-扇形的，其中 $\tan\beta$ 定义为

$$\tan\beta = \tan\beta_2 + 2\sqrt{\tan\beta_1(\tan\beta_2 - \tan\beta_1)}. \tag{13}$$

˜此外，当且仅当 $V_\Theta(z) \in S^{-1,0,\beta}$ 且.....时， $\mathbb{A}$ 和 T 都是具有精确角度 $\beta \in (0,\pi/2)$ 的 β-扇形算子

$$\tan\beta = \int_0^\infty \frac{dG(t)}{t}, \tag{14}$$

其中 $G(t)$ 是 $V_\Theta(z)$ 的积分表示 (10) 中的测度（参见 [12,定理 13]）。

4. Schr¨odinger L-系统的构造

考虑 $\mathcal{H} = L_2[\ell,+\infty)$、$\ell \ge 0$ 和 $l(y) = -y'' + q(x)y$，其中 q 是定义在 $[\ell,+\infty)$ 上的实局部可积函数。假设对称算子

$$\begin{cases} \dot{A}y = -y'' + q(x)y \\ y(\ell) = y'(\ell) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

具有亏格指标 (1,1)。令 D^* 为一组函数，这些函数及其一阶导数在局部绝对连续，且满足 $l(y) \in L_2[\ell,+\infty)$。考虑$\mathcal{H}_+ = \mathrm{Dom}(A^*) = D^*$，其内积为

$$(y,z)_+ = \int_\ell^\infty \left(y(x)\overline{z(x)} + l(y)\overline{l(z)} \right) dx, \quad y,\ z \in D^*.$$

令 $\mathcal{H}_+ \subset L_2[\ell,+\infty) \subset \mathcal{H}_-$ 为相应的希尔伯特空间三元组，算子 T_h 和 T_h^* 为

$$\begin{cases} T_h y = l(y) = -y'' + q(x)y \\ hy(\ell) - y'(\ell) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T_h^* y = l(y) = -y'' + q(x)y \\ \overline{h}y(\ell) - y'(\ell) = 0 \end{cases}, \tag{16}$$

˙其中 $\mathrm{Im}\, h > 0$。设 A 是具有形式（15）的对称算子，其亏格指标为（1,1），由微分运算 $l(y) = -y'' + q(x)y$生成。此外，设$\varphi_k(x,\lambda)$ $(k = 1,2)$是下列柯西问题的解:

$$\begin{cases} l(\varphi_1) = \lambda\varphi_1 \\ \varphi_1(\ell,\lambda) = 0 \\ \varphi_1'(\ell,\lambda) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} l(\varphi_2) = \lambda\varphi_2 \\ \varphi_2(\ell,\lambda) = -1 \\ \varphi_2'(\ell,\lambda) = 0 \end{cases}.$$

众所周知 [22], [20] ， 存在一个由 H. Weyl[29] 引入的函数 $m_\infty(\lambda)$，使得

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_2(x,\lambda)+m_\infty(\lambda)\varphi_1(x,\lambda)$$

属于 $L_2[\ell,+\infty)$ 。对于我们的讨论而言，函数 $m_\infty(\lambda)$ 不是赫格洛茨-涅万林纳函数，但 $(-m_\infty(\lambda))$ 和 $(1/m_\infty(\lambda))$ 是（参见 [20],[22]）。

与非自伴薛定谔算子相关的 L-系统构造¨ T_h 已在 [1]中作了详尽描述。特别是，文中证明了（另见[3]），所有形如$*$（¨）的非自伴薛定谔算子的（T_h ）-扩张16）在 L_2（ℓ， $+\infty$）的集合由下式给出

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{\mu,h}\,y&=-y''+q(x)y-\frac{1}{\mu-h}\,[y'(\ell)-hy(\ell)]\,[\mu\delta(x-\ell)+\delta'(x-\ell)],\\ \mathbb{A}^*_{\mu,h}\,y&=-y''+q(x)y-\frac{1}{\mu-\overline{h}}\,[y'(\ell)-\overline{h}y(\ell)]\,[\mu\delta(x-\ell)+\delta'(x-\ell)].\end{aligned}\tag{17}$$

注意，公式（17）建立了薛定谔算子的所有（$*$）-扩张与所有实数¨ T_h 之间的一一对应关系，其中扩张的形式为（16）。容易验证，（ $\mu\in[-\infty,+\infty]$）-扩张$*$在（ $\mathbb{A}$ ）中满足条件17

$$\operatorname{Im}\mathbb{A}_{\mu,h}=\frac{\mathbb{A}_{\mu,h}-\mathbb{A}^*_{\mu,h}}{2i}=(.,g_{\mu,h})g_{\mu,h},$$

其中

$$g_{\mu,h}=\frac{(\operatorname{Im}h)^{\frac12}}{|\mu-h|}\,[\mu\delta(x-\ell)+\delta'(x-\ell)]\tag{18}$$

而 $\delta(x-\ell)$ $\delta'(x-\ell)$ 分别是点 ℓ 处的 δ 函数及其导数。此外，

$$(y,g_{\mu,h})=\frac{(\operatorname{Im}h)^{\frac12}}{|\mu-h|}\,[\mu y(\ell)-y'(\ell)],$$

其中 $y\in\mathcal{H}_+$, $g_{\mu,h}\in\mathcal{H}_-$ 和 $\mathcal{H}_+\subset L_2[\ell,+\infty)\subset\mathcal{H}_-$ 是上文讨论的希尔伯特空间三元组。

文献 [1] 还表明，Re$\mathbb{A}_{\mu,h}$ 的准核 $\hat{}\,A_\xi$ 为

$$\begin{cases}\hat{A}_\xi y=-y''+q(x)y\\ y'(\ell)=\xi y(\ell)\end{cases},\quad\text{where}\quad\xi=\frac{\mu\operatorname{Re}h-|h|^2}{\mu-\operatorname{Re}h}.\tag{19}$$

取算子 $K_{\mu,h}c=cg_{\mu,h}$，$(c\in\mathbb{C})$。显然，

$$K^*_{\mu,h}y=(y,g_{\mu,h}),\quad y\in\mathcal{H}_+,\tag{20}$$

且 Im$\mathbb{A}_{\mu,h}=K_{\mu,h}K^*_{\mu,h}$· 因此，

$$\Theta_{\mu,h}=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_{\mu,h} & K_{\mu,h} & 1\\ \mathcal{H}_+\subset L_2[\ell,+\infty)\subset\mathcal{H}_- & & \mathbb{C}\end{pmatrix},\tag{21}$$

是一个 L-系统，其主算子 T_h、$(\operatorname{Im}h>0)$ 的形式为 (16)，状态空间算子 $\mathbb{A}_{\mu,\ h}$ 的形式为 (17)，通道算子 $K_{\mu,\ h}$ 的形式为 (20)。下文中，我们将 $\Theta_{\mu,\ h}$ 称为薛定谔 L-系统。文献 [3], [1] 已证明，$\Theta_{\mu,\ h}$ 的传递函数和阻抗函数为

$$W_{\Theta_{\mu,h}}(z)=\frac{\mu-h}{\mu-\overline{h}}\,\frac{m_\infty(z)+\overline{h}}{m_\infty(z)+h},\tag{22}$$

and

$$V_{\Theta_{\mu,h}}(z)=\frac{(m_\infty(z)+\mu)\,\mathrm{Im}\,h}{(\mu-\mathrm{Re}\,h)\,m_\infty(z)+\mu\mathrm{Re}\,h-|h|^2}. \tag{23}$$

5. $-m_\infty(z)$、$1/m_\infty(z)$ 和 $m_\alpha(z)$ 的薛定谔 L-系统实现

正如我们在第4节已经提到的，原始韦尔-蒂奇马什函数 $m_\infty(z)$具有如下性质：$-m_\infty(z)$是一个赫格洛茨-涅万林纳函数（参见[20], [22]）。关于$-m_\infty(z)$能否实现为薛定谔 L-系统的阻抗函数这一问题，由以下定理予以解决，该定理证明见 [7]。

.THEOREM 2 ([7])。设 A 为一个具有亏格指标(1, 1)、势函数在 $\mathcal{H}=L^2[\ell,\infty)$ 上局部可积的对称薛定谔算子，形式如(15)。若$m_\infty(z)$是 A的韦尔-蒂奇马什函数，则赫格洛茨-涅万林纳函数($-m_\infty(z)$)可实现为一个薛定谔 L-系统$\Theta_{\mu,h}$ 的阻抗函数，该系统具有形式(21)，且 $\mu=0$ 和 $h=i$。

反之，设 $\Theta_{\mu,\ h}$ 是形式为（21）的薛定谔 L-系统，其对称算子为 A，且对所有 $z\in\mathbb{C}_\pm$ 和 $\mu\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，有 $V_{\Theta_{\mu,\ h}}(z)=-m_\infty(z)$。那么，定义 $\Theta_{\mu,\ h}$ 的参数 μ 和 h 满足 $\mu=0$ 和 $h=i$。

函数 $1/m_\infty(z)$ 也有类似的结果（见 [7]）。

.THEOREM 3 ([7])。设 A 是形式为（15）的对称薛定谔算子，其亏格指标为（1, 1），且在 $\mathcal{H}=L^2[\ell,\infty)$ 上具有局部可积势函数。若 A 的韦尔-蒂奇马什函数为 $m_\infty(z)$，则赫尔戈茨-内万林纳函数（$1/m_\infty(z)$）可实现为形式为（21）的薛定谔 L-系统 Θ_μ、$_h$ 的阻抗函数，其中 $\mu=\infty$ 和 $h=i$。

反过来，设 $\Theta_{\mu,h}$ 是形如（21）的薛定谔 L-系统，其对称算子为 $\dot{A}$，且对所有 $z\in\mathbb{C}_\pm$ 和 $\mu\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，$V_{\Theta_{\mu,h}}(z)=\frac{1}{m_\infty(z)}$，。那么，~~定义~~ $\Theta_{\mu,h}$ 的参数 μ 和 h 满足 $\mu=\infty$ 和 $h=i$。

可以注意到，定理 2 和3 中得到的两个 L-系统$\Theta_{0,i}$ 和 $\Theta_{\infty,i}$ 具有相同的主算子

$$\begin{cases} T_i\,y=-y''+q(x)y \\ y'(\ell)=i\,y(\ell) \end{cases}. \tag{24}$$

.韦尔-蒂奇马什函数 $m_\alpha(z)$ 定义如下。设 A 是形如（15）的对称算子，亏格指标为 (1,1)，由微分运算 $l(y)=-y''+q(x)y$生成。再设 $\varphi_\alpha(x,z)$ 和 $\theta_\alpha(x,z)$ 是以下柯西问题的解：

$$\begin{cases} l(\varphi_\alpha)=z\varphi_\alpha \\ \varphi_\alpha(\ell,z)=\sin\alpha \\ \varphi'_\alpha(\ell,z)=-\cos\alpha \end{cases},\qquad \begin{cases} l(\theta_\alpha)=z\theta_\alpha \\ \theta_\alpha(\ell,z)=\cos\alpha \\ \theta'_\alpha(\ell,z)=\sin\alpha \end{cases}.$$

可以证明，存在一个关于 $\mathbb{C}_\pm$ 的解析函数 $m_\alpha(z)$，使得

$$\psi(x,z)=\theta_\alpha(x,z)+m_\alpha(z)\varphi_\alpha(x,z) \tag{25}$$

属于 $L_2[\ell,+\infty)$。容易看出，若 $\alpha=\pi$，则 $m_\pi(z)=m_\infty(z)$。函数 $m_\alpha(z)$ 和 $m_\infty(z)$ 通过 [14], [23] 中的关系相联系：

$$m_\alpha(z)=\frac{\sin\alpha+m_\infty(z)\cos\alpha}{\cos\alpha-m_\infty(z)\sin\alpha}. \tag{26}$$

众所周知， [22], [23] 对于任意实数 α 函数 $-m_\alpha(z)$ 是一个赫尔格洛茨–涅万林函数。此外，由（26）可得

$$-m_\alpha(z)=\frac{\sin\alpha+m_\infty(z)\cos\alpha}{-\cos\alpha+m_\infty(z)\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha+\frac{1}{m_\infty(z)}\sin\alpha}{\sin\alpha-\frac{1}{m_\infty(z)}\cos\alpha}. \tag{27}$$

以下定理已在 [7] 关于赫格洛茨-涅万林纳函数 $-m_\alpha($z中证明，且与定理2类似。

.Theorem 4 ([7])。设 A 是具有亏格指标(1, 1)且势函数在 $\mathcal{H}=L^2[\ell,\infty)$中局部可积的、形式为(15)的对称薛定谔算子 ¨。若$m_\alpha(z)$是(25)中描述的 A 函数，则赫格洛茨-涅万林纳函数$(-m_\alpha(z))$可实现为形式为(21)的薛定谔L-系统$\Theta_{\mu,h}$的阻抗函数,

$$\mu=\tan\alpha \quad and \quad h=i. \tag{28}$$

反过来，设$\Theta_{\mu,\ h}$ 是一个薛 ¨定谔L-系统，其形式为(21) ，其对称算子 A 满足

$$V_{\Theta_{\mu,h}}(z)=-m_\alpha(z),$$

对所有 $z\in\mathbb{C}_\pm$ 和 $\mu\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$。则参数 μ 和 h 定义 $\Theta_{\mu,\ h}$ 由以下公式给出 (28)，即 $\mu=\tan\alpha$ 和 $h=i$。

显然，当 $\alpha=\pi$ 时，我们得到 $\mu_\alpha=0$, $m_\pi(z)=m_\infty(z)$，并且实现该结果的 L-系统 $\Theta_{0,\ i}$ 已在 [7, 第 5] 节中作了详尽描述。若 $\alpha=\pi/2$，则得到 $\mu_\alpha=\infty$, $-m_\alpha(z)=1/m_\infty($ $z)$，且实现该结果的 L-系统为 $\Theta_{\infty,\ i}$ （见 [7, 第5]节）。排除 $\alpha=\pi$ 或 $\alpha=\pi/2$的情况后，我们如下给出一个 Schr¨odinger L-系统 $\Theta_{\mu_\alpha,\ i}$ ，它对 $\alpha\in(0,\pi]$ 实现 $-m_\alpha(z)$

$$\Theta_{\tan\alpha,i}=\begin{pmatrix}\mathbb{A}_{\tan\alpha,i} & K_{\tan\alpha,i} & 1\\ \mathcal{H}_+\subset L_2[\ell,+\infty)\subset\mathcal{H}_- & & \mathbb{C}\end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{\tan\alpha,i}\,y&=l(y)-\frac{1}{\tan\alpha-i}[y'(\ell)-iy(\ell)][(\tan\alpha)\delta(x-\ell)+\delta'(x-\ell)],\\ \mathbb{A}^*_{\tan\alpha,i}\,y&=l(y)-\frac{1}{\tan\alpha+i}\,[y'(\ell)+iy(\ell)][(\tan\alpha)\delta(x-\ell)+\delta'(x-\ell)],\end{aligned} \tag{30}$$

$K_{\tan\alpha,\ i}\,c=c\,g_{\tan\alpha,\ i}$、$(c\in\mathbb{C})$以及

$$g_{\tan\alpha,i}=(\tan\alpha)\delta(x-\ell)+\delta'(x-\ell). \tag{31}$$

此外，值得一提的是

$$\begin{aligned}V_{\Theta_{\tan\alpha,i}}(z)&=-m_\alpha(z)\\ W_{\Theta_{\tan\alpha,i}}(z)&=\frac{\tan\alpha-i}{\tan\alpha+i}\cdot\frac{m_\infty(z)-i}{m_\infty(z)+i}=(-e^{2\alpha i})\,\frac{m_\infty(z)-i}{m_\infty(z)+i}.\end{aligned} \tag{32}$$

与定理3 中关于函数的结果类似， $1/m_\alpha(z)$ 的结果可见于 [7]。

6. 累积薛定谔 L-系统

本节中，我们假设 A 是一个非负的(即，对所有 $Af, f) \geq 0$ 均有$f \in \mathrm{Dom}(A)$)，其形式为（15）的对称算子，亏格指标为（1,1），由微分运算 $l(y) = -y'' + q(x)y$生成。下面的定理成立。

THEOREM 5 ([25], [26], [27])。 设 A 是一个非负对称薛定谔算子¨，其形式为 (15) 亏格指标为 (1,1)，且在 $\mathcal{H} = L^2[\ell, \infty)$ 上势函数局部可积。 考虑形式为 T_h 的算子 (16)。则

(1) 算子 A 具有多个非负自伴扩张，当且仅当 Friedrichs 扩张 A_F 与 Kreĭn-von Neumann 扩张 A_K不相同，即 $m_\infty(-0) < \infty$；¯(2) 算子 T_h, $(h = h)$ 与 Kreĭn-von Neumann 扩张A_K 相同，当且仅当 $h = -m_\infty(-0)$; (3) 算子 T_h 是增生的，当且仅当

$$\mathrm{Re}\, h \geq -m_\infty(-0); \tag{33}$$

¯(4) 算子 T_h, $(h \neq h)$ 是 β-扇形的，当且仅当 $\mathrm{Re}\, h > -m_\infty(-0)$ 成立；¯ (5) 算子 T_h, $(h \neq h)$ 是增生的，但对任意 $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 都不是 β-扇形的，当且仅当 $\mathrm{Re}\, h = -m_\infty(-0)$ (6) 若 T_h, $(\mathrm{Im}\, h > 0)$ 是 β-扇形的，则精确角度 β 可通过以下方式计算

$$\tan\beta = \frac{\mathrm{Im}\, h}{\mathrm{Re}\, h + m_\infty(-0)}. \tag{34}$$

在下文中，我们假设 $m_\infty(-0) < \infty$。那么，根据定理5 (另见 [2], [24], [27])，算子 T_h, $(\mathrm{Im}\, h > 0)$ 具有形式 (16)，是增生的和/或扇形的。若此时 T_h 是增生的，则（见 [1]）对所有满足不等式的实数 μ，

$$\mu \geq \frac{(\mathrm{Im}\, h)^2}{m_\infty(-0) + \mathrm{Re}\, h} + \mathrm{Re}\, h, \tag{35}$$

公式 (17) 定义了所有增生型 (∗)-扩张的集合 $\mathbb{A}_{\mu,h}$，属于 T_h。此外，$\mathbb{A}_{\mu,h}$ 是增生的，但对任意 β 都不是扇形的，其角度为 $\beta \in (0, \pi/2)$ 的 (∗)-扩张属于 T_h，当且仅当在 (17) 中

$$\mu = \frac{(\mathrm{Im}\, h)^2}{m_\infty(-0) + \mathrm{Re}\, h} + \mathrm{Re}\, h, \tag{36}$$

（参见 [8, 定理 4]）。 [1] 中还证明了，算子T_h 的（∗）扩张$\mathbb{A}_{\mu,\ h}$ 是累积的，当且仅当

$$-m_\infty(-0) \leq \mu \leq \mathrm{Re}\, h. \tag{37}$$

利用公式（17）和直接计算（另见 [8]），可得算子˜的公式$\mathbb{A}_{\mu,\ h}$ 其形式为（7），如下所示

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{A}}_{\mu,h} y = -y'' + q(x)y - y'(a)\delta(x-a) - y(a)\delta'(x-a) \\ + \frac{1}{\mu - h}\left[y'(a) - hy(a)\right]\left[\mu\delta(x-a) + \delta'(x-a)\right]. \end{aligned} \tag{38}$$

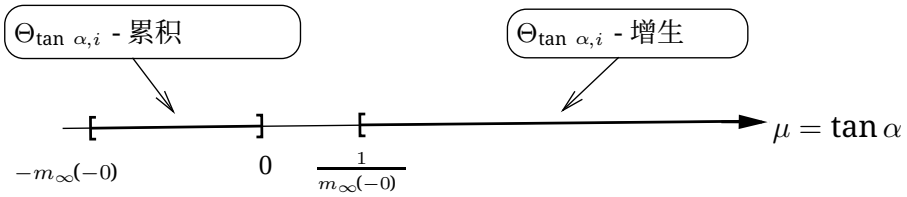


FIGURE 1. 累积和增生 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,\ i}$。

考虑由（25）—（26）描述、与上述非负算子 A 相关的函数 $m_\alpha(z)$。我们来考察在 $m_\alpha(z)$ 的定义中，参数 α 如何影响实现（$-m_\alpha(z)$）的 L-系统。定理 6.3] 中回答了这一问题的部分内容。文中证明，若非负对称薛定谔算子满足 $m_\infty($ $-0)\geq 0$，则当且仅当以下条件成立时，形式为（29）的 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,i}$ 实现函数（$-m_\alpha(z)$）且为增生

$$\tan\alpha\geq\frac{1}{m_\infty(-0)}. \tag{39}$$

我们将使用不等式（37）来确定 $\mu=\tan\alpha$ 的哪些值会生成累积 L系统 $\Theta_{\tan\alpha,\ i}$。这种方法得出

$$-m_\infty(-0)\leq\tan\alpha\leq 0. \tag{40}$$

函数 $(-m_\alpha(z))$ 可由增生或累积 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,i}$ 实现的既定判据如图 1 所示。该图描述了实现 $(-m_\alpha(z))$ 的 L 系统的性质与 μ 的取值（进而与 α）之间的关系。实数轴上的粗体部分表示 $\mu=\tan\alpha$ 的取值范围，这些取值可产生增生或累积 L 系统 $\Theta_{\mu,i}$。

注意，若 $m_\infty(-0)=0$ 属于 (39)，则 $\alpha=\pi/2$，且 $^{-m_{\frac{\pi}{2}}}(z)=1/m_\infty(z)$。此外，我们知道，若 $m_\infty(-0)\geq 0$，则 $1/m_\infty(z)$ 可由增生系统实现 $\Theta_{\infty,i}$（见 [7, 定理 6.2]）。还要注意，当 $\tan\alpha=0$ 且因此 $\alpha=0$ 时，我们得到 $m_0(z)$ $=m_\infty(z)$，而实现它的 $-m_\infty(z)$ Schr¨odinger L-系统为 $\Theta_{0,i}$。下述定理说明非负性这一附加要求如何影响函数 $-m_\infty(z)$ 和 $1/m_\infty(z)$ 的实现。

THEOREM 6. 设 A 为形式为（15）的非负对称薛定谔算子，其亏格指标为（1,1），且势函数局部可积于 $\mathcal{H}=L^2[\ell,\infty)$。若 $m_\infty(z)$ 是 $\dot{A}$ 的韦尔-蒂奇马什函数，满足 $m_\infty(-0)\geq 0$，则实现函数（$-m_\infty(z)$）的 L-系统$\Theta_{0,i}$ 是累积的，而实现函数 $1/m_\infty(z)$ 的 L-系统$\Theta_{\infty,i}$ 是增生的。

PROOF. 由于 $m_\infty(-0)\geq 0$，我们可以应用（40）得出 $-m_0(z)=-m_\infty$ $(z)\leq 0$ 意味着实现函数（$-m_\infty(z)$）的 L-系统$\Theta_{0,i}$ 是累积的（见 [1, 第 9.9] 节）。在当前定理条件下，实现函数 $1/m_\infty(z)$ 的 L-系统$\Theta_{\infty,i}$ 为增生这一事实已在 [7]中证明。□

REMARK 7. 函数（$-m_\infty(z)$）、$1/m_\infty(z)$ 和（$-m_\alpha(z)$）的一些解析性质已在 [7, 定理 6.5]中描述。考虑到这些结果和上述推理，在当前假设下，我们有：

（1）函数 $1/m_\infty(z)$ 是斯蒂尔切斯函数，当且仅当 $m_\infty(-0) \geq 0$；（2）函数 $(-m_\infty(z))$ 是逆斯蒂尔切斯函数，当且仅当 $m_\infty(-0) \geq 0$；（3）由 $(-m_\alpha(z))$ 给出的函数 (26) 是斯蒂尔切斯函数，当且仅当

$$0 < \frac{1}{m_\infty(-0)} \leq \tan\alpha,$$

且当且仅当它是逆斯蒂尔切斯函数

$$-m_\infty(-0) \leq \tan\alpha \leq 0.$$

现在，我们已经建立了一个判据，用以判断实现 $(-m_\alpha(z))$ 的 L-系统是否为累积的，接下来可以探讨它的更多性质。我们将转而研究实现 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,i}$ 为累积扇形的情形。首先，设 $\Theta_{\mu,h}$ 为形式 (21) 的 L-系统，其中 $\mathbb{A}_{\mu,h}$ 是增生薛定谔算子 T_h 的一个累积 $(*)$-扩张 (17)。再设 $\mathbb{A}_{\mu,h}$ 具有形式 (38)。下面列出一些关于 $\Theta_{\mu,h}$ 可能具有的累积性和扇形性的已知事实。

- 如果 $\mathbb{A}_{\mu,h}$ 具有形式 (38) 且为 β-扇形的，那么由 (6) 定义的阻抗函数 $V_{\Theta_{\mu,h}}(z)$ 属于类 S^{-1,β_1,β_2}。
- 算子 T_h 属于 $\Theta_{\mu,h}$ 是具有精确扇形角 $(\beta_2-\beta_1)$ 的 $(\beta_2-\beta_1)$-扇形算子，且 $\tan\beta_2 \leq \tan\beta$。
- 当 $\beta_1 = 0$ 且 $\beta_2 = \pi/2$ 时，算子 T_h 是增生的，但不是 β-扇形算子。
- 如果 β 是算子 T_h 的精确扇形角，那么 $V_{\Theta_{\mu,h}}(z) \in S^{-1,0,\beta}$。
- 若阻抗函数 $V_{\Theta_{\mu,h}}(z)$ 属于类 S^{-1,β_1,β_2}，则 $\mathbb{A}_{\mu,h}$ 是 β-扇形算子，其中 $\tan\beta$ 由 (13) 定义。
- 两者 $\mathbb{A}_{\mu,h}$ 和 T_h 都是 β-扇形算子，其精确角度为 $\beta \in (0,\pi/2)$，当且仅当 $V_{\Theta_{\mu,h}}(z) \in S^{-1,0,\beta}$ 且 $\tan\beta$ 由 (14) 给出。

考虑函数 $(-m_\alpha(z))$ 以及实现该函数的形式为 (29) 的薛定谔 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,\,i}$。根据定理 6，该 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,\,i}$ 是累积的，当且仅当满足 (40)，即 $-m_\infty(-0) \leq \tan\alpha \leq 0$. 此外，根据 [8, 定理 6]，$\Theta_{\tan\alpha,\,i}$ 是累积扇形的，当且仅当

$$-m_\infty(-0) \leq \tan\alpha < 0, \tag{41}$$

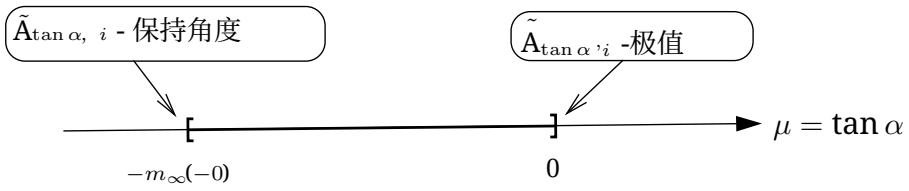
且是累积极值的（见 [8, 定理 7]），当且仅当 $\tan\alpha = 0$。此外，若假设 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,\,i}$ 是 β-扇形的，则其阻抗函数 $V_{\Theta_{\tan\alpha,\,i}}(z) = -m_\alpha(z)$ 属于（见 [12]）某些在第 3 节讨论的逆 Stieltjes 函数扇形类。具体而言，$(-m_\alpha(z)) \in S^{-1,\,\beta}$。下述定理将给出此情形下 $(-m_\alpha(z))$ 更精细的性质。

THEOREM 8. 设 $\Theta_{\tan\alpha,i}$ 是形式为 (29) 的累积 L-系统，实-现与非负算子 A 相关联的函数 $(-m_\alpha(z))$。再设 $\mathbb{A}_{\tan\alpha,i}$ 是与 $\Theta_{\tan\alpha,i}$ 相关联并由 (7) 定义的 β-扇形算子。则函数 $(-m_\alpha(z))$ 属于类 S^{-1,β_1,β_2}，$\tan\beta_2 \leq \tan\beta$，且

$$\tan\beta_1 = \frac{\tan\alpha + m_\infty(-0)}{1-(\tan\alpha)m_\infty(-0)}, \tag{42}$$

and

$$\tan\beta_2 = -\cot\alpha. \tag{43}$$



~FIGURE 2. 伴随算子 $\mathbb{A}_{\tan\alpha,i}$.

此外，算子 T_i 是（$\beta_2-\beta_1$）-扇形的，其精确扇形角为（$\beta_2-\beta_1$）。

PROOF. 已知 $\Theta_{\tan\alpha,i}$ 是累积的，因此（41）成立。为方便起见，我们将（$-m_\alpha(z)$）重写为

$$-m_\alpha(z)=\frac{\sin\alpha+m_\infty(z)\cos\alpha}{-\cos\alpha+m_\infty(z)\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha+m_\infty(z)}{(\tan\alpha)m_\infty(z)-1}. \tag{44}$$

~由于在我们的假设下 $\mathbb{A}_{\tan\alpha,i}$ 是 β-扇形的，因此（见 [12], [8]）阻抗函数 $V_{\Theta_{\tan\alpha,i}}(z)$ $=-m_\alpha(z)$ 属于第 3 节讨论的某些扇形类。特别地，$-m_\alpha(z)\in S^{-1,\beta}$ 且 $-m_\alpha(z)\in S^{-1,}$ $_{\beta_1,}{}^{\beta_2}$，其中（见 [8]）

$$\tan(\pi-\beta_1)=-\tan\beta_1=\lim_{x\to-0}(-m_\alpha(x))=\frac{\tan\alpha+m_\infty(-0)}{(\tan\alpha)m_\infty(-0)-1},$$

and

$$\tan(\pi-\beta_2)=-\tan\beta_2=\lim_{x\to-\infty}(-m_\alpha(x))=\frac{\tan\alpha+m_\infty(-\infty)}{(\tan\alpha)m_\infty(-\infty)-1}$$
$$=\frac{\frac{\tan\alpha}{m_\infty(-\infty)}+1}{\tan\alpha-\frac{1}{m_\infty(-\infty)}}=\frac{1}{\tan\alpha}=\cot\alpha.$$

将上述内容乘以 (-1)，即可验证（42）和（43）。为了证明其余部分，~我们应用 [12, 定理 9]。该定理指出，若 $\mathbb{A}$ 是与累积 L-系统 Θ相关联、具有形式（6）的 β-扇形算子，则阻抗函数 $V_\Theta(z)$ 属于类 S^{-1,β_1,β_2}，$\tan\beta_2\le\tan\beta$，且 T是 $(\beta_2-\beta_1)$-扇形的，其扇形角恰为 $(\beta_2-\beta_1)$。□

下一个定理阐述函数 $(-m_\alpha(z))$ 的耗散实现的两个“端点”情形。

THEOREM 9. 设 $\Theta_{\tan\alpha,\ i}$ 是如下形式的累积 L-系统：(29) 实现函数 $(-m_\alpha(z))$，其主算子为扇形算子 T_i，其精确扇形角为~。$\beta\in(0,\ \pi/2)$ 另设 $\mathbb{A}_{\tan\alpha,\ i}$ 为由下式定义的伴随算子：(6)。则

~(1) $\mathbb{A}_{\tan\alpha,\ i}$ 是 β-扇形算子（扇形角与 T_i相同），当且仅当 $\tan\alpha=-m_\infty(-0)$ 在 (38)中；~(2) $\mathbb{A}_{\tan\alpha,\ i}$是增生的，但对任意 β，都不是 $\beta\in(0,\ \pi/2)$-扇形算子，当且仅当在 (17) $\alpha=0$.

PROOF. 证明可直接由 [8, 定理 6 和 7] 推出：对于第 (1) 部分，令$\mu=\tan\alpha=-m_\infty(-0)$；对于第 (2) 部分，令 $\mu=\mathrm{Re}\ h=\tan\ 0=0$。□

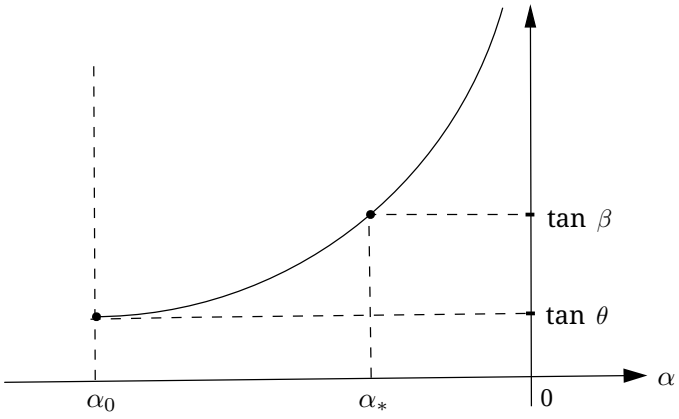


FIGURE 3. 扇形角 β。这里 $\alpha_0 = \arctan(-m_\infty(-0))$。

定理 9 的结果由图 2直观地展示。此外，我们还证明，在定理 9 的条件下，定义在 α-扇形 sesquilinear 形式 (f, Tf) 的子空间 $\mathrm{Dom}(T)$ 上的 $\mathcal{H}_+$ 可以扩展为定义在 α上的 ˜-扇形形式 $(\mathbb{A}f, f)$，且 $\mathcal{H}_+$ 保持扇形角不变（对两种形式均如此）α。T. Kato 在 [19] 提到了扩展扇形 sesquilinear 形式的一般问题。

现在我们陈述并证明以下结论。

THEOREM 10. 设 $\Theta_{\tan\alpha,i}$ 是形式为 (29) 的一个累积 L-系统，它实现了 $(-m_\alpha(z))$，其主 θ-扇形算子为 T_i，精确扇形性角为 θ。再设 $\alpha_* \in (\arctan(-m_\infty(-0)), 0)$ 是一个固定值，它通过 (6)、(17) 和 $(-m_\alpha(z)) \in S^{-1,\beta_1,\beta_2}$ 定义伴随算子 $\tilde{\mathbb{A}}_{\tan\alpha_*,i}$。那么，对于任意 $\alpha \in (\arctan(-m_\infty(-0)) \ \alpha_*)$，伴随算子 $\mathbb{A}_{\tan\alpha,i}$ 均为 β-扇形算子，其满足

$$\tan\beta = \tan\beta_1 + 2\sqrt{\tan\beta_1 \ \tan\beta_2}. \tag{45}$$

此外，若 $\alpha = \arctan(-m_\infty(-0))$，则

$$\beta = \theta = \arctan\left(\frac{1}{m_\infty(-0)}\right).$$

PROOF. 首先注意到，我们定理的条件意味着：$\tan\alpha_* \in (-m_\infty(-0), 0)$。因此，根据 [7, 定理 8] 应用于 $\mu = \tan\alpha$˜算子 $\mathbb{A}_{\tan\alpha,\ i}$对于某个 $\beta \in (0, \pi/2)$，是 β-扇形的，且对任意满足以下条件的 α

$$-m_\infty(-0) \le \tan\alpha < \tan\alpha_*.$$

公式（45）也可由 [7, 定理 8] 中的相应公式推出，注意到 β_1 和 β_2 分别通过（42）和（43）定义。最后，由于 T_i是 θ-扇形的，公式（34）给出 $\tan\theta = {}^{1}{}_{m_\infty(-0)}$。应用定理9 的第（1）部分可得 $\beta = \theta$。证明完毕。□

注意，定理10 给出了一个值 β，它充当整个˜形式为 $\mathbb{A}$ （38）的伴随算子指标族的通用扇形角，如图3所示。

7. 示例

考虑带有贝塞尔势的微分表达式

$$l_\nu = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}, \quad x \in [1, \infty)$$

阶为 $\nu > 0$ 的希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2[1, \infty)$。极小对称算子

$$\begin{cases} \dot{A}\, y = -y'' + \frac{\nu^2-1/4}{x^2} y \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases} \tag{46}$$

由该表达式和边界条件生成，其亏格数为 (1, 1)。设 $\nu = 3/2$。已知 [1] 在这种情况下

$$m_\infty(z) = 1 - \frac{iz}{\sqrt{z} + i}$$

且 $m_\infty(-0) = 1$. 于是，极小对称算子变为

$$\begin{cases} \dot{A}\, y = -y'' + \frac{2}{x^2} y \\ y(1) = y'(1) = 0. \end{cases} \tag{47}$$

考虑如下形式的算子 T_h （16），其针对 $h = i$ 写为

$$\begin{cases} T_i\, y = -y'' + \frac{2}{x^2} y \\ y'(1) = i\, y(1) \end{cases} . \tag{48}$$

该算子 T_i 将作为主算子，由实现函数（$-m_\alpha$（z））的 L系统族在（25）-（26）中共用。它是增生的且为 β-扇形，因为 $\operatorname{Re} h = 0 > -m_\infty(-0) = -1$，并且其精确扇形角由（见（34））给出

$$\tan\beta = \frac{\operatorname{Im} h}{\operatorname{Re} h + m_\infty(-0)} = \frac{1}{0+1} = 1 \quad \text{or} \quad \beta = \frac{\pi}{4}. \tag{49}$$

实现函数$\Theta_{\tan\alpha,\, i}$ 的（29）形式的 L 系统族

$$-m_\alpha(z) = \frac{(\sqrt{z} - iz + i)\cos\alpha + (\sqrt{z} + i)\sin\alpha}{(\sqrt{z} - iz + i)\sin\alpha - (\sqrt{z} + i)\cos\alpha}, \tag{50}$$

是在 [7]中构造的。根据（40），（$\Theta_{\tan\alpha,\, i}$）中的 L 系统在（29）中是累积的，当且仅当

$$-1 = -m_\infty(-0) \le \tan\alpha \le 0.$$

应用定理 9 的第（2）部分可得，实现 L-系统 $\Theta_{\tan\alpha,\, i}$ 在（29）˜中满足：其伴随算子 $\mathbb{A}_{\tan\alpha,\, i}$ 在 $\mu = \tan\alpha = 0$ 或 $\alpha = 0$ 时为极值增生。因此，该 L-系统

$$\Theta_{0,i} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{0,i} & K_{0,i} & 1 \\ \mathcal{H}_+ \subset L_2[1, +0) \subset \mathcal{H}_- & & \mathbb{C} \end{pmatrix}, \tag{51}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{0,i}\, y &= -y'' + \frac{2}{x^2} y - i\,[y'(1) - iy(1)]\,\delta'(x-1), \\ \mathbb{A}^*_{0,i}\, y &= -y'' + \frac{2}{x^2} y + i\,[y'(1) + iy(1)]\,\delta'(x-1), \end{aligned} \tag{52}$$

$K_{0,\ i}c = cg_{0,\ i}$、$(c \in \mathbb{C})$和$g_{0,\ i} = \delta'(x-1)$。这个 L-系统$\Theta_{0,\ i}$实现了函数$-m_0(z)$ $= -m_\infty(z)$。此外，

$$
\begin{aligned}
V_{\Theta_{0,i}}(z) &= -m_0(z) = -m_\infty(z) = \frac{iz}{\sqrt{z}+i} - 1 \\
W_{\Theta_{0,i}}(z) &= -\frac{m_\infty(z)-i}{m_\infty(z)+i} = \frac{(i-1)\sqrt{z}+iz-1-i}{(1+i)\sqrt{z}-iz-1+i}.
\end{aligned} \tag{53}
$$

˜伴随算子 $\mathbb{A}_{0,\ i}$ 由式（38）给出：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{A}}_{0,i}\, y &= -y'' + \frac{2}{x^2}y - y'(1)\delta(x-1) - y(1)\delta'(x-1) + [y(1)+iy'(1)]\,\delta'(x-1) \\
&= -y'' + \frac{2}{x^2}y - y'(1)[\delta(x-1) - i\delta'(x-1)].
\end{aligned}
$$

˜伴随算子$\mathbb{A}_{0,\ i}$ 为

$$
\tilde{\mathbb{A}}^*_{0,i} y = -y'' + \frac{2}{x^2}y - y'(1)[\delta(x-1) + i\delta'(x-1)],
$$

因此

$$
\operatorname{Re}\tilde{\mathbb{A}}_{0,i}\, y = -y'' + \frac{2}{x^2}y - y'(1)\delta(x-1) \quad \text{and} \quad \operatorname{Im}\tilde{\mathbb{A}}_{0,i}\, y = y'(1)\delta'(x-1).
$$

˜上述算子 $\mathbb{A}_{0,\ i}$ 是增生的，这由 [12] 可知，也通过直接计算得到独立验证

$$
(\operatorname{Re}\tilde{\mathbb{A}}_{0,i}\, y, y) = \|y'(x)\|^2_{L^2} + 2\|y(x)/x\|^2_{L^2} \geq 0.
$$

此外，根据定理 9 它是极大的，即增生但不 β- 扇形的，对任意 $\beta \in$ （0，$\pi/2$）。事实上，很容易看出

$$
(\operatorname{Im}\tilde{\mathbb{A}}_{0,i}\, y, y) = -|y'(1)|^2,
$$

因此，只有当 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时，我们才能对所有 $y \in \mathcal{H}_+$ 得到不等式（2）。因此，这属于极值算子的情形。此外，我们还证明，(53) 中的函数$-m_0(z)$ $= -m_\infty(z)$ $= \frac{iz}{\sqrt{z}+i} - 1$ 属于逆斯蒂尔切斯函数的扇形类 $S^{-1}_{\ 0,\ \frac{\pi}{2}}$。

参考文献

[1] Yu. Arlinski˘ı, S. Belyi, E. Tsekanovskiĭ, *Conservative Realizations of Herglotz-Nevanlinna functions*, 《算子理论：进展与应用》, 第 217 卷, Birkhauser Verlag, 2011. 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 15

[2] Yu. Arlinski˘ı, E. Tsekanovskiĭ, *M. Krein's research on semi-bounded operators, its contemporary developments and applications*, 《算子理论：进展与应用》, 第 190 卷, 2009. 65–112. 10

[3] Yu. Arlinskiĭ, E. Tsekanovskiĭ, *Linear systems with Schrödinger operators and their transfer functions*, 《算子理论：进展与应用》, 第 149 卷, 2004. 47–77. 7

[4] S. Belyi, *Sectorial Stieltjes functions and their realizations by L-systems with Schrödinger operator*, 《数学新闻》, 第 285 卷, 第 14–15 期, 2012. 1729–1740.

[5] S. Belyi, K. A. Makarov, E. Tsekanovski˘ı, *Conservative L-systems and the Livšic function*, 《泛函分析与拓扑方法》, **21** 卷, 第 2 期, 2015. 104–133. 4, 5

[6] S. Belyi, E. Tsekanovskiĭ, *The original Weyl-Titchmarsh functions and sectorial Schrödinger L-systems*, Acta Wasaensia, 第 462 卷, 2021. 37–54. 1, 2

[7] S. Belyi, E. Tsekanovskiĭ, *On realization of the original Weyl-Titchmarsh functions by Schrödinger L-systems*, 《复分析与算子理论》, 第 15 卷, 第 1 期, 2021. 11–36. 1, 2, 8, 9, 11, 14, 15

[8] S. Belyi, E. Tsekanovskiĭ, *On Sectorial L-systems with Schrödinger operator*, 微分方程、数学物理与应用：谢利姆·格里戈里耶维奇·克雷因百年诞辰纪念文集，CONM，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州（ 2019 2, 10, 12, 13）。S. Belyi, E. Tsekanovskiı, [9] *Inverse Stieltjes like functions and inverse problems for systems with Schrodinger operator.* 197, 2009 算子理论：进展与应用，第 ( ) 卷，21–49. 4[10] S. Belyi, E. Tsekanovski ˘ *Stieltjes like functions and inverse problems for systems with* ı, .《算子与矩阵》，第 卷，*Schrödinger operator* 2, 2, 2008 265 296 4 第 ( ) 期，– .[11] S. Belyi, S. Hassi, H.S.V. *A general realization theorem for matrix-*de Snoo, E. Tsekanovskiı, *valued Herglotz-Nevanlinna functions* 419, 2006 331 ，《线性代数与应用》，第 ( ) 卷，– 358. 3[12] S. Belyi, E. Tsekanovskiĭ, *Sectorial classes of inverse Stieltjes functions and L-systems.*《泛函分析与拓扑方法》，第 18, 3, 2012 201 213 5, 6, 12, 13, 16 卷，第 ( ) 期，- . Yu. [13] *Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators* 17, Berezansky, ，第 卷，数学译丛专著，美国数学会，普罗维登斯， 1968 2, 3 。A.A. *On the asymptotic behaviour of the Titchmarsh-Weyl m-*[14] Danielyan, B.M. Levitan, *function* 54, 3, 1990 469 479 8 ，苏联科学院通报：数学辑，第 卷，第 ( ) 期，– .[15] V. Derkach, M.M. Malamud, E. Tsekanovskiĭ, *Sectorial Extensions of Positive Operators.*（俄文），《乌克兰数学杂志》 **41**, 2, 1989 151 158 5 第 ( ) 期，第 – 页。I. Dovzhenko and E. Tsekanovskiı, [16] *Classes of Stieltjes operator-functions and their conser-vative realizations* 311 1 1990 18 22 4 ，苏联科学院通报，第 ( ) 期，– .[17] F. Gesztesy, E. Tsekanovskiĭ, *On Matrix-Valued Herglotz Functions.*《数学消息》 218, (2000 61 138 5), – . I.S. Kac, M.G. Krein, [18] *R-functions – analytic functions mapping the upper halfplane into itself* ，美国 2, 103, 1 18, 1974 5 数学会译丛，第 - 卷。[19] *Perturbation Theory for Linear Operators* 1966 3, 14 T. Kato, ，施普林格出版社，. B.M. Levitan, 《逆斯图姆–刘维尔问题》。O. Efimov 从俄文译出。VSP，泽伊斯特，(1987 7, 8) M.S. Livˇsic, [20] , *oscillations waves* 1966 2 , . 莫斯科，科学出版社，( ) M.A. Naimark, [21] *Operators* ，F. Ungar 出版社，纽约， [22] *Linear Differential Operators II* 1968 7, 8, 9 。E.C. Titchmarsh, [23] *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equa-tions* 2 1962 8, 9 第一部分，第 nd 版，牛津大学出版社，牛津，( )。[24] E. Tsekanovskiı, ˘ *Accretive extensions and problems on Stieltjes operator-valued functions relations* 1992 328 347 10 ，算子理论：进展与应用，59, ( ), – .[25] E. Tsekanovskiĭ, *Characteristic function and sectorial boundary value problems.* 几何与数学分析研究，数学研究所会议录，新西伯利亚，7, 180–194 (1987) 10[26] E. Tsekanovskiĭ, *Friedrichs and Krein extensions of positive operators and holomorphic con-traction semigroups* **15**, 308 309 1981 10 . 泛函分析及其应用 – ( ) [27] E. Tsekanovskiĭ, *Friedrichs-Krein-Phillips* *Non-self-adjoint accretive extensions of positive operators and theorems of* **14**, 156 157 1980 10 . 泛函分析及其应用 – ( ) [28] E. Tsekanovskiĭ, Yu.L. Šmuljan, *The theory of bi-extensions of operators on rigged Hilbert spaces. Unbounded operator colligations and characteristic functions* **32**, ，俄罗斯数学评论，(1977 73 131 3), – . H. Weyl, [29] *Über gewöhnliche lineare Differentialgleichugen mit singularen Stellen und ihre Eigenfunktionen* ¨ 37 64 1907 7 ，（德文），哥廷根学报，– ( )。

Department of Mathematics, Troy University, Troy, AL 36082, USA,
Email address: sbelyi@troy.edu

Department of Mathematics, Niagara University, Lewiston, NY 14109, USA
Email address: tsekanov@niagara.edu