arXiv:2301.10073v1 [math.OA] 24 Jan 2023

满足理想交性质时的正则理想

R. Exel*

这篇短文旨在证明：若 A 是满足理想交性质及一个温和公理 (inv) 的 C*-代数 B 的闭 *-子代数，则映射 $J \mapsto J \cap A$ 建立了 B 的所有正则理想所成布尔代数与 A 的所有正则不变理想所成布尔代数之间的同构。

1. 引言。

回顾一下，若 C*-代数 B 的闭 *-子代数 A 满足理想交性质，则称之为满足该性质；也就是说， B 的每个非零理想都与 A 有非零交集。

这一性质历史悠久，部分源于 Cuntz 和 Krieger 著名的唯一性定理 [**4**: 定理 2.13], 。该定理最初以另一种方式表述，但可以直接与理想交性质联系起来。更明确地说，Renault 指出了这样一种情形 [**8**: 命题 II.4.6]，在这种情形下， B 的理想与 A 的理想关系更加密切，具体而言，它们之间的对应关系为

$$J \in \mathscr{I}(B) \mapsto J \cap A \in \mathscr{I}_{\rm inv}(A), \tag{1.1}$$

是一个双射，其中 $\mathscr{I}(B)$ 表示 B 的所有理想构成的集合，而 $\mathscr{I}_{\text{不变}}(A)$ 表示 A 的所有不变理想构成的集合（适当的定义见下文）。

Renault 证明这一结果时所采用的条件是：令 B 为扭曲 ´etale 群胚 G 的约化 C*-代数，并令 A 为与单位空间 $G^{(0)}$ 相关联的交换子代数。此外，还要求 G 为本质主群胚 [**8**: 定义 II.4.3], ，其含义是对于每个闭不变子集 $F \subseteq G^{(0)}$， F 中各向同性平凡的点集在 F 中稠密。

一些作者（包括 Renault）考虑过一种较弱的本质主性概念，即上述要求只针对 $F = G^{(0)}$，而非所有闭不变子集（见 [**9**: 命题 3.1]）。

这种较弱版本的本质主群胚不足以保证 (1.1) 是一个双射，但仍可据此得到理想交性质；我认为这一事实最早由 [**6**: 定理 **4.**4] 证明（另见 [**3**: 定理 3.1.(b)]）。事实上，在第二可数情形中，理想交性质恰好等价于上述较弱形式的本质主性 [**1**: 命题 5.5.(2)]。

在近期论文 [**2**] 中，作者采取了一种颇为耐人寻味的折中立场：假设满足理想交性质（正如已有观察所指出的，这与群胚情形下较弱形式的本质主性相同），并以得出上述 Renault 所证明的更强结论为目标（该结论要求满足完整的本质主性性质），但只考虑正则理想，即与其二次湮灭子相等的理想。准确地说，[**2**: 定理 3.18] 指出，对应关系

$$J \in \mathscr{R}(B) \mapsto J \cap A \in \mathscr{R}_{\rm inv}(A), \tag{1.2}$$

是一个双射，其中 $\mathscr{R}(B)$ 表示 B 的所有正则理想构成的集合，而 $\mathscr{R}_{\text{不变}}(A)$ 表示 A 的所有正则不变理想构成的集合。除假设满足理想交性质外，该结果还要求 A 是 B 的正则子代数（即 B 由 A 的正规化子张成），并且 B 存在一个到 A 上的不变的忠实条件期望（更多详情见 [**2**] ）。

本文旨在推广上述结果，证明在弱得多的假设下，(1.2) 是一个双射。除了显而易见的假设 A 满足理想交性质外，我们只需要求公理 (inv)，即子代数正则性的一种弱形式（其精确定义见下文 (3.3)）；更重要的是，我们完全不对条件期望是否存在作任何假设。沿这一方向的主要结果是定理 (3.5)。

* 圣卡塔琳娜联邦大学数学系。部分经费由 CNPq 资助。

随后，我们在推论 (4.5) 中将讨论范围限定于正则子代数；唯一需要克服的障碍是验证公理 (INV) 可由正则性推出。

我谨向 David Pitts 致谢，感谢他最近访问 Florian´opolis 期间，围绕正则理想与我进行了许多有趣的交谈，并向我介绍了他本人及其合作者撰写的有趣预印本 [**2**] 。

2. 湮灭子。

本节将固定关于 C*-代数子集的湮灭子的记号，并引入一种不变性概念。这一概念对于表述我们的主要结果至关重要，而我们尚未在文献中见到过。

▶ 在本节中， A 表示一个固定的 C*-代数。

2.1. 定义。给定任意子集 $S \subseteq A$,

(i) S 在 A中的左湮灭子定义为

$$\mathrm{Ann}_A^L(S) = \{x \in A : xs = 0,\ \forall s \in S\}.$$

(ii) S 在 A 中的右湮灭子定义为

$$\mathrm{Ann}_A^R(S) = \{x \in A : sx = 0,\ \forall s \in S\}.$$

若我们所指的环境代数明确无疑，则省略下标，直接写作 $\mathrm{Ann}^L(S)$ 和 $\mathrm{Ann}^R(S)$。

2.2. 命题。给定一个子集 $S \subseteq A$，有：

(i) $\mathrm{Ann}^L(S)$ 和 $\mathrm{Ann}^R(S)$ 是范数闭的，(ii) $\mathrm{Ann}^L(S)$ 总是一个左理想，(iii) 若 S 是一个左理想，则 $\mathrm{Ann}^L(S)$ 是一个右理想（因而也是双边理想），(iv) $\mathrm{Ann}^R(S)$ 总是一个右理想，(v) 若 S 是一个右理想，则 $\mathrm{Ann}^R(S)$ 是一个左理想（因而也是双边理想）。

证明。留给读者完成。 □

回想一下，给定对于任意子集 $S \subseteq A$，通常用 $[S]$ 表示其闭线性张成。记作 :

$$[S] = \overline{\mathrm{span}(S)}.$$

若 T 是 A 的另一个子集，也将使用以下记号

$$ST = \{st : s \in S,\ t \in T\}.$$

由 S 在 A 中生成的闭双边理想记作 $\langle S \rangle_A$，因此

$$\langle S \rangle_A = [ASA].$$

与前面一样，在不会引起混淆时，我们将写作 $\langle S \rangle$ 。

2.3。定义。若子集 $S \subseteq A$ 满足 $[SA] = [AS]$，则称其为 A-不变。

关于上述概念在正则包含情境下的讨论，请参见下文第（4）节。

注意， $[SA]$ 始终是右理想，而 $[AS]$ 始终是左理想。因此，当 S 是 A-不变的时， $[SA]$ 是一个闭双边理想，显然也是包含 S的最小此类理想，由此可得

$$[SA] = \langle S \rangle = [AS]. \tag{2.4}$$

此外，当 S 是闭双边理想时，很容易看出 $[SA] = S = [AS]$，因此 S 是 A-不变的。

2.5. 命题。如果 S 是 A-不变的，那么

$$Ann^L(S) = Ann^R(S) = Ann^L\big(\langle S\rangle\big) = Ann^R\big(\langle S\rangle\big).$$

证明。首先假设 S 是一个闭双边理想，因此也是自伴的。那么，给定 $x \in \mathrm{Ann}^L(S)$ 和 $s \in S$，我们有 $x^*s^* \in S$，由此可得

$$(sx)(sx)^* = sxx^*s^* \in sxS = \{0\}.$$

这表明 $sx = 0$，进而表明 $x \in \mathrm{Ann}^R(S)$，从而证明 $\mathrm{Ann}^L(S) \subseteq \mathrm{Ann}^R(S)$；反向包含关系可类似证明。对于一般情形，注意到

$$\mathrm{Ann}^L(S) = \mathrm{Ann}^L(SA) = \mathrm{Ann}^L\big([SA]\big) \overset{(2.4)}{=} \mathrm{Ann}^L\big(\langle S\rangle\big),$$

类似地

$$\mathrm{Ann}^R(S) = \mathrm{Ann}^R(AS) = \mathrm{Ann}^R\big([AS]\big) \overset{(2.4)}{=} \mathrm{Ann}^R\big(\langle S\rangle\big).$$

最终结论由证明的第一部分直接得出。 □

2.6. 定义。若 S 是 A-不变的（例如一个闭双边理想），我们将 S 在 A 中的湮灭子定义为

$$\mathrm{Ann}_A(S) := \mathrm{Ann}_A^L(S) = \mathrm{Ann}_A^R(S).$$

我们注意到，有些作者用 $S^\perp$ 表示 $\mathrm{Ann}_A(S)$，但我们更倾向于采用后一种记法，因为我们很快就会考虑另一个包含 A 的 C*-代数 B，因此，明确相对于哪个环境代数来考察子集 $S \subseteq A$ 的湮灭子十分重要。在这种情况下，我们认为 $\mathrm{Ann}_A(S)$ 和 $\mathrm{Ann}_B(S)$ 比 $S^{\perp_A}$ 和 $S^{\perp_B}$ 更合适。另一方面，如果所考虑的环境代数没有歧义，我们就省略下标，只写作 $\mathrm{Ann}(S)$。

注意，在上述假设下，S 是 A-不变的，$\mathrm{Ann}(S)$ 是 A 的闭双边理想。由 (2.5) 我们还可得

$$\mathrm{Ann}(S) = \mathrm{Ann}\big(\langle S\rangle\big). \tag{2.7}$$

2.8. 定义. 若理想[1] $J \trianglelefteq A$ 满足

$$\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(J)\big) = J.$$

2.9. 引理. 设 S 是 A 的一个不变子集。那么：

(i) $\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(S)\big)\big) = \mathrm{Ann}(S)$, (ii) $\mathrm{Ann}(S)$ 是 A 的一个正则理想，(iii) 若 J_1 和 J_2 是正则理想，则 $J_1 \cap J_2$ 是正则的。

证明. 考虑定义在 A 上的对称关系“$\perp$”，其定义为

$$x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad xy = 0 = yx.$$

接下来我们断言

$$S^\perp := \{x \in A : x \perp s,\ \forall s \in S\} = \mathrm{Ann}_A(S).$$

事实上，由 (2.6) 可知

$$\mathrm{Ann}_A(S) = \mathrm{Ann}_A^L(S) \cap \mathrm{Ann}_A^R(S) =$$
$$= \{x \in A : xs = 0,\ \forall s \in S\} \ \cap \ \{x \in A : sx = 0,\ \forall s \in S\} =$$
$$= \{x \in A : x \perp s = 0,\ \forall s \in S\} = S^\perp,$$

[1] 此后，未加限定的 *ideals* 均指闭双边理想。

从而证明了该断言。接下来，利用下文中的 (2.10.ii)，我们有 $S^{\perp}=((S^{\perp})^{\perp})^{\perp}$，这可转化为 (i)，进而推出 (ii)。

关于 (iii)，由 (2.10.i) 可得

$$J_1 \cap J_2 \subseteq \operatorname{Ann}\big(\operatorname{Ann}(J_1 \cap J_2)\big).$$

另一方面，我们有 $J_1 \cap J_2 \subseteq J_1$，因此

$$\operatorname{Ann}\big(\operatorname{Ann}(J_1 \cap J_2)\big) \subseteq \operatorname{Ann}\big(\operatorname{Ann}(J_1)\big) = J_1,$$

同理，$\operatorname{Ann}\big(\operatorname{Ann}(J_1 \cap J_2)\big) \subseteq J_2$，因此

$$\operatorname{Ann}\big(\operatorname{Ann}(J_1 \cap J_2)\big) \subseteq J_1 \cap J_2.$$

这证明 $J_1 \cap J_2$ 是正则的。 □

2.10. 引理。设 X 是任意集合，且“$\perp$”是 X 上的任意对称关系。对每个子集 $S \subseteq X$，定义

$$S^{\perp} = \{x \in X : x \perp s,\ \forall s \in S\}.$$

Then

(i) $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp}$，以

及 (ii) $S^{\perp} = ((S^{\perp})^{\perp})^{\perp}$。

证明。虽然听起来有点像绕口令，但显然，S 中的每个元素都与任何一个和 S中所有元素正交的元素正交，因此得到 (i)。在 (i) 中用 S 替换 $S^{\perp}$，得到$S^{\perp} \subseteq ((S^{\perp})^{\perp})^{\perp}$。接下来注意到

$$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp},$$

我们可以将其应用于 (i)，得到 $((S^{\perp})^{\perp})^{\perp} \subseteq S^{\perp}$，从而完成证明。 □

注意，(2.9.iii) 表明，A 的所有正则理想构成一个交半格，其运算为

$$J_1 \wedge J_2 := J_1 \cap J_2,$$

也就是说，$J_1 \cap J_2$ 是同时小于 J_1 和 J_2的最大正则理想[2]。

此外，同时大于 J_1 和 J_2的最小正则理想[3] 也存在，即

$$J_1 \vee J_2 := \operatorname{Ann}\big(\operatorname{Ann}(J_1 + J_2)\big),$$

因此，所有正则理想构成的集合实际上是一个格。进一步地，若将正则理想 J 的否定定义为

$$\neg J = \operatorname{Ann}(J),$$

我们得到一个布尔代数，可以证明它是完备的。

如上所见，A 的任意理想 I 都会自动满足 A不变性；但若 A 是另一个 C*-代数 B的闭 *-子代数，则没有理由认为 I 也满足 B不变性。在最理想的情况下，我们有：

2.11. 命题. 设 I 是 A 的一个理想，且也满足 B不变性，其中 B 是一个具有 $A \subseteq B$的 C*-代数。那么

$$Ann_A(I) = Ann_B(I) \cap A.$$

证明。我们有

$$\operatorname{Ann}_A(I) = \operatorname{Ann}_A^L(I) = \operatorname{Ann}_B^L(I) \cap A = \operatorname{Ann}_B(I) \cap A.$$ □

[2] 实际上是 *largest ideal*。[3] 与 *smallest ideal*相反，后者是 $J_1 + J_2$，但并非总是正则的。

3. 理想交性质。

▶ 从现在起，我们固定一个 C*-代数 B 和一个闭 *-子代数 $A \subseteq B$。

3.1. 定义。若对于任意非零理想 $J \trianglelefteq B$，均有 $J \cap A \neq \{0\}$，则称 A 满足理想交性质（相对于 B）。

下面是一个关键的技术性结果。基本上，只有在这里我们才会明确地使用理想交性质。

3.2. 引理。假设 A 满足理想交性质，并令 $J \trianglelefteq B$ 为一个理想。则 $\mathrm{Ann}_B\big(\langle J \cap A\rangle_B\big) = \mathrm{Ann}_B(J)$。

证明。给定 $b \in \mathrm{Ann}_B\big(\langle J \cap A\rangle_B\big)$，令 $K = \langle b\rangle_B \cap J$。于是我们有

$$K \cap A = \langle b\rangle_B \cap J \cap A \subseteq \mathrm{Ann}_B\big(\langle J \cap A\rangle_B\big) \cap \langle J \cap A\rangle_B = \{0\},$$

因此，根据理想交性质，$K = \{0\}$。所以

$$bJ \subseteq \langle b\rangle_B \cdot J = \langle b\rangle_B \cap J = K = \{0\},$$

这表明 $b \in$ 湮灭子$_B^L(J) =$ 湮灭子$_B(J)$。由此可得湮灭子$_B\big(\langle J \cap A\rangle_B\big) \subseteq$ 湮灭子$_B(J)$。反向包含关系显然。□

现在我们希望将上述引理中的湮灭子$_B\big(\langle J \cap A\rangle_B\big)$替换为湮灭子$_B(J \cap A)$，但是，除非我们知道 $J \cap A$ 是 B-不变的，否则甚至无法定义湮灭子$_B(J \cap A)$。

3.3. 定义. 我们称 A 相对于 B 满足公理 (INV)，如果对于每个理想 $J \trianglelefteq B$，$J \cap A$ 都是 B-不变的。

关于这一公理的更多背景，请参见下一节；其中将证明它对每个正则子代数都成立。

3.4. 推论. 假设 A 满足理想交性质和公理 (INV)。那么，对于每个理想 $J \trianglelefteq B$，有

(i) $\mathrm{Ann}_B(J \cap A) = \mathrm{Ann}_B(J)$，且
(ii) $\mathrm{Ann}_A(J \cap A) = \mathrm{Ann}_B(J) \cap A$.

证明。为了证明 (i)，注意到根据 (INV)，$J \cap A$ 对 B 不变，因此

$$\mathrm{Ann}_B(J \cap A) \overset{(2.7)}{=} \mathrm{Ann}_B\big(\langle J \cap A\rangle_B\big) \overset{(3.2)}{=} \mathrm{Ann}_B(J).$$

关于 (ii)，我们有

$$\mathrm{Ann}_A(J \cap A) \overset{(2.11)}{=} \mathrm{Ann}_B(J \cap A) \cap A \overset{\text{(i)}}{=} \mathrm{Ann}_B(J) \cap A. \qquad \square$$

以下是我们的主要结果。

3.5. 定理。设 B 是一个 C*-代数，且 A 是 B 的一个闭 *-子代数，满足理想交性质和公理 (INV)。另外，设：

- $\mathscr{R}(B)$ 表示由 B 的所有正则理想构成的族，并且
- $\mathscr{R}_{\mathrm{inv}}(A)$ 表示由 A 的所有正则、B-不变理想构成的族。

那么，这一对应关系

$$\alpha : J \in \mathscr{R}(B) \;\mapsto\; J \cap A \in \mathscr{R}_{\mathrm{inv}}(A)$$

是一个布尔代数同构，其逆映射为

$$\beta : I \in \mathscr{R}_{\mathrm{inv}}(A) \;\mapsto\; Ann_B\big(Ann_B(I)\big) \in \mathscr{R}(B).$$

证明。首先证明， α 确实将 $\mathscr{R}(B)$ 映入 $\mathscr{R}_{反}(A)$。给定一个正则理想 $J \trianglelefteq B$，由公理 (INV) 可知， $J \cap A$ 是 B- 不变的，因此只需证明它也是 A 的一个正则理想。为此，我们需要证明

$$\mathrm{Ann}_A\big(\mathrm{Ann}_A(J \cap A)\big) = J \cap A. \tag{3.5.1}$$

将 (3.4.ii) 代入上面的左边可得

$$\mathrm{Ann}_A\big(\mathrm{Ann}_A(J \cap A)\big) = \mathrm{Ann}_A\big(\mathrm{Ann}_B(J) \cap A\big) \overset{(!)}{=} \mathrm{Ann}_B\big(\mathrm{Ann}_B(J)\big) \cap A = J \cap A,$$

其中，标记为 (!) 的推导是将 $\mathrm{Ann}_B(J)$ 代替 (3.4.ii) 中的 J 得到的。这就证明了 (3.5.1)。

注意，对于每个 B-不变正则理想 $I \trianglelefteq A$，由 (2.9.ii) 可知， $\beta(I)$ 是 B 的正则理想。因此， β 将 $\mathscr{R}_{\mathrm{inv}}(A)$ 映入 $\mathscr{R}(B)$。

给定 I 在 $\mathscr{R}_{\mathrm{inv}}(A)$ 中，接下来我们证明 $\alpha\big(\beta(I)\big) = I$。由于 I 是 A 中的正则元，我们有

$$I = \mathrm{Ann}_A\big(\mathrm{Ann}_A(I)\big) \overset{(2.11)}{=} \mathrm{Ann}_A\big(\mathrm{Ann}_B(I) \cap A\big) \overset{(3.4.\mathrm{ii})}{=} \mathrm{Ann}_B\big(\mathrm{Ann}_B(I)\big) \cap A = \alpha(\beta(I)).$$

另一方面，给定一个正则理想 $J \trianglelefteq B$，我们有

$$\beta\big(\alpha(J)\big) = \mathrm{Ann}_B\big(\mathrm{Ann}_B(J \cap A)\big) \overset{(3.4.\mathrm{i})}{=} \mathrm{Ann}_B\big(\mathrm{Ann}_B(J)\big) = J.$$

这表明 α 和 β 互为逆映射。显然， α 和 β 都保持理想包含关系，因此 α 是一个布尔代数同构，正如所需。□

A顺便指出，(3.5) 中提到的映射 β 也可以等价地定义为

$$\beta(J) = \mathrm{Ann}_B\big(\mathrm{Ann}_A(I)\big),$$

因为

$$\mathrm{Ann}_B\big(\mathrm{Ann}_A(I)\big) \overset{(2.11)}{=} \mathrm{Ann}_B\big(\mathrm{Ann}_B(I) \cap A\big) \overset{(3.4.\mathrm{i})}{=} \mathrm{Ann}_B\big(\mathrm{Ann}_B(I)\big).$$

4. 正则包含。

回顾一下，公理 (INV) 是在 (3.3) 中作为一个问题的解法引入的：对于每个理想 $J \trianglelefteq B$， $J \cap A$ 是否为 B-不变。

当然，把问题一概公理化掉听起来或许像是个廉价的解决办法，因此我们现在将通过指出一种非常常见的情形（见下文命题 (4.2.iii)）来消除这种印象；在这种情形下，上述公理会自动成立。

▶ 和之前一样，我们固定一个 C*-代数 B 以及一个闭 *-子代数 $A \subseteq B$。

回顾 [**7**：2.3.1]， A 在 B 中的正规化子是指满足以下条件的任意元素 n： B 的 n^*An 和 nAn^*均包含于 A。当正规化子张成 B的稠密子空间，且 A 包含 B的一个近似单位时，我们称 A 是一个正则子代数[4]。

除了 B-不变性这一概念外，研究正则子代数的文献中还经常出现另一种不变性概念，如下所述：

4.1. 定义。若集合 $S \subseteq A$ 满足：对于每个正规化子n，都有 $nSn^* \subseteq S$，则称其为正规化子不变。

这两种不变性概念密切相关，下面我们将对此加以说明。

[4] 尽管形式上相似，这两个概念 *regular subalgebras* 和 *regular ideals*之间并无关联。前者或许最早是在 [**5**] 中、冯·诺伊曼代数的语境下引入的；后者则与 *regular open sets*这一概念有关，即与其闭包的内部相同的集合。

4.2. 命题。假设 A 是 B 的正则子代数。那么

(i) 对每个理想 $J \trianglelefteq B$，都有 $J \cap A$ 是正规化子不变的

(ii) A 的每个正规化子不变理想都是 B-不变的；

(iii) A 满足关于 B 的公理 (INV)。

证明。(i) 显然成立，故留给读者验证。对于 (ii)，设 I 是 A 的一个正规化子不变理想。给定一个正规化子 n，以及 I 中的 a，我们首先断言

$$na \in [IB]. \tag{4.2.1}$$

要证明这一点，显然只需证明：取 I 的一个近似单位 $\{e_i\}_i$，有

$$na = \lim_{i\to\infty} e_i na.$$

因此，我们来计算

$$\|e_i na - na\|^2 = \|(e_i na - na)(e_i na - na)^*\| =$$
$$= \|e_i naa^*n^*e_i - e_i naa^*n^* - naa^*n^*e_i + naa^*n^*\| \leq$$
$$\leq \|e_i\|\|naa^*n^*e_i - naa^*n^*\| + \|naa^*n^*e_i - naa^*n^*\|,$$

当 $i \to \infty$ 时，该式收敛于零，因为 $naa^*n^* \in nIn^* \subseteq I$，从而证明了 (4.2.1)。由于正规化子的线性张成在 B 中稠密，因此我们进而得出 $BI \subseteq [IB]$，于是也有

$$[BI] \subseteq [IB].$$

反向包含关系可通过取伴随得到，因此 (ii) 得证。最后，(iii) 由 (i) 和 (ii) 立即推出。□

现在我们来讨论一个自然产生的问题：(4.2.ii) 的逆命题是否成立。遗憾的是，我们没有这个事实的直接证明，但仍能在满足理想交性质的正则理想这一特殊情形下解决该问题：

4.3. 命题。设 B 是一个 C*-代数，且 A 是 B 的一个满足理想交性质的正则子代数。那么，A 的每个 B-不变正则理想都是正规化子不变的。

证明。给定一个 B-不变正则理想 $I \trianglelefteq A$，由 (3.5) 可知

$$I = \alpha(\beta(I)) = \beta(I) \cap A.$$

由于 $\beta(I)$ 是 B 的一个理想，结论由 (4.2.i) 得出。□

作为 (4.2.ii) 和 (4.3) 的推论，我们注意到，在上述假设（A 是正则的且满足理想交性质）下，A 的所有正则 B-不变理想构成的族（在 (3.5) 中记为 $\mathscr{R}_{\mathrm{inv}}(A)$），与下列族相同

- $\mathscr{R}'_{\mathrm{inv}}(A)$，该族由 A 的所有正则正规化子不变理想构成。 (4.4)

我们尚未发现任何满足公理 (INV) 的非平凡子代数例子，满足 (4.2) 中更强假设的子代数除外。事实上，我们一直致力于研究正则子代数，而公理 (INV) 的出现颇为自然。

与正则性相比，公理 (INV) 更具一般性且更简洁，而且证明定理 (3.5) 也只需用到它，因此我们认为采用这一公理有一定的合理性。当然，只有在发现满足公理 (INV) 的非正则子代数 A 的非平凡且相关的例子后，才能充分证明采用这一公理的合理性。

以下推论直接由 (3.5)、(4.2.iii) 和 (4.3) 得出，其表述并未提及或许不那么常见的 B-不变性和公理 (INV) 这两个概念。其初版见于 [**2**：定理 3.18]，但当时的假设略为严格。

4.5. 推论. 设 B 是一个 C*-代数，且 A 是 B 的一个满足理想交性质的正则子代数。则将 $\mathscr{R}_{\mathrm{inv}}(A)$ 替换为 (4.4) 中定义的 $\mathscr{R}'_{\mathrm{inv}}(A)$ 后，(3.5) 的结论仍成立。

5. 理想的正则性的重要性。

正如我们在引言中提到的，与理想交性质相比，(1.1) 是双射这一事实需要更强的假设，至少对于群胚 C*-代数而言是如此。因此，定理 (3.5) 不应被期望能够推广到非正则理想。下面我们将描述一个简单的例子，说明事实确实如此。

Let X b设拓扑空间 $[0,2],$，并令 $Y=[0,1]\cup[2,3]$。考虑连续映射

$$h:Y\to X$$

定义为：当 y 属于 $[0,1],$ 时，$h(y)=y$；否则，$h(y)=y-1$。因此，h 将 Y 的第一个连通分支双射到 X 的前半部分，并将 Y 的第二个连通分支双射到 X 的后半部分。由此可见，h 映上 X，但它不是一一映射，因为 $h(1)=h(2)$。令 $B=C(Y)$

，并令 $A=C(X)$ ，视为 B 在单态射下的子代数

$$f\in A\hookrightarrow f\circ h\in B.$$

由于 B 是交换的，因此 B 的所有子集都必然是 B-不变的，我们可知 A 满足公理 (INV)。此外，由 [7: 2.11.14] 可知，A 满足理想交性质。于是定理 (3.5) 适用，但我们认为它不能推广到正则理想之外。为此，我们将给出 B 的两个不同理想 J_1 和 J_2，它们并非全都正则，且满足 $J_1\cap A=J_2\cap A$。

选取

$$J_1=\{f\in C(Y):f(1)=0\},$$

and

$$J_2=\{f\in C(Y):f(1)=f(2)=0\},$$

容易看出

$$J_1\cap A=J_2\cap A=\{g\in C(X):g(1)=0\},$$

因此，(3.5) 中提到的映射 α 不是单射。

回到对正则理想的分析，可以注意到，在当前这个例子中，不存在从 $C(Y)$ 到 $C(X)$ 的条件期望，因此 [2: 定理 3.18] 不适用。然而，如前所述，(3.5) 的假设均已满足，所以可以得出结论：$C(Y)$ 的正则理想布尔代数与 $C(X)$ 的所有正则理想构成的布尔代数同构（注意，由于交换性，$C(X)$ 的每个理想都是 $C(Y)$-不变的）。

References

[1] J. Brown、L. Clark、C. Farthing 和 A. Sims，《与 ´étale 群胚相关的代数的简单性》，*Semigroup Forum*，88 (2014)，第 2 期，433–452 页。[2] J. Brown、A. Fuller、D. Pitts 和 S. Reznikoff，《正则理想、理想交与商》，arXiv: 2208 09943 。

[ ], 2022

math.OA。[3] J. Brown、G. Nagy、S. Reznikoff、A. Sims 和 D. Williams，《Hausdorff ´étale 群胚的 C*-代数中的 Cartan 子代数》，*Integral Equations Operator Theory*，85 (2016)，第 1 期，109–126 页。[4] J. Cuntz 和 W. Krieger，《一类 C*-代数与拓扑马尔可夫链》，*Inventiones Math.*，56 (1980)，251–268 页。[5] J. Dixmier，《有限型因子中的极大阿贝尔子环》，*Ann. of Math.*，59 (1954)，279–286 页。[6] R. Exel，《非 Hausdorff 群胚》，*Proc. Amer. Math. Soc.*，139 (2011)，897–907 页。[7] R. Exel 和 D. Pitts，《非 Hausdorff ´étale 群胚的群胚 C*-代数的刻画》，Lecture Notes in Mathematics，2306 卷。Springer，Cham，2022。viii+158 页。[8] J. Renault，《C*-代数的群胚方法》，Lecture Notes i n Mathematics，第 793 卷，Springer，1980。[9] J. Renault，《C*-代数中的 Cartan 子代数》，*Irish Math. Soc. Bulletin*，61 (2008)，29–63 页。