arXiv:2301.10091v1 [math.FA] 24 Jan 2023

Drury-Arveson 空间中的循环性与迭代对数

ALEXANDRU ALEMAN、KARL-MIKAELPERFEKT、STEFAN RICHTER、
CARL SUNDBERG 和 JAMES SUNKES

摘要。设 H_d^2 为 Drury-Arveson 空间，且 $f \in H_d^2$在 $\mathbb{B}_d$中具有有界辐角且无零点。我们证明， f在 H_d^2 中是循环的，当且仅当 $\log f$ 属于 Pick-Smirnov 类 $N^+(H_d^2)$。此外，对于具有有界辐角且 H^∞-范数小于 1 的无零函数 $f \in H_d^2$，也可以通过迭代对数来检验其循环性。例如，我们证明，f是循环的，当且仅当 $\log(1 + \log(1/f)) \in N^+(H_d^2)$。因此，循环性的一个充分条件是 $\log(1 + \log(1/f)) \in H_d^2$。更一般地，我们的结果适用于所有同时为完全 Pick 空间的径向加权 Besov 空间。

1. 引言

对于 $d \in \mathbb{N}$，令 $\mathbb{B}_d$ 表示 $\mathbb{C}^d$ 的开单位球。设 $\mathcal{H}$ 是定义在 $\mathbb{B}_d$ 上的函数希尔伯特空间。我们用 $\mathrm{Mult}(\mathcal{H}) = \{\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{B}_d) : \varphi f \in \mathcal{H} \text{ for all } f \in \mathcal{H}\}$ 表示 $\mathcal{H}$ 的乘子，并称 $f \in \mathcal{H}$ 在 $\mathcal{H}$ 中是循环的，如果 $\{\varphi f : \varphi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})\}$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。

本文的结果适用于同时也是完全 Pick 空间的径向加权 Besov 空间$\mathcal{H}$；精确定义见第 2 节。兼属这两类空间的例子中，或许最有趣的是定义在单位圆盘 $\mathbb{D} = \mathbb{B}_1$ 上的狄利克雷空间。

$$D = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f'|^2 dA < \infty\}$$

以及 Drury-Arveson 空间 H_d^2，当 $d = 1$ 时，它与经典Hardy空间 $H^2(\mathbb{D})$ 重合。 H_d^2 被定义为定义在 $\mathbb{B}_d$ 上的解析函数所构成的唯一希尔伯特空间，其再生核为 $k_w(z) = \frac{1}{1-\langle z,\, w\rangle}$。或者，也可以将 H_d^2 定义为：解析

日期：2023年1月25日。2020 数学主题分类。主要分类号 47B32、47A16；次要分类号 30H25。

函数 $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \hat{f}(\alpha) z^\alpha \in H_d^2$ 当

$$\|f\|_{H_d^2}^2 = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\alpha!}{|\alpha|!} |\hat{f}(\alpha)|^2 < \infty.$$

通常，如果 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ and $z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d$, then $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot \cdots \cdot \alpha_d!$, and $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot z_d^{\alpha_d}$。

Drury-Arveson 空间已被证明对多变量算子理论十分重要。许多经典结果已知在 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$ 中成立且有用，这些结果也扩展到了 H_d^2 以及许多其他完全 Pick 空间。本文将反复用到一个关于所有完全 Pick 空间的事实 $\mathcal{H}$，即 $\mathcal{H}$ 包含在相应的 Pick-Smirnov 类中

$$N^+(\mathcal{H}) = \{\varphi/\psi : \varphi, \psi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H}), \psi \text{ cyclic}\},$$

见 [2]。

现在假设 $\mathcal{H}$ 是一个同时也是完全 Pick 空间的径向加权 Besov 空间。在这种情况下，利用 $\mathcal{H} \subseteq N^+(\mathcal{H})$ 这一事实，可以直接看出：$f \in \mathcal{H}$ 是循环的，当且仅当 $1/f \in N^+(\mathcal{H})$；参见定理 3.1。因此，利用 $N^+(\mathcal{H})$ 是一个代数这一点，我们可以看到，f 具有循环性的一个充分条件是：对于某个正整数 n，$f^{-1/n} \in \mathcal{H}$。因此，考虑 $\log f$ 是合理的。如果 $f(z) \neq 0$ 对所有 $z \in \mathbb{B}_d$ 都成立，那么我们称 f 具有有界辐角；若存在 $M > 0$，使得对于某个对数分支，$|\operatorname{Im} \log f| \leq M$ 属于 $\mathbb{B}_d$，则亦然。当然，对于 $\log f$ 的不同分支，该条件仍然成立，但 M 可能不同。对于 $n \in \mathbb{N}$，在右半平面上定义解析函数 G_n，使得 $G_1(z) = z$ 且 $G_{n+1}(z) = \log(1 + G_n(z))$，$n \in \mathbb{N}$。

定理 1.1. 设 $\mathcal{H}$ 是一个同时也是完全 *Pick* 空间的径向加权 *Besov* 空间。若 $f \in \mathcal{H}$ 在 $\mathbb{B}_d$ 上无零点且有有界辐角，则

(a) 对数 $f \in N^+(\mathcal{H})$ 当且仅当 f 在 $\mathcal{H}$ 中是循环的；*(b)* 若还满足 $\|f\|_\infty \leq 1$，则以下条件等价：(i) f 在 $\mathcal{H}$ 中是循环的，(ii) 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $G_n \circ$ 对数$(1/f) \in N^+(\mathcal{H})$，(iii) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，$G_n \circ$ 对数$(1/f) \in N^+(\mathcal{H})$。

因此，在情形 *(b)* 下，循环性的一个充分条件是：存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $G_n \circ$ 对数$(1/f) \in \mathcal{H}$。

我们称一个 d 变量多项式是稳定的，如果它在 $\mathbb{B}_d$ 中没有任何零点。稳定多项式具有有界辐角，见

引理 6.1。对于狄利克雷空间 D，已知所有稳定多项式都是循环的 [6]。在引理 6.3 中，我们将证明，对于所有次数为 $\leq n$ 的稳定多项式，$\log(1+\log \frac{2^n p_{(0)} p(z)}{\quad})$ $\in D$，也就是说，可以根据定理 1.1 中取 $n=2$ 时的充分条件推出其循环性。

若 $d \geq 4$，则已知在 H_d^2 ([5], 第 2 节) 中，存在非循环的稳定多项式。因此，存在带有有界辐角的非零函数$f \in H_d^2$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$G_n \circ \log(1/f) \notin N^+(H_d^2)$。然而，若 p 是仅依赖变量 z_1 和 z_2 的稳定多项式，则已知 p 在 H_d^2 中是循环的，参见 [8] 和 [5]。与狄利克雷空间的情形相同，我们将在第 6 节证明，也可以利用定理 1.1 的充分条件并结合 $n=2$ 得到这一结果。此外，我们还将在第 6 节给出更多循环多项式 p 的例子；它们在 H_d^2 中的零点位于 $\partial \mathbb{B}_d$ 上，并且对某个适当的常数 c，满足 $\log(1+\log \frac{c}{p}) \in H_d^2$。

问题 1.2. 若 $f \in H_d^2$ 在 H_d^2中是循环的，具有有界辐角，且$\|f\|_\infty \leq 1$，那么是否存在 n使得 $G_n \circ$对数$(1/f) \in H_d^2$? 如果存在， n是否与 f无关?

如果 f 没有正下界，那么 $G_n \circ$ 对数$(1/f)$ 将无界，但 n 越大，它在 $\partial \mathbb{B}_d$ 附近的增长就越慢。因此，从某种意义上说，对于具有有界辐角的函数，定理 1.1 建立了循环性与类 $N^+(\mathcal{H})$ 中元素的例外集之间的联系。如果 $\mathcal{H}=H^2(\mathbb{D})$，且 f 是奇异内函数，那么$N^+(H^2(\mathbb{D}))$ 就是经典的斯米尔诺夫类；尽管对数 $f \in N^+(H^2(\mathbb{D}))$， f 在 $H^2(\mathbb{D})$ 中并非循环的。这说明，如果在定理 1.1 中简单地删去关于 f 辐角的条件，那么该定理便不再成立。另一方面，如果 f 是从单位圆盘映到一个与其中心 0 保持正距离的丰饶形区域的共形映射，那么 f 就是一个外函数（因此在 $H^2(\mathbb{D})$ 中是循环的），但它不具有有界辐角。因此，定理 1.1 中有界辐角这一假设是否可以弱化，值得探讨。对于狄利克雷空间 D，我们将在一篇即将发表的论文中证明，在以 f 为外函数取代有界辐角这一假设下，对数条件仍然充分。

本文的结构安排如下。第 2 节汇集了证明定理 1.1 所需的重要定义和已知事实。第3节介绍完全 Pick 空间中函数的一些基本事实，第4节则给出在径向加权 Besov 空间中成立的关键引理。定理 1.1 在第5节中得到证明。第 6 节中，我们验证某些稳定多项式

满足定理 1.1 的假设；第 7 节提出一个开放问题，并给出一项部分结果。

2. 预备知识

2.1. **定义**。定义在集合 X 上的希尔伯特函数空间 $\mathcal{H}$ 是由定义在 X 上的复值函数构成的希尔伯特空间，并且对每个 $z \in X$，求值泛函 $f \to f(z)$ 在 $\mathcal{H}$ 上都是连续的。若 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是希尔伯特函数空间，则记

$$\mathrm{Mult}(\mathcal{H},\mathcal{K}) = \{\varphi : \varphi f \in \mathcal{K} \text{ for all } f \in \mathcal{H}\}$$

为从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{K}$ 的乘子。如上所述，我们记 $\mathrm{Mult}(\mathcal{H}) = \mathrm{Mult}(\mathcal{H},\mathcal{H})$。每个乘子 $\varphi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 都定义一个有界乘法算子 $M_\varphi : \mathcal{H} \to \mathcal{K}, f \to \varphi f$，并且通过设定 $\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H},\mathcal{K})} = \|M_\varphi\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})}$，$\mathrm{Mult}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ 成为一个巴拿赫空间。

每个希尔伯特函数空间 $\mathcal{H}$ 都有一个再生核 $k : X \times X \to \mathbb{C}$。记 $k_w(z) = k(z,w)$，则它满足 $f(w) = \langle f, k_w\rangle$ 对所有 $f \in \mathcal{H}, w \in X$ 都成立。若再生核 k 定义在 X 上，且存在 $w_0 \in X$ 以及一个从 X 到某个辅助希尔伯特空间 $\mathcal{K}$ 的函数 b，使得 $b(w_0) = 0$，则称其为归一化完全 Pick 核，并且

$$k_w(z) = \frac{1}{1 - \langle b(z), b(w)\rangle_{\mathcal{K}}}.$$

在有趣的情形下，$\mathcal{H}$ 是解析函数的希尔伯特空间，可以很容易地证明 $\mathcal{H}$ 是可分的，此时也可以假设 $\mathcal{K}$是可分的。正如引言中提到的，单位圆盘上的狄利克雷空间D 和 Drury-Arveson 空间 H^2_d 都是具有归一化完全 Pick 核的空间。具有归一化完全 Pick 核的空间拥有许多性质，与人们熟悉的 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D})$中的性质相似。对于本文而言，最重要的性质是 $\mathcal{H} \subseteq N^+(\mathcal{H})$，见 [2]；关于更多细节，也请参见下文的定理 2.1。注意，如果用等价范数替换 $\mathcal{H}$ 上的范数，这一性质仍然成立。因此，我们将完全 Pick 空间 $\mathcal{H}$ 定义为满足以下条件的希尔伯特函数空间：在 $\mathcal{H}$ 上存在一个等价范数，使得该等价范数对应的再生核是归一化完全 Pick 核。

设 $d \in \mathbb{N}$。我们用 $\mathrm{Hol}(\mathbb{B}_d)$ 表示$\mathbb{B}_d$上的解析函数。径向加权 Besov 空间具有如下形式

$$B^N_\omega = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{B}_d) : R^N f \in L^2(\omega)\}.$$

这里，N 是非负整数，$R = \sum_{j=1}^d z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$ 是径向导数算子，ω 是在 $\overline{\mathbb{B}_d}$ 上的测度，类型为 $d\omega(z) = d\mu(r)d\sigma(w)$，其中 $z = rw$, σ 是归一化旋转不变

测度，定义在 $\partial\mathbb{B}_d$ 上，而 μ 是定义在 $[0,1]$ 上且满足 $\mu((r,1]) > 0$（对每个满足 $0 < r < 1$ 的实数 r ）的博雷尔测度。这类测度称为可容许径向测度。若 μ 在 1 处有点质量，则解析函数 f 的 $L^2(\omega)$-范数应按 $\|f\|^2_{L^2(\omega)} = \int_{\mathbb{B}_d} |f|^2 d\omega + \mu(\{1\})\|f\|^2_{H^2(\partial\mathbb{B}_d)}$ 理解。我们在 B^N_ω 上定义一个范数:

$$\|f\|^2_{B^N_\omega} = \begin{cases} \|f\|^2_{L^2(\omega)}, & \text{if } N = 0, \\ \omega(\mathbb{B}_d)|f(0)|^2 + \|R^N f\|^2_{L^2(\omega)}, & \text{if } N > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

并且我们注意到，关于 μ 的假设意味着每个 B^N_ω 都是 $\mathbb{B}_d$ 上的希尔伯特函数空间。为便于后文参考，我们还注意到

$$\|f\|^2_{B^N_\omega} = \omega(\mathbb{B}_d)|f(0)|^2 + \|Rf\|^2_{B^{N-1}_\omega} \tag{2.2}$$

对所有 $N > 0$ 均成立。

Drury-Arveson 空间 H^2_d 是一个径向加权 Besov 空间。计算可得 $\|f_n\|^2_{H^2(\partial\mathbb{B}_d)} = \frac{n!\ (d-1)!}{(n+d-1)!}\|f_n\|^2_{H^2_d}$，其中 f_n 是一个次数为 n 的齐次多项式，参见例如第 2 节 [9], 。利用该恒等式可验证，对所有 $N \geq 0$

$$\|f\|^2_{B^N_\omega} = \omega(\mathbb{B}_d)|f(0)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{2N}\omega_n\|f_n\|^2_{H^2_d}, \tag{2.3}$$

其中 $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ 是将 f 表示为次数为 n 的齐次多项式之和。这里 $\omega_n = \frac{n!\ (d-1)!}{(n+d-1)!}\int_{[0,1]} r^{2n} d\mu(r)$。由此可得 $H^2_d = B^N_\omega$，且范数等价，其中某些 N 和 ω 依赖于 d。事实上,

$$H^2_d = \begin{cases} B^{(d-1)/2}_\omega & \text{if } d \text{ is odd}, \omega = \sigma \\ B^{d/2}_\omega & \text{if } d \text{ is even}, \omega = V. \end{cases} \tag{2.4}$$

这里的 V 表示 $\mathbb{B}_d$上的归一化勒贝格测度。

更一般地，在 [4] 中已证明，若 $\alpha > -1$ 且 $d\omega(z) = w(z)dV(z)$, 其中 $w(z) = (1-|z|^2)^\alpha$ 随 $|z| \to 1$ 单调不减，则对于 $N \geq \frac{\alpha+d}{2}$，空间 B^N_ω 是一个完全 Pick 空间。

若 $\mathcal{H}$ 是一个希尔伯特函数空间，且 $f \in \mathcal{H}$，则我们用 $[f]$表示包含 f的最小乘子不变子空间，$[f] = \{\varphi f : \varphi \in \text{Mult}(\mathcal{H})\}^{\mathcal{H}}$。因此， f 是循环的，当且仅当 $[f] = \mathcal{H}$。在本文将讨论的所有情形中， $\mathcal{H}$ 的乘子在 $\mathcal{H}$中稠密。因此， f 在 $\mathcal{H}$中是循环的，当且仅当 $1 \in [f]$。

2.2. **将要用到的已知定理**。本节汇集了一些已知结果，这些结果将在主要定理的证明中用到。关于完全 Pick 空间，首先需要的结果是 [3], 的定理 1.1 (i)，现将其重述为 $g_w(z) = 1$ and$\mathcal{E} = \mathbb{C}$的情形。

定理 2.1。 设 $\mathcal{H}$ 是一个定义在 X 上的希尔伯特函数空间，其再生核 k 是一个满足 $k_{w_0} = 1$的归一化 *Pick* 核。对于f： $X \to \mathbb{C}$， 以下条件等价:

(i) $f \in \mathcal{H}$ 且 $\|f\| \leq 1$(ii) 存在乘子 $\varphi, \psi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})$ 使得(a) $f = \frac{\varphi}{1-\psi}$(b) $\psi(w_0) = 0$，并且 (c) $\|\psi h\|^2 + \|\varphi h\|^2 \leq \|h\|^2$ 对每个 $h \in \mathcal{H}$都成立。

下一个引理中的 (a) 是 [2] 的引理 2.3，而 (b) 是 [5]的引理 6.7。

引理 2.2。 *(a)* 如果 $\psi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})$ 不是常数，且 $\|\psi\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})} \leq 1$，那么 $1 - \psi$ 在 $\mathcal{H}$中是循环的。

(b) 如果 $\mathcal{H}$ 是完全 *Pick* 空间，且对于 $u, v \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})$，若 $f = \frac{u}{v} \in \mathcal{H}$ ， v 是循环的，则 $[f] = [u]$。

以下内容是 [1]中的引理 3.3。

引理 2.3。 设 $\mathcal{H}$ 是定义在集合 X 上的希尔伯特函数空间，其核为归一化完全 *Pick* 核。

如果 $f, g \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})$ 满足 $g \in [f]$，那么存在一个序列 $\{\varphi_j\} \subseteq \mathrm{Mult}(\mathcal{H})$ 满足 $\varphi_j(z) f(z) \to g(z)$，对所有 $z \in X$均成立，并且 $\|\varphi_j f\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})} \leq \|g\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})}$ 对所有 $j \in \mathbb{N}$均成立。

特别地，由此可知，若乘子 $f \in$Mult($\mathcal{K}$) 在完全 Pick 空间 $\mathcal{K}$中是循环的，则存在一个序列 $\{\varphi_j\} \subseteq$ Mult($\mathcal{K}$)，使得 $\varphi_j(z) f(z) \to 1$ 对所有 $z \in X$均成立，且 $\|\varphi_j f\|_\infty \leq 1$。事实上，从具有归一化完全 Pick 核的希尔伯特函数空间 $\mathcal{H}$ 转到完全 Pick 空间 $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ 时，我们必须注意到，空间上的等价范数意味着乘子范数等价。不过，新陈述是成立的，因为 $\|u\|_\infty \leq \|u\|_{\mathrm{Mult}\mathcal{K}}$，并且对所有满足 $1 \in \mathcal{K}$ 的希尔伯特函数空间， $\|1\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{K})} = 1$。已知以下引理对所有径向加权 Besov 空间均成立，而且在 [5]中也曾多次用到。

引理 2.4 ([5], 引理 4.2)。 设 $N \in \mathbb{N}$ 且 ω 是可容许径向测度。令 φ 为定义在 $\mathbb{B}_d$上的解析函数。

那么，对于每个满足 $1 \leq k \leq N$ 的整数 k ，当且仅当 $\varphi \in \mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$ 且 $R\varphi \in \mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)$ 时，有 $\varphi \in \mathrm{Mult}(B^k_\omega)$ 。

此外，

$$\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} \approx \|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)} + \|R\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)}.$$

最后，我们回顾 [5]的定理 1.8。

定理 2.5。 设 $N \in \mathbb{N}$，且 B^N_ω 是一个径向加权 *Besov* 空间，同时也是一个完全 *Pick* 空间，并且 f， $g \in B^N_\omega$。

如果对于所有 $z \in \mathbb{B}_d$， $|f(z)| \le |g(z)|$ ，且如果 f 是循环的，那么 g 是循环的。

3. 循环性的一个条件

我们先从一个简单但重要的观察开始。

定理 3.1. 假设 $\mathcal{H}$ 具有归一化完全 *Pick* 核。设$f \in \mathcal{H}$。那么， f 是循环的，当且仅当 $1/f \in N^+(\mathcal{H})$。

证明。 假设 $\|f\| = 1$。由定理 2.1 和引理 2.2 可得，对于压缩乘子 u, v，有 $f = u/(1-v)$，其中 $[f] = [u]$且 $[1-v] = \mathcal{H}$。因此，若 f 是循环的，则 u 是循环的，且 $1/f = (1-v)/u \in N^+(\mathcal{H})$。反过来，若 $1/f \in N^+(\mathcal{H})$，则存在乘子 a 和 b，使得 $1/f = a/b$，其中 b 是循环的。于是 $au = b(1-v)$。由于 b和 $1-v$ 是循环乘子，显然 $b(1-v)$ 是循环的，因此$1 \in [b(1-v)] = [au] \subseteq [u] = [f]$。故 f 是循环的。■

因此，可以尝试验证对于某个 n，有 $f^{-1/n} \in \mathcal{H}$，从而证明一个函数是循环的。对于 $n = 1$ 和 $\mathcal{H} = H^2_d$，这是 [9]的结果之一。然而，即使 f 是循环的，这种情况往往对所有 n 都不成立。事实证明，考虑 $\log f$会更有希望。根据定理 2.1，下面的引理表明，我们可以将注意力限制在乘子上。

引理 3.2. 设 $\mathcal{H}$ 是定义在 $\mathbb{B}_d$上的希尔伯特函数空间。若 $\varphi \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H})$，且 $\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})} \le 1$ 和 $\varphi \ne 1$，则 $\log(1-\varphi) \in N^+(\mathcal{H})$。

证明. 注意，对每个 $z \in \mathbb{B}_d$，都有 $|\varphi(z)| < 1$ （见 [2]的引理 2.2），因此

$$\begin{aligned} u(z) &= (1-\varphi(z))\log(1-\varphi(z)) \\ &= -(1-\varphi(z))\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^n(z)}{n} \\ &= -\varphi(z)\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varphi^n(z)}{n(n+1)}\right). \end{aligned}$$

最后一个和在乘子范数下收敛，因此 u 是一个乘子，而 $\log(1-\varphi) = \frac{u}{1-\varphi}$ 是乘子之比；我们已经提到， $1-\varphi$ 是循环的（引理 2.2）。■

4. 关于加权 Besov 空间的引理

下面这个初等引理的 (a) 部分将在归纳论证中使用。在 (b) 部分中，我们已经进行了这样一个归纳。

引理 4.1。设 $N \in \mathbb{N}$ 和 ω 是可容许径向测度。固定一个满足 $1 \le k \le N$ 的整数 k。

(a) 对每个整数 $n \ge 0$，都存在一个 $C > 0$，使得只要 $\varphi, \psi \in \mathrm{Mult}(B^k_\omega)$ 且 $\psi^n e^{-\frac{\varphi}{\psi}} \in \mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$，就有 $\psi^{n+2} e^{-\frac{\varphi}{\psi}} \in \mathrm{Mult}(B^k_\omega)$，并且

$$\|\psi^{n+2} e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} \le C \|\psi^n e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)} (\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} + \|\psi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)})^2. \tag{4.1}$$

(b) 若 $\varphi \in \mathrm{Mult}(B^N_\omega)$ 在 $\mathbb{B}_d$ 中无零点，且 j 是一个满足 φ^j 对数 $\varphi \in H^\infty$的非负整数，则存在一个整数 $n \ge j$，使得 φ^n 对数 $\varphi \in \mathrm{Mult}(B^N_\omega)$。

证明。首先指出，径向加权 Besov 空间满足乘子包含条件 $\mathrm{Mult}(B^k_\omega) \subseteq \mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$，其中 $\|\cdot\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)} \le \|\cdot\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)}$，参见引理 2.4。

(a) 我们将使用引理 2.4。假设对于两个乘子 $\varphi, \psi \in \mathrm{Mult}(B^k_\omega)$ 和一个整数 $n \ge 0$，有 $\psi^n e^{-\frac{\varphi}{\psi}} \in \mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$。显然，$\psi^{n+2} e^{-\frac{\varphi}{\psi}} \in \mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$，其范数估计为

$$\|\psi^{n+2} e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)} \le \|\psi\|^2_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)} \|\psi^n e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)}.$$

利用收缩包含关系 $\mathrm{Mult}(B^k_\omega) \subseteq \mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$，我们看到，最后一个表达式由方程 (4.1) 右侧控制。

还需证明 $R(\psi^{n+2} e^{-\frac{\varphi}{\psi}}) \in \mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)$。直接计算可得

$$R(\psi^{n+2} e^{-\frac{\varphi}{\psi}}) = \psi^n e^{-\frac{\varphi}{\psi}} \left((n+2)(R\psi)\psi - ((R\varphi)\psi - (R\psi)\varphi)\right),$$

根据假设，显然该函数将 B^k_ω 乘入 B^{k-1}_ω。事实上，利用引理 2.4 可得范数估计

$$\begin{aligned}\|R(\psi^{n+2} e^{-\frac{\varphi}{\psi}})\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega, B^{k-1}_\omega)} \\ \le C(n+2) \|\psi^n e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_{\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)} (\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)} + \|\psi\|_{\mathrm{Mult}(B^k_\omega)})^2.\end{aligned}$$

(b) 注意，假设表明 $\varphi^j \log \varphi \in \mathrm{Mult}(B^0_\omega)$。

通过归纳法，只需证明如下命题：若 $1 \le k \le N$ 且若 φ^n 对数 $\varphi \in \mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$，则 φ^{n+1} 对数 $\varphi \in \mathrm{Mult}(B^k_\omega)$。

我们将再次使用引理 2.4。由于由乘子包含条件可知 $\varphi^{n+1} \log \varphi \in \mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$，因此只需证明 $R(\varphi^{n+1} \log \varphi)$ 将 B^k_ω 乘到 B^{k-1}_ω 中。我们有 $R(\varphi^{n+1} \log \varphi) =$

$((n+1)\log\varphi+1)\varphi^n R\varphi$。由于 $\varphi\in\mathrm{Mult}(B^k_\omega)$ $R\varphi$ 将 B^k_ω 乘到B^{k-1}_ω中。由 $((n+1)\log\varphi+1)\varphi^n\in\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$，结论得证。■

定理 4.2. 设 $\mathcal{H}$ 为一个径向加权 *Besov* 空间。

存在 $C>0$ 和 $n\in\mathbb{N}$，使得每当 $\varphi,\psi\in\mathrm{Mult}(\mathcal{H})$ 满足 *Re* $\frac{\varphi}{\psi}\geq 0$时，则 $\psi^n e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\in\mathrm{Mult}(\mathcal{H})$ 且

$$\|\psi^n e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})}\leq C(\|\psi\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})}+\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})})^n.$$

证明.设 $N\in\mathbb{N}$，并设 ω 是一个可容许径向测度，使得 $\mathcal{H}=B^N_\omega$。回顾一下，对于每个满足 $1\leq k\leq N$的整数 k，压缩包含 $\mathrm{Mult}(B^k_\omega)\subseteq\mathrm{Mult}(B^{k-1}_\omega)$ 均成立。

该假设意味着 $e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\in\mathrm{Mult}(B^0_\omega)=H^\infty$ 满足 $\|e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_\infty\leq 1$。于是，由引理 4.1 (a)可得

$$\|\psi^2 e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_{\mathrm{Mult}(B^1_\omega)}\leq C(\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^1_\omega)}+\|\psi\|_{\mathrm{Mult}(B^1_\omega)})^2$$

反复应用引理 4.1 (a)可得 $\psi^{2N}e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\in\mathrm{Mult}(B^N_\omega)$，其中

$$\|\psi^{2N}e^{-\frac{\varphi}{\psi}}\|_{\mathrm{Mult}(B^N_\omega)}\leq C(\|\varphi\|_{\mathrm{Mult}(B^N_\omega)}+\|\psi\|_{\mathrm{Mult}(B^N_\omega)})^{2N}.$$

当然，这里的常数有所变化，但它只取决于N。■

5. 对数与迭代对数

现在我们将讨论对数，并着手证明定理 1.1。为便于后文参考，我们注意到，若 f 和 g 是无零点解析函数，且 g 具有有界辐角，那么fg 具有有界辐角，当且仅当 f 具有有界辐角。出于技术上的原因，以下定义将很有用：

$$N^+_{ba}(\mathcal{H})=\{\frac{\varphi}{\psi}:\ \varphi,\psi\in\mathrm{Mult}(\mathcal{H})\ \psi\text{是循环的且具有有界辐角}\}.$$

注意，定理 2.1 意味着，若 $\mathcal{H}$ 是完全 Pick 空间，则$\mathcal{H}\subseteq N^+_{ba}(\mathcal{H})$。

定理 5.1。 设 $\mathcal{H}$ 是一个径向加权 *Besov* 空间，同时也是一个完全 *Pick* 空间。

设 $f\in H^\infty$ 无零点且有有界辐角。若 对数$f\in N^+(\mathcal{H})$，则 f，$1/f\in N^+(\mathcal{H})$。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\|f\|_\infty\leq 1$，并假设 $|$实部 $\log f|\leq M$。由于 $\log f\in N^+(\mathcal{H})$，我们可以找到乘子$u,v\in\mathrm{Mult}(\mathcal{H})$，使得 v是循环的，且 $\log\frac{1}{f}=\frac{u}{v}$。接下来注意到 $\mathrm{Re}\frac{u}{v}\geq 0$。因此，我们可以使用定理 4.2 选取一个正整数 n，使得

that $v^n f \in \text{Mult}(\mathcal{H})$。由于 v^n 是循环的，这意味着 $f \in N^+(\mathcal{H})$。我们将通过证明 $v^n f$ 在 $\mathcal{H}$中是循环的，来证明 $1/f \in N^+(\mathcal{H})$（见定理 3.1）。

由定理 4.2 可知

$$\|v^n f\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})} \le C(\|u\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})} + \|v\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})})^n. \tag{5.1}$$

v 的循环性意味着存在乘子 p_j，使得$p_j v \to 1$ 属于 $\mathcal{H}$。由引理 2.3 及其后的注释可知，存在常数 $c > 0$ 以及乘子 b_j，使得 $b_j(z)v(z) \to 1$逐点成立，其中 $j \to \infty$, $\|b_j v\|_\infty \le 1$，且对每个 j，$\|b_j v\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})} \le c$。于是 $\text{Re}(1 - b_j v) \ge 0$，并且由于 $e^{b_j u} \in$ 属于 $\text{Mult}(\mathcal{H})$，我们有

$$v^n f e^{b_j u} \in [v^n f].$$

注意，$v^n f e^{b_j u} = v^n e^{-\frac{u}{v}(1-b_j v)}$并且

$$\begin{aligned}\text{Re}\left(\frac{u}{v}(1-b_j v)\right) &= \left(\text{Re}\frac{u}{v}\right)(\text{Re}(1-b_j v)) + \left(\text{Im}\,\frac{u}{v}\right)(\text{Im}(b_j v)) \\ &\ge 0 - |\,\text{Im}\log f| \ge -M.\end{aligned}$$

因此，我们可以对 $\varphi = u(1 - b_j v) + Mv$ 和 $\psi = v$应用定理 4.2，从而对每个 j得到

$$\begin{aligned}\|v^n e^{-\frac{u}{v}(1-b_j v)}\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})} &\le Ce^M(\|u(1-b_j v) + Mv\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})} + \|v\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})})^n \\ &\le Ce^M((1+c)\|u\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})} + (M+1)\|v\|_{\text{Mult}(\mathcal{H})})^n.\end{aligned}$$

因此，当 $j \to \infty$ 时，$v^n f e^{b_j u} \to v^n$ 在 $\mathcal{H}$ 中弱收敛。这意味着 $v^n \in [v^n f]$。但 v^n 是循环的，因此 $v^n f$ 是循环的，且 $1/f \in N^+(\mathcal{H})$。■

引理 5.2。设 $\mathcal{H}$ 是一个径向加权 *Besov* 空间，同时也是完全 *Pick* 空间，并设 $G(z) =$ 对数$(1+z)$ 在右半平面内定义。这里 对数 表示主值支。

设 $F \in \text{Hol}(\mathbb{B}_d)$，且对所有 $z \in \mathbb{B}_d$，$\mathit{Re}F(z) > 0$。

(*a*) 若 $G \circ F \in N^+(\mathcal{H})$，则 $F \in N^+(\mathcal{H})$。(*b*) 反之，若 $F \in N^+_{ba}(\mathcal{H})$，则 $G \circ F \in N^+_{ba}(\mathcal{H})$。

证明。(a) 由于 $\text{Re}F(z) \ge 0$，我们有 $\frac{1}{1+F} \in H^\infty$，并且显然$|\,\text{Im}\log \frac{1}{1+F}| \le \pi/2$，因此定理 5.1 适用，从而得出$1 + F \in N^+(\mathcal{H})$。这意味着 $F \in N^+(\mathcal{H})$。

(b) 假设 $F = \frac{u}{v}$ 是乘子 u, v，其中 v 是循环的且具有有界辐角。由于 $1 \le |1+F| = |1+u/v|$，我们有 $|v| \le |u+v|$属于 $\mathbb{B}_d$。由定理 2.5，v 的循环性意味着 $u + v$ 是循环的。接着注意，对每个正整数 n，$v^n(u+v)^n$也是循环乘子。显然，$1 + F$ 具有有界辐角，因此关于 v 的假设也意味着 $u + v = v(1 + F)$具有有界辐角，从而对每个正整数，$v^n(u+v)^n$ 也具有有界辐角

n。此外，若乘子 φ 没有零点且具有有界辐角，则 φ对数 $\varphi \in H^\infty$。根据引理 4.1(b)，存在整数 n 使得φ^n对数 $\varphi \in$ Mult($\mathcal{H}$)。我们将此结论分别应用于 $\varphi = v$和 $\varphi = u+v$，得到存在 n 使得

$$v^n(u+v)^n(log(u+v) - logv) \in \mathrm{Mult}(\mathcal{H}).$$

(b) 可由此得出。 ■

现在证明定理 1.1，为方便起见，我们重述如下。回顾一下，对于 $n \geq 1$，有 $G_1(z) = z$ 和 $G_{n+1}(z) = G(G_n(z))$。

定理。 设 $\mathcal{H}$ 是一个同时也是完全 *Pick* 空间的径向加权 *Besov* 空间。若 $f \in \mathcal{H}$ 在 $\mathbb{B}_d$ 上无零点且有有界辐角，则

(a) 对数 $f \in N^+(\mathcal{H})$ 当且仅当 f在 $\mathcal{H}$中是循环的；*(b)* 若还有 $\|f\|_\infty \leq 1$，则以下条件等价：(i) f 在 $\mathcal{H}$中是循环的，(ii)存在 $n \in \mathbb{N}$使得 $G_n \circ$对数$(1/f) \in N^+(\mathcal{H})$，(iii)对于每个 $n \in \mathbb{N}$， $G_n \circ$对数$(1/f) \in N^+(\mathcal{H})$。

证明。 (a) 只需在 $\|f\| \leq 1$的情形下证明定理。由定理 2.1 可知，对于满足 $\psi \neq 1$的压缩乘子 φ、ψ，有 $f = \frac{\varphi}{1-\psi}$。在引理 3.2 中，我们已证明 log$(1-\psi) \in N^+(\mathcal{H})$。此外，由于 Re $1-\psi \geq 0$，显然 f 的辐角有界，当且仅当 φ 的辐角有界。因此，由于$[f] = [\varphi]$，只需在附加假设f 是满足 $\|f\|_{\mathrm{Mult}(\mathcal{H})} \leq 1$的乘子的条件下证明 (a)。

在这种情况下 $f \in H^\infty$。因此，若 log $f \in N^+(\mathcal{H})$，则f 的循环性由定理 5.1 得出。反过来，我们假设f是一个循环的乘子。由于 f有界，因此 $|f|$ log $|f||$有界。因此，该假设意味着 f log $f \in H^\infty$。接着，引理 4.1(b)推出，对于某个自然数 n 以及某个 $w \in$ Mult($\mathcal{H}$)，有 log$f = \frac{w}{f^n}$。由于 f^n 是循环的且具有有界辐角，我们得出 log $f \in N^+_{ba}(\mathcal{H}) \subseteq N^+$({v19)。

(b) 我们假设 f 不是常数。令 $F =$ log$(1/f)$。由于$\|f\|_\infty \leq 1$，我们有 Re $F(z) > 0$在 $\mathbb{B}_d$中。由 (a) 的证明可知， f 在 $\mathcal{H}$中是循环的，当且仅当 $F \in N^+_{ba}$ ($\mathcal{H}$)。因此，(b) 可由反复应用引理 5.2 得出。■

6. 多项式

回顾一下，稳定多项式是指在 $\mathbb{B}_d$中没有零点的多项式。首先注意到，稳定多项式总是具有有界辐角。

引理 6.1。若 p 是一个以 d 个变量构成、总次数为 $\leq n$的多项式，且若 $p(z) \neq 0$ 对所有 $z \in \mathbb{B}_d$都成立，则 $|$实部对数 $p(z) -$对数 $p(0)| \leq n\pi$。

证明。首先，令 $q(\lambda)$ 为一个单变量多项式，其次数等于n，且 q 在 $\mathbb{D}$ 中没有零点。那么存在 $A_1, ..., A_n$，使得$|A_i| \geq 1$ 并且

$$\frac{q'(\lambda)}{q(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda - A_i}.$$

那么对于 $|z| < 1$

$$\log q(z) - \log q(0) = \int_{[0,z]} \frac{q'(\lambda)}{q(\lambda)} d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,z]} \frac{1}{\lambda - A_i} d\lambda.$$

因此

$$|\operatorname{Im}(\log q(z) - \log q(0))| \leq \sum_{i=1}^{n} |\operatorname{Im} \int_{[0,z]} \frac{1}{\lambda - A_i} d\lambda| \leq n\pi.$$

现在，若 p 是一个关于 d 个变量的多项式，其总次数为 $\leq n$，那么对每个 $z \in \mathbb{B}_d$，函数 $q_z(\lambda) = p(\lambda z)$ 都是一个单变量多项式，其对数 $p(z)$ $=$对数 $q_z(1)$，且对数 $p(0)$ $=$对数$q_z(0)$。因此结论由单变量情形推出。■

在某些情况下，可以利用定理 1.1 证明稳定多项式是循环的。我们将使用切片函数，并从关于单变量函数的两个引理开始。

引理 6.2. 对于 $x \geq 1$，令 $h(x) =$ $\frac{x^2}{(1+\text{对数 } x)^2}$。则

$$\int_{\mathbb{D}} h\left(\frac{2|\lambda|}{|z-\lambda|}\right) \frac{dA(z)}{\pi} \leq 16$$

对所有满足 $|\lambda| \geq 1$ 的 $\lambda \in \mathbb{C}$。

证明。注意到 h 是递增的。因此，若 $|\lambda| \geq 2$，则对所有 $z \in \mathbb{D}$，我们有

$$h\left(\frac{2|\lambda|}{|z-\lambda|}\right) \leq h\left(\frac{2|\lambda|}{|\lambda|-1}\right) \leq h(4) \leq 16.$$

因此，该引理至少对 $|\lambda| \geq 2$ 成立。

如果 $1 \leq |\lambda| \leq 2$ 且 $z \in \mathbb{D}$，那么

$$h\left(\frac{2|\lambda|}{|z-\lambda|}\right) \leq h\left(\frac{4}{|z - \frac{\lambda}{|\lambda|}|}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} h\left(\frac{2|\lambda|}{|z-\lambda|}\right)\frac{dA(z)}{\pi} &\le \int_{\mathbb{D}} h\left(\frac{4}{|z-1|}\right)\frac{dA(z)}{\pi}\\ &\le \int_{|w|\le 2} h(\frac{4}{|w|})\frac{dA(w)}{\pi}\\ &= \frac{2}{1+\log 2} \le 16.\end{aligned}$$

■

注意，若 p 是次数为 n的稳定多项式，则存在λ_1、.....、$\lambda_n \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$ 以及 $c\in\mathbb{C}$、$c\neq 0$，使得 $p(z) = c\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)$。于是

$$|p(z)| \le |c|\prod_{j=1}^{n}(1+|\lambda_j|) \le 2^n|c|\prod_{j=1}^{n}|\lambda_j| = 2^n|p(0)|$$

对所有 $z\in\mathbb{D}$均成立。因此，若 p 是任意一个次数为 $\le n$的稳定多项式，则多项式 $q(z) = p(z)/(2^n p(0))$ 满足 $\|q\|_\infty \le 1$。

引理 6.3. 设 p 是一个单变量、次数为 $\le n$的稳定多项式。令 $F(z) = $对数$(1+$对数 $^{2^n p_{(0)}\, p(z)})$，则 $\int_{\mathbb{D}} |F'(z)|^2 \frac{dA}{\pi} \le 16n^2$。

证明。 首先假设 p 的次数等于 n。则存在 $c\in\mathbb{C}$和 λ_1、.....、$\lambda_n \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$，使得 $p(z) = c\prod_{j=1}^{n}(z-\lambda_j)$。于是

$$|1+\log\frac{2^n p(0)}{p(z)}| \ge 1+\log\frac{2^n|p(0)|}{|p(z)|} = 1+\sum_{j=1}^{n}\log\frac{2|\lambda_j|}{|z-\lambda_j|} \ge 1+\log\frac{2|\lambda_k|}{|z-\lambda_k|}$$

对所有的 $z\in\mathbb{D}$ 和 $1\le k\le n$。然后

$$\begin{aligned}|F'(z)|^2 &= \frac{1}{|1+\log\frac{2^n p(0)}{p(z)}|^2}\left|\frac{p'(z)}{p(z)}\right|^2\\ &\le \frac{1}{(1+\log\frac{2^n|p(0)|}{|p(z)|})^2}|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-\lambda_k}|^2\\ &\le n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\log\frac{2^n|p(0)|}{|p(z)|})^2}\frac{1}{|z-\lambda_k|^2}\\ &\le n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+\log\frac{2|\lambda_k|}{|z-\lambda_k|})^2}\frac{4|\lambda_k|^2}{|z-\lambda_k|^2}\end{aligned}$$

因此，如果 p 的次数等于 n，那么结论便由引理 6.2 得出。

如果次数为 $k < n$，那么 $1 +$对数$\frac{2^n|p}{(\quad 0\,|\,)\ (\,)\,|} \geq 1 +$对数$\frac{2^k|p}{(\quad 0\,|\,)\ (\,)\,|}$，在上述已证明的情形中取 $n = k$，即可得出该引理。■

引理 6.3 与定理 1.1 一起证明了：在 $\mathbb{D} = \mathbb{B}_1$ 中无零点的多项式在狄利克雷空间 D 中是循环的。这一点虽已为人所知，但有趣的是，属于 $N^+(D)$ 可以通过属于 D 来确立。同样，下面的定理给出了一种新的证明：对于 $d = 2$，所有在 $\mathbb{B}_d$ 中无零点的多项式在 H^2_d 中都是循环的，参见 [8] 或 [5]，定理 1.6。

定理 6.4. 若 ω 是 $\mathbb{B}_d$ 上如下形式的可容许测度

$$d\omega(\zeta) = u(r)2rdrd\sigma(z), \zeta = rz,$$

对某个 $u \in L^\infty[0,1]$ 成立，且若 p 是稳定多项式，则

$$F(z) = \log(1 + \log(\frac{2^n p(0)}{p(z)})) \in B^1_\omega,$$

其中 $n \geq$ 是 p 的次数。

回想一下，若 $d = 2$ 和 $\omega = V =$ 是 $\mathbb{B}_2$ 上的勒贝格测度，则$H^2_2 = B^1_\omega$。因此，对于稳定多项式，定理 1.1 的假设可以通过属于 H^2_d 来验证。

证明。显然，我们可以假设对所有 $r \in [0,1]$，$u(r) = 1$。若$z \in \partial\mathbb{B}_d$，则将切片函数 $F_z(\lambda) = F(\lambda z)$ 写作 F_z。注意，$|RF(\lambda z)| = |\lambda(F_z)'(\lambda| \leq |(F_z)'(\lambda)|$。因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}_d} |RF(\zeta)|^2 d\omega(\zeta) &= \int_{\partial\mathbb{B}_d}\int_0^1\int_0^{2\pi} |RF(e^{it}rz)|^2 \frac{dt}{2\pi} 2rdrd\sigma(z)\\ &\leq \int_{\partial\mathbb{B}_d}\int_{\mathbb{D}} |(F_z)'(\lambda)|^2 \frac{dA(\lambda}{\pi} d\sigma(z)\\ &\leq 16n^2\end{aligned}$$

由引理 6.3 得出，其中应用了切片多项式 $p_z(\lambda) = p(\lambda z)$。 ■

在 [5] 的第 2 节中已经证明，对于 $d \geq 3$，多项式$p_1(z) = 1 - 3^{3/2}z_1z_2z_3$ 和 $p_2(z) = 1 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$ 是稳定多项式的例子，它们在 H^2_d 中是循环的，且其在 $\partial\mathbb{B}_d$ 内的零点集是二维的。证明基于以下两个从 D 到 H^2_d 的线性映射有界且有正下界这一事实（见 [5] 的引理 2.1 和 2.5）：

$$V_1 f(z) = f(3^{3/2}z_1z_2z_3), V_2 f(z) = f(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2).$$

因此，事实是 $\log(1+\log\frac{2}{1-z}) \in D$，这意味着对于 $j = 1, 2$，有 $\log(1+\log\frac{2}{p_j}) \in H^2_d$。

7. 通过检查 N^+ 是否属于 $\mathcal{H}$来判断 N^+

我们已经看到，在某些情况下，可以通过证明对于某个 $n \in \mathbb{N}$, $F_n = G_n \circ \log(1/f) \in \mathcal{H}$，来验证具有有界辐角且满足 $\|f\|_\infty \leq 1$ 的函数 f 满足定理 1.1 的假设。这引出了以下问题:

问题 7.1. 如果 $\mathcal{H}$ 是一个同时也是完全 *Pick* 空间的径向加权 *Besov* 空间，并且如果 $F \in \mathcal{H}$ 满足 实部$F \geq 0$，那么$\log(1+F) \in \mathcal{H}$吗?

因此，如果这是真的，那么 $G_n \circ \log(1/f) \in \mathcal{H}$ 就会推出 $G_{n+1} \circ \log(1/f) \in \mathcal{H}$。

如果对于某个 $N \in \mathbb{N}$， $\mathcal{H} = B^N_\omega$成立，并且除了问题中的假设之外，我们还知道$\frac{1}{1+F} \in$Mult(B^{N-1}_ω)，那么答案是肯定的。这是因为 $R\log(1+F) = \frac{RF}{1+F} \in B^{N-1}_\omega$，因为 $RF \in B^{N-1}_\omega$。因此 $\log(1+F) \in B^N_\omega$。当 $N = 1$时就会如此；对于任意 N，只要 $F \in B^N_\omega \cap$Mult(B^{N-1}_ω)，也会如此，因为此时该假设与 [5] 的定理 1.3 一起推出 $\frac{1}{1+F} \in$Mult(B^{N-1}_ω)。

当然，如果 F 出现在定理 1.1 的一个应用中，那么 F 有界，当且仅当 f 与 0 保持正距离；此时，根据 [5] 的定理 1.8，我们已经知道 f 是循环的。对于可能无界的函数，我们只能证明以下定理。

对于 $\gamma > 0$，令 $\mathcal{H}_\gamma$ 为再生核为 $(1 - \langle z, w\rangle)^{-\gamma}$ 的希尔伯特函数空间。那么 $\mathcal{H}_1 = H^2_d$，且 $f \in \mathcal{H}_\gamma$ 当且仅当 $R^m f \in \mathcal{H}_{\gamma+2m}$；这些都是径向加权 Besov 空间，参见例如 [9]。令 $\mathcal{B}$ 表示球上的 Bloch 空间，

$$\mathcal{B} = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{B}_d) : \sup_{z\in\mathbb{B}_d} |Rf(z)|(1-|z|) < \infty\}.$$

定理 7.2。若 $\gamma > 0$，且 $F \in \mathcal{H}_\gamma \cap \mathcal{B}$ 满足实部 $F > 0$，则对数$\log(1+F) \in \mathcal{H}_\gamma$

证明。与 [9] 第 2584 页上的做法一样，我们使用 Faà di Bruno 公式求函数复合的 n 阶导数，参见 [7]。令 $g(z) =$log$(1+z)$，其中 z 位于右半平面，并设 Re$F(z) > 0$。那么对于 $k \geq 1$，我们有

$$g^{(k)}(z) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+z)^k}.$$

选取 $m \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\gamma + 2m > d$，则 $\mathcal{H}_{\gamma+2m} = L^2_a(\omega)$ 且范数等价，其中 $d\omega = (1-|z|^2)^{\gamma+2m-d-1}dV$，例如参见 [9]。因此，$\log(1+F) \in \mathcal{H}_\gamma$当且仅当 $R^m \log(1+F) \in L^2(\omega)$。

令 A_m 为所有满足 $\sum_{i=1}^{M} i\eta_i = m$ 的非负整数 m-元组 $\eta = (\eta_1, ..., \eta_m)$ 的集合，并记

$$T_\eta(F) = \prod_{i=1}^{m} (R^i F)^{\eta_i}.$$

于是，根据 Faa di Bruno公式

$$R^m(\log(1+F)) = \sum_{\eta \in A_m} \frac{m!}{\eta!} \frac{(-1)^{|\eta|-1}(|\eta|-1)!}{(1+F)^{|\eta|}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{j!}\right)^{\eta_j} T_\eta(F).$$

现在， [9] 的引理 5.2指出，若 $F \in \mathcal{H}_\gamma \cap \mathcal{B}$，则对所有 $\eta \in A_m$， $T_\eta(F) \in \mathcal{H}_{\gamma+2m}$。由于实部$F > 0$ ，我们有$\frac{1}{1+F}$ 有界，因此R^m 对数$(1 + F) \in L^2(\omega)$。

■

参考文献

[1] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和Stefan Richter，*Drury-Arveson* 空间上反解析 *Toeplitz* 算子的公共值域，《数学分析杂志》，即将出版。[2] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter，具有完全*Pick*性质的空间的 *Smirnov*类，《伦敦数学会杂志》（第2辑）**96** （2017），第1期，228–242。[3] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter，由完全*Nevanlinna-Pick*因子诱导的因子分解，《数学进展》**335**（2018），372–404。[4] Alexandru Aleman、Michael Hartz、John E. McCarthy 和 Stefan Richter，径向加权 *Besov* 空间与 *Pick*性质，《函数空间上的算子分析》，数学趋势，Birkhäuser/Springer，Cham，2019，第29–61页。[5] Alexandru Aleman、Karl-Mikael Perfekt、Stefan Richter、Carl Sundberg 和 James Sunkes，*Drury-Arveson* 空间及其他加权 *Besov* 空间中的循环性，预印本，arXiv:2301.04994。[6] Leon Brown 和 Allen L. Shields，狄利克雷空间中的循环向量，《美国数学会会刊》**285** （1984），第1期，269–303。[7] Warren P. Johnson，*Faà di Bruno*公式的奇特历史，《美国数学月刊》**109** （2002），第3期，217–234。[8] Łukasz Kosiński 和 Dimitrios Vavitsas，单位球中 *Dirichlet*型空间里的循环多项式 $\mathbb{C}^2$，预印本，arXiv:2212.12013v1。[9] Stefan Richter 和 James Sunkes，*Drury-Arveson* 空间中的 *Hankel*算子、不变子空间与循环向量，《美国数学会会刊》**144** （2016），第6期，2575–2586。

隆德大学，数学系，理学院，邮政信箱118，S-221 00 隆德，瑞典电子邮箱：alexandru.aleman@math.lu.se

挪威科技大学数学科学系（NTNU），特隆赫姆 7491，挪威电子邮件地址：karl-mikael.perfekt@ntnu.no

田纳西大学数学系，Circle Drive 1403 号，诺克斯维尔，田纳西州 37996-1320，美国电子邮件地址：srichter@utk.edu

田纳西大学数学系，Circle Drive 1403 号，诺克斯维尔，田纳西州 37996-1320，美国电子邮件地址：csundber@utk.edu

亨茨维尔，阿拉巴马州，美国电子邮件地址：jsunkes@gmail.com