arXiv:2301.10104v1 [math.CV] 24 Jan 2023

某些加权狄利克雷空间的 Carleson 公式

B. BOUYA 和 A. HARTMANN

摘要。我们将 Carleson 公式推广到径向多项式加权的狄利克雷空间。

致辞：谨以此文纪念 *Mohamed Zarrabi*，他于 *2021* 年 *12* 月不幸离世。他是一位备受尊敬的同事，我们在波尔多都十分怀念他。本文所呈现的成果主要是在很久以前 *Brahim Bouya* 于波尔多第一大学担任博士后期间完成的。本文也借此机会追忆 *Brahim*，他于 *2020* 年英年早逝。尽管他们并未明确合作研究狄利克雷空间——这是 *Mohamed* 的研究方向之一——但 *Brahim* 曾是 *Mohamed* 的合著者之一。在《摩洛哥纯粹与应用分析杂志》这一特刊中发表这项工作，实属顺理成章。

1. 引言与主要结果陈述。

设 $\mathcal{D}$ 是由在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上导数模平方面积可积的解析函数构成的标准狄利克雷空间，其中 $\mathbb{C}$ 是复平面（具体定义见下文）。众所周知，$\mathcal{D}$ 包含于哈代空间 $\mathcal{H}^2$（例如参见 [13]），因此每个函数 $f \in \mathcal{D}$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处都有非切向边界值 $= \partial\mathbb{D}$，且这些边界值在 $\mathbb{T}$ 上模平方可积。事实上，还有更强的结论：这些函数 f 在 $\mathbb{T}$ 上准处处存在非切向极限，见 [3, 9, 13]。

虽然函数 $f \in \mathcal{D}$ 的范数先验地通过其导数在单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的取值来定义，但也可以仅通过其在 $\mathbb{T}$ 上的取值来表示。事实上，道格拉斯公式（见 (1.4)）给出了一个涉及边界 [7] 上差商的刻画。关于狄利克雷空间的更多信息，可参见综述文章 [13] 和教材 [9]。

在这方面，$\mathcal{D}$ 中的外函数尤其受到关注，因为它们完全由其在边界上的模决定。事实上，Carleson 的一项著名结果 [5] 指出，$\mathcal{D}$ 中外函数 f 的范数完全可以由其在边界上的模恢复（见 (1.6)）。后来，Carleson 公式的类似结果也在其他解析函数类中得到确立，例如

日期：2023年1月25日。2000 数学主题分类主要分类 46E20；次要分类 30C85、30J99。关键词狄利克雷空间、Carleson 公式、Douglas 公式。此项工作由 ANR FRAB：ANR-09-BLAN-0058-02 资助。

Vinogradov 和 Shirokov [16] 针对导数属于经典哈代空间 $\mathcal{H}^p$ 的解析函数空间给出的结果，以及 [15, 定理 3.1] 中针对一些在边界上光滑的解析函数空间给出的结果。

另一个值得一提的结果是 Aleman [1]给出的，他用函数模的平均振荡来刻画某些 Dirichlet型函数的范数，其中平均振荡是相对于调和测度而言的；另见 [4, 8, 14] 和综述论文 [2], 。不过，这种刻画也用到了 f 在圆盘内部的模值。本文旨在将卡尔森的结果推广到已知道格拉斯公式类似形式（见 (1.5)）的加权狄利克雷空间。这里不深入介绍与测度 μ相关的加权狄利克雷空间 D_μ 的具体定义，只提及当 μ支撑在 $\mathbb{T}$上时，Richter [11] 将这些空间作为其双等距算子分析的一部分加以引入和研究。在 [12] 中，Richter和Sundberg针对 μ 支撑在 $\mathbb{T}$.上的情形，为空间 D_μ给出了一种卡尔森型公式

本文关注圆盘上的多项式径向权情形。在这种情况下，我们的刻画在权趋于常数的极限情形下恢复了卡尔森的结果（不过常数并非最优）。

为更精确地说明，我们现在引入所关注的加权狄利克雷空间。令 $\mathcal{D}_\alpha$ 为定义在 $\mathbb{D}$上的解析函数 f 构成的空间，且其加权Dirichlet积分有限：

$$\mathcal{D}_\alpha(f) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2(1-|z|)^\alpha dA(z), \tag{1.1}$$

其中， A 是标准面积Lebesgue测度， $0 \le \alpha < 1$ 是一个实数。赋予范数

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} := |f(0)|^2 + \mathcal{D}_\alpha(f), \tag{1.2}$$

空间 $\mathcal{D}_\alpha$ 成为一个Hilbert空间。极限情形 $\mathcal{D} := \mathcal{D}_0$ 是经典狄利克雷空间，而情形 $\alpha = 1$ 对应于经典哈代空间 $\mathcal{H}^2$。我们用 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$表示模平方在 $\mathbb{T}$上可积的复值函数空间。注意，我们可以在 $\mathcal{D}_\alpha$ 中定义一个等价范数 $(\|f\|_2^2 + \mathcal{D}_\alpha(f))^{1/2}$，其中 $\|f\|_2$是 $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$上的标准范数。

在下文中，我们假设 $h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 是一个满足以下条件的非负函数：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log h(t)dt > -\infty, \tag{1.3}$$

其中我们通过 $h(t) := h(e^{it})$， $t \in \mathbb{R}$ 将圆与实数轴对应起来。根据众所周知的Hardy空间理论（例如参见 [10]），我们可以为 h 关联外函数 O_h，其定义为

$$O_h(z) := \exp\{u_h(z) + iv_h(z)\}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

其中

$$u_h(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\Big)\log h(\varphi)d\varphi, \quad z\in\mathbb{D},$$

且 v_h 是由下式给出的调和函数 u_h 的共轭调和函数

$$v_h(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}\Big(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\Big)\log h(\varphi)d\varphi, \qquad z\in\mathbb{D}.$$

$|O_h|$ 的非切向极限存在，且几乎处处与 $\mathbb{T}$ 上的 h 相等，其中“几乎处处”是相对于勒贝格测度而言。在研究 Plateau问题时，Jesse Douglas [7] 得到了以下关于 $f\in\mathcal{H}^2$ 的公式,

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(\theta)-f(\varphi)}{e^{i\varphi}-e^{i\theta}}\right|^2 d\theta d\varphi, \tag{1.4}$$

该公式仅用 $\mathbb{T}$边界上的 f 取值来表示 Dirichlet积分。此公式可推广至加权空间 $\mathcal{D}_\alpha$ ，此时等号改为等价（例如参见 [6, 9]）：

$$\mathcal{D}_\alpha(f) \asymp \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\theta)-f(\varphi)|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\theta d\varphi. \tag{1.5}$$

当 f 是外函数时，它由其边界值的模唯一确定，因此可以问，是否能仅用这些模来表示 Dirichlet积分。在 [5]„ Carleson 证明了以下公式

$$\mathcal{D}(O_h) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(h^2(\varphi)-h^2(\theta)\big)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi d\theta, \tag{1.6}$$

因此，该公式可以用 $\mathcal{D}$ 边界上的模来表示外函数的范数。Carleson 实际上证明了一个更一般的结果，也考虑了内因子；但显然，此时 Dirichlet积分不再仅由其边界值的模给出，还必须考虑 Blaschke因子的零点和奇异测度。(1.6)的证明中的一个主要要素是经典的 Stokes公式，但它实际上并不适用于 $\mathcal{D}_\alpha$.中的情形

对于空间 $\mathcal{D}_\alpha$ ，一个自然的猜测是用以下内容替代 (1.6)： be

$$\mathcal{C}_\alpha(h) := \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(h^2(\varphi)-h^2(\theta)\big)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi d\theta.$$

然而，事实证明，当 $0<\alpha<1$ 时，存在一些函数 $f\in\mathcal{D}_\alpha$，使得 $\mathcal{C}_\alpha(|f|)$ 不有限，见下文定理 1.4。

注意到，经过简单计算可得，对于严格正数 a和 b，我们有

$$0\le (a^2-b^2)\log\frac{a}{b} \asymp \begin{cases} (a-b)^2, & \text{if } \frac{1}{2}b\le a\le 2b,\\ a^2\log\frac{a}{b}, & \text{if } a\ge 2b,\\ b^2\log\frac{b}{a}, & \text{if } a\le\frac{1}{2}b. \end{cases} \tag{1.7}$$

因此，在下文给出的刻画中，我们将根据 (1.7) 中出现的三种情形，分别讨论当商 $h(\varphi)/h(\theta)$ 大于 2、小于 1/2 或介于 1/2 与 2 之间时，圆的不同部分上会发生什么。为了更加精确，我们需要引入一些记号。令 Λ 为 $\mathbb{T}$ 上相对于勒贝格测度几乎处处严格为正的可测函数集。对于 h 和 $\lambda \in \Lambda$，我们定义

$$N_\alpha(h) := \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h(\varphi)-h(\theta)|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}} d\varphi d\theta, \tag{1.8}$$

$$n_\alpha(h,\lambda) := \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{h(\varphi)\le \frac{1}{2}h(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\lambda(\theta)}} \frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2} d\varphi\Big)^{1-\alpha} d\theta \tag{1.9}$$

and

$$\widetilde{n}_\alpha(h,\lambda) := \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{h(\varphi)\le \frac{1}{2}h(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\le\lambda(\theta)}} \frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}} d\varphi\Big) d\theta. \tag{1.10}$$

注意到，根据三角不等式，我们有

$$N_\alpha(h) \lesssim \mathcal{D}_\alpha(O_h). \tag{1.11}$$

对于两个实值函数 k_1 和 k_2 以及一个正常数 c，我们采用记号 $k_1 \overset{c}{\asymp} k_2$，表示 $c^{-1}k_2 \le k_1 \le ck_2$. 。 $k_1 \asymp k_2$ 和 $k_1 \lesssim k_2$ 分别表示存在某个未指定的常数 c，使得 $k_1 \overset{c}{\asymp} k_2$ 和$k_1 \le ck_2$。

现在我们可以陈述第一个主要结果。

定理 1.1。 设 $0 \le \alpha < 1$ 为一个实数。设 $h \in \mathcal{L}^2$（$\mathbb{T}$）为满足（1.3）的非负函数。那么

$$\|O_h\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} \overset{c_\alpha}{\asymp} \|h\|_2^2 + N_\alpha(h) + \inf_{\lambda\in\Lambda}\{n_\alpha(h,\lambda)+\widetilde{n}_\alpha(h,\lambda)\}, \tag{1.12}$$

其中，当 $\alpha \to 0$时， $c_\alpha \asymp 1$ 。

考虑 $\alpha = 0$ 时的特殊情况。显然，当 $\alpha = 0$ 时，公式 (1.12) 不依赖于对 $\lambda \in \Lambda$ 的选择。因此，在这种情况下，该定理给出了 Carleson 公式 (1.6) 的一个等价表达式。

这一结果的一个直接推论是下面的观察。

推论 *1.2*。 *</style}*一个有界外函数 O_h，若其模也有正下界，则当且仅当它属于 $\mathcal{D}_\alpha$

$$N_\alpha(h) < \infty.$$

我们在此给出这个事实的简单证明。

证明。 我们有

$$c^{-1} \le h \le c,$$

对于某个正的常数 $c > 1$. 那么，对于几乎所有的 θ 和 φ,

$$c^{-2} \le \frac{h(\theta)}{h(\varphi)} \le c^2.$$

可以将定义 (1.9) 和 (1.10) 中出现的常数 $1/2$ 替换为 (0, 1) 中的任意其他值，例如 c^{-2}. 。在这种情况下，表达式 $n_\alpha(h,\lambda)$ $\widetilde{n}_\alpha(h,\lambda)$ 和$m(h,\lambda)$ 均为零，因为我们是在空域上积分。□

现在我们来讨论上述定理中函数 λ 的适当选取。为此，我们将 h 和 $\lambda\in\Lambda$ 与以下函数联系起来

$$a_{h,\lambda}(\theta):=\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\lambda(\theta)}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi \tag{1.13}$$

and

$$\widetilde{a}_{h,\lambda}(\theta):=\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\le\lambda(\theta)}}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi. \tag{1.14}$$

函数 $\lambda\times a_h$，λ 可解释为函数 $\log{}^{h(\theta)}{}_{h(\varphi)}\chi$ 在 $z(\theta)=(1-\lambda(\theta))e^{i\theta}$ 处的泊松积分，其中 χ 是 $\{\varphi$ 的示性~~函~~数：$h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)\ |e^{i\theta}-e^{i\varphi}|\ge\lambda\}$。对此，可以注意到 $|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\asymp|e^{i\varphi}-z(\theta)|$。类似地，$\tilde{a}_h$，$\lambda/\lambda$ 可解释为函数 $\log{}^{h(\theta)}{}_{h(\varphi)}\tilde{\chi}$ 在 $z(\theta)$ 处的泊松积分，其中 $\tilde{\chi}$ 是 $\{\varphi$ 的示性函数：$h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)\ |e^{i\theta}-e^{i\varphi}|\not\le\lambda\}$。实际上，$\lambda a_h$，$\lambda+\tilde{a}_h$，$\lambda/\lambda$ 等价于函数 $\log{}^{h(\theta)}{}_{h(\varphi)}\chi_{h(\varphi)\le h(\theta)/2}$ 在 $z(\theta)$ 处的泊松积分。

我们定义

$$\mu_h(\theta):=\sup\left\{\mu\in(0,1]:\sup_{0<\delta\le\mu}\left\{\delta a_{h,\delta}(\theta),\frac{\widetilde{a}_{h,\delta}(\theta)}{\delta}\right\}\le 2\right\}. \tag{1.15}$$

由此可以陈述我们的第二个主要结果。

定理 1.3。设 $0\le\alpha<1$ 为一个实数。设 $h\in\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 为满足 (1.3) 且使得 $N_\alpha(h)<+\infty$. 成立的非负函数。那么 $\mu_h\in\Lambda$ 并且

$$\|O_h\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}\overset{c_\alpha}{\asymp}\|h\|_2^2+N_\alpha(h)+n_\alpha(h)+\widetilde{n}_\alpha(h), \tag{1.16}$$

其中 $n_\alpha(h):=n_\alpha(h,\ \mu_h)$ 并且 $\widetilde{n}_\alpha(h):=\widetilde{n}_\alpha(h,\ \mu_h)$，且当 $\alpha\to 0$时，$c_\alpha\asymp 1$。

值得探讨的是，$\mathcal{D}_\alpha(O_h)\asymp N_\alpha(h)+n_\alpha(h)+\widetilde{n}_\alpha(h)$是否成立。注意，对于常函数，两边都为零。

这里还应指出另外两点重要观察。首先，尽管乍看之下，定理 1.3 的条件似乎难以检验，但它表明，与 Carleson 关于 $\mathcal{D}$ 的结果一样，外函数 f 是否属于 $\mathcal{D}_\alpha$ 仅取决于其在 $\mathbb{T}$ 上的模，这一点本身似乎就值得关注。

其次，事实证明，存在一个函数族，可以对其中的量 (1.16) 进行显式估计。因此，对于这个函数族，可以证明 N_α、$\mathcal{D}_\alpha$ 和 $\mathcal{C}_\alpha$ 彼此并不等价。我们将在最后一节讨论这一点，并考虑以下函数类 h_β:

$$h_\beta(\theta):=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}}, & \theta\in(0,\pi],\\ \dfrac{h_\beta(\pi)}{2}, & \theta\in(-\pi,0),\end{cases} \tag{1.17}$$

其中 $\gamma = \pi e^{2\beta/\alpha}$ 保证 h_β 在 $(0,\pi)$ 上递减。

于是我们得到以下结果。

定理 1.4. 设 $0 < \alpha < 1$ 和 $\beta > 0$。则

1. 对于 $N_\alpha(h_\beta) < +\infty$，其充要条件是 $\beta > \frac{1}{2}$.2. 对于 $O_{h_\beta} \in \mathcal{D}_\alpha$，其充要条件是 $\beta > 1 - \frac{1}{2}\alpha$.3. 对于 $\mathcal{C}_\alpha(h_\beta) < +\infty$，其充要条件是 $\beta > 1$.

本文结构安排如下。下一节将给出一些辅助结果。第 3 节将介绍与式 (1.15) 中定义的函数$\mu_{_h}$ 相关的一些性质。由于主要结果的证明相当技术性（尽管所用的主要工具相当初等），我们将其分为两节：第 4 节证明充分性，第 5 节证明必要性。本文最后一部分将证明定理 1.4。

2. 辅助结果。

设 $f := e^{u+iv} \in \mathcal{H}^2(\mathbb{D})$ 是一个外函数，且 $0 \le \alpha < 1$ 是一个实数。我们将 f_r 定义为函数

$$f_r(w) := f(rw), \qquad w \in \mathbb{D},$$

其中 $0 \le r < 1$。显然， f_r 在闭单位圆盘的某个邻域内全纯，因此连续。可以验证（例如参见 [9]）

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha r^m dr \asymp \frac{1}{(m+1)^{1+\alpha}}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

与 α. 无关。由帕塞瓦尔恒等式和 (2.1) 可得

$$\mathcal{D}_\alpha(f) \asymp \sum_{n\ge 1} |\hat{f}(n)|^2 (1+n)^{1-\alpha}. \tag{2.2}$$

特别地，当 $\alpha = 0$时，

$$\mathcal{D}(f_r) \asymp \sum_{n\ge 1} r^{2n} |\hat{f}(n)|^2 (1+n), \qquad 0 \le r < 1, \tag{2.3}$$

这实际上是一个等式。在接下来的内容中，我们均假设 $0 < \alpha < 1.$。利用 (2.1) 和 (2.3)

$$\alpha \int_0^1 \mathcal{D}(f_r) \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{r} dr \asymp \sum_{n\ge 1} |\hat{f}(n)|^2 (1+n)^{1-\alpha}, \tag{2.4}$$

因此可得

$$\mathcal{D}_\alpha(f) \asymp \alpha \int_0^1 \mathcal{D}(f_r) \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{r} dr, \tag{2.5}$$

与 α 和 f.无关

这使我们能够以一种对我们至关重要的方式表示 $\mathcal{D}_\alpha(f)$。事实上，下面的引理在某种程度上体现了柯西-黎曼方程的神奇之处，它使我们能够

通过对一个不一定为正的函数进行积分来表示加权Dirichlet积分。

引理 2.1. 令 $f = e^{u+iv} \in \mathcal{D}_\alpha$。令

$$dA_\alpha(z) := \alpha(1-r)^{\alpha-1}drd\theta, \qquad z := re^{i\theta} \in \mathbb{D}.$$

Then

$$\mathcal{D}_\alpha(f) \asymp \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \frac{\partial v}{\partial \theta}(z)dA_\alpha(z), \tag{2.6}$$

与 α 和 f.无关

请注意，在 dA_α 的定义中没有因子 r，因此它不是通常的加权面积勒贝格测度。

证明。我们先重新表述 $\mathcal{D}(f_r)$。令 $f = e^g$ 满足 $g = u + iv$，然后先用极坐标表示 g 的导数，再利用柯西-黎曼方程，在 $z = se^{i\theta}$处得到:

$$\begin{aligned} |f'|^2 &= |f|^2 \times |g'|^2 = |f|^2 \times \left|\frac{\partial u}{\partial s} + i\frac{\partial v}{\partial s}\right|^2 = |f|^2 \times \left(\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2\right) \\ &= |f|^2 \frac{1}{s}\Big(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial s}\Big) \end{aligned}$$

另一方面

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(|f|^2\frac{\partial v}{\partial \theta}\Big) - \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(|f|^2\frac{\partial v}{\partial s}\Big) = 2|f|^2\Big(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial s}\Big),$$

因此，将 f 替换为 f_r，可得

$$2|f_r'(z)|^2 s = r\frac{\partial}{\partial s}\Big(|f|^2(rz)\frac{\partial v}{\partial \theta}(rz)\Big) - r\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(|f|^2(rz)\frac{\partial v}{\partial s}(rz)\Big).$$

由于 f是外函数，函数 $w \longmapsto |f|^2(rz)\frac{\partial v}{\partial s}(rz)$ 在 $\mathbb{D}$上连续，因此

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(|f|^2(rz)\frac{\partial v}{\partial s}(rz)\Big)d\theta = \Big[\Big(|f|^2(rse^{i\theta})\frac{\partial v}{\partial s}(rse^{i\theta})\Big)\Big]_{0^+}^{2\pi^-} = 0,$$

从而

$$\mathcal{D}(f_r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2(re^{i\theta})\frac{\partial v}{\partial \theta}(re^{i\theta})rd\theta. \tag{2.7}$$

令

$$dA_\alpha(z) := \alpha(1-r)^{\alpha-1}drd\theta, \qquad z := re^{i\theta} \in \mathbb{D},$$

由 (2.5) 和 (2.7) 可推出 (2.6) □

正如我们已在 (1.11) 中提到的，$\mathcal{D}_\alpha(O_h) \gtrsim N_\alpha(h)$ 与 α 和 h均无关，因此为证明主要结果，从现在起我们可以假设 $N_\alpha(h) < +\infty$。

令 $\mathbb{T}_h$ 为点集 $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$，其中 O_h 具有径向边界极限，满足$0 < \lim_{r\to 1^-} |O_h(re^{i\theta})| = h(e^{i\theta}) < \infty$. 众所周知，除去一个勒贝格测度为零的集合外，$\mathbb{T}_h$ 与 $\mathbb{T}$重合。我们还将使用以下记号

$$\mathbb{T}_h(\theta) := \{\varphi \in]-\pi,\pi] \ : \ h(\varphi) \overset{2}{\asymp} h(\theta)\}, \qquad e^{i\theta} \in \mathbb{T}_h,$$

$$\mathbb{T}_h^+(\theta) := \{\varphi \in]-\pi,\pi] \ : \ h(\varphi) \geq 2h(\theta)\}, \qquad e^{i\theta} \in \mathbb{T}_h,$$

and

$$\mathbb{T}_h^-(\theta) := \{\varphi \in]-\pi,\pi] \ : \ h(\varphi) \leq \frac{1}{2}h(\theta)\}, \qquad e^{i\theta} \in \mathbb{T}_h.$$

最后，我们回顾以下经典等式

$$|e^{i\varphi} - z|^2 = (1-r)^2 + r|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2, \qquad z := re^{i\theta} \in \mathbb{D} \text{ and } e^{i\varphi} \in \mathbb{T}, \tag{2.8}$$

由此得到以下估计

$$|e^{i\varphi} - z| \geq \max\{1-r, \ \frac{1}{3}|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|\}, \qquad z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \text{ and } e^{i\varphi} \in \mathbb{T}. \tag{2.9}$$

3. 函数 μ_h.

回想一下，$\lambda a_{h,\ \lambda}$ 和 $\tilde{a}_{h,\ \lambda}/\lambda$ 分别可解释为在 $\mathbb{T}_h^-(\theta)$、$|e^{i\theta} - e^{i\varphi}| \geq \lambda(\theta)$ 和 $|e^{i\theta} - e^{i\varphi}| \leq \lambda(\theta)$ 上对 $\log\frac{h(\theta)}{h}{}_{(\varphi)}$取的泊松积分。下一个引理考察在 $\mathbb{T}_h^+(\theta)$ 上的泊松积分部分。

引理 3.1. 设 $N_\alpha(h) < \infty$。那么，

$$\mathbb{T}_{h,\delta} := \{e^{i\theta} \in \mathbb{T}_h \ : \ \limsup_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)} \frac{1-r^2}{|e^{i\varphi} - re^{i\theta}|^2} \log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)} d\varphi \geq \delta\}$$

对于每个 $\delta > 0.$，其勒贝格测度
均为零

证明。 设 $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$ 为一个实数。对于每个点 $e^{i\theta} \in \mathbb{T}_{h,\ \delta}$ 我们关联$r_\varepsilon = r_{\varepsilon,\ \theta} \in (0,1)$，使得 $r_\varepsilon \geq 1-\varepsilon$ 且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)} \frac{1-r_\varepsilon^2}{|e^{i\varphi} - r_\varepsilon e^{i\theta}|^2} \log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)} d\varphi \geq \frac{\delta}{2}. \tag{3.1}$$

The 对 r_ε 关于 θ 的依赖性与下文的论证无关。利用 (2.9)

$$\frac{(1-r)^\alpha}{|e^{i\varphi} - re^{i\theta}|^2} \leq \begin{cases} \dfrac{9|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^\alpha}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^2} = \dfrac{9}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^{2-\alpha}} & \text{if } |e^{i\varphi} - e^{i\theta}| \geq 1-r \\ \dfrac{1}{(1-r)^{2-\alpha}} \leq \dfrac{1}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^{2-\alpha}} & \text{if } |e^{i\varphi} - e^{i\theta}| < 1-r \end{cases}.$$

由此可得

$$\frac{(1-r)^\alpha}{|e^{i\varphi} - re^{i\theta}|^2} \leq \frac{9}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^{2-\alpha}}. \tag{3.2}$$

因此，利用 (3.1) 和 (3.2),

$$\begin{aligned}\int_{e^{i\theta}\in\mathbb{T}_{h,\delta}}\frac{h^2(\theta)}{\varepsilon^{1-\alpha}}d\theta &\leq \int_{e^{i\theta}\in\mathbb{T}_{h,\delta}}\frac{h^2(\theta)}{(1-r_\varepsilon)^{1-\alpha}}d\theta\\ &\leq \frac{2}{\pi\delta}\int_{e^{i\theta}\in\mathbb{T}_{h,\delta}}h^2(\theta)\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)}\frac{(1-r_\varepsilon)^\alpha}{|e^{i\varphi}-r_\varepsilon e^{i\theta}|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi d\theta\\ &\leq \frac{18}{\pi\delta}\int_{e^{i\theta}\in\mathbb{T}_{h,\delta}}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)}\frac{h^2(\theta)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi d\theta\\ &\leq \frac{18}{\pi\delta}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|h(\varphi)-h(\theta)|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi d\theta=\frac{18N_\alpha(h)}{\pi\delta}. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

由于在 $\mathbb{T}$ 上 $h\neq 0$ 几乎处处成立，并令 ε 趋于 0，我们便得到所需的结果 t. □

我们得到以下引理，它给出了 μ_h. 的一些性质

引理 3.2. 假设 $N_\alpha(h)<\infty$。那么 $\mu_h\in\Lambda$ 并且

$$|O_h(re^{i\theta})|\geq e^{-41}h(\theta),\qquad r\geq 1-\mu_h(\theta), \qquad (3.4)$$

对于每个点 $e^{i\theta}\in\mathbb{T}_h$，使得 $\mu_h(\theta)>0$. 。如果 $e^{i\theta}\in\mathbb{T}_h$ 是一个点，使得 $0<\mu_h(\theta)<1$，那么

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^-(\theta)}\frac{1-|z_h(\theta)|^2}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta)|^2}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi\geq 1, \qquad (3.5)$$

其中 $z_h(\theta):=(1-\mu_h(\theta))e^{i\theta}\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$.

证明。为了验证 $\mu_h\in\Lambda$，我们需要证明 μ_h 几乎处处严格为正。假设对于某个固定的点 $e^{i\theta}\in\mathbb{T}_h$，$\mu_h(\theta)=0$，即存在一个正数序列 $\{\delta_n:\ n\in\mathbb{N}\}\subset]0,1]$，它收敛于 0，并且对每个 $n\in\mathbb{N}$，以下不等式中至少有一个成立

$$\frac{\widetilde{a}_{h,\delta_n}(\theta)}{\delta_n}=\frac{1}{2\pi\delta_n}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\leq\delta_n}}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi>2, \qquad (3.6)$$

or

$$\delta_n a_{h,\delta_n}(\theta)=\frac{\delta_n}{2\pi}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\geq\delta_n}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi>2. \qquad (3.7)$$

与 $e^{i\theta}$ 和这些数 δ_n 相关联，我们在 $\mathbb{D}$ 中定义以下点

$$z_n:=(1-\delta_n)e^{i\theta},\qquad n\in\mathbb{N}.$$

由于 $e^{i\theta}\in\mathbb{T}_h$ 且 $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$，存在一个数 $N_0\in\mathbb{N}$，使得

$$|\log\frac{|O_h(z_n)|}{h(\theta)}|\leq\frac{1}{4},\qquad \text{for all } n\geq N_0.$$

由于 $\delta_n=1-|z_n|$，并利用 (3.6) 和 (3.7)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^-(\theta)}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{i\varphi}-z_n|^2}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi>1. \qquad (3.8)$$

通过分解

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{i\varphi}-z_n|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\\
=\;&\log\frac{|O_h(z_n)|}{h(\theta)}-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{i\varphi}-z_n|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\\
&+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^-(\theta)}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{i\varphi}-z_n|^2}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi
\end{aligned}\tag{3.9}$$

（注意最后一个积分中对数分式的倒置，这解释了该积分前的加号）并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{i\varphi}-z_n|^2}|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}|d\varphi\le\log 2,\tag{3.10}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{i\varphi}-z_n|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\\
&\quad\ge\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^-(\theta)}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{i\varphi}-z_n|^2}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi-|\log\frac{|O_h(z_n)|}{h(\theta)}|\\
&\qquad-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{1-|z_n|^2}{|e^{i\varphi}-z_n|^2}|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}|d\varphi\\
&\quad\ge\frac{3}{4}-\log 2,\qquad n\ge N_0.
\end{aligned}$$

因此，$e^{i\theta}\in\mathbb{T}_{h,3/4-\log 2}$，并且根据引理 3.1，$\mu_h>0$ 在 $\mathbb{T}$ 上几乎处处成立，从而 $\mu_h\in\Lambda$.现在，我们取一个点 $z\in\mathbb{D}$，使得 $r\ge 1-\mu_h(\theta)$，则

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{h(\varphi)\le h(\theta)}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi\\
=\;&\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{2}h(\theta)\le h(\varphi)\le h(\theta)}+\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\le 1-r}}+\frac{1}{2\pi}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge 1-r}}\\
\le\;&\log 2+\frac{1}{\pi}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\le 1-r}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{1-r}d\varphi+\frac{9}{\pi}(1-r)\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge 1-r}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi,
\end{aligned}$$

其中我们用到了 (3.2)。根据 $\mu_h(\theta)$的定义，这意味着

$$\frac{1}{2\pi}\int_{h(\varphi)\le h(\theta)}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi\le\log 2+4+36.\tag{3.11}$$

显然，由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_{h(\theta)\le h(\varphi)}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi\le 0,$$

我们得到 (3.4)。我们采用与 (3.8) 的证明类似的方法来说明，若 $0<\mu_h(\theta)<1$，则存在一个正数列 $\{\varepsilon_n:\ n\in\mathbb{N}\}\subset]0,1]$

收敛到 0，使得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^-(\theta)}\frac{1-|w_n|^2}{|e^{i\varphi}-w_n|^2}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}d\varphi\geq 1, \tag{3.12}$$

其中 $w_n:=(1-(\mu_h(\theta)+\varepsilon_n))e^{i\theta}\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$. 我们在 (3.12) 中应用 Lebesgue 控制收敛定理，推出 (3.5)。□

下面的引理给出了涉及 μ_h 的 $\mathcal{D}_\alpha(O_h)$ 的下界，并将在第 5 节中用于得到关于 $O_h\in\mathcal{D}_\alpha$. 的一些必要条件

引理 3.3。我们有

$$\int_{\mu_h(\theta)<1}h^2(\theta)\mu_h^{\alpha-1}(\theta)d\theta\leq c\mathcal{D}_\alpha(O_h),$$

其中 $c>0$ 是一个常数，且与 α 和 h. 均无关

加入满足 $\mu_h(\theta)=1$ 的点，我们得到

$$\int_{\mathbb{T}}h^2(\theta)\mu_h^{\alpha-1}(\theta)d\theta\leq c\big(\mathcal{D}_\alpha(O_h)+\|h\|_2^2\big). \tag{3.13}$$

证明。根据引理 3.2，我们有 $\mu_h\in\Lambda$。令 $e^{i\theta_0}\in\mathbb{T}_h$ 为满足 $0<\mu_h(\theta_0)<1$.的一个点。对于点 $z_h(\theta_0)=(1-\mu_h(\theta_0))e^{i\theta_0}$，我们断言可能出现两种情况:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta_0)}\frac{1-|z_h(\theta_0)|^2}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta_0)}d\varphi\geq\frac{1}{4} \tag{3.14}$$

or

$$\frac{|O_h(z_h(\theta_0))|}{h(\theta_0)}\leq e^{\log 2-\frac{3}{4}}. \tag{3.15}$$

事实上，若假设 (3.14) 不成立，则由 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}\log\frac{|O_h(z_h(\theta_0))|}{h(\theta_0)} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^-(\theta_0)}\frac{1-|z_h(\theta_0)|^2}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta_0)}d\varphi\\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta_0)}\frac{1-|z_h(\theta_0)|^2}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta_0)}d\varphi\\ &\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta_0)}\frac{1-|z_h(\theta_0)|^2}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta_0)}d\varphi\\ &\leq -1+\frac{1}{4}+\log 2,\end{aligned}$$

这表明 (3.15) 成立。

现在，一方面，如果 θ_0 满足 (3.14)，那么（记住 (3.2)），

$$\begin{aligned}\mu_h^{\alpha-1}(\theta_0) &= (1-|z_h(\theta_0)|^2)^{\alpha-1}\leq\frac{4}{\pi}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta_0)}\frac{(1-|z_h(\theta_0)|)^\alpha}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta_0)}d\varphi\\ &\lesssim \int_{\mathbb{T}_h^+(\theta_0)}\frac{\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta_0)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|^{2-\alpha}}d\varphi,\end{aligned}$$

利用 (1.7) 和三角不等式可得,

$$h^2(\theta_0)\mu_h^{\alpha-1}(\theta_0) \lesssim \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h(\varphi)-h(\theta_0)|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|^{2-\alpha}}d\varphi \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|O_h(\varphi)-O_h(\theta_0)|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|^{2-\alpha}}d\varphi, \tag{3.16}$$

与 θ_0、 α 和 h. 无关

另一方面，对于几乎所有满足 (3.15) 的点 $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}_h$ ，我们有$h^2(\theta_0) \lesssim |O_h(z_h(\theta_0)) - O_h(\theta_0)|^2$（注意 $e^{\log 2-3/4} < 1$），因此，根据詹森不等式,

$$h^2(\theta_0) \lesssim \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z_h(\theta_0)|^2}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}|O_h(\varphi)-O_h(\theta_0)|^2 d\varphi.$$

由此可得

$$\begin{aligned} h^2(\theta_0)\mu_h^{\alpha-1}(\theta_0) &\lesssim \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-|z_h(\theta_0)|)^\alpha}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}|O_h(\varphi)-O_h(\theta_0)|^2 d\varphi \\ &\lesssim \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|O_h(\varphi)-O_h(\theta_0)|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|^{2-\alpha}}d\varphi, \end{aligned} \tag{3.17}$$

与 θ_0、 α 和 h. 无关。所需结果由道格拉斯公式 (1.5) 以及不等式 (3.16) 和 (3.17) 得出。□

4. **充分性**。

在本 节中，我们证明定理 1.1 的充分条件，更准确地说

$$\mathcal{D}_\alpha(O_h) \lesssim N_\alpha(h) + \frac{1}{1-\alpha}\inf_{\lambda\in\Lambda}\Big(n_\alpha(h,\lambda)+\widetilde{n}_\alpha(h,\lambda)\Big). \tag{4.1}$$

注意，对于这个上界估计，我们不需要项 $\|O_h\|_2^2$。

回顾引理 2.1，为了证明 $O_h = e^{u+iv} \in \mathcal{D}_\alpha$ ，只需估计积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} |O_h(z)|^2 \frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z) dA_\alpha(z), \tag{4.2}$$

其中 $dA_\alpha(z) = \alpha(1-r)^{\alpha-1}drd\theta$。

根据 h，我们定义如下射线集合

$$\mathbb{D}_h := \{z\in\mathbb{D} : \ e^{i\theta}\in\mathbb{T}_h\},$$

我们将其分为以下两部分

$$\mathbb{K}_h := \Big\{z = re^{i\theta}\in\mathbb{D}_h \ : \ \sup_{w\in\mathbb{D}(z)}|O_h(w)| \geq 2h(\theta)\Big\},$$

其中 $\mathbb{D}(z) := \{w\in\mathbb{D} : |w-z| \leq \frac{1}{2}(1-r)\}$ 是一个半径固定的伪双曲圆盘，并且

$$\mathbb{L}_h := \mathbb{D}_h \setminus \mathbb{K}_h.$$

注意，我们无需考虑在余集 $\mathbb{D}\setminus(\mathbb{K}_h\cup\mathbb{L}_h)$ 上的积分；该集合是由一族射线构成的并集（这族射线由 $\mathbb{T}$ 上一个勒贝格测度为零的集合所参数化），因此其勒贝格面积测度为零。

4.1. 在区域 $\mathbb{K}_h$ 上的积分。 在下面的引理中，我们证明 $\mathbb{K}_h$ 上的积分仅由 $N_\alpha(h)$ 控制。

引理 4.1。有

$$\int_{\mathbb{K}_h} \big|O_h^2(z)\frac{\partial v}{\partial \theta}(z)\big| dA_\alpha(z) \le cN_\alpha(h),$$

其中 $c>0$ 是一个与 α 和 h.均无关的常数

证明。 我们假设 $\mathbb{K}_h$ 的面积Lebesgue测度不为零（否则无需证明）。显然

$$\sup_{w\in\mathbb{D}(z)} |O_h(w)| \le 2 \sup_{w\in\mathbb{D}(z)} \big||O_h(w)| - h(\theta)\big|, \qquad z\in\mathbb{K}_h. \tag{4.3}$$

令

$$\mathcal{H}(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\big|h(\varphi)-h(\theta)\big| d\varphi, \qquad z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}_h.$$

对于一个点 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{K}_h$

$$\begin{aligned}
\sup_{w\in\mathbb{D}(z)} \big||O_h(w)|-h(\theta)\big| &= \sup_{w\in\mathbb{D}(z)} \{|O_h(w)|\} - h(\theta) \\
&\le \sup_{w\in\mathbb{D}(z)} \Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|w|^2}{|e^{i\varphi}-w|^2} h(\varphi)d\varphi\Big\} - h(\theta) \\
&\le \sup_{w\in\mathbb{D}(z)} \Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|w|^2}{|e^{i\varphi}-w|^2} \big|h(\varphi)-h(\theta)\big| d\varphi\Big\} \\
&\le \frac{6}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\big|h(\varphi)-h(\theta)\big| d\varphi \\
&= 12\mathcal{H}(z).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

因此，由 (4.3) 可得

$$\sup_{w\in\mathbb{D}(z)} |O_h(w)| \le 24\mathcal{H}(z), \qquad z\in\mathbb{K}_h. \tag{4.5}$$

将经典的全纯函数柯西公式应用于 O_h on $\partial\mathbb{D}(z)$ 的复导数，可得

$$|\frac{\partial O_h}{\partial z}(z)| \le 2\frac{\sup\limits_{w\in\mathbb{D}(z)}|O_h(w)|}{1-r}, \qquad z\in\mathbb{D}, \tag{4.6}$$

于是

$$\big|\frac{\partial O_h^2}{\partial z}(z)\big| = \big|2O_h(z)\frac{\partial O_h}{\partial z}(z)\big| \le 48^2\frac{\mathcal{H}^2(z)}{1-r}, \qquad z\in\mathbb{K}_h.$$

詹森不等式表明

$$\mathcal{H}^2(z) \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\big|h(\varphi)-h(\theta)\big|^2 d\varphi, \qquad z\in\mathbb{D}_h,$$

由此可得

$$|\frac{\partial O_h^2}{\partial z}(z)| \le \frac{48^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\big|h(\varphi)-h(\theta)\big|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi, \qquad z\in\mathbb{K}_h.$$

由于 $O_h = e^g = e^{u+iv}$，且 $g'(re^{i\theta}) = \frac{e^{-i\theta}}{r}\Big(\frac{\partial v}{\partial\theta}(re^{i\theta}) - i\frac{\partial u}{\partial\theta}(re^{i\theta})\Big)$，计算可得

$$\begin{aligned}|\frac{\partial O_h^2}{\partial z}(z)| &= |2O_h(z)\frac{\partial O_h}{\partial z}(z)| = \frac{2|O_h(z)|^2}{r}\sqrt{\Big(\frac{\partial v}{\partial\theta}(z)\Big)^2+\Big(\frac{\partial u}{\partial\theta}(z)\Big)^2}\\ &\ge \frac{2}{r}|O_h(z)|^2|\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)|, \qquad z\in\mathbb{D}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

因此

$$\big|O_h^2(z)\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)\big| \le \frac{48^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\big|h(\varphi)-h(\theta)\big|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}rd\varphi, \qquad z\in\mathbb{K}_h. \tag{4.8}$$

结合 $z=re^{i\theta}$ 并利用 (2.9)，可得

$$\begin{aligned}&\alpha\int_0^1\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{|e^{i\varphi}-z|^2}dr\\ &= \alpha\int_0^{1-\frac12|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|}\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}dr + \alpha\int_{1-\frac12|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|}^1\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{|e^{i\varphi}-re^{i\theta}|^2}dr\\ &\le \alpha\int_0^{1-\frac12|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|}\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{(1-r)^2}dr + \frac{9\alpha}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}\int_{1-\frac12|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|}^1(1-r)^{\alpha-1}dr\\ &\lesssim \frac{1}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}, \qquad e^{i\varphi}\in\mathbb{T}\setminus\{e^{i\theta}\}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

因此，由不等式 (4.8) 和 (4.9) 可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{K}_h}\big|O_h^2(z)\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)\big|dA_\alpha(z) &\le \frac{48^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_{\mathbb{D}}|\frac{h(\varphi)-h(\theta)}{e^{i\varphi}-z}\Big|^2dA_\alpha(z)\Big)d\varphi\\ &\le cN_\alpha(h), \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $c>0$ 是一个与 α 和 $h.$均无关的常数 □

4.2. **区域 $\mathbb{L}_h$上的积分**。回忆一下，根据定义

$$\mathbb{L}_h = \{z\in\mathbb{D}_h : \sup_{w\in\mathbb{D}(z)}|O_h(w)| < 2h(\theta)\}.$$

固定 $\lambda\in\Lambda.$。与 h 和 λ 相关联，我们定义如下函数

$$\rho_{h,\lambda}(\theta) := \min\{\mu_{h}(\theta), 2a_{h,\lambda}^{-1}(\theta)\}, \qquad e^{i\theta}\in\mathbb{T}_h.$$

由于 $\lambda\in\Lambda$，对 (1.13) 中的积分作简单估计可得 $a_{h,\lambda}<+\infty$ 几乎处处（相对于勒贝格测度），因此 $\rho_{h,\lambda}\in\Lambda$.

为了估计我们在区域 $\mathbb{L}_h$ 上的积分，需要将其分为以下两部分

$$\mathbb{L}_{h,\lambda}^1 := \{z\in\mathbb{L}_h \ : \ r\le 1-\rho_{h,\lambda}(\theta)\}$$

and

$$\mathbb{L}^2_{h,\lambda} := \{z \in \mathbb{L}_h \ : \ r \geq 1 - \rho_{h,\lambda}(\theta)\}.$$

这里我们注意到，由于 $\rho_{h,\ \lambda} \in \Lambda$ ，$\mathbb{L}^1_{h,\ \lambda}$ 的边界与 $\mathbb{T}$ 相交于一个勒贝格测度为零的集合；而对于 $\mathbb{L}^2_{h,\ \lambda}$ ，这种情况发生在一个满测度集合上。

4.2.1. 区域上的积分 $\mathbb{L}^1_{h,\ \lambda}$。 本节讨论 (4.2) 中的积分在$\mathbb{L}^1_{h,\ \lambda}$上的控制。

引理 4.2.

$$\int_{\mathbb{L}^1_{h,\lambda}} \left|O_h^2(z)\frac{\partial v_{_h}}{\partial \theta}(z)\right| dA_\alpha(z) \leq \frac{c\alpha}{1-\alpha}(\widetilde{n}_\alpha(h,\lambda) + n_\alpha(h,\lambda)),$$

其中 $c > 0$ 是一个与 α， h 和 λ.无关的常数

证明。 由 (4.6)、(4.7) 以及 $\mathbb{L}_h$的定义，

$$\left|O_h^2(z)\frac{\partial v_{_h}}{\partial \theta}(z)\right| \leq \frac{r}{2}\left|2O_h(z)\frac{\partial O_h}{\partial z}(z)\right| \leq 8r\frac{h^2(\theta)}{1-r}, \qquad z \in \mathbb{L}_h.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{L}^1_{h,\lambda}} \left|O_h^2(z)\frac{\partial v_{_h}}{\partial \theta}(z)\right| dA_\alpha(z) &\leq 8\alpha \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)\Big(\int_0^{1-\rho_{h,\lambda}(\theta)} (1-r)^{\alpha-2} dr\Big) d\theta \\
&= \frac{8\alpha}{1-\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)\rho_{h,\lambda}^{\alpha-1}(\theta)d\theta - \frac{8\alpha}{1-\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)d\theta \\
&\leq \frac{8\alpha}{1-\alpha}\int_{\rho_{h,\lambda}(\theta)<1} h^2(\theta)\rho_{h,\lambda}^{\alpha-1}(\theta)d\theta. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

设 $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}_{_h}$ 为一点，使得 $0 < \rho_{h,\lambda}(\theta_{_0}) < 1$. 我们首先假设$\rho_{h,\lambda}(\theta_{_0}) = 2a^{-1}_{h\ \lambda,}(\theta_{_0})$。那么

$$\rho_{h,\lambda}^{\alpha-1}(\theta_{_0}) = (a_{h,\lambda}(\theta_{_0})/2)^{1-\alpha} \leq a_{h,\lambda}^{1-\alpha}(\theta_{_0}). \qquad (4.12)$$

现在我们假设 $\rho_{h,\lambda}(\theta_{_0}) = \mu_{_h}(\theta_{_0})$。由 (3.5) 得

$$\rho_{h,\lambda}^{\alpha-1}(\theta_{_0}) = (1-|z_h(\theta_{_0})|)^{\alpha-1} \leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}_h^-(\theta_{_0})} \frac{(1-|z_h(\theta_{_0})|)^\alpha}{|e^{i\varphi} - z_h(\theta_{_0})|^2}\log\frac{h(\theta_{_0})}{h(\varphi)}d\varphi.$$

因此（注意 (3.2) 和 (2.9)）

$$\begin{aligned}\rho_{h,\lambda}^{\alpha-1}(\theta_0) &\le \frac{1}{\pi}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta_0)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|\le\lambda(\theta_0)}} \frac{(1-|z_h(\theta_0)|)^\alpha}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}\log\frac{h(\theta_0)}{h(\varphi)}d\varphi\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta_0)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|\ge\lambda(\theta_0)}} \frac{(1-|z_h(\theta_0)|)^\alpha}{|e^{i\varphi}-z_h(\theta_0)|^2}\log\frac{h(\theta_0)}{h(\varphi)}d\varphi\\ &\le \frac{9}{\pi}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta_0)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|\le\lambda(\theta_0)}} \frac{\log\frac{h(\theta_0)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|^{2-\alpha}}d\varphi\\ &\quad+\frac{9}{\pi}(1-|z_h(\theta_0)|)^\alpha\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta_0)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|\ge\lambda(\theta_0)}} \frac{\log\frac{h(\theta_0)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|^{2}}d\varphi.\end{aligned}$$

根据我们的假设 $\rho_{h,\lambda}(\theta_0) = \mu_h(\theta_0) \le 2a_{h,\lambda}^{-1}(\theta_0)$，因此 $(1-|z_h(\theta_0)|)^\alpha = \mu_h^\alpha(\theta_0) \le 2a_{h,\lambda}^{-\alpha}(\theta_0)$。因此，根据 $a_{h,\lambda}(\theta)$ 的定义，

$$\frac{9}{\pi}(1-|z_h(\theta_0)|)^\alpha\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta_0)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|\ge\lambda(\theta_0)}} \frac{\log\frac{h(\theta_0)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|^{2}}d\varphi \le 36a_{h,\lambda}^{1-\alpha}(\theta_0).$$

因此

$$\rho_{h,\lambda}^{\alpha-1}(\theta_0) \le \frac{9}{\pi}\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta_0)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|\le\lambda(\theta_0)}} \frac{\log\frac{h(\theta_0)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}|^{2-\alpha}}d\varphi + 36a_{h,\lambda}^{1-\alpha}(\theta_0). \tag{4.13}$$

结合 (4.11)、(4.12) 和 (4.13)，我们可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{L}_{h,\lambda}^1}\big|O_h^2(z)\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)\big|dA_\alpha(z)\\ \lesssim\ &\frac{\alpha}{1-\alpha}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\le\lambda(\theta)}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi\Big)d\theta+\int_{-\pi}^{\pi}h^2(\theta)a_{h,\lambda}^{1-\alpha}(\theta)d\theta\Big)\\ \asymp\ &\frac{\alpha}{1-\alpha}(\widetilde{n}_\alpha(h,\lambda)+n_\alpha(h,\lambda)),\end{aligned} \tag{4.14}$$

其中 $c>0$ 是一个与 α、h 和 λ. 无关的常数 □

4.2.2. 在区域 $\mathbb{L}_{h,\lambda}^2$。 在此区域上的积分估计更为复杂。事实上，无法直接使用三角不等式；在估计 $\frac{\partial v_h}{\partial\theta}$ 时，需要利用共轭泊松核导数的某些对称性。更确切地说，我们需要回忆一下，v_h 是 u_h 的共轭函数：

$$v_h(z) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right)\log h(\varphi)d\varphi, \qquad z\in\mathbb{D}.$$

注意，函数

$$Q(e^{i\varphi},z):=\frac{\partial}{\partial\theta}\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\right),\qquad z=re^{i\theta}\in\mathbb{D},$$

仅取决于 $|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|$ 和 r.。更准确地说，我们有

$$Q(e^{i\varphi},z) \;=\; r\frac{2(1-r)^2-|e^{i\theta}-e^{i\varphi}|^2(1+r^2)}{|e^{i\varphi}-z|^4}, \tag{4.15}$$

由此得到以下估计

$$|Q(e^{i\varphi},z)|\le\frac{2}{|e^{i\varphi}-z|^2}. \tag{4.16}$$

还要注意，$\int_{-\pi}^{\pi}Q(e^{i\varphi},z)d\varphi=0$，因此

$$\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi,\qquad z\in\mathbb{D}_{_h}. \tag{4.17}$$

特别地

$$\Big|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)\Big|\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}|}{|e^{i\varphi}-z|^2}dt. \tag{4.18}$$

引理 4.3。我们有

$$\Big|\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}}|O_h^2(z)|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\Big|\le cN_\alpha(h)+\frac{c}{1-\alpha}(\widetilde{n}_\alpha(h,\lambda)+n_\alpha(h,\lambda)),$$

其中 $c>0$ 是一个与 α、h 和 λ.无关的常数

证明。根据三角不等式，我们首先得到

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}}|O_h^2(z)|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\Big| \\ &\quad\le\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}}\big||O_h^2(z)|-h^2(\theta)\big|\Big|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)\Big|dA_\alpha(z)+\Big|\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}}h^2(\theta)\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\Big|.\end{aligned} \tag{4.19}$$

现在，根据构造，对于每个 $z\in\mathbb{L}_h$，我们有 $|O_h(z)|\le 2h(\theta)$，因此（考虑两种情况 $|O_h(z)|\ge\frac{1}{2}h(\theta)$ 和 $|O_h(z)|\le\frac{1}{2}h(\theta)$）

$$\frac{\big||O_h^2(z)|-h^2(\theta)\big|}{h^2(\theta)}\lesssim\Big|\log\frac{|O_h(z)|}{h(\theta)}\Big|,\qquad z\in\mathbb{L}_h.$$

另请注意，由于 $|O_h(z)|\le 2h(\theta)$，我们有

$$||O_h(z)|^2-h^2(\theta)|\lesssim h^2(\theta).$$

将两个估计代入 (4.19) 右侧的第一个积分，并利用 (4.18)，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} \big||O_h^2(z)| - h^2(\theta)\big|\big|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)\big| dA_\alpha(z) \\
&\quad\lesssim \int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)\cup\mathbb{T}_h^-(\theta)} \frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2} d\varphi\Big) dA_\alpha(z) \\
&\qquad + \int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\big|\log\frac{|O_h(z)|}{h(\theta)}\big|\Big(\int_{\mathbb{T}_{_h}(\theta)} \frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2} d\varphi\Big) dA_\alpha(z). \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

考虑 (4.19) 中的第二个积分。将 (4.17) 中的积分分解为四部分： $\mathbb{T}_h(\theta)$、 $\mathbb{T}_h^+(\theta)$、 $\mathbb{T}_h^-(\theta)$ 和 $|e^{i\theta}-e^{i\varphi}| \le \lambda(\theta)$，以及 $\mathbb{T}_h^-(\theta)$ 和 $|e^{i\theta}-e^{i\varphi}| \ge \lambda(\theta)$，并且不对 $\mathbb{T}_h(\theta)$ 这一部分应用三角不等式，我们首先得到：

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z) dA_\alpha(z)\Big| &\lesssim \int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)} \frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2} d\varphi\Big) dA_\alpha(z) \\
&\quad + \int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\theta}-e^{i\varphi}|\le\lambda(\theta)}} \frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2} d\varphi\Big) dA_\alpha(z) \\
&\quad + \int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\theta}-e^{i\varphi}|\ge\lambda(\theta)}} \frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2} d\varphi\Big) dA_\alpha(z) \\
&\quad + \Big|\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\int_{\mathbb{T}_{_h}(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)} d\varphi dA_\alpha(z)\Big| \\
&= \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4.
\end{aligned}$$

因此，注意到 $\mathcal{I}_1$、 $\mathcal{I}_2$ 和 $\mathcal{I}_3$ 也出现在 (4.20) 中的第一个积分里，由 (4.19) 和 (4.20) 可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} |O_h^2(z)|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z) dA_\alpha(z)\Big| \\
&\quad\lesssim \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3+\mathcal{I}_4 + \int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\big|\log\frac{|O_h(z)|}{h(\theta)}\big|\Big(\int_{\mathbb{T}_{_h}(\theta)} \frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2} d\varphi\Big) dA_\alpha(z)
\end{aligned}$$

将右侧的最后一个积分记为 $\mathcal{I}_5$。

显然，

$$\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)} \le \frac{h(\varphi)-h(\theta)}{h(\theta)}, \qquad \varphi\in\mathbb{T}_{_h}^+(\theta). \qquad (4.21)$$

然后，利用 (4.9)，

$$\mathcal{I}_1 \lesssim \alpha\int_{\mathbb{T}_h}\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)}\int_0^1 \frac{|h(\varphi)-h(\theta)|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}(1-r)^{\alpha-1} dr d\varphi d\theta \lesssim N_\alpha(h). \qquad (4.22)$$

根据 $\tilde{n}_\alpha(h,\lambda)$ 的定义，并再次利用 (4.9)，

$$\mathcal{I}_2 \lesssim \alpha \int_{\mathbb{T}_h} h^2(\theta) \int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta) \\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\le\lambda(\theta)}} \log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)} \int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha-1}}{|e^{i\varphi}-z|^2} dr d\varphi d\theta \lesssim \widetilde{n}_\alpha(h,\lambda). \quad (4.23)$$

由 $|e^{i\varphi}-z| \ge \frac{1}{3}|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3 &\lesssim \int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta) \\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\lambda(\theta)}} \frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2} d\varphi\Big)\alpha(1-r)^{\alpha-1} dr d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta) \\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\lambda(\theta)}} \frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2} d\varphi\Big)\Big(\int_{1-\rho_{h,\lambda}(\theta)\le r\le 1} \alpha(1-r)^{\alpha-1} dr\Big) d\theta. \end{aligned}$$

现在，对 r 的积分对应于 $\rho_{h,\lambda}^\alpha$，它受 $(2/a_{h,\lambda}(\theta))^\alpha$ 控制，因此根据 $a_{h,\lambda}$ 的定义以及 $n_\alpha(h,\lambda)$，我们得到

$$\mathcal{I}_3 \lesssim n_\alpha(h,\lambda). \quad (4.24)$$

现在，我们利用 Q 的一些对称性来估计积分 $\mathcal{I}_4$，这些对称性将使我们能够还原二次差 $|h(\theta)-h(\varphi)|^2$（见下文 (4.28)）。为此，在等式 (4.15) 中令 $t := \varphi-\theta$，于是

$$Q(e^{i\varphi},z) = 2r\frac{(1-r)^2-2\sin^2(t/2)(1+r^2)}{((1-r)^2+4r\sin^2(t/2))^2} =: q(t,r). \quad (4.25)$$

特别地，我们注意到 q 关于第一变量是偶函数。我们定义

$$\Gamma_{_h}(t) := \big\{|\theta| \le \pi \ : e^{i\theta} \in \mathbb{T}_h,\ e^{i(\theta+t)} \in \mathbb{T}_{_h}(\theta)\big\}, \qquad t \in [-\pi,\pi].$$

注意，$\theta \in \Gamma_{_h}(-t)$ 当且仅当 $\theta - t \in \Gamma_{_h}(t)$。通过变量替换

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^0 q(t,r)\Big(\int_{\Gamma_{_h}(t)} h^2(\theta)\log\frac{h(\theta+t)}{h(\theta)} d\theta\Big) dt \\ &\quad = \int_0^\pi q(t,r)\Big(\int_{\Gamma_{_h}(-t)} h^2(\theta)\log\frac{h(\theta-t)}{h(\theta)} d\theta\Big) dt \\ &\quad = \int_0^\pi q(t,r)\Big(\int_{\Gamma_{_h}(t)} h^2(\theta+t)\log\frac{h(\theta)}{h(\theta+t)} d\theta\Big) dt, \qquad 0<r<1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

因此（注意，变量替换 $(\varphi,\theta) = (t+\theta,\theta)$ 不会造成影响），

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\\
&\quad=\alpha\int_0^1\Big(\int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{|t|\le\pi\\ e^{i(\theta+t)}\in\mathbb{T}_h(\theta)}} q(t,r)\log\frac{h(\theta+t)}{h(\theta)}dt\Big)d\theta\Big)(1-r)^{\alpha-1}dr\\
&\quad=\alpha\int_0^1\Big(\int_{-\pi}^{\pi} q(t,r)\Big(\int_{\Gamma_h(t)} h^2(\theta)\log\frac{h(\theta+t)}{h(\theta)}d\theta\Big)dt\Big)(1-r)^{\alpha-1}dr\\
&\quad=\alpha\int_0^1\Bigg\{\int_0^{\pi} q(t,r)\times\Bigg[\int_{\Gamma_h(t)} h^2(\theta)\log\frac{h(\theta+t)}{h(\theta)}d\theta\\
&\qquad+\int_{\Gamma_h(t)} h^2(\theta+t)\log\frac{h(\theta)}{h(\theta+t)}d\theta\Bigg]dt\Bigg\}(1-r)^{\alpha-1}dr\\
&\quad=-\alpha\int_0^1\Big(\int_0^{\pi} q(t,r)\Big(\int_{\Gamma_h(t)}\mathcal{P}_h(\theta,t)d\theta\Big)dt\Big)(1-r)^{\alpha-1}dr, \qquad (4.27)
\end{aligned}$$

其中用到了 (4.26) 和

$$\mathcal{P}_h(\theta,t) := \big(h^2(\theta+t)-h^2(\theta)\big)\big(\log h(\theta+t)-\log h(\theta)\big).$$

由于对于 $\theta\in\Gamma_h(t)$，我们有 $e^{i(\theta+t)}\in\mathbb{T}_h(\theta)$，即 $h(\theta+t)\overset{2}{\asymp}h(\theta)$，显然（例如参见 (1.7)）可得所需的二次差

$$0\le\mathcal{P}_h(\theta,t)\le 4\big(h(\theta+t)-h(\theta)\big)^2, \qquad t\in[-\pi,\pi]\text{ and }\theta\in\Gamma_h(t). \qquad (4.28)$$

注意，我们在 $\mathbb{L}^2_{h,\lambda}$ 上积分的函数不是正的，因此不能简单地用 $\mathbb{D}$ 替换这个区域。不过，写成 $\mathbb{L}^2_{h,\lambda}=\mathbb{D}\setminus(\mathbb{K}_h\cup\mathbb{L}^1_{h,\lambda})$ 后，三角不等式显然给出

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_4 \;\le\;& \Big|\int_{\mathbb{D}} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big|\\
&+\Big|\int_{\mathbb{L}^1_{h,\lambda}} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big|\\
&+\Big|\int_{\mathbb{K}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big|. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

现在可以在关于 $\mathbb{D}$ 的积分中使用三角不等式。由 (4.16)，$|q(t,r)|=|Q(e^{i\varphi},re^{i\theta})|\le 2/|e^{i\varphi}-z|^2=2/|e^{i(t+\theta)}-re^{i\theta}|^2$，并且由 (4.9)，$\int_0^1\frac{(1-r)^{\alpha-1}}{|e^{i(t+\theta)}-e^{i\theta}|^2}dr\lesssim 1/|e^{i(t+\theta)}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}$。因此，由 (4.27) 和 (4.28)，我们推得

$$\Big|\int_{\mathbb{D}} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big|\lesssim N_\alpha(h). \qquad (4.30)$$

（若没有我们的对称性论证，三角不等式结合估计式 (4.16) 和 (4.9) 只能得到线性差，而这还不够。）

接下来，由于在 $\mathbb{T}_h(\theta)$ 上，$|\log(h(\varphi)/h(\theta))| \le \log 2$，且 $|Q(e^{i\varphi}, z)| \lesssim 1/|e^{i\varphi} - z|^2$，利用泊松核的标准积分

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|e^{i\varphi} - re^{i\theta}|^2} d\varphi = \frac{2\pi}{1-r^2}, \tag{4.31}$$

我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\mathbb{L}^1_{h,\lambda}} h^2(\theta) \Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi}, z) \log \frac{h(\varphi)}{h(\theta)} d\varphi \Big) dA_\alpha(z) \Big| \\
&\quad \lesssim \int_{\mathbb{L}^1_{h,\lambda}} h^2(\theta)(1-r)^{-1} dA_\alpha(z) \\
&\quad = \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta) \rho_{h,\lambda}^{\alpha-1}(\theta) d\theta - \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta) d\theta, \\
&\quad \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_{\rho_{h,\lambda}(\theta)<1} h^2(\theta) \rho_{h,\lambda}^{\alpha-1}(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

因此，与引理 4.2 的证明相同，我们得到

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\mathbb{L}^1_{h,\lambda}} h^2(\theta) \Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi}, z) \log \frac{h(\varphi)}{h(\theta)} d\varphi \Big) dA_\alpha(z) \Big| \\
&\qquad \lesssim \frac{\alpha}{1-\alpha} (\widetilde{n}_\alpha(h, \lambda) + n_\alpha(h, \lambda)).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

对于在 $\mathbb{K}_h$ 上的积分，我们从与上面相同的论证开始（因为在内层积分中，我们确实是在 $\mathbb{T}_h(\theta)$ 上积分），从而得到

$$\Big| \int_{\mathbb{K}_h} h^2(\theta) \Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi}, z) \log \frac{h(\varphi)}{h(\theta)} d\varphi \Big) dA_\alpha(z) \Big| \lesssim \int_{\mathbb{K}_h} h^2(\theta)(1-r)^{-1} dA_\alpha(z).$$

根据 $\mathbb{K}_h$ 的定义以及不等式 (4.5)——尤其可推出 $h(\theta) \cdot \sup_{w \in \mathbb{D}(re^{i\theta})} |O_h(w)| \lesssim \mathcal{H}(z)$——和 (4.9),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{K}_h} h^2(\theta)(1-r)^{-1} dA_\alpha(z) &\lesssim \int_{\mathbb{K}_h} \frac{\mathcal{H}^2(z)}{1-r} dA_\alpha(z) \\
&\lesssim \int_{\mathbb{K}_h} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big|h(\varphi) - h(\theta)\big|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} d\varphi dA_\alpha(z) \\
&\lesssim N_\alpha(h).
\end{aligned}$$

Thus

$$\Big| \int_{\mathbb{K}_h} h^2(\theta) \Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi}, z) \log \frac{h(\varphi)}{h(\theta)} d\varphi \Big) dA_\alpha(z) \Big| \lesssim N_\alpha(h). \tag{4.33}$$

结合（4.29）、（4.30）、（4.32）和（4.33）

$$\mathcal{I}_4 \lesssim N_\alpha(h) + \frac{\alpha}{1-\alpha} (\widetilde{n}_\alpha(h, \lambda) + n_\alpha(h, \lambda)).$$

接下来需要估计 $\mathcal{I}_5$。首先利用外函数的定义O_h（因此，$\log\,|O_h|$ 正是$\log h$ 在 $z = re^{i\theta}$处的泊松延拓），然后重新整理各项，

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_5 \;\le\; & \int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|d\varphi\right)\times \\
& \qquad\qquad \times\left(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\right)dA_\alpha(z) \\
= \;& 2\pi\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\right)^2(1-r^2)dA_\alpha(z) \qquad (4.34)\\
& +\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\left(\int_{\mathbb{T}^+_h(\theta)\cup\mathbb{T}^-_h(\theta)}\frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\right)\times \\
& \qquad\qquad \times\big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|d\varphi\big)dA_\alpha(z).
\end{aligned}$$

考虑第一个积分。回忆一下，在 $\mathbb{T}_h(\theta)$上有

$$|\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}| \asymp \Big|\frac{h(\theta)-h(\varphi)}{h(\theta)}\Big|,$$

因此，由詹森不等式可得，

$$\begin{aligned}
& h(\theta)^2\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\right)^2 \\
& \asymp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}|h(\theta)-h(\varphi)|d\varphi\right)^2\times\frac{1}{(1-r^2)^2} \\
& \le\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}|h(\theta)-h(\varphi)|^2d\varphi\times\frac{1}{(1-r^2)^2}.
\end{aligned}$$

因此再次利用 (4.9)

$$\begin{aligned}
& 2\pi\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}} h^2(\theta)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\right)^2(1-r^2)dA_\alpha(z) \\
& \lesssim\int_{\mathbb{L}^2_{h,\lambda}}\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}\frac{\big|h(\varphi)-h(\theta)\big|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}dA_\alpha(z)d\varphi\lesssim N_\alpha(h).
\end{aligned}$$

考虑 (4.34) 中的第二项。由于在 $\mathbb{T}_h(\theta)$ 上，表达式 $\log\frac{h(\varphi)}{h\,\theta}$ （）有界，因此最后一个因子由一个常数控制，所以这一项由 $\log 2\times(\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+\mathcal{I}_3)$ 控制。□

综上所述，所需的估计式 (4.1) 可由引理 4.1、4.2 和 4.3 得出。

5. 必要性

在本节中，我们将证明，如果 $O_h \in \mathcal{D}_\alpha$，那么

$$\|O_h\|_{\mathcal{D}_\alpha} \gtrsim N_\alpha(h) + n_\alpha(h) + (1-\alpha)^2 \widetilde{n}_\alpha(h). \tag{5.1}$$

注意，$\|O_h\|_{\mathcal{D}_\alpha} \asymp \|h\|_2^2 + \mathcal{D}_\alpha(O_h)$，并且我们已经注意到（见 (1.11)），

$$\mathcal{D}_\alpha(O_h) \gtrsim N_\alpha(h).$$

我们从以下引理开始。

引理 5.1. 有

$$\|O_h\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 \gtrsim n_\alpha(h),$$

与 α 和 $h.$ 均无关

证明。 由引理 3.2，我们知道 $\mu_{_h} \in \Lambda.$ 于是，令 $a_h = a_{h,\,\mu_h}$，根据 $\mu_{_h}$ 的定义（见 (1.15)），

$$\mu_{_h}(\theta) a_{_h}(\theta) \le 2, \quad \text{a.e. on } \mathbb{T}. \tag{5.2}$$

因此，由引理 3.3,

$$\mathcal{D}_\alpha(O_h) \gtrsim \int_{\mu_{_h}(\theta)<1} h^2(\theta) \mu_h^{\alpha-1}(\theta) d\theta \gtrsim \int_{\mu_{_h}(\theta)<1} h^2(\theta) a_{_h}^{1-\alpha}(\theta) d\theta. \tag{5.3}$$

注意，当 $\mu_{_h}(\theta) = 1$ 时，再由 (5.2) 可得 $a_h(\theta) \le 2$，因此

$$\|h\|_2^2 \gtrsim \int_{\mu_{_h}(\theta)=1} h^2(\theta) a_{_h}^{1-\alpha}(\theta) d\theta. \tag{5.4}$$

将不等式 (5.3) 和 (5.4) 相加，即完成证明 . □

必要性证明中最困难的部分是控制 $\tilde{n}_\alpha(h)$。我们令

$$\mathbb{M}_h := \{z \in \mathbb{D}_{_h} \,:\, r \ge 1 - \mu_{_h}(\theta)\}.$$

事实证明，对 $\mathbb{M}_h$ 进行积分即可得到所需的控制 .

我们从下面这个简单的辅助引理开始。该引理当然广为人知，但为方便读者，我们仍在此给出证明，从而展示对常数的恰当控制。

引理 5.2. 我们固定两个实数 $0 < \mu \le 1$ 和 $0 < u \le 2.$ 则

$$\frac{1}{1-\alpha} \int_{1-\mu}^1 \frac{ru^2 - (1-r)^2}{((1-r)^2 + ru^2)^2} (1-r)^{\alpha-1} r dr \ge c u^{\alpha-2}, \qquad if \quad 0 < u \le \mu,$$

其中 $c > 0$ 是一个与 $\alpha.$无关的常数

请注意，虽然我们要积分的函数在积分域上不一定为正，但积分本身将为正。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{1-\mu}^{1} \frac{ru^2-(1-r)^2}{((1-r)^2+ru^2)^2}(1-r)^{\alpha-1}rdr \\
=\ & -\frac{\partial}{\partial u}\Big(\int_{1-\mu}^{1}\frac{u}{(1-r)^2+ru^2}(1-r)^{\alpha-1}rdr\Big) \\
=\ & -\frac{\partial}{\partial u}\Big(u^{\alpha-1}\int_0^{\mu/u}\frac{s^{\alpha-1}}{1-us+s^2}(1-us)ds\Big), \qquad \text{where } 1-r=su, \\
=\ & (1-\alpha)u^{\alpha-2}\int_0^{\mu/u}\frac{s^{\alpha-1}}{1-us+s^2}(1-us)ds+\frac{\mu^\alpha(1-\mu)}{u^2(1-\mu)+\mu^2} \\
& +u^{\alpha-1}\int_0^{\mu/u}\frac{s^{2+\alpha}}{(1-us+s^2)^2}ds \\
\geq\ & (1-\alpha)u^{\alpha-2}\int_0^{\mu/u}\frac{s^{\alpha-1}}{1-us+s^2}(1-us)ds \\
\geq\ & \frac{1-\alpha}{4}u^{\alpha-2}\int_0^{1/4}s^{\alpha-1}ds, \qquad \text{if} \quad u\leq\mu, \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

由此我们推得引理 5.2 的断言。 □

回顾 (2.6)，有 $\mathcal{D}_\alpha(f) \asymp \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2\frac{\partial v}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)$；由 (4.17) 有$\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)$ $=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(e^{i\varphi},z)\log\ {}^{h}{}_{(\varphi)}\,{}_{h(\theta)}\underline{d\varphi}$。接下来的两个引理使我们能够控制 $\tilde{n}_\alpha(h)$。

引理 5.3. 我们有

$$\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\leq\mu_h(\theta)}}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\geq c(1-\alpha)\widetilde{n}_\alpha(h),$$

其中 $c>0$ 是一个与 α 和 h.均无关的常数

证明. 我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\leq\mu_h(\theta)}}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z) \qquad (5.6)\\
=\ & \int_{-\pi}^{\pi}h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\leq\mu_h(\theta)}}\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}\Big(-\alpha\int_{1-\mu_h(\theta)}^{1}Q(e^{i\varphi},z)(1-r)^{\alpha-1}dr\Big)d\varphi\Big)d\theta.
\end{aligned}$$

设 $e^{i\theta}\in\mathbb{T}_h$ 是满足 $\mu_h(\theta)=$的一个点： $\mu>0$. 对于固定的数 $0<t=\varphi-\theta\leq\pi$，我们令 $u:=2\sin(t/2)$。考虑到 (4.25),

$$\begin{aligned}
&-\alpha\int_{1-\mu}^{1}q(t,r)(1-r)^{\alpha-1}dr \\
&\quad=\alpha\int_{1-\mu}^{1}2\frac{2\sin^2(t/2)(1+r^2)-(1-r)^2}{((1-r)^2+4r\sin^2(t/2))^2}(1-r)^{\alpha-1}rdr \\
&\quad\geq 2\alpha\int_{1-\mu}^{1}\frac{ru^2-(1-r)^2}{((1-r)^2+ru^2)^2}(1-r)^{\alpha-1}rdr,
\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们用到了 $1+r^2\geq 2r$，以及分母为正这一事实（同样，所积函数在整个积分区间上不一定为正）。

现在，经过简单计算可得 $|u|=|2\sin(t/2)|=|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|$，根据 (5.6)，该式应当由 μ 控制，因此由引理 5.2 可得

$$-\alpha\int_{1-\mu}^{1}q(t,r)(1-r)^{\alpha-1}dr\gtrsim(1-\alpha)u^{\alpha-2}=\frac{1-\alpha}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}. \tag{5.7}$$

引理 5.3 中的估计可由 (5.6)、(5.7) 以及 $\tilde{n}_\alpha(h)$ 的定义直接推出.

□

下一个引理将前面的估计与 $\mathcal{D}_\alpha(O_h)$ 联系起来。

引理 5.4。我们有

$$\mathcal{D}_\alpha(O_h)+\|O_h\|_2^2\gtrsim\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\leq\mu_h(\theta)}}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z),$$

与 α 和 h. 均无关

证明。 回忆

$$\frac{\partial v_h}{\partial\theta}=\int_{-\pi}^{\pi}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi,$$

因此

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\leq\mu_h(\theta)}}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\\
&\quad=\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\\
&\qquad-\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\geq\mu_h(\theta)}}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\\
&\qquad-\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\\
&\qquad-\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)}Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z).
\end{aligned}\tag{5.8}$$

现在我们将估计上面出现的 4 个积分。

第一个估计的证明

$$\left|\int_{\mathbb{M}_h}h^2(\theta)\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\right|\lesssim\frac{1}{1-\alpha}\mathcal{D}_\alpha(O_h) \tag{5.9}$$

篇幅较长，因此我们倾向于将其推迟到本节末尾讨论（见引理 5.5）。

接下来，由（4.16）可得

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\geq \mu_h(\theta)}} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big|\\
\lesssim\ &\int_{\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\geq \mu_h(\theta)}} \frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\\
=\ &\int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)a_h(\theta)\Big(\int_{1-\mu_h(\theta)}^1 \alpha(1-r)^{\alpha-1}dr\Big)d\theta.
\end{aligned}$$

显然 $\int_{1-\mu_h(\theta)}^1 \alpha(1-r)^{\alpha-1}dr = \mu_h(\theta)^\alpha$，根据定义 $a_h(\theta) \leq 2/\mu_h(\theta)$。因此，利用引理 3.3，特别是 (3.13),

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{\mathbb{T}_h^-(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\geq \mu_h(\theta)}} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big|\\
&\qquad\lesssim \int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)\mu_h^{\alpha-1}(\theta)d\theta \lesssim \|h\|_2^2 + \mathcal{D}_\alpha(O_h). \qquad (5.10)
\end{aligned}$$

考虑 $\mathbb{T}_h^+(\theta)$ 上的积分。再次利用 (4.16) 和 (4.9)

$$\alpha\int_{1-\mu}^1 Q(e^{i\varphi},z)(1-r)^{\alpha-1}dr \lesssim \frac{1}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}.$$

由于在 $\mathbb{T}_h^+(\theta)$ 上，我们有 $h^2(\theta)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)} \leq h(\theta)h(\varphi) - (h(\varphi)-h(\theta))^2$，因此得到

$$\int_{\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h^+(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z) \lesssim N_\alpha(h) \lesssim \mathcal{D}_\alpha(O_h). \qquad (5.11)$$

对于最后一个积分，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\\
&\quad=\int_{\mathbb{D}} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\\
&\qquad-\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z).
\end{aligned}$$

与 (4.30) 中一样

$$\Big|\int_{\mathbb{D}} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big| \lesssim N_\alpha(h).$$

由于在 $\mathbb{T}_h(\theta)$ 上，$|\log(h(\varphi)/h(\theta))| \leq \log 2$，并结合 (4.16) 和 (4.31),

$$\Big|\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big| \lesssim \frac{1}{1-r}.$$

于是，利用引理 3.3,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big| \\
&\quad\lesssim \Big|\int_{\mathbb{D}\setminus\mathbb{M}_h} h^2(\theta)(1-r)^{-1}dA_\alpha(z)\Big| = \alpha\int_{-\pi}^{\pi} h^2(\theta)\int_{r\le 1-\mu_h(\theta)}\frac{1}{(1-r)^{2-\alpha}}drd\theta \\
&\quad\lesssim \frac{\alpha}{1-\alpha}\int_{\mu_h(\theta)<1} h^2(\theta)\mu_h^{\alpha-1}(\theta)d\theta \\
&\quad\lesssim \frac{\alpha}{1-\alpha}\mathcal{D}_\alpha(O_h).
\end{aligned}$$

因此

$$\Big|\int_{\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\Big(\int_{\mathbb{T}_h(\theta)} Q(e^{i\varphi},z)\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}d\varphi\Big)dA_\alpha(z)\Big| \lesssim \frac{1}{1-\alpha}\mathcal{D}_\alpha(O_h). \tag{5.12}$$

暂且假定 (5.9) 成立（见下文引理 5.5），结合此估计以及估计 (5.8)、(5.10)、(5.11) 和 (5.12)，即可得到所需结果。□

要完成定理 1.1 必要条件（即 (5.1)）的证明，只需结合引理 5.1、5.3 和 5.4。

我们以证明 (5.9) 结束本节：

引理 5.5。我们有

$$\mathcal{D}_\alpha(O_h) \gtrsim \Big|\int_{\mathbb{M}_h} h^2(\theta)\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\Big|,$$

独立于 α 和 h.

证明。利用 (3.4) 和引理 4.1,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{M}_h\cap\mathbb{K}_h} h^2(\theta)\Big|\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)\Big|dA_\alpha(z) &\le e^{82}\int_{\mathbb{M}_h\cap\mathbb{K}_h}\Big|O_h^2(z)\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)\Big|dA_\alpha(z) \\
&\lesssim N_\alpha(h)\lesssim\mathcal{D}_\alpha(O_h).
\end{aligned}\tag{5.13}$$

考虑到 (5.2)，我们注意到 $\mathbb{M}_h\setminus\mathbb{K}_h = \mathbb{L}_h^2$，其中 $\mathbb{L}_h^2 := \mathbb{L}^2_{h,\mu_{h\circ}}$ 由于$h(\theta)^2 = |O_h^2(\theta)| \le |O_h^2(\theta) - O_h^2(z)| + |O_h(z)^2|$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{L}_h^2} h^2(\theta)\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\Big| \\
\le\ &\int_{\mathbb{L}_h^2}\big|O_h^2(z)-O_h^2(\theta)\big|\Big|\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)\Big|dA_\alpha(z) + \Big|\int_{\mathbb{L}_h^2}|O_h^2(z)|\frac{\partial v_h}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\Big| \\
=:\ &\mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2.
\end{aligned}\tag{5.14}$$

以下两个事实是众所周知的。

$$xy\le\frac{1}{2}(x^2+y^2),\qquad x,y>0, \tag{5.15}$$

$$(x+y)^2\le 2(x^2+y^2),\qquad x,y>0. \tag{5.16}$$

特别地，首先利用当 $z\in\mathbb{L}_h^2$ 时 $|O_h(z)|\le 2h(\theta)$，然后利用 (5.15)（令 $y=|O_h(z)-O_h(\theta)|/\sqrt{1-r}$），即可得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &\le 3\int_{\mathbb{L}_h^2} h(\theta)\big|O_h(z)-O_h(\theta)\big|\big|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)\big|dA_\alpha(z)\\ &\le \frac{3}{2}\int_{\mathbb{L}_h^2}\frac{\big|O_h(z)-O_h(\theta)\big|^2}{1-r}dA_\alpha(z)+\frac{3}{2}\int_{\mathbb{L}_h^2}h^2(\theta)\big|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)\big|^2(1-r)dA_\alpha(z).\end{aligned}$$

现在，由 (4.18) 可得，

$$\begin{aligned}\big|\frac{\partial v_{_h}}{\partial\theta}(z)\big| &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\\ &\le \Big|\frac{1}{\pi}\int_{h(\varphi)\le h(\theta)}\frac{\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\Big|+\frac{1}{\pi}\int_{h(\varphi)\ge h(\theta)}\frac{\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\\ &\le 2\frac{\big|\log\frac{|O_h(z)|}{h(\theta)}\big|}{1-r}+\frac{2}{\pi}\int_{h(\varphi)\ge h(\theta)}\frac{\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi,\qquad z\in\mathbb{D}_{_h}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

将此结果和 (5.16) 应用于 (5.17) 右侧的求和，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 \lesssim{}& \int_{\mathbb{L}_h^2}\frac{\big|O_h(z)-O_h(\theta)\big|^2}{1-r}dA_\alpha(z)+\int_{\mathbb{L}_h^2}h^2(\theta)\frac{\big|\log\frac{|O_h(z)|}{h(\theta)}\big|^2}{1-r}dA_\alpha(z)\\ &+\int_{\mathbb{L}_h^2}h^2(\theta)\Big(\int_{h(\varphi)\ge h(\theta)}\frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\Big)^2|(1-r)dA_\alpha(z).\end{aligned}\tag{5.18}$$

在上式中，第二个积分由第一个积分控制，因为对于几乎所有的点 $z\in\mathbb{L}_h^2$，由 (3.4) 可知，

$$\big|\log\frac{|O_h(z)|}{h(\theta)}\big|\le e^{41}\frac{\big|O_h(z)-O_h(\theta)\big|}{h(\theta)}.\tag{5.19}$$

现在，由于

$$\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|\le\frac{\big|h(\varphi)-h(\theta)\big|}{h(\theta)},\qquad h(\varphi)\ge h(\theta),$$

詹森不等式给出

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{h(\varphi)\ge h(\theta)}\frac{\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\Big)^2=\Big(\frac{1}{2\pi(1-r^2)}\int_{h(\varphi)\ge h(\theta)}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}\big|\log\frac{h(\varphi)}{h(\theta)}\big|d\varphi\Big)^2\\ &\le\frac{1}{2\pi h^2(\theta)(1-r^2)}\int_{h(\varphi)\ge h(\theta)}\frac{\big|h(\varphi)-h(\theta)\big|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi,\quad z\in\mathbb{D}_{_h},\end{aligned}$$

这也使得我们能够控制式 (5.18) 中的第三个积分：

$$\mathcal{I}_1\lesssim\int_{\mathbb{D}}\frac{\big|O_h(z)-O_h(\theta)\big|^2}{1-r}dA_\alpha(z)+\int_{\mathbb{D}}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\big|h(\varphi)-h(\theta)\big|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi\Big)dA_\alpha(z).$$

再次利用詹森不等式,

$$|O_h(z)-O_h(\theta)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}|O_h(\varphi)-O_h(\theta)|^2 d\varphi,$$

对于几乎所有点 $z\in\mathbb{D}$ （相对于面积Lebesgue测度而言）。结合第二项上的 (4.9)，再对第一项应用一次 (4.9)，并利用道格拉斯公式 (1.5)，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &\lesssim \int_{\mathbb{D}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\big|O_h(\varphi)-O_h(\theta)\big|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}d\varphi dA_\alpha(z)+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\big|h(\varphi)-h(\theta)\big|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi d\theta\\ &\lesssim \mathcal{D}_\alpha(O_h).\end{aligned}\tag{5.20}$$

现在我们来处理积分 $\mathcal{I}_2$。同样，我们不能直接在 $\mathbb{L}_h^2$ 中使用三角不等式，因为我们需要顾及 $\partial v_h/\partial\theta$ 的符号。为此，我们使用$\mathbb{L}_h^2=\mathbb{D}_{{}_h}\setminus\big\{\mathbb{K}_h\cup\mathbb{L}_h^1\big\}$，其中 $\mathbb{L}_h^1:=\mathbb{L}_{h,\mu_h}^1$。于是

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2 &\le \Big|\int_{\mathbb{D}}|O_h^2(z)|\frac{\partial v_{{}_h}}{\partial\theta}(z)dA_\alpha(z)\Big|+\int_{\mathbb{K}_h}\big|O_h^2(z)\frac{\partial v_{{}_h}}{\partial\theta}(z)\big|dA_\alpha(z)\\ &\quad+\int_{\mathbb{L}_h^1}\big|O_h^2(z)\frac{\partial v_{{}_h}}{\partial\theta}(z)\big|dA_\alpha(z),\end{aligned}\tag{5.21}$$

因此，由 (2.6) 和引理 4.1,

$$\mathcal{I}_2\lesssim\mathcal{D}_\alpha(O_h)+N_\alpha(h)+\int_{\mathbb{L}_h^1}\big|O_h^2(z)\frac{\partial v_{{}_h}}{\partial\theta}(z)\big|dA_\alpha(z).\tag{5.22}$$

由于对于 $z\in\mathbb{L}_h$，我们有 $|O_h(z)|\le 2h(\theta)$，不等式 (4.7) 和 (4.6) 给出 $|O_h^2\frac{\partial v_h}{\partial\theta}|\lesssim|\frac{\partial O_h^2}{\partial z}|=2|O_h\frac{\partial O_h}{\partial z}|\le 2\times 2h(\theta)\times{}^{2h}(\theta)\overline{1-r}$，因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{L}_h^1}\big|O_h^2(z)\frac{\partial v_{{}_h}}{\partial\theta}(z)\big|dA_\alpha(z) &\le 8\alpha\int_{-\pi}^{\pi}h^2(\theta)\Big(\int_{r\le 1-\mu_{{}_h}(\theta)}\frac{1}{(1-r)^{2-\alpha}}dr\Big)d\theta\\ &\le \frac{8\alpha}{1-\alpha}\int_{\mu_{{}_h}(\theta)<1}h^2(\theta)\mu_{{}_h}^{\alpha-1}(\theta)d\theta.\end{aligned}\tag{5.23}$$

结合不等式 (5.22) 和 (5.23)，并应用引理 3.3,

$$\mathcal{I}_2\lesssim\frac{1}{1-\alpha}\mathcal{D}_\alpha(O_h).\tag{5.24}$$

因此，由估计 (5.13)、(5.14)、(5.20) 和 (5.24) 可得所需结果。

□

6. **例子**

回顾一下，对于 $0<\alpha<1$ 和 $\beta>0$，我们定义了函数

$$h_\beta(\theta):=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}}, & \theta\in(0,\pi],\\ c_0:=h_\beta(\pi), & \theta\in(-\pi,0),\end{cases}\tag{6.1}$$

其中， γ $(= \pi e^{2\beta/\alpha})$ 的取值保证 h_β 定义良好，且在 $(0,\pi]$ 上递减。

我们要证明以下结果。

命题。 设 $0<\alpha<1$ 和 $\beta>0$。则

(i) 对于 $N_\alpha(h_\beta)<+\infty$，其充要条件是 $\beta>\frac{1}{2}$.(ii) 对于 $O_{h_\beta}\in\mathcal{D}_\alpha$，其充要条件是 $\beta>1-\frac{1}{2}\alpha$.(iii) 对于 $\mathcal{C}_\alpha(h_\beta)<+\infty$，其充要条件是 $\beta>1$.

为避免在下文讨论中记号过于繁杂，我们令 $h=h_\beta$。注意，由于 $\alpha<1$，容易验证 $h\in\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ 且满足条件 (1.3)，因此 $O_h\in\mathcal{H}^2$.

为方便读者，以下证明中的所有估计都将在$[-\pi,\pi]$ 上进行，而不是在 $\mathbb{T}$上进行。

证明。 断言 (i) 我们有

$$\begin{aligned} N_\alpha(h) &\asymp \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|h(\varphi)-h(\theta)|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi d\theta \\ &= 2\int_0^\pi\left[\int_{-\pi}^{0}\frac{\left(\frac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}}-c_0\right)^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi\right]d\theta \\ &\quad +2\int_0^\pi\left[\int_{0<\theta<\varphi\le\pi}\frac{\left(\frac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}}-\frac{1}{\varphi^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\varphi}}\right)^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi\right]d\theta \\ &=: \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

由于 $|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|=2|\sin\frac{\varphi-\theta}{2}|$，因此

$$|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\asymp\begin{cases}|\varphi-\theta|, & \text{if } \theta\in(0,\pi/2) \text{ and } \varphi\in(-\pi,0),\\ |\varphi-\theta+2\pi|, & \text{if } \theta\in(\pi/2,\pi) \text{ and } \varphi\in(-\pi,0).\end{cases} \tag{6.3}$$

我们估计第一项中的内积分 $\mathcal{I}_1$:

$$\int_{-\pi}^{0}\frac{\left(\frac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}}-c_0\right)^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi\simeq\left(\frac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}}-c_0\right)^2\frac{1}{\theta^{1-\alpha}},\qquad\theta\in(0,\pi/2).$$

现在对 $\mathcal{I}_1$ 取外积分，其收敛性不取决于 $(\pi/2,\pi)$ 上的行为，于是得到

$$\mathcal{I}_1<\infty\quad\Leftrightarrow\quad\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}}-c_0\right)^2\frac{1}{\theta^{1-\alpha}}d\theta<\infty,$$

并且由于在 $(0,\pi/2)$ 上有

$$\frac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}}-c_0\asymp\frac{1}{\theta^{\frac{\alpha}{2}}\log^\beta\frac{\gamma}{\theta}},$$

由此可得

$$\mathcal{I}_1 < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\theta^\alpha \log^{2\beta} \frac{\gamma}{\theta}} \frac{1}{\theta^{1-\alpha}} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\theta \log^{2\beta} \frac{\gamma}{\theta}} < \infty.$$

因此

$$\mathcal{I}_1 < \infty \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta > 1,$$

由此得到命题 (i) 中的必要性。

我们来讨论第二个积分 $\mathcal{I}_2$。由于对于某个 $\theta \le \xi \le \varphi$, $\dfrac{h(\theta) - h(\varphi)}{\theta - \varphi} = h'(\xi)$, 我们将关注 h 的导数:

$$|h'(\theta)| \asymp \frac{1}{\theta^{1+\frac{1}{2}\alpha} \log^\beta \frac{\gamma}{\theta}}, \qquad \theta \in]0, \pi[. \tag{6.4}$$

如上所述

$$|e^{i\varphi} - e^{i\theta}| \asymp |\varphi - \theta|, \qquad \theta, \varphi \in (0, \pi). \tag{6.5}$$

So

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= 2\int_0^\pi \int_{\substack{\theta \le \varphi \le 2\theta \\ \varphi \le \pi}} + 2\int_0^\pi \int_{2\theta \le \varphi \le \pi} \\ &\lesssim 2\int_0^\pi \Big(\big(\sup_{\substack{\theta \le \varphi \le 2\theta \\ \varphi \le \pi}} |h'(\varphi)| \big)^2 \int_{\substack{\theta \le \varphi \le 2\theta \\ \varphi \le \pi}} (\varphi - \theta)^\alpha d\varphi \Big) d\theta \\ &\quad + 2\int_0^\pi \frac{1}{\theta^\alpha \log^{2\beta} \frac{\gamma}{\theta}} \Big(\int_{2\theta \le \varphi \le \pi} \frac{1}{(\varphi - \theta)^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta \\ &\lesssim \int_0^\pi \frac{1}{\theta \log^{2\beta} \frac{\gamma}{\theta}} d\theta, \end{aligned} \tag{6.6}$$

当 $2\beta > 1$ 时该级数收敛。因此我们得到命题 (i) 中的充分性。

断言 (ii) 现在
我们令

$$\lambda(\theta) := \frac{|\theta|}{4}, \qquad |\theta| \le \pi.$$

显然, $\lambda \in \Lambda$ 和

$$|\theta| \asymp |\varphi|, \qquad |\theta| \le \pi \text{ and } |e^{i\varphi} - e^{i\theta}| \le \lambda(\theta). \tag{6.7}$$

由 (6.7) 及 h 的显式形式, 我们推得

$$h(\varphi) \asymp h(\theta), \qquad 0 < \theta, \varphi \le \pi \text{ and } |e^{i\varphi} - e^{i\theta}| \le \lambda(\theta). \tag{6.8}$$

因此

$$\big| \log \frac{h(\theta)}{h(\varphi)} \big| \asymp \frac{|h(\theta) - h(\varphi)|}{h(\theta)}, \qquad 0 < \theta, \varphi \le \pi \text{ and } |e^{i\varphi} - e^{i\theta}| \le \lambda(\theta). \tag{6.9}$$

显然，当 $-\pi<\theta<0$ 时，不存在 φ 使得 $h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)$，因此在对 $\tilde{n}_\alpha$ 积分时，我们只需对 $\theta\in(0,\pi)$ 积分。

Thus

$$\begin{aligned}\widetilde{n}_\alpha(h,\lambda) &= \int_0^\pi h^2(\theta)\int_{\substack{h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\le\lambda(\theta)}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi d\theta\\ &\lesssim \int_{-\pi}^\pi\int_{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\le\lambda(\theta)}\frac{\big|h(\theta)-h(\varphi)\big|^2}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^{2-\alpha}}d\varphi d\theta\\ &\lesssim N_\alpha(h),\end{aligned}\tag{6.10}$$

根据断言 (i)，当 $\beta>1/2$ 时收敛，因此当 $\beta>1-\alpha/2$ 时也收敛。

接下来需要估计 $n_\alpha(h,\lambda)$。出于与上文相同的原因，在计算n_α 时，我们只需在 $(0,\pi)$ 上积分：

$$\begin{aligned}n_\alpha(h,\lambda) &= \int_0^\pi h^2(\theta)\Big(\int_{\substack{h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\lambda(\theta)}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi\Big)^{1-\alpha}d\theta\\ &\lesssim \int_0^\pi h^2(\theta)\Big(\int_{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\lambda(\theta)}\frac{\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi\Big)^{1-\alpha}d\theta.\\ &\lesssim \int_0^\pi h^2(\theta)\Big(\frac{\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{\theta}\Big)^{1-\alpha}d\theta.\end{aligned}$$

我们有

$$\log\frac{h(\theta)}{c_0}\asymp\frac{\alpha}{2}\log\frac{\gamma}{\theta},\qquad\theta\in(0,\pi).\tag{6.11}$$

因此

$$h^2(\theta)\Big(\frac{\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{\theta}\Big)^{1-\alpha}\asymp\frac{1}{\theta\log^{2\beta-1+\alpha}\frac{\gamma}{\theta}},\qquad\theta\in(0,\pi).$$

我们得到

$$\int_0^\pi h^2(\theta)\Big(\frac{\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{\theta}\Big)^{1-\alpha}d\theta\asymp\int_0^\pi\frac{1}{\theta\log^{2\beta-1+\alpha}\frac{2\pi}{\theta}}d\theta,$$

当 $2\beta-1+\alpha>1$ 或 $\beta>1-\frac{\alpha}{2}$ 时收敛。这就证明了 (ii) 中的充分性。

现在来讨论这个条件的必要性。我们固定一个点 $\theta\in]0,\pi[$. 注意到

$$\begin{aligned}\theta a_{h,\theta}(\theta) &= \frac{\theta}{2\pi}\int_{\substack{h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\theta}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi\\ &\ge \frac{\theta}{2\pi}\int_{\substack{\varphi\in(-\pi,0)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\theta}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi\\ &\gtrsim \log h(\theta)\longrightarrow\infty,\qquad\text{as }\theta\to0.\end{aligned}\tag{6.12}$$

特别地，存在一个数 $0<\delta\le\pi/4$，使得

$$\theta a_{_{h,\theta}}(\theta)>2,\qquad 0<\theta<\delta. \tag{6.13}$$

由此可得

$$\mu_{_h}(\theta)\le\theta,\qquad 0<\theta<\delta.$$

因此，对于 $0<\theta<\delta$,

$$\begin{aligned} a_{_h}(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\substack{h(\varphi)\le\frac{1}{2}h(\theta)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\mu_{_h}(\theta)}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi\\ &\ge \frac{1}{2\pi}\int_{\substack{\varphi\in(-\pi,0)\\ |e^{i\varphi}-e^{i\theta}|\ge\theta}}\frac{\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{|e^{i\varphi}-e^{i\theta}|^2}d\varphi\\ &\gtrsim \frac{\log h(\theta)}{\theta}, \end{aligned}\tag{6.14}$$

这给出

$$\begin{aligned} n_\alpha(h) &= \int_{\mu_{_h}(\theta)<1}h^2(\theta)a_{_h}^{1-\alpha}(\theta)d\theta\ge\int_0^\delta h^2(\theta)a_{_h}^{1-\alpha}(\theta)d\theta\\ &\gtrsim \int_0^\delta\frac{1}{\theta^\alpha\log^{2\beta}\frac{\gamma}{\theta}}\left(\frac{\log\frac{\gamma}{\theta}}{\theta}\right)^{1-\alpha}d\theta\\ &\asymp \int_0^\delta\frac{1}{\theta\log^{2\beta+\alpha-1}\frac{\gamma}{\theta}}d\theta. \end{aligned}\tag{6.15}$$

因此，条件 $\beta>1-\frac{1}{2}\alpha$ 对于 $n_\alpha(h)<+\infty$ 是必要的，由此完成了第二个断言的证明。

断言（iii）

显然，存在一个常数 $k>1$，使得当 $\varphi\in[-\pi,0[$ 和 $\theta\in[0,\pi/2[$ 时，$h(\theta)>kh(\varphi)=c_0$。于是得到

$$h^2(\theta)-h^2(\varphi)\asymp h^2(\theta),\qquad \varphi\in[-\pi,0[\text{ and }\theta\in[0,\pi/2[. \tag{6.16}$$

利用（6.3）和（6.11），

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\alpha(h) &\gtrsim \int_0^{\pi/2}\Big(\int_{-\pi}^0\frac{\big(h^2(\theta)-h^2(\varphi)\big)\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|\varphi-\theta|^{2-\alpha}}d\varphi\Big)d\theta\gtrsim\int_0^{\pi/2}\frac{h^2(\theta)\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{\theta^{1-\alpha}}d\theta\\ &\asymp \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\theta\log^{2\beta-1}\frac{\gamma}{\theta}}d\theta. \end{aligned}$$

因此，条件 $\beta>1$ 对于 $\mathcal{C}_\alpha(h)<+\infty.$ 是必要的

现在证明该条件的充分性。由于函数 h在 $(-\pi,0)$ 上为常数，当 $\varphi,\theta\in(-\pi,0)$ 时无需证明。现在考虑以下情形

当 $\theta \in (0,\pi)$ 且 $\varphi \in (-\pi, 0)$ 时。根据 (6.16) 和 (6.3)，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &:= \int_0^\pi \Big(\int_{-\pi}^0 \frac{\big(h^2(\theta) - h^2(\varphi)\big)\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta \\ &\asymp \int_0^{\pi/2} \Big(\int_{-\pi}^0 \frac{h^2(\theta)\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{|\varphi-\theta|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta + \int_{\pi/2}^\pi \Big(\int_{-\pi}^0 \frac{h^2(\theta)\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta \\ &\lesssim \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\theta \log^{2\beta-1}\frac{\gamma}{\theta}} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi h^2(\theta)\log\frac{h(\theta)}{c_0} \int_{-\pi}^0 \frac{1}{|\varphi-\theta+2\pi|^{2-\alpha}} d\varphi d\theta.\end{aligned}$$

第二项没有问题，因为 $h^2(\theta)\log h(\theta) c_0$ 在 $[\pi/2, \pi]$上有界。因此， $\mathcal{I}$收敛当且仅当 $\int_\theta^{\pi/2} \frac{1}{\log^{2\beta-1}\frac{\gamma}{\theta}} d\theta$ 收敛，而这在 $\beta > 1$. 时成立。还需检查 $\varphi, \theta \in (0,\pi)$ 的情形。根据 (6.5)，

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\big(h^2(\theta) - h^2(\varphi)\big)\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^{2-\alpha}} d\varphi d\theta \\ &\quad = 2\int_0^\pi \Big(\int_{0<\varphi<\pi} \frac{\big(h^2(\theta) - h^2(\varphi)\big)\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta \\ &\quad \asymp \int_0^\pi \Big(\int_{0<\varphi<\pi} \frac{\big(h^2(\theta) - h^2(\varphi)\big)\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|\varphi-\theta|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta.\end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \Big(\int_{\substack{0<\varphi<\pi \\ |\varphi-\theta|\ge\frac{1}{2}\theta}} \frac{\big(h^2(\theta) - h^2(\varphi)\big)\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|\varphi-\theta|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta \\ \le\ &\int_0^\pi \Big(\int_{|\varphi-\theta|\ge\frac{1}{2}\theta} \frac{h^2(\theta)\log\frac{h(\theta)}{c_0}}{|\varphi-\theta|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta \lesssim \int_0^\pi \frac{1}{\theta\log^{2\beta-1}\frac{2\pi}{\theta}} d\theta, \qquad (6.17)\end{aligned}$$

与前面的估计类似，当 $\beta > 1$ 时该式有界。最后，我们考虑 $|\varphi - \theta| \le \frac{1}{2}\theta$. 的积分。首先注意，在这种情况下，正如前文已讨论过的， $h(\theta) \asymp h(\varphi)$，并且

$$\left|\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}\right| \lesssim \frac{|h(\theta) - h(\varphi)|}{h(\theta)}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi \Big(\int_{\substack{0<\varphi<\pi \\ h(\varphi)\le h(\theta) \text{ and } |\varphi-\theta|\le\frac{1}{2}\theta}} \frac{\big(h^2(\theta) - h^2(\varphi)\big)\log\frac{h(\theta)}{h(\varphi)}}{|\varphi-\theta|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta \\ \lesssim\ &\int_0^\pi \Big(\int_0^\pi \frac{\big|h(\theta) - h(\varphi)\big|^2}{|\varphi-\theta|^{2-\alpha}} d\varphi \Big) d\theta \lesssim N_\alpha(h),\end{aligned}$$

该式在 $2\beta > 1$ 时收敛，特别地，在 $\beta > 1$. 时收敛 □

致谢。 第二位署名作者谨此感谢审稿人认真审阅稿件。

参考文献

[1] A. Aleman, 《Hardy空间与狄利克雷空间之间的解析函数Hilbert空间》, 《美国数学会会刊》115（1992）, 97–104。[2]N. Arcozzi、R. Rochberg、E.T. Sawyer 和 B.D. Wick, 《狄利克雷空间：综述》, 《纽约数学杂志》17A（2011）, 45–86, [3] A. Beurling, 《例外集》, 《数学学报》72（1939）, 1–13。[4] B. Böe, 《全纯贝索夫空间上的一个范数》, 《美国数学会会刊》131（2003）, 235–241[5] L. Carleson, 《Dirichlet积分的一个表示公式》, 《数学杂志》73（1960）, 190–196。[6] A. Devinatz 和 I. I. Hirschman, 《 l^2上的乘子变换》, $^{\alpha}$, 《数学年刊》69, 第3期（1959）, 575–587。[7] J. Douglas, 《普拉托问题的解》, 《美国数学会汇刊》33（1931）, 第1期, 263–321。[8] K. M. Dyakonov, 《贝索夫空间与外函数》, 《密歇根数学杂志》45（1998）, 第1期, 143–157。[9] O. El-Fallah、K. Kellay、J. Mashreghi 和 T. Ransford, 《狄利克雷空间入门》, 剑桥数学专著203。剑桥大学出版社, 剑桥, 2014年。xiv+211 页。[10] J. Garnett, 《有界解析函数》, 施普林格, 纽约, 2007年。[11] S. Richter, 《循环解析二等距算子的表示定理》, 《美国数学会汇刊》328（1991）, 325–349。[12] S. Richter 和 C. Sundberg, 《局部狄利克雷积分的一个公式》, 《密歇根数学杂志》38（1991）, 355–379。[13] W. T. Ross, 《经典狄利克雷空间》。见《算子相关函数论新进展》, 171–197, 《当代数学》393, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 2006年。[14] N. A. Shirokov, 《O.V. Besov解析类中的外函数》, 《数学科学杂志》85（1997）, 第2期, 1867–1897。[15] N. A. Shirokov, 《光滑至边界的解析函数代数中的理想与因子分解》, 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》130（1978）, 196–222；英文译本见《斯捷克洛夫数学研究所会议录》130（1979）, 205–233。[16] S. A. Vinogradov 和 N. A. Shirokov, 《导数属于 $\mathcal{H}^p$的解析函数的因子分解》, 《苏联数学杂志》1974年3—4月, 第2卷, 第2期, 68–83页。

波尔多大学、法国国家科学研究中心、波尔多国立综合理工学院、波尔多数学研究所、混合研究单位5251，解放大道351号，F-33400，法国塔朗斯。电子邮箱：Andreas.Hartmann@math.u-bordeaux.fr