arXiv:2301.10111v1 [math.GR] 24 Jan 2023

GL($n,\mathbb{C}$) 中有限 p'-子群阶数的上界

Geoffrey R. Robinson

2023年1月25日

摘要

本文源于对 P. Etingof 提出的问题的回应（与其在即将发表的论文 [3] 中的一项潜在应用有关），我们证明如下结论：

定理 A: *There is a fixed constant C such that for any positive integer n and prime p, every finite subgroup G of order coprime to p of* GL($n,\mathbb{C}$) *has an Abelian normal subgroup A with*

$$[G:A] \leq (Cp)^{n-1}.$$

这个定理可视为 Jordan 经典定理针对阶不被指定素数整除的有限复线性群的一种改进 G p （不过当$p > \frac{n}{eC}$ 时，它并未真正改善 Jordan 定理通常情况下最坏的界（$n+1$）！）。然而，对于任意给定的素数 p，当 n 足够大时，这个界将远小于（$n+1$）！

考察对称群 Sym_{p-1} 可知，只要$0 < c < \frac{1}{e}$，对于任意充分大的素数 p，就存在一个 p'-子群 G，它是 GL($p-2,\mathbb{C}$) 的子群，没有非平凡的阿贝尔正规子群，但却满足$|G| >(cp)^{p-3}$. 。更一般地，对于任意这样的 c以及所有充分大的 p，我们都能找到（对无穷多个 n值）一个 p'-子群 G，它是 GL($n,\mathbb{C}$) 的子群，没有非平凡的阿贝尔正规子群，但却满足 $|G| >(cp)^{n-1}$.

一旦证明了定理 A，稍微更一般的版本（常数不同）便可轻易推出。回顾一下，当 p 是素数时，有限群 G 称为 *p-closed*，如果 G 有唯一的（必然是正规）Sylow p-子群。

定理 B: *There is a fixed constant C^* such that for any positive integer n and prime p, every finite p-closed subgroup G of* GL($n,\mathbb{C}$) *has an Abelian normal subgroup A^* with*

$$[G:A^*] \leq (C^*p)^{n-1}.$$

Furthermore, if the Sylow p-subgroup of the p-closed group G is Abelian, then we may choose A^* so that $[G:A^*]$ is coprime to p.

1 初步讨论

设 G 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的有限子群。那么， G 中存在一个阿贝尔正规子群 A，使得 $[G:\ A]$ 可由 n 单独限定，这是 C. Jordan 的经典定理。允许存在阿贝尔正规子群是不可避免的。多位作者给出了 $[G:\ A]$ 的显式上界；但是，由于对称群 Sym_{n+1} 在 $n \geq 2$ 时有一个次数为 n 的忠实复表示，因此最优显式上界的下界为 $(n+1)!$。在不幸失踪之前，B. Weisfeiler 概述了一种策略，利用有限单群分类大幅改进此前已知的显式上界。在 [2], , M.J. Collins 后来证明，当 $n \geq 71$ 时，我们确实有 $[G:\ A] \leq (n+1)!$，并明确确定了 $n < 71$ 的最优上界。

我们的目的是说明，如果限制 $|G|$ 的素因子，那么通常可以改进一般有限复线性群 G 的这些界。当 $p = n+2$ 是一个大于 71 的素数时，我们注意到 Sym$_{n+1}$ 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的一个子群，其阶与 p 互素，而且最坏情况下的界确实可以达到，因此这种改进并非总是可行。如摘要所述，由于 P. Etingof 提出了一个问题，我们开始考虑阶不被任意选定的素数 p 整除的一般有限复线性群的情形；这个问题与 [3] 有关。

若 G 可解，则可以显著改进 Jordan定理的一般界。根据 L. Dornhoff 的一个定理， [5], 存在一个常数 c，使得

$$[G:A] \leq c^{n-1}$$

对于某个阿贝尔正规子群 A，它是 G 的子群。特别地，我们有

$$[G:A] < 2^{\frac{4n}{3}} 3^{\frac{10n}{9}}$$

对于适当的阿贝尔正规子群 A，它是 G 的子群。证明这一结果的一个关键要素是，对称群 Sym_n 的可解子群的阶至多为 $24^{\frac{n-1}{3}}$；当 $n = 4^k$ 为某个正整数 k 时，这一界可以达到。在 [6], , R. Gow 证明，对于奇数阶有限复线性群 G，较小的常数 c' 即已足够。在 [11], , 本文作者

改进了 Dornhoff 和 Gow 对奇数阶有限复线性群所给出的界；在这种情况下，随着群阶的最小素因子增大，所得的界也随之改进。

若 p 是素数，且 G 是 Sym_n 的 p'-子群，也就是说，是 Sym_n ($n \geq 2$) 中阶与 p 互素的子群，那么 P´alfy 和 Pyber 在 [9] 中证明了 $|G| < p^{n-1}$。另一方面， d 重迭代 wreath 积

$$\mathrm{Sym}_{p-1} \wr Sym_{p-1} \wr \ldots \wr Sym_{p-1}$$

说明，只要 c 是严格小于 $\frac{1}{e}$ 的实数，那么对于每个充分大的素数 p，对称群 Sym_n 都有一个阶大于 G 的子群

。当 $n=(p-1)^d$ 时，该阶大于 $(cp)^{n-1}$，其中 d为正整数。还请注意，这样的群 G 没有非平凡的阿贝尔正规子群，并且同构于 GL($n,\mathbb{C}$) 的一个子群。我们将证明：

定理 A：存在一个常数 C （与所选整数n 和所选素数 p均无关），使得只要 p 是素数，且 G 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的有限p'-子群，那么 G 就有一个阿贝尔正规子群 A，满足

$$[G:A] \leq (Cp)^{n-1}.$$

不过，我们不试图找出常数 C的最优取值，而是采用非常粗略的估计，以便使证明顺利进行。SL(2,5) 同构于 GL($2,\mathbb{C}$) 的一个子群 G 这一事实表明（当 $n=2$ 且 $p=7$时），我们确实需要

$$C \geq \frac{60}{7} > 8.57.$$

我们的证明需要用到有限（非阿贝尔）单群分类：我们将使用的主要性质如下（i）–iii）可借助 [4] 验证；对于 iv），众所周知，交错群可由两个元素生成，而 R. Steinberg 的一个定理指出，李型单群也可由两个元素生成）。

i) 非阿贝尔有限单群中，既非交错群也非李型的同构类型只有有限多个；每个这样的例外（散在）单群的外自同构群阶至多为二，不过后一事实对我们的证明并非真正必要——只要对任意散在单群，|Out(S))|有界即可。

ii) 交错群 Alt_d 的外自同构群在 $d>6$ 和 $d=5$时阶为二。 Alt_6 的外自同构群是克莱因四元群。

iii) 每个特征为 ℓ 的李型有限单群 S 都含有一个阶大于 $|S|^{\frac{1}{3}}$. 的幂零子群 U。这是对 E. Artin 一项观察的略微推广。

iv) 若 S 是非阿贝尔有限单群，则 S 可由两个元素生成，因此（考察一对生成元在自同构下的像）可得 |Aut(S)| $< |S|^2$. 。注意，这意味着 |Out(S)| $< |S|$. 。若 S 是散在单群，或次数不为 6 的交错群，则有 |Out(S)| ≤ 2.

根据这些事实，可以明确写出一个常数C的取值，不过目前形式的证明要求选择一个远非最优的 C 。

现在我们概述证明的结构：首先，我们证明只需找到一个常数 D （与 n 和 p 均无关），使得

$$[G : F(G)] \leq (Dp)^{n-1},$$

其中 $F(G)$ 表示 G 的 Fitting 子群（最大的唯一幂零正规子群）。这一点在第一节中得到证明：我们仔细分析 Blichfeldt 和 Frobenius 的经典结果（例如参见 [1],[5],[7],[10] 和 [12]），以说明若 H 是 $\mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 的有限子群，则 H 有一个阿贝尔正规子群 A，使得 H 的任意幂零子群N都满足 $[N\colon N \cap A] \leq (24)^{m-1}$（因此，特别地，我们有 $A \leq F(H)$ 和 $[F(H)\colon A] \leq (24)^{m-1}$）。

在第二节中，我们对 n 使用归纳法，将问题化归到 G 不可约且本原的情形。

在第三节中，我们选取 G 的一个非中心正规子群 M，使其在严格包含 $Z(G)$的条件下极小。此时有两种情形需要考察：要么 $M = F(M)$，要么 $M = Z(G)E(M)$，其中 $E(M) = L_1L_2 \dots L_t$，而 L_i是 M 的 G-共轭分量（拟单次正规子群），（可能是 $t = 1$）。

在上述每种情形中，我们都需要考察其结构和阶

$$\mathrm{Out}_G(M) \cong G/MC_G(M),$$

证明还会进一步细分，具体取决于 $C_G(M) \leq M$ 是否成立。若$C_G(M) \leq M$，则可知 $M = F^*(G)$ 是 G 的广义 Fitting 子群。在这种情况下，若 $M = F(M)$，则（由 M 的极小性）可知，$M = Z(G)U$，其中 U 是特异群（或者当 $q = 2$ 时为 $U = \Omega_2(O_q(M))$），并且 $\mathrm{Out}_G(M)$ 同构于辛群 $\mathrm{Out}(U)$ 的一个子群。在这种情况下，存在一个合适的常数 D。

另一方面，（仍在 $C_G(M) = Z(M)$ 的情形下），若有$M = Z(G)E(M)$，则对该情形的详细考察可给出一个合适的常数 D （可将其取足够大，从而也涵盖$M = F(M)$ 的情形）。

在确立了一个合适的常数 D 以涵盖情形$C_G(M) = Z(M)$之后，我们再对维数 n 进行归纳，证明同一个常数 D 在一般情形下也适用。注意，当 $C_G(M) \neq Z(M)$时， M和 $C_G(M)$都同构于维数严格小于 n的复线性群，而其结构

$$G/MC_G(M) \cong \mathrm{Out}_G(M)$$

如前所述已作过分析。

概述了证明的结构后，我们现在正式开始证明。

2 有限复线性群的幂零子群

设 H 是 GL($m,\mathbb{C}$) 的有限子群。根据 Frobenius 的论证可知， H 有一个阿贝尔正规子群 A ，它由 H 中特征值全部落在单位圆 S^1. 上长度至多为 $\frac{\pi}{3}$ 的圆弧内的元素生成。 [10] 中对此作了较为详细的说明。源自 Frobenius 的一个论证表明， H 的每个阿贝尔子群 B 都满足 $[B:\ B\cap A]\leq 12^{m-1}$.

现在设 N 是 H 的一个幂零子群。那么 N 与 GL($m,\mathbb{C}$) 的一个单项式子群共轭，而该单项式群有一个阿贝尔正规子群（由其对角矩阵构成），其商群同构于对称群 Sym$_m$· 的一个幂零子群。众所周知且易于验证， Sym_m 的每个幂零子群的阶至多为 2^{m-1} （当且仅当 m 是 2 的幂时，此上界可以达到）。因此， N 有一个阿贝尔正规子群 T，且 $[N:\ T]\leq 2^{m-1}$ ，由此可知

$$[N:T\cap A]\leq (24)^{m-1}.$$

特别地， $[N:\ N\cap A]\leq$ (24)$^{m-1}$.

现在，考虑 $N=F(H)$ 的情形，我们有 $A\leq F(H)$，并且

$$[F(H):A]\leq (24)^{m-1}.$$

特别地，若对于某个常数 D，有 $[H:\ F(H)]\leq D^{m-1}$ ，那么我们有

$$[H:A]\leq (24D)^{m-1}.$$

注：因此，回到我们的有限子群 G of GL($n,\mathbb{C}$)，如果我们能够证明存在一个与 p 无关的常数 D，使得 $[G:\ F(G)]\leq (Dp)^{n-1}$ whenever G 的阶与 p互素，那么 G 具有一个指数至多为 $(Cp)^{n-1}$的阿贝尔正规子群，其中 $C=24D$.因此，我们现在已将任务归结为寻找一个与（n 和）素数 p无关的常数 D，使得[$G:\ F(G)]\leq (Dp)^{n-1}$， whenever G 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的一个阶与 p互素的有限子群。

3 归结为本原情形

现在我们旨在通过归纳法证明，存在一个与 n 和 p均无关的常数 $D>1$，使得

$$[G:F(G)]\leq (Dp)^{n-1}$$

只要 G 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的有限子群，只要 G 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的阶与 p 互素的有限子群；当 $n=1$ 时，结论显然。

假设我们已经找到了一个常数 D，它对所有次数下的不可约本原有限复线性群均适用（对所有素数 p），并且对次数小于 n 的所有有限复线性群均适用（对所有素数 p）。我们断言，常数 D 适用于我们的群 G。

如果 G 可约，那么 G 同构于某个 p' 群的子群

$$G_1 \times G_2,$$

其中存在正整数 s、t，使得 $s+t=n$，且每个 G_i 都是 G的一个同态像，其中

$$G_1 \leq \mathrm{GL}(s, \mathbb{C})$$

and

$$G_2 \leq \mathrm{GL}(t, \mathbb{C}).$$

于是我们有

$$F(G_1 \times G_2) = F(G_1) \times F(G_2),$$

and

$$[G_1 \times G_2 : F(G_1 \times G_2)] \leq (Dp)^{s-1}(Dp)^{t-1} \leq (Dp)^{n-2}.$$

因此

$$[G : F(G)] \leq [G : G \cap [F(G_1) \times F(G_2)]] \leq (Dp)^{n-2},$$

而且 D 适用于 G。

于是，假设 G不可约但非本原。再假设给定的 G 表示等价于由 G的某个真子群 H 的一个本原表示诱导得到的表示，该本原表示的次数为 m（它是 n 的一个因数）。令 $t = [G : H]$。令 $N = \bigcap_{g \in G} H^g \lhd G$。那么 G/N 同构于对称群 Sym_t. 的一个 p' 子群。由 [9], ，我们有

$$[G : N] \leq p^{t-1}.$$

根据克利福德定理，N嵌入到直积 $N_1 \times N_2 \ldots \times N_t$ 中，其中每个 N_i 都同构于 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ 的一个有限（不一定不可约）子群。

根据归纳假设，我们有

$$[N_i : F(N_i)] \leq (Dp)^{m-1}$$

对每个 i 都成立，进而得到

$$[N : F(N)] \leq (Dp)^{tm-t}.$$

因此

$$[G : F(N)] \leq (Dp)^{tm-t}p^{t-1} \leq (Dp)^{n-1}$$

并且显然

$$[G : F(G)] \leq (Dp)^{n-1}.$$

因此，只需找到一个常数 $D > 1$，它与 n 和 p 无关，并满足

$$[G : F(G)] \leq (Dp)^{n-1}$$

每当 G 是 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 的本原（不可约）有限子群时。

4 本原情形： G的极小非中心正规子群

现在假设 G 是 GL($n,\mathbb{C}$) 的一个非阿贝尔有限本原（不可约） p' 子群（其中 $n>1$）。在这种情况下，我们注意到 G 的所有阿贝尔正规子群都是中心的；更一般地（利用克利福德定理）， G 的任意正规子群 N 都同构于 GL($d,\mathbb{C}$) 的一个不可约子群，其中某个因数 d 整除 N；而正规子群 $C_G(N)$ 则同构于 GL($\frac{n}{d},\mathbb{C}$) 的一个（不一定不可约的）子群。

我们可以选取 G 的正规子群 M，使得 $Z(G) \leq M$，且 M在 G中非中心，并且在满足这些条件的子群中极小。于是，由 G的本原性可知， M 是非阿贝尔的，因此

$$F^*(M) \neq Z(M) (= Z(G)).$$

由于 $F(M) \lhd G$且 $E(M) \lhd G$， M的极小性迫使$M = F(M)$或 $M = Z(G)E(M)$。可能出现 $M = G$的情形，因此我们先考虑这种情况。

在这种情况下，由于若 G 是幂零的，我们便已得证，因此可见 $G = Z(G)L$，其中 L是拟单群。

更一般地，为了后文方便，我们先处理这样的情形： G是GL($n,\mathbb{C}$)的有限（不可约）本原子群，且 $F^*(G) = Z(G)L$，其中 $L = L'$，而 $L/Z(L) \cong S$是一个有限非阿贝尔单群。于是$[G : F^*(G)] \leq |\mathrm{Out}(S)|$且 $[F^*(G) : Z(G)] = |S|.$。在这种情况下，我们有$F(G) = Z(G)$，并且 $[G : F(G)] \leq |\mathrm{Aut}(S)|.$。此外，为了后文方便，我们注意到， S 的幂零子群与 L 中包含 $Z(L)$的幂零子群之间存在一一对应。

首先假设 S 是散在单群。由于散在单群只有有限种同构类型，并且当 S是散在单群时，我们有 $|\mathrm{Out}(S)| \leq 2$，因此可以选取一个常数 D_1，使得无论 S 是哪一个散在群，都有 $D_1 > |\mathrm{Aut}(S)|$，于是显然

$$[G : F(G)] \leq (D_1 p)^{n-1}.$$

例如，我们可以取 D_1 为 Fischer-Griess Monster 散在群 $\mathcal{M}$的阶。事实上，由于任何散在单群 S 的完美中心扩张的忠实复表示维数至少为 6，且每个这样的 S 的阶至多为 $|\mathcal{M}| < 10^{54}$，我们看到 $D_1 = 10^{11}$ 是可行的。

接下来，假设 S 是李型单群。根据初步讨论中关于阿廷观察的注，以及第一节中关于有限复线性群的幂零子群的讨论，我们知道 S 有一个幂零子群 U，满足 $|U|^3 > |S|$，并且 $|U| \leq (24)^{n-1}$ （因为所有

G 的阿贝尔正规子群都是中心的）。因此，我们有 $|S| \leq (24)^{3(n-1)}$。此外，我们显然有 $|\mathrm{Out}(S)| < |S|$，所以

$$[G : F(G)] \leq 24^{6(n-1)}.$$

在这种情况下，我们设 $D_2 = (24)^6 < 10^9$.

接下来，假设 S 是一个交错群，例如对某个 $k \geq 5$，有 $S \cong Alt_k$。现在我们需要考虑到 G 的阶与 p 互素这一事实。因此，注意到我们显然有 $k < p$，因为 G 的阶与 p 互素。于是 $p \geq 7$. 然后

$$[G : Z(G)] \leq 2k! < 2k^k.$$

众所周知，对于 $k \geq 7$，交错群 Alt_k 没有次数小于 $k-1$ 的忠实复不可约表示。根据 A. Wagner 的一个定理 [13],，除有限个较小的 k 外， Alt_k 的任何完美中心扩张都没有次数小于 $k-1$ 的忠实复表示。为求稳妥，只要 $k \geq 23$， Alt_k 的任何完美中心扩张都没有次数小于 $k-1$ 的忠实复表示。因此存在一个常数 D_3 （与 p 无关），使得在 $n < k-1$ 的任何情况下都有 $D_3^{n-1} \geq 4|Alt_k| \geq [G : Z(G)]$。

现在考虑 $n \geq k-1$ 和 $n-1 \geq k-2$ 的情形。

现在证明，在这种情况下，我们可以选取一个常数 D_4 （与 p 无关），使得 $(D_4 p)^{k-2} \geq 2k!$ 。

但我们当然有 $4^{k-2} \geq (k-1)^2$ （因为 $k \geq 5$），并且 $p^{k-2} \geq (k+1)^{k-2}$。因此我们总有

$$(4p)^{k-2} \geq (k-1)^2(k+1)^{k-2} \geq (k^2-1)(k-1)(k+1)^{k-3} > k!(k-1) > 4k!,$$

因此 $D_4 = 4$ 就可以了。

总之，在所有满足 $F^*(G) = Z(G)L$ 且 L 为拟单的情形下，我们都可以找到一个常数 $D = max\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$，它与 p 无关，并且满足

$$[G : Z(G) \leq |\mathrm{Aut}(S)| \leq (Dp)^{n-1}.$$

为方便后文，我们指出，当然有 $D \geq 256$。

这处理了 $G/Z(G)$ 为几乎单群的情形；特别是，我们现在已经处理了情形 $M = G$。从现在起，我们假设 $G/Z(G)$ 不是几乎单群。

注：我们注意到，如果 $p \in \{3, 5\}$，在此分析中还可以做得稍好一些。因为在这种情况下，单群 S 既不是交错群，也不是散在单群，因此在这些情形下，我们可以将 D 替换为 $D^* = 24^6$ 。

接下来，假设 $M = F(M)$。注意， M的极小性确保 $M/Z(M)$ 是一个初等阿贝尔 q-群 Q，其中 q 是某个素数，并且

G 在 Q 上忠实且不可约地作用。根据 M 的极小选择，我们知道 $M = Z(G)U$，其中 $U =$ 或者是特异群（或是一个阶为 4 的循环群与一个特异 2-群的中心积），其阶为 q^{2d+1}，并且 $G/MC_G(M)$ 同构于 $\mathrm{Sp}(2d, q)$ 的一个子群，其中 q^d 是 M 的忠实不可约复表示的维数。

Then

$$[G : MC_G(M)] \leq q^{2d^2+d}$$

且 $[G : C_G(M)] \leq q^{2d^2+3d}$. 根据 [8], 的引理 4.4，我们有

$$q^{2d^2+3d} \leq \frac{16^{q^d}}{q^d}.$$

当 $q^d \geq 16$ 时，这显然至多为 16^{q^d-1} 。因此，我们显然有

$$q^{2d^2+3d} \leq 256^{q^d-1}$$

对于素数 q 以及任意正整数 d 。因此，在这种情况下，我们有

$$[G : C_G(M)] \leq 256^{q^d-1},$$

其中 $q^d > 1$ 是 $n.$的一个素数幂因数

如果当 $M = F(M)$ 时，我们还有 $C_G(M) \leq M$，那么显然有

$$[G : F(G)] \leq D^{n-1}.$$

现在我们按次数 n 进行归纳法证明：无论 M 的结构如何，我们都有 $[G : F(G)] \leq (Dp)^{n-1}$，其中 D 是上文定义的常数。当 $n = 1$ 时此结论成立；当 $F^*(G) = Z(G)L$ 且 L 为拟单群时，结论也成立。为进行归纳，我们假设上述常数 D 对所有次数小于 n 的有限复线性群 H 都适用（任取素数 p）。也就是说，我们假设有

$$[H : F(H)] < (Dp)^{m-1}$$

因为只要 $m < n$ 和 p 是素数，使得 H 是 $\mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ 的有限 p'-子群。

在我们选取的极小非中心正规子群 M满足 $C_G(M) = Z(M)$ 和 $M = F(M)$ 的情形下，我们在上文已证明$[G : Z(G)] \leq D^{n-1}$，因为 $D \geq 256$ 和 $n \geq q^d$.

接下来，假设 $M = Z(G)E(M)$）。

在这种情况下， $E = E(M) = L_1L_2 \dots L_t$，其中 L_i是 G-共轭的 G分量，它们具有共同的中心 $Z(L_1) \leq Z(E) \leq Z(G)$。于是， M 同构于 $\mathrm{GL}(r^t, \mathbb{C})$ 的一个子群，其中 $r > 1$ 是 n 的因数，并且每个 L_i都同构于 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 的一个不可约子群。

我们已经讨论过 $t = 1$ 和 $C_G(M) = Z(G)$ 的情况，因此不再进一步考虑这种情况。于是，假设 $C_G(M) = Z(G)$，且 $t > 1$。

注意到 L_1 现在同构于 $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ 的一个子群。令 $L_1/Z(L_1) \cong S$，这是一个非阿贝尔单群。根据对 $G/Z(G)$ 为几乎单群的情形所作的分析，我们知道，对于上文定义的常数 D，有 $|S| < (Dp)^{r-1}$。

现在 $[G : Z(G)] \leq |\mathrm{Aut}(S) \wr X|$，其中 X 是 Sym_t 的一个（传递） p'-子群。因此我们有

$$[G : Z(G)] \leq (Dp)^{rt-t} p^{t-1} \leq (Dp)^{rt-1} \leq (Dp)^{r^t-1},$$

所以显然

$$[G : Z(G)] \leq (Dp)^{n-1}.$$

因此，在所有满足 $C_G(M) \leq M$ 的情形下（包括 $M = G$ 这一情形），我们有

$$C_G(M) = Z(M) = Z(G) = F(G),$$

并且我们已经证明

$$[G : F(G)] \leq (Dp)^{n-1}.$$

现在我们假设 $H = C_G(M) \not\leq M$，在这种情况下 $M \neq G$.

在 $M = Z(G)E(M)$ 的情况下，我们看到 H 同构于 $\mathrm{GL}(\frac{n}{r^t}, \mathbb{C})$ 的一个子群。这一次，（沿用上述记号，并根据归纳假设），我们有

$$[G : H] \leq |\mathrm{Aut}(S) \wr X|,$$

其中 X 是对称群 Sym_t 的一个（传递） p'-子群。于是我们有

$$[G : H] \leq (Dp)^{rt-t} p^{t-1} \leq (Dp)^{rt-1} \leq (Dp)^{r^t-1}.$$

此外，根据归纳假设，我们还有

$$[H : F(H)] \leq (Dp)^{\frac{n}{r^t}-1}$$

。因此我们有

$$[G : F(H)] \leq (Dp)^{r^t-1+\frac{n}{r^t}-1}.$$

现在，当 $x > 1$ 是整除 n 的整数，且 $r^t \geq 2$ 是 n 的因数时，我们有 $x + \frac{n}{x} \leq 2 + \frac{n}{2}$，因此

$$[G : F(H)] \leq (Dp)^{\frac{n}{2}} \leq (Dp)^{n-1}$$

当然

$$[G : F(G)] \leq (Dp)^{n-1}.$$

现在我们回到 $M = F(M)$ 的情形，但这次

$$H = C_G(M) \neq Z(M).$$

现在（沿用前面的记号），我们知道 H 同构于 GL($\frac{n}{q^d}, \mathbb{C}$) 的一个子群，并且根据归纳法，我们可以假设

$$[H : F(H)] \leq (Dp)^{\frac{n}{q^d}-1}$$

，而我们仍然有

$$[G : H] \leq 256^{q^d-1}.$$

因此我们当然有

$$[G : F(H)] \leq (Dp)^{\frac{n}{q^d}-1} \times D^{q^d-1}.$$

现在， $x+\frac{n}{x}$ 随 $1 \leq x \leq \sqrt{n}$ 单调递减，随 $x \geq \sqrt{n}.$ 单调递增。由于 $q^d \geq 2$ 且 q^d 是 n的一个因数，我们得出

$$[G : F(H)] \leq D^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}-1} < (Dp)^{n-1}.$$

那么在这种情况下，我们当然有 $[G : F(G)] \leq (Dp)^{n-1}$ 。

现在我们已经证明，我们总是有

$$[G : F(G)] \leq (Dp)^{n-1},$$

这是完成定理 A 证明所需的。

现在，已知定理 A 中常数C 的存在，我们来完成定理 B 的证明。设 p 为素数， n 为正整数，并设 G 为 GL($n, \mathbb{C}$) 的一个 p-闭有限子群，其 Sylow p-子群为 P。根据 Schur-Zassenhaus 定理（例如参见 Isaacs [7]），对某个 G 的 p'-子群H ，有 $G = HP$ 。将定理 A 应用于 H，可知 H 有一个阿贝尔正规子群 A ，满足 $[H : A] <(Cp)^{n-1}$。

注意，现在 $K = PA$ 是 G的正规子群。根据 Dornhoff 关于可解群的定理，存在一个固定常数 c （与 n和 p均无关），使得 $[K : F(K)] < c^{n-1}.$。现在， $F(K)$是 G的正规子群 K中的特征子群，因此 $F(K) \lhd G.$。于是显然有 $[G : F(G)] \leq (cCp)^{n-1}$，并且按照定理 A 的证明方法，可得定理 B 中阿贝尔正规子群 A^* 及常数 C^* 的存在。

进一步假设 P是阿贝尔群（并且是 G的正规子群）。那么 $PA^* \lhd G$，因此 $PA^* \leq F(G)$，因为 P和 A^*都是幂零群。然而，对每个 $q \neq p$， A^*都有一个阿贝尔西洛 q子群，而 P 是 G的一个阿贝尔西洛 p子群。因此， PA^* 是幂零群，且对每个素数 r都具有阿贝尔西洛子群； PA^* 是阿贝尔群，而我们显然有

$$[G : PA^*] \leq [G : A^*],$$

因此，必要时我们可以用 PA^* 替换 A^* ，以确保 $[G : A^*]$ 与 p 互素。

5 参考文献

[1] Blichfeldt，H.，《有限共线群》，芝加哥大学出版社，芝加 o, (1917).[2] Collins, M.J.，《复线性群的Jordan定理》，群论杂志，10，(2007)，411-423。[3] Coulembier, K., Etingof, P.和Ostrik, V.，《对称张量范畴中张量幂的渐近性质》，即将发表。[4] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A.和Wilson, R.A.，《有限群图谱》，克拉伦登出版社，牛津，(1985)。[5]Dornhoff, L.，《群表示论》A篇：普通表示论，马塞尔·德克尔出版社，纽约，(1972)。[6]Gow, R.，《关于可解群中 p-块的特征标数目》，代数杂志，65，2，(1980)，421-426。[7] Isaacs, I.M.，《有限群特征标理论》，学术出版社，纽约，(1976)。[8] Kov´acs, L.G.和Robinson, G.R.，《关于有限群的共轭类数目》，代数杂志，160，(1993)，441-460。[9] P´alfy, P.和Pyber, L.，《小自同构群》，伦敦数学会通报，30，4，(1998)，386-390。[10] Robinson, G.R.，《关于线性群》，代数杂志，131，(1990)，527-534。[11]Robinson, G.R.，《奇数阶置换群与复线性群的阶数上界》，代数杂志，335，(2011)，163-170。[12]Speiser, A.，《有限阶群论》，第3版，(1937)，柏林。[13]Wagner, A.，《关于任意域上对称群和交错群的射影表示次数的观察》，数学档案，29，(1977)，583-589。