arXiv:2301.10122v1 [math.GT] 24 Jan 2023

正手术产生的可填充接触结构

¨THOMAS E. MARK 和 Bulent Tosun

摘要。我们研究这样一个问题：沿接触三维流形 Y 中的纽结 K 进行手术系数为正的接触手术，何时会产生弱可填充的接触结构。我们证明，当且仅当 Y 本身弱可填充，且 K 同痕于 Y 的某个填充内部一个适当嵌入的辛圆盘的边界时，这一情况才会发生。此外，如果 Y' 是沿 K 进行正接触手术所得的接触流形，那么 Y' 的任意填充都与 Y 的某个填充中该圆盘的适当邻域之补集辛同胚。

利用这一结果，我们推导出标准三维球面中的纽结要允许可填充正手术必须满足的若干条件，例如拟正性以及切片亏格与四维扣结数相等；我们还用拟正辫子表达式刻画了这类纽结。我们证明，由正辫的闭包得到的纽结总是允许可填充正手术；具有透镜空间手术的纽结及这类纽结的适当卫星纽结也如此。事实上，具有至多 10 个交叉的大多数拟正纽结都允许可填充正手术。另一方面，一般而言，（强）拟正性、正性或拉格朗日可填充性并不必然意味着纽结允许可填充正接触手术。

1. 引言

每个闭合定向三维流形 Y 都承载接触结构，而 Y 上的任意接触结构都可以通过沿 Legendrian 链环进行接触手术，从 S^3 上的标准接触结构得到。接触结构的许多几何性质在负接触手术系数的接触手术下得以保持，例如紧性以及各种可填充性概念，因此，考察正接触手术对这些性质的影响是很自然的。本文研究沿单个纽结 $K \subset Y$ 进行手术的情形，并探讨在何种情况下，采用某个正接触手术系数进行接触手术后会得到可填充接触结构。下面的定理 1.1 在某种意义上完整地回答了这个问题。

回忆一下，若紧致辛四维流形 $(Z,\ \omega)$ 满足$\partial Z = Y$作为定向流形成立，且 ω 在接触平面 ξ 上为正（此处及全文中，我们假定 ξ带有给定的定向），则称其为 $(Y,\ \xi)$ 的弱辛填充。若存在定义在 Y 的某个邻域内、指向 Z 外部的 Liouville 向量场，且其诱导的接触结构为 ξ，则称 $(Z,\ \omega)$ 是 $(Y,\ \xi)$ 的强填充。

定理 1.1。设 $\mathcal{K} \subset Y$ 是闭接触三维流形(Y,ξ)中的一个定向 *Legendrian* 纽结。对于整数 n，令 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 表示沿 $\mathcal{K}$ 进行接触 n-手术并采用“全部负稳定化”后得到的接触结构。那么，存在 $n>0$ 使得 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 可由某个辛流形(Z',ω')弱辛填充，当且仅当以下两项均成立：

- (Y,ξ) 是弱辛可填充的。
- 对(Y,ξ) 的某个弱填充(Z,ω) 包含一个适当嵌入的辛圆盘 Δ，使得 $\partial\Delta$是 $\mathcal{K}$的正向横截推离。

此外，在这种情况下，可以选取 Z和 Δ，使得 $(Z',\ \omega')$ 与 Z 中 Δ 的某个适当邻域的补集辛同胚。

我们将用“$\mathcal{K}$ 存在可填充正手术”这一说法，作为满足定理中所述条件的某个 $n > 0$ 存在的简写。事实上，若 $K \subset Y$ 是一个光滑结，我们称 K 存在可填充正手术，是指存在一个具有该性质的 K 的勒让德代表 $\mathcal{K}$。请注意，任意光滑结都有许多彼此不等价的勒让德代表，但可填充手术这一条件只取决于这些代表的横截推离。特别地，由于相差负稳定化的定向勒让德结 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$ 具有等价的横截推离，因此 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$ 是否存在可填充正手术，答案相同。正如我们将在下文回顾的（注 2.3），只要相应的光滑手术等价，由此类手术得到的可填充接触结构便接触同胚。

定理中“当且仅当”陈述的正向蕴含由 Conway、Etnyre 和第二位作者在 [10, 定理 1.13] 中证明（该定理仅针对标准三维球面中的纽结陈述，但同样的论证也能证明更一般的情形）。我们在第 3 节给出一个略有不同的证明（见定理 3.3）。反向蕴含则是以下结果的推论。

定理 1.2。 设 (Z, ω) 是 (Y, ξ)的弱辛填充，且 $\Delta \subset Z$是一个适当嵌入的辛圆盘，其正向横截边界为 $K \subset Y$。那么， Δ 有一个任意小的管状邻域 U ，使得若 $Z' = Z - U$ 和 $\omega' = \omega|_{Z'}$成立，则 (Z', ω') 是 $Y' = \partial Z'$上的接触结构 ξ' 的弱辛填充。此外，接触结构 ξ' 可由 ξ 沿 K经一次非容许横截手术得到，或者（等价地）由沿 K的一个勒让德结逼近施行正接触手术得到。

我们指出，如果 $\mathcal{K} \subset Y$ 具有这样的性质：对于某个 $n > 0$， $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 弱可填充，那么对所有 $m \geq n$， $\xi_m^-(\mathcal{K})$ 都可填充。对此有多种证明方法；从当前视角出发，只需对定理 1.1 给出的辛圆盘 $\Delta \subset Z$上的点进行辛吹起即可轻松证明（参见第 2.3 节中的讨论）。因此，对于给定的 $\mathcal{K}$, 使得 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 弱可填充的整数 $n > 0$ 集合要么为空，要么是形如 $[n_0, \infty)$ 的区间。

当应用于 S^3上的标准接触结构 ξ_{std} 中的纽结时，定理 1.1 提供了一种非常有效的方法，用以确定纽结 K 是否存在可填充正手术。（我们指出，在 $(Y, \xi) = (S^3, \xi_{std})$ 的情形下， $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 的弱可填充性与强可填充性等价。参见推论 3.11。）事实上，(S^3, ξ_{std}) 的辛填充都与 4- 球的爆破辛同胚，因此问题归结为判断 K 是否为此类爆破中某个辛圆盘的边界。

在约束方面，我们有如下推论。回顾一下， $c_*(K)$ 表示 B^4 中边界为 K 的任意一般位置浸入圆盘所含双重点的最小数目。 $g_*(K)$ 表示 B^4 中边界为 K 的任意光滑嵌入曲面的最小亏格；通过消除双重点，我们显然有不等式$g_*(K) \leq c_*(K)$，对任意 $K \subset S^3$ 均成立。一般而言， $c_*(K)$ 与 $g_*(K)$ 之间的差可以任意大 [11,32]。拟正性的定义将在第 2.1 节中回顾。

Co推论 1.3. 如果 $K \subset (S^3, \xi_{std})$ 存在可填充正手术，那么 K 必须满足：

- K 是拟正的。
- 不变量 $g_*(K)$ 与 $c_*(K)$ 相等。

此外， K 在 B^4 中界定了一个恰当浸入圆盘，其奇点仅为横截双重点，包含 $c_*(K) = g_*(K)$个正双点，且没有负双重点。

推论 1.3 的证明详见第 2 节。它立即推出以下结论，尤其回答了 [10]中的问题 2。

推论 1.4. 存在一些位于 S^3 中的勒让德结 $\mathcal{K}$，使得 ξ_n^-（$\mathcal{K}$） 对所有充分大的 n 都是紧致的，但 ξ_n^-（$\mathcal{K}$） 对任何 $n > 0$ 都不可填充。事实上，这样的 $\mathcal{K}$ 中存在正结，尤其是那些围成嵌入于 B^4 中的拉格朗日曲面的正结。

事实上，只需考虑标准表中的纽结 $K = 7_4$。这个纽结满足 $g_*(K)$ =1，但 Owens-Strle [41] 证明了 $c_*(K) = 2$。因此，根据推论 1.3， K 不存在可填充正手术。另一方面， K 是一个正结，因为它有一个仅含正交叉的图示，因此根据 [23], 它是拉格朗日可填充的。并且不难看出，对于 $\mathcal{K}$ 的一个最大 Thurston-Bennequin 数的勒让德代表，接触手术 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 对所有 $n \geq 1$ 都是紧致的（例如，由 [19] 或 [35] 可知，这些接触结构的 Heegaard Floer 接触不变量均非零）。请注意，正结尤其是强拟正结 [48], ，因此推论 1.4 也表明，强拟正性并不意味着存在可填充正手术。

另一方面，在第 2.1 节中，我们给出了一般性且相对容易计算的条件，说明纽结 S^3 何时可进行可填充正手术。这些条件见定理 2.6 和 2.12。为便于在本引言中举例说明，下面给出一个关于特定类别纽结存在可填充正手术的结果。

推论 1.5。 若纽结 $K \subset S^3$ 满足以下任一条件，则它可进行可填充正手术。

(a) K 同痕于某个正辫的闭包。(b) 对 K 进行某种光滑手术（手术系数为正）可得到一个透镜空间。(c) K 是一个扭曲卫星结 $P_m(C)$，其中：

- $C \subset S^3$ 是一个可进行可填充正手术的纽结，
- m 是对 C进行某种此类可填充手术时对应的光滑手术系数，且
- 模式 P 是定义 *2.14* 意义下的辫状可填充模式。(d) 特别地，缆结 $K = C_{p,\,q}$ 可进行可填充正手术，只要 C 本身具有 *tha* *t* 性质，且缆绕参数满足 $q/p > m$，其中 m 如 *(c)* 所述。

值得注意的是，尽管所有已知可接受透镜空间手术的纽结也都同痕于正辫的闭包（至多相差一个镜像；例如， [18]中就观察到了这一点），但我们对情形 (a) 和 (b) 的证明却有所不同。特别地，(b) 部分与推论 1.3 一起表明，任何 K 可接受透镜空间手术的纽结都必须具有 g_*（K） $= c_*$（K），而这一点似乎并非普遍已知。(c) 部分对许多 L-空间纽结也推出了相同的性质，但先验地并非对所有此类纽结都成立；参见第 2.2 节中的讨论。

然而，可接受可填充正手术的纽结类要大得多，并非推论 1.5 所暗示的那样。在第 2.1 节中，我们根据纽结的拟正辫表达式，给出了可填充正手术的充要条件；这一判据结合推论 1.3 的限制，足以证明以下结论。

推论 1.6. *KnotInfo* 数据库中列出的最多有 *10* 个交叉的 *59* 个准正纽结中， *[8], 48*有可填充正手术，而 *11* 个没有。

请注意，本推论中提到的纽结只有 6 个是透镜空间结；这 6 个以及另外两个纽结是仅有的正辫。

第 2 节中给出了关于 S^3 中纽结的可填充正手术的若干其他必要条件、构造及推论。其中，推论 2.5 指出，若 $K \subset S^3$ 存在手术系数为 $r > 0$ 的可填充正手术，则相应接触结构的每个填充都具有负定交叉形式。特别地，手术流形 $S^3_r(K)$ 是某个光滑负定 4-流形的边界，这是一个非平凡的限制。在 [40], , Owens 和 Strle 探讨了对纽结 $K \subset S^3$ 进行正手术何时具有这一性质，并在此背景下定义了不变量

$$m(K) = \inf\{r \in \mathbb{Q}_{>0} \mid S^3_r(K) \text{ bounds a negative definite 4-manifold}\}.$$

他们证明了对所有 K， $m(K)$ 都存在（即对任意纽结，都存在某个正手术，使其边界为一个负定 4-流形）。本着类似的思路，我们可以定义

$$\mu(K) = \min\{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid K \text{ 可进行可填充正手术，其光滑系数为 } r\},$$

若不存在可填充正手术，则令 $\mu(K) = \infty$。于是推论 2.5 表明，对任意 $K \subset S^3$，都有 $m(K) \leq \mu(K)$。严格来说， $\mu(K) = 0$ 的情形需要特别论证：若 $\mu(K) = 0$，则 K 必为切片，这可由第 2.3 节开头关于可填充手术系数的讨论得出；而若 K 是切片，则不难证明 $m(K) = 0$。

$\mu(K)$ 的一个基本性质如下：

命题 1.7。若 $\mu(K) < \infty$ 则有

$$2g_*(K) \leq \mu(K) \leq 4g_*(K).$$

除非 $g_*(K) = 0$，否则第一个不等式是严格的。

该命题在第 2.3 节中证明。根据下一个结果，命题 1.7 中的第二个不等式可能取等号。

Pr命题 1.8。 对于正扭结 $T(p, q)$，有 $\mu(T(p, q)) = \lceil m(T(p, q)) \rceil$。

这在定理 2.21 中得到证明。 $m(T(p, q))$ 的值由 Owens 和 Strle 计算得出（并在第 2.3 节中回顾），特别地，有 $m(T(2, 2n+1)) = 4g_*(T(2, 2n+1) = 4n$。因此，在这种情况下，命题 1.7 的第二个不等式取等号。对于“典型的”环面结，该不等式是严格的；例如，有

$$\mu(T(p, p-1)) = (p-1)^2$$
$$4g_*(T(p, p-1)) = 2(p-1)(p-2).$$

由这些例子可知，一般而言，最小可填充手术系数 $\mu(K)$并非由 K的亏格或切片亏格决定。

推论 1.9。若 K 是一个允许进行可填充正手术的纽结，则 $m(K) \leq 4g_*(K)$。

注意到 Owens-Strle 证明，对于一般的 K，有界 $m(K) \leq 4u_+(K)$，其中u_+ 是将 K通过解结序列解开的过程中改变正交叉的最小次数。类似的论证表明， $m(K) \leq 4c_+(K)$，其中 $c_+(K)$ 是在 B^4 中边界为 K 的正规浸入圆盘中，正自交的最小数量。一般而言，这些界可以任意大于 $4g_*(K)$ [11,32], ；然而，正如我们所见， $m(K) = 4g_*(K)$ 也可能成立。事实上，由于存在一些纽结的可填充正手术例子满足 $u_+(K) = u(K) > g_*(K)$

（例如纽结 10_{126}），上面推论中的界比解结界更精确。另一方面，当然，如果 K 允许可填充正手术，那么根据推论 1.3，$g_*(K) = c_*(K)$ 且$c_-(K) = 0$。我们不知道是否存在满足 $\mu(K) < \infty$ 且$\lceil m(K) \rceil < \mu(K)$的纽结，但我们预期此类纽结存在；一种可能是椒结 $P(-2, 3, 7)$（见例 2.20）。

本文结构如下。在第 2 节中，我们假设定理 1.1 和 1.2 成立，并由此推导出上述其余结果以及一些进一步的细化结论。第 2.1 节介绍了若干与存在可填充正手术等价的条件，其中包括给出辫子刻画的定理 2.12。我们利用后者证明，某些扭结允许可填充正手术；此外，第 4 节中的表 1 验证了推论 1.6。

第 2.2 节包含一些构造，特别是给出了推论 1.5 的证明；其中还对是否存在任何 L-空间纽结允许可填充正手术这一问题作了一些评论。

在第 2.3 节中，我们考察不变量 $\mu(K)$，即最小可填充正手术系数。本节包含命题 1.7 和 1.8 的证明。

第 3 节包含定理 1.1 和 1.2 的证明，是本文的技术核心。第 4 节列出了至多有 10 个交叉且允许可填充正手术的纽结。

致谢。 作者感谢 Peter Feller 和 Marco Golla 就本文的构想进行了有趣的讨论；也感谢 Ken Baker 和 Brendan Owens 提供的有益交流。本文的部分工作是在第一作者作为研究成员参加 MSRI/SLMath 的“规范理论的分析与几何方面”项目期间完成的；我们感谢他们的支持与款待。TM 的部分工作获得了 Simons Foundation 的资助（编号 523795 和 961391）。BT 的部分工作获得了 NSF（DMS-2105525 和 CAREER DMS 2144363）及 Simons Foundation（636841，BT）的资助。

2. 应用与示例

本节中，我们假设定理 1.1 和 1.2 的结论成立，并主要考虑 S^3 上标准接触结构中的勒让德结和横截结。在作此特化之前，我们指出，对于一个允许可填充正手术的纽结，定理 1.1 并未直接说明哪种接触手术会产生可填充结构。不过，我们有以下基本观察。设 Y 是一个 3-流形，$K \subset Y$ 是一个零同调纽结，且 $(Y, K) = \partial(Z, \Delta)$，其中 $\Delta \subset Z$ 是 4-流形中的一个真嵌入圆盘。若选取一个以 K 为边界的光滑 2-链 $\Sigma \subset Y$（例如塞弗特曲面），则可以将 K 上的框架与整数对应起来，规定由 Σ 诱导的框架对应于 0。同样，可以用 Σ 定义 Δ 的自交数，规定 $\Delta \cdot \Delta$ 为由 $\Delta \cup -\Sigma$ 确定的绝对同调类的自交数。（若 Y 是有理同调球面，这些定义与 Σ 的选择无关。）以下结论显然成立，或者可参见 [10, 定理 1.14] 的证明。

引理 2.1. 在上述情形中，令 Z' 为去掉 Δ的小管状邻域后的补集，并令$Y' = \partial Z'$。那么，Y' 可由 Y沿 K 进行手术得到，手术系数等于 $-\Delta \cdot \Delta$；其中手术系数和自交数均相对于同一个塞弗特曲面定义。□

特别地，若给定 (Y, ξ) 和勒让德结 $\mathcal{K} \subset Y$，并且我们关注使 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 可填充的最小正接触手术系数 n，那么等价地，我们关注某个填充中由横截推离的平行曲线所围成的辛圆盘的最大自交数：

$\mathcal{K}$ 该圆盘位于 $(Y,\ \xi)$ 的某个填充中。若最大自交数为 $-p$，则相应的可填充接触手术系数为 $p-\mathrm{tb}(\mathcal{K})$。

注记 2.2. 根据引理 2.1，定理 1.2 的一个推论是：若 $\Delta \subset Z$ 是一个恰当浸入圆盘，其边界零调且正向横截，并且位于弱填充 (Y,ξ) 的辛流形中，那么对于 $K=\partial\Delta$ 的任意 Legendrian 逼近 $\mathcal{K}$，都有 $-\Delta\cdot\Delta>\mathrm{tb}(\mathcal{K})$。这一点不难直接看出：例如，可以沿着 $\mathcal{K}$ 将一个 Stein 2-柄 H 粘到 Z 上。于是，H 的拉格朗日核有一个辛推离 Δ，其边界是横截平行推移 K，且自交数为 $\Delta\cdot\Delta=\mathrm{tb}(\mathcal{K})-1$。将 Δ 与 Δ 粘合，得到嵌入于 $Z\cup H$ 中的辛球面 S；后者是其边界的弱填充。根据 [14]，$Z\cup H$ 嵌入某个闭辛四维流形中，我们可以假设该流形具有 $b_2^+\geq 2$，因此由 [36] 可知，我们必须有 $\widetilde{S}\cdot\widetilde{S}<0$。由于 $S\cdot S=\Delta\cdot\Delta+\Delta\cdot\Delta$，可得 $-\Delta\cdot\Delta\geq\mathrm{tb}(\mathcal{K})$。既然 Δ 的补集具有可填充边界，且该边界由对 $\mathcal{K}$ 的某种接触手术给出，那么这个不等式必为严格不等式，因为光滑框架等于 $\mathrm{tb}(\mathcal{K})$ 的接触手术会产生过扭转结构。（事实上，即使不假设 K 零调，同样的论证也适用：它表明，在定理 1.2 中产生 Y' 的光滑手术所对应的框架，大于 $\mathcal{K}$ 的接触框架。）

注 2.3. 严格来说，我们找到一个辛圆盘，其边界是 $\mathcal{K}$ 的横截推离K 后，定理 1.2 表明，我们在 K 的 Legendrian 逼近$\mathcal{K}'$ 上得到一个可填充正手术；而这个 Legendrian 结先验上与原来的 $\mathcal{K}$ 并非同一个结。我们声称可以忽略这个技术细节，即 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$ 要么都存在可填充正手术，要么都不存在。事实上，由于它们是同一个横截结的逼近，$\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}'$ 可通过负稳定化和去稳定化相互关联；我们声称，在 $\mathcal{K}'$ 上进行可填充正接触手术，等价于在 $\mathcal{K}$ 上进行某种正接触手术。为此，首先回忆：若 $\mathcal{K}$ 是任意一个经过稳定化的 Legendrian 结，则 $\xi_{+1}(\mathcal{K})$ 是过扭转的。记 $\mathcal{K}^{(k)}$ 为 $\mathcal{K}$ 的 k 重负稳定化。由对任意 $n>0$ 都有 $\xi_n^-(\mathcal{K})\cong\xi_{n+1}^-(\mathcal{K}^{(1)})$ 这一事实（见引理 2.6] [34,）可知，只要 $0<n\leq k$，我们就有 $\xi_n^-(\mathcal{K}^{(k)})=\xi_{+1}^-(\mathcal{K}^{(k-n+1)})$ 是过扭转的，因此特别地，它不是弱可填充的。现在，称 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{K}'$ 如上所述相关，等价于对某些 k 和 k'，有 $\mathcal{K}^{(k)}=\mathcal{K}'^{(k')}$。如果 $\xi_n^-(\mathcal{K}')$ 可填充，那么 $\xi_{n+k'}^-(\mathcal{K}'^{(k')})=\xi_{n+k'}^-(\mathcal{K}^{(k)})$ 也可填充（因为它等价于 $\xi_n^-(\mathcal{K}')$），因此 $n+k'>k$。在这种情况下，我们有 $\xi_{n+k'}^-(\mathcal{K}^{(k)})=\xi_{n+k'-k}^-(\mathcal{K})$ 是在 $\mathcal{K}$ 上的可填充正手术。

2.1. **可填充手术的等价条件**。 在本小节及后续小节中，我们考察 (S^3,ξ_{std}) 中的勒让德结和横截结。格罗莫夫和 McDuff [22,36], 的研究对标准三维球面的辛填充进行了分类，它们都与标准 4-球的辛爆破辛同胚。由定理 1.1 可得：

命题 2.4. *(* $\mathcal{K}$ (S^3,ξ_{std}) 中的勒让德结 $\mathcal{K}$ 存在可填充正接触手术，当且仅当 $\mathcal{K}$ 的横截推离在某个 B^4 的辛爆破中围成一个嵌入的辛圆盘。此外，此类接触手术的任何辛填充都与该圆盘某个小邻域的补集辛同胚。

由于 B^4 的爆破具有负定交叉形式，因此立即得到 :

推论 2.5. 若 $\mathcal{K}$ 是 S^3中的勒让德结，且 $n>0$ 满足 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 弱辛可填充，则 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 的任意弱辛填充 (Z,ω) 都具有 $b_2^+(Z)=0$。

由于 B^4 的爆破中的圆盘 Δ 必然具有非正自交数，因此由上述结果和引理 2.1 还可推出，对于勒让德结 $\mathcal{K} \subset （S^3, \xi_{std}）$，沿 $\mathcal{K}$ 进行的每一种可填充正接触手术，其光滑手术系数均非负。命题 1.7 对这一观察作了进一步细化和推广，并将在第 2.3 节中证明。

条件“ K 是 B^4 的某个爆破中的嵌入辛圆盘的边界”，可以转译为条件“ K 是 B^4 本身中的奇异辛圆盘的边界”：

定理 2.6。 定向勒让德结 $\mathcal{K} \subset S^3$ 可进行可填充正接触手术，当且仅当 $\mathcal{K}$ 的正向横截推离是 B^4 中一个（可能奇异的）辛圆盘的边界，且该圆盘具有局部全纯奇点。

证明。 设 $Z \cong B^4 \# k\overline{\mathbb{C}P}^2$ 是4-球的一个爆破，配备某种辛结构ω，该结构由对 B^4上的标准结构进行吹起得到。设 $\Delta \subset Z$ 是一个边界为正横截结 $K \subset S^3$的适当嵌入辛圆盘。借鉴 McDuff [36, 引理 3.1] 的论证（另见 Boileau-Orevkov [5, 对引理 2]的证明），可以在 Z 上找到一个与 ω 相容的几乎复结构 J，使得 Δ 是 J-全纯的，并且爆破所得的例外球面 E_1、.....、 E_k 也是 J-全纯的：特别是， Δ 与 E_j 之间的每个几何交点都对交数作正贡献。通过对 Δ 作轻微的（辛）扰动，我们可以设想 Δ 与每个 E_j 横截相交。无论如何， Δ 在缩爆 $Z \to B^4$ 下的像是一个（可能奇异的）辛圆盘，其奇点的局部模型与全纯曲线的奇点相同。

反过来，陈述中所说的任何奇异辛圆盘，都可以通过适当的爆破消解奇点，并且在膨胀的四维球中仍然是辛的。□

回顾一下，(S^3, ξ_{std}) 中的横截结横截同位于某个辫的闭包；两个辫闭包表示横截同位的纽结，当且仅当相应的闭辫可通过辫同痕以及正辫稳定化和去稳定化相互关联。辫 β 作为 n 股辫群 Br_n 的元素，若可表示为标准 Artin 生成元 σ_1，..... $\sigma_{n-1} \in \mathrm{Br}_n$ 的正幂的共轭元之积，则称其为拟正。若一个横截结横截同位于某个拟正辫的闭包，则称该横截结为拟正结。拟正性条件与辛拓扑密切相关。事实上，Boileau-Orevkov [5] 证明，若 K 是光滑嵌入 B^4 的辛曲面的横截边界，则 K 是拟正的。反过来，根据 Rudolph [45], 的研究，拟正结是代数曲线（特别是光滑辛曲面）在 B^4 中的边界。

现在，奇异辛圆盘总能通过光滑化变成嵌入的辛曲面，其亏格（通常）更高。由定理 2.6，我们可推得推论 1.3 的如下略微加强版本：

推论 2.7. 若 $\mathcal{K}$ 是 S^3 中的一个勒让德结，且存在可填充正接触手术，则 $\mathcal{K}$ 的横向平行推移 K 是拟正的。此外， K 界定一个光滑且辛浸入的 *4*-球中的圆盘，该圆盘只有正双重点奇点，且双重点的数量等于切片亏格 $g_*(K)$。

证明。 第一个结论由上述讨论可得。对于第二个结论，我们对 B^4 的爆破中的一个嵌入圆盘进行辛扰动。该圆盘以 K 为边界，并与例外球面横截相交。注意，若对于某个例外球面 E_j，$\Delta \cap E_j$ 与之横截相交且交点数为 m_j，那么向下爆破后对应的奇点就是一个阶数为 m_j 的普通多重点。现在，在

爆破消去之后再进行进一步扰动，使任何高阶多重点都变成若干普通双重点。由于这些奇点都有全纯模型，因此它们都是正双点。为说明恰好有 $g_*(K)$ 个双重点，注意到我们可以在 B^4 中找到一个邻近的嵌入辛曲面（将双重点光滑化），其边界为 K，亏格等于浸入圆盘中的双重点数。以 K 为边界的辛曲面，其亏格必然等于切片亏格 [5,47]。□

注 2.8. 根据前一个证明中的论证，定理 2.6 中以带有全纯奇点的奇异辛圆盘为边界这一条件，可以替换为辛圆盘仅具有普通双重点奇点（且全为正）的条件。换言之，推论 2.7 的逆命题也成立。

一般而言，我们预期，若不要求圆盘是辛浸入的，推论 2.7 的逆命题便不成立。然而，如果我们将范围限定为底层结型是切片结的横截结，即其边界是 B^4中的一个嵌入圆盘，那么这一条件便自动满足：

推论 2.9. 切片结 $K \subset S^3$ 的一个勒让德代表 $\mathcal{K}$ 允许可填充正接触手术，当且仅当 $\mathcal{K}$ 的一个横截推离与某个拟正辫的闭包横截同位。

证明。 如果横截结 K 是切片且拟正的，那么 B^4 中由 K 为边界的辛曲面必定是一个圆盘。特别是，这为 S^3 的填充提供了一个嵌入辛圆盘，从而得到可填充手术。“当且仅当”中的“仅当”由推论 2.7 得出。□

推论 2.10。 设 $\mathcal{K}$ 是一个满足以下条件的勒让德结：

- $\mathcal{K}$ 的底层结型是切片，
- $\mathcal{K}$ 的 *Thurston-Bennequin* 不变量为 $\mathrm{tb}(\mathcal{K}) = -1$。

那么， $\mathcal{K}$ 是 B^4 中的拉格朗日切片，当且仅当 $\mathcal{K}$ 的横截推离如推论 *2.9* 所述是拟正的。

证明。 具有勒让德边界的拉格朗日圆盘可经微扰变为一个边界正向横截的辛圆盘 [7, 13], ，因此由 [5] 可再次得出：如果 $\mathcal{K}$ 是拉格朗日切片，那么 $\mathcal{K}$ 的平行推移是拟正的。

反过来，拟正性意味着横截推离 K 在 B^4中围成一个嵌入的辛曲面（事实上是复曲面），而该曲面必然实现 K的四维球亏格。由于 K 是切片，我们发现 K 围成一个嵌入的辛圆盘 $\Delta \subset B^4$，其补集于是成为某个正接触手术的辛填充。根据定理 1.2，该手术作用于 $\mathcal{K}$ 。 Δ 在 B^4 中的补集具有 $S^1 \times B^3$的同调，而其边界具有 $S^1 \times S^2$的同调。因此，拓扑手术系数必定为 0；又由于 $\mathrm{tb}(\mathcal{K}) = -1$ ，接触手术系数为 $+1$。但根据 [10], ，对 $\mathcal{K}$ 进行 $+1$ 接触手术可填充，当且仅当 $\mathcal{K}$ 是拉格朗日切片。□

前两个推论的情形有所不同，二者都讨论切片结；这种区别可以从导致可填充手术的手术系数来理解，也可以从 Thurston-Bennequin 数来理解。在这两个推论中，我们都是通过从 4-球中移除一个嵌入辛圆盘，得到可填充手术；所得 3-流形必然由光滑 0-手术得到。相应的接触手术系数取决于 $\mathcal{K}$的 Thurston-Bennequin 数；例如，纽结 8_{20} 的镜像是切片、拟正的，并且有一个切触布里斯科恩不变量为 $= -2$ 的勒让德代表 $\mathcal{K}$。由此产生的可填充接触流形

作为 $\mathcal{K}$ 的辛切片圆盘补集的边界，是光滑 0-手术，而对 $\mathcal{K}$进行接触 $+2$ 手术。对这个勒让德结进行接触 $+1$ 手术不可填充，因为8_{20} 不是拉格朗日切片 [10], ；这对应于 8_{20} 没有切触布里斯科恩不变量为 -1 的勒让德代表这一事实（这也可由相应接触结构的 Heegaard Floer 接触不变量为零得出，见 [35]）。

注 2.11. 是否任何存在具有切触布里斯科恩不变量 tb $= -1$ 的勒让德代表的切片结都必定是拉格朗日切片，目前似乎仍是一个未解决的问题。根据推论 2.10，这等价于一个表面上更弱的条件：该纽结在 B^4 中围成一个辛圆盘；或者说，这样的纽结必定具有拟正向推。

定理 2.6 中给出的可填充正手术存在条件，可以用拟正辫表达式等价地表述。如前所述，若辫$\beta \in \mathrm{Br}_n$ 可表示为形如 $w\sigma w^{-1}$ 的表达式之积，其中 σ 是 Br_n 的一个标准生成元，且 $w \in \mathrm{Br}_n$ 是任意元素，则称该辫为拟正辫。这样的表达式称为正带。事实上，将 β 分解为若干正带之积的任何方式，都可以看作源自一条代数曲线，具体而言，是一个光滑代数子集$C = \{F(z, w) = 0\} \subset D^2 \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$，满足

- F是一个形如 $w^n + f_{n-1}(z)w^{n-1} + \cdots + f_0(z)$ 的多项式。特别地，对于固定的 z，方程 $F(z, w) = 0$ 恰有 n 个解（按重数计）。因此，若 $D^2(R)$ 表示 $\mathbb{C}$ 中半径为 R 的圆盘（并记 D^2 为 $D^2(1)$），那么当 R 足够大时，曲线 C 包含于 $D^2 \times D^2(R)$ 中。
- 交集 $C \cap S^1 \times D^2(R) \subset D^2 \times D^2(R)$ 等价于 β 的闭包 $\hat{}\,\beta$。这里我们将 $D^2 \times D^2(R)$ 的角点光滑化，并将边界与 S^3 识别，其中复切平面确定了标准接触结构。
- 由投影到 z 诱导的映射 $C \to D^2$ 是一个简单分歧覆盖，其分歧点与 β 分解中的正带一一对应。
- 辫词 β 按照 [45]中所述的意义，是 C 绕 ∂D^2的单值化。

Rudolph [45]证明了，任何拟正辫闭包都能以这种方式得到。我们感兴趣的是这种情形的一种变体：曲线 C 不一定光滑，也可以有节点，并且要求其亏格为 0。有鉴于此，我们将辫群 Br_n 中形如 $w\sigma^2 w^{-1}$ 的元素称为一个正节点，其中 σ 仍是一个标准生成元。

定理 2.12. 在 (S^3, ξ_{std}) 中的 *Legendrian* 结 $\mathcal{K}$ 可进行可填充正接触手术，当且仅当其横截推离 K 与某个如下形式的辫的闭包横截同位：

$$\beta = \beta_1 \cdots \beta_k \in \mathrm{Br}_n$$

其中每个 β_j 要么是正带，要么是正节点，并且 β_j中恰有 $n-1$ 个正带。

不难看出，状态表述中带的数量条件，等价于要求该表述中恰好有 $g_*(K)$ 个正节点。

证明。 根据定理 2.6 和注 2.8，该断言等价于： K 在 B^4 中界定一个仅有正双点的浸入辛圆盘，当且仅当它等价于具有给定形式的辫。正向蕴含可由 Boileau-Orevkov 证明中的方法加以改编，应用于浸入

情形；他们证明了 B^4 中的辛曲面是 [5, 意义下的拟正（或“正编织”）曲面（另见 [46]）。我们注意到，与简单双重点相关联的单值化是一个 Artin 生成元的平方，因此每个双重点都会在 β中产生一个正节点因子。其余的正带对应于覆盖 $C \to D^2$的简单分支点；根据黎曼-赫尔维茨公式，通过一个简单的练习可知，对正带数量的限制等价于曲面不可约且亏格为 0 的条件。

反过来，给定形式的辫子可作为上述 $D^2 \times D^2(R)$ 中代数曲线的单值化出现；根据 Orevkov 对 Rudolph 构造的推广（另见定理 73]），该曲线对每个正节点 β_j 都有一个简单双重点 [39] 。假设 ˆ β 是一个纽结，这样的曲线必有亏格 0 和 $k - n + 1$ 个双重点。□

定理 2.12 中的条件以及前述结果，使我们能够直接判定纽结表中的许多纽结是否存在一个可进行可填充正手术的勒让德代表。事实上，根据推论 2.7，我们只需考虑拟正纽结；对于这些纽结，通常很容易得到定理 2.12 所述类型的辫子表达式。例如，纽结 10_{142} 在 KnotInfo [8] 中被列为拟正，其辫子表达式可写成正带的乘积（其中唯一包含非平凡共轭的带用括号括起）：

$$\beta = \underbrace{\sigma_1\sigma_1}\sigma_1(\sigma_3\sigma_2\sigma_3^{-1})\underbrace{\sigma_1\sigma_1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \in \mathrm{Br}_4\,.$$

为了证明 10_{142} 接受可填充正手术，我们必须将此表达式整理为 3 个正带的乘积，而其余项必须配对成正节点（生成元平方的共轭）。上方大括号标出了其中两个这样的节点，但这样会剩下 5 个带（四个剩余的未共轭生成元以及括号中的带），而非 3 个。作为替代，可以将括号中的 σ_2 替换为 $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$，经过少许变形后，我们得到

$$\beta = \underbrace{\sigma_1\sigma_1}\underbrace{\sigma_1\sigma_1}(\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3^{-1})\underbrace{\sigma_1\sigma_1}\sigma_2\sigma_3,$$

其中仅含 3 个带，其余项则配对成节点。结合拟正性条件，以及推论 2.7 中的 $c_*(K) = g_*(K)$, 类似论证很快便可确定所有交叉数不超过 10 的纽结是否存在可填充正接触手术；参见第 4 节中的表 1。

例 2.13. 类似的直接论证可用于证明，任意正扭结都接受可填充接触手术。回顾一下，正扭结 K_ℓ 由图 1 左侧的图示给出，它可以重新排列成该图右侧所示的二桥位置。注意 ℓ 为奇数；我们记作 $\ell = 2k + 1$。一种标准的编织算法，例如 [2, 第 4], 节中所述的算法，可将 K_ℓ 表示为一个拟正辫的闭包（事实上是强拟正辫），其中包含一个正节点项，对应于原图中的扣结。由于 K_ℓ 的切片亏格为 1，相应的带节点辛曲面必有亏格 0，因此由定理 2.6 可推知存在可填充手术。

具体而言，对于指标 $1 \le i \le j \le n-1$，我们令 $\sigma(i,\ j) \in \mathrm{Br}_n$ 表示由以下字给出的正带

$$\sigma(i,j) = \sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{j-1}\sigma_j\sigma_{j-1}^{-1}\cdots\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_i^{-1}$$



图 1. 左侧是正扭结 K_ℓ，其中 $\ell = 2k+1$。右侧是在二桥位置的 K_ℓ，其下方扭转区域有 ℓ 个半扭转。

（这种表达式有时称为嵌入正带）。那么可以证明，K_ℓ 与下列辫的闭包同痕

$$\beta = \sigma(k, 2k+1)\,\sigma(1, 2k+1)^2 \prod_{i=1}^{k} \sigma(i, k+i)\sigma(i+1, k+i) \in \mathrm{Br}_{2k+2}$$

这个表达式包含 $2k+1$ 条正带和一个正节点，表明 K_ℓ 围成一个带有单个正双点的辛圆盘。

2.2. **构造**。在本小节中，我们证明推论 1.5，该推论表明，某些族中的纽结允许可填充正手术。

推论 *1.5*（*a*）部分的证明。我们假设 K 是 $(S^3,\ \xi_{std})$ 中的一个横截结，它是一个正辫的闭包（也就是说，该辫可表示为辫群标准生成元的正幂所组成的字）。例如，回顾引理 2.4]，，横截结的同痕扫出周围接触流形的辛化中的一个辛曲面；若放宽同痕条件，允许在孤立的参数值处出现横截自交，则扫出的曲面是辛浸入的。与 [16] 相比，我们反向进行：考虑 $(S^3,\ \xi_{std})$ 的辛化中位于 B^4 内部的“负半部”，因此，同痕中的时间参数递增对应于径向坐标递减。

在 [6, 第 4]，节中，Boileau 和 Weber 给出了一个解结算法，可将任意辫的闭包解开β，所需的交叉变换至多为 $\frac{1}{2}(\ell(\beta) - n + r)$ 次，其中 $\ell(\beta)$ 是 β 的字长，n^ 是辫指数，而 r 是闭包的分支数 β。特别地，每次交叉变换都在 β 的图中进行，该图来自它用辫子生成元表示的形式。将此算法应用于闭包为纽结的正辫，可得到一系列交叉变换；这些变换必然都是从正交叉变为负交叉，从 β 变为辫 ε。经过辫同痕后，该辫恰含有 $n-1$ 个（正）交叉，且其闭包是平凡结。不难看出，这种辫的闭包 $\hat{}\varepsilon$ 在 B^4 中围成一个光滑辛圆盘。（例如，在此情形下，$\hat{}\varepsilon$ 的自链接数等于缠绕数，也就是代数字长，减去辫指数，结果为 -1。由于 $\hat{}\varepsilon$ 是平凡结，且平凡结是横截简单的，因此 $\hat{}\varepsilon$ 横截同位于一个标准平凡结。或者，也可以利用定理 2.12 的证明中引用的结果，构造一个由 $\hat{}\varepsilon$ 围成的光滑辛圆盘，而无需涉及任何辫的（解）稳定化。）此圆盘与对应于交叉变换序列的浸入环带合在一起，给出 B^4 中一个边界为 $\hat{}\,\beta$ 的浸入辛圆盘；由于所有交叉都从正变为负，所有自交均为正。因此，根据定理 2.6，K 存在可填充正手术。□

推论 1.5 的证明，(b) 部分。众所周知，透镜空间上的每个紧接触结构都是辛可填充的 [30]。因此，给定一个透镜空间结 $K \subset S^3$（也就是说，光滑结 S^3_m 满足对某个 $m > 0$，K 是透镜空间），只需证明存在 K 的一个勒让德代表，使得对应于 m 的接触手术具有正的接触手术系数且是紧致的。现在，透镜空间结必然是强拟正的（参见 [25,38,42]，或 [4] 中的自足证明）。特别地，K 同痕于 S 中某个嵌入辛曲面的边界，因此可实现为 S^3 的标准接触结构中的横截结，使得自链接数 $s\ell(K)$ 等于 $2g(S) - 1$，且 $g(S) = g_*(K)$（根据强拟正性，这等于 $g(K)$）。此横截结的一个勒让德逼近 $\mathcal{K}$ 满足 $\mathrm{tb}(\mathcal{K}) + |\mathrm{rot}(\mathcal{K})| = 2g_*(K) - 1$。若 $\mathcal{K}$ 的定向选取得当，则由 [19,35] 可知，只要光滑手术系数 $m = n + \mathrm{tb}(\mathcal{K})$ 至少为 $2g_*(K)$，$\xi_n^-(\mathcal{K})$ 就具有非零的 Heegaard Floer 接触类，因而是紧致的。（注意，这一结论还要求附加假设 $\varepsilon(K) \geq 0$，其中 ε 是由 Hom [27] 定义的同痕不变量。利用如下事实即可由 [27,命题 3.6(4)], 得出该条件成立：对于强拟正纽结，$\tau(K) = g_*(K) = g(K)$。）

因此，要保证紧性，我们需要确认产生透镜空间的手术系数至少为 $2g_*(K)$。（这对应于正接触手术。）但根据 [21, 定理 1.1]，若对 K 进行系数为 $m > 0$ 的手术得到透镜空间，则 $m > 2g(K) - 1$，这也至少为切触布里斯科恩不变量 $\mathrm{tb}(\mathcal{K})$。因此，产生透镜空间的接触手术具有正的接触手术系数，且是紧致的，故可填充。□

对于推论 1.5 的 (c) 部分，我们需要先给出一个定义。回顾一下，模式 （用于卫星操作）是实心环面中的一个纽结 $P \subset S^1 \times D^2$。对于纽结 $K \subset S^3$，卫星结 $P(K)$ 是 P 在嵌入 $S^1 \times D^2 \to S^3$ 下的像（的同伦类）；该嵌入将 $S^1 \times \{0\}$ 映到 K，并将 $S^1 \times z$ 平行推移到 K的零框架经线。更一般地，扭曲卫星结 $P_\ell(K)$ 通过类似的构造得到，但条件是将 $S^1 \times z$ 视为 ℓ-框架经线，或者等价地说，它与 K ℓ相链接。

定义 2.14. 将 S^3 视为 $\mathbb{C}^2$中的单位球面，并固定一个光滑识别 $S^1 \times D^2 \to S^3 \cap \{|z_2| \leq \frac{1}{2}\}$，将其视为 S^3中平凡结的 0-框架邻域。辫状可填充模式 是满足以下条件的图案结 $P \subset S^1 \times D^2$:

- 在上述识别下，P是 $S^1 \times D^2 \subset S^3$中的横截结。
- 存在一个浸入辛圆盘 $\Delta_P \subset \{|z_2| \leq \frac{1}{2}\} \subset B^4$，其仅有正双重点奇点，且满足 $\partial\Delta_P = P$。

显然，将辫状可填充模式视为 S^3中的纽结时，它可表示为一个辫闭包：ˆ 也就是说，对于某个辫 β，有 $P(U) = \beta$，其中 U是平凡结。此外，β可表示为正带与正节点的乘积，并满足定理 2.12 中的条件。另一方面，若 β 按定理 2.12 中的方式表示，则如该定理的证明所示，$P(U)$可识别为 $D^2 \times D^2(R)$中某个节点代数曲线的边界。如有必要，对第二个坐标进行缩放后，我们便能找到定义中所述的代数圆盘，因而也是辛圆盘。推论 1.5 的 (c) 部分等价于下述命题。

命题 2.15。设 $\mathcal{C}$ 是 S^3 中一个允许进行可填充正接触手术的勒让德结，其对应的光滑手术系数为 m。设 C 是 $\mathcal{C}$ 所对应的光滑结，且 P 是一个辫状可填充模式。那么 $K = P_m(C)$ 存在一个勒让德代表，允许对其进行可填充正接触手术。

证明。 我们希望证明 K 是某个 B^4 的爆破中的嵌入辛圆盘的边界。根据假设， C 可以表示为这样一个圆盘 $\Delta_C \subset B^4\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ 的边界，使得 $-\Delta_C \cdot \Delta_C = m$。设 $\Delta_P \subset \overline{B^4}$ 是位于 $\{|z_2| \leq \frac{1}{2}\}$ 中的一个节点代数圆盘，其与 S^3 的交集为模式 P。如上所述，进一步对 z_2 重新缩放后，我们可以假设对于任意选定的 $\epsilon > 0$， Δ_P 都位于 $\{|z_2| < \epsilon\}$ 中；再次对第二个坐标进行缩放会保留浸入圆盘为全纯的性质，因此它也仍然是辛的。

为方便起见，我们可以对 $B^4\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$ 上的辛形式重新缩放，使圆盘 Δ_C 的面积为 π。于是，根据辛几何中的标准邻域定理，当$\epsilon > 0$ 足够小时，存在一个辛同胚 F，将 $D^2 \times D^2(\epsilon)$映到 Δ_C 的一个邻域。严格来说，这可能需要对包含在 $\{1 - \delta \leq z_1 \leq 1\} \times D^2(\epsilon)$中的 $D^2 \times D^2(\epsilon)$的一个子集进行“修剪”，但这不会影响论证。特别地，圆盘 Δ_P 在 F 下的像是 $B^4\#k\overline{\mathbb{C}P^2}$中的一个奇异辛圆盘，其奇点全为正节点，而其边界显然是某个 ℓ的卫星纽结 $P_\ell(C)$。此外，如果取 C 为正横截的（即$\mathcal{C}$的一个横截推离），那么由于 P是编织的，我们也可以将邻域取得足够小，使得卫星纽结 $P_\ell(C)$是横截的。

圆盘 $F(\Delta_P)$ 可通过进一步爆破变得光滑，因此由命题 2.4 可知， $P_\ell(C)$（的一个勒让德结近似）具有可填充正接触手术。还需注意，框架 ℓ 不过是 C 的零框架与可延伸至圆盘 $\Delta_C = F(D^2 \times 0)$ 上的框架之差；这正是 m。□

推论 *1.5* 的证明，*(d)* 部分。回忆一下，若 $C \subset S^3$ 是一个纽结，则 $(p,\ q)$ 缆结 $C_{p,\ q}$ 是一个卫星结，其伴随结为 C，模式为 $P = T(p,\ q)$，即 $(p,\ q)$ 环面结；将其视为 S^3 中标准实心环面里的闭辫。这里 p 是“纵向”坐标，并且我们考虑 $p,\ q > 0$。将正扭结表示为正辫的闭包，可知 $T(p,\ q)$ 是定义 2.14 意义下的辫状可填充模式。

注意到，对于框架系数 m，扭结缆 $P_m(C)$（其中 $P = T(p',\ q')$）不过就是 $C_{p',\ q'+mp'}$。换言之，我们有 $C_{p,\ q} = P_m(C)$，其中 $P = T(p,\ q - mp)$。根据推论 1.5 的 (c) 部分，我们推断，只要 m 是 C 上某个可填充手术的光滑系数，$C_{p,\ q}$ 就承认可填充正手术，且 $T(p,\ q - mp)$ 是辫状可填充的。第二个条件只要求 $q - mp > 0$，这正是命题陈述中所假设的条件。□

有了推论 1.5 的结果，我们不妨再补充几点说明。正如引言中所提到的，一个承认透镜空间手术的纽结同时具有可填充正接触手术，这一事实还带来了纯粹拓扑学上的推论：对于透镜空间结 K，有 $g_*(K) = c_*(K)$。我们不知道这一事实的其他证明。

自然会想知道，同样的结论是否适用于一般的 L-空间纽结（即某些正手术沿着 K 进行后会得到 Heegaard Floer L-空间的纽结 K），尤其是 $c_* = g_*$ 以及推论 1.3 的其他推论是否对这类纽结成立。推论 1.5 的结果与已知的 L-空间纽结构造之间存在某些相似之处：例如，根据 Hedden [24] 和 Hom [26] 的工作，缆结$K_{p,\ q}$是 L-空间纽结，当且仅当 K 是 L-空间纽结且 $\frac{q}{p} \geq 2g(K) - 1$。（注意，由于 L-空间纽结是强拟正的，因此对这类纽结有 $g(K) = g_*(K)$。）根据推论 1.5，我们发现，如果 K 存在可填充正手术，那么至少当 $\frac{q}{p}$ 足够大时，$K_{p,\ q}$ 也存在可填充正手术；根据命题 1.7（将在下一节证明），只需满足$\frac{q}{p} \geq 4g_*(K)$。当然，人们也会想知道 $\frac{q}{p}$ 在 $2g_* - 1$ 与 $4g_*$之间时的取值。

同样，也有更一般的 L-空间纽结卫星构造 [28, 29], ，它们要求模式、伴结以及扭转参数满足某些条件；这些条件类似于推论 1.5(c) 中的条件，但限制稍宽松。特别是，利用这些技巧不难构造 L-空间纽结，而推论 1.5 并不能保证这类纽结存在可填充正手术（见下文）。

另一方面，推论 1.5(d) 中给出的、为获得具有可填充手术的缆结而对缆绕参数所要求的充分条件，一般而言显然并非必要条件。例如，考虑右手三叶结 $T(2,3)$ 的缆结，很容易看出，缆结 $T(2,3)_{2,7}$ 同痕于某个正辫的闭包，因此具有可填充正手术。在此情形下，参数 $\frac{q}{p}=\frac{7}{2}$ 小于在 $T(2,3)$ 本身上进行可填充手术所需的最小光滑系数 4。

推论 1.5 的结果与 [24] 的结果相结合，给出了许多具有可填充正手术的 L-空间结（但不是透镜空间结）的实例。自然会问，每个 L-空间结是否都具有可填充正手术；具体而言，我们目前尚不清楚缆结 $T(2,3)_{2,3}$（它是一个 L-空间结，但既不是透镜空间结 [20] ，也不是正辫闭包 [31, 备注 4], [1, 示例 1], ）是否具有可填充正手术。

2.3. **可填充手术系数**。现在我们回到这样一个问题：对标准三维球面中的给定勒让德结 $\mathcal{K}$ 进行何种接触手术，才能得到可填充接触结构？根据命题 2.4 和引理 2.1，当且仅当横截推离 K 在 $Z=B^4\#k\mathbb{C}P^2$ 中围成一个嵌入辛圆盘 Δ 时，这样的手术才存在；在这种情况下，可填充手术对应的光滑手术系数为 $r=-\Delta\cdot\Delta$。这里，由于 $\partial Z=S^3$ 手术系数和自交数不依赖于 K 的塞弗特曲面的选取，因此我们不再提及这一选取，事实上，我们通过自然同构 $H_2(Z)\to H_2(Z,\partial Z)$ 将同调类 $[\Delta]$ 视为绝对同调类。明确这一点后，我们可以写出

$$[\Delta]=\sum_{j=1}^{k}n_je_j \tag{1}$$

对于整数 $\{n_j\}$，其中 e_1，……，e_k 是每个 $\mathbb{C}P^2$ 副本中超平面的同调类。在这种情况下，由于 $\overline{e_i}\cdot e_j=-\delta_{ij}$，我们看到 Δ 确定了 $\mathcal{K}$ 上的一种可填充接触手术，其对应的光滑手术系数为

$$r=-\Delta\cdot\Delta=\sum_j n_j^2. \tag{2}$$

回顾一下，我们可以安排使每个类 e_j 都由一个自交数为 -1 的光滑辛 2-球面 E_j 表示，并且 Δ 与 E_j 之间的每个交点都对 $\Delta\cdot e_j$ 作正贡献。因此，在表达式 (1) 中，当且仅当 Δ 与 E_j 在单个点处横截地相交时，有 $n_j=1$。特别地，在这种情况下，我们可以将 E_j 吹下，而 Δ 吹下后的像仍然是一个边界为 K 的嵌入辛圆盘，现在位于 $B^4\#(k-1)\mathbb{C}P^2$ 中。此外，执行此操作后，拓扑手术系数 $-\Delta\cdot\Delta$ 减少 1。（当然，当且仅当 Δ 与 E_j 不相交时有 $n_j=0$，此时我们可以将 E_j 吹下而不影响手术。）反过来，通过吹起 Δ 的一个光滑点，我们将自交数减少 1，并相应地将可填充手术的光滑系数增加 1。

这些说明的一个结果是关于可填充手术的手术系数的如下结论。

命题 2.16. 若 $\mathcal{K}$ 是 S^3 中的一个勒让德结，且某种正接触手术可填充，则对于每个 n，只要其对应的光滑手术系数大于或等于$4g_*(K)$，$\xi_n^-(\mathcal{K})$ 便是弱可填充的；其中 $g_*(K)$ 是底层光滑结 K的切片亏格。

证明。 如定理 2.6 附近的讨论所示，我们可以找到一个浸入B^4 中的辛圆盘，其边界是 $\mathcal{K}$的平行推移 K，奇点只有正横截双重点，且恰有 $g_*(K)$ 个此类双重点。通过吹起每个双重点，我们得到一个嵌入辛圆盘 Δ，它位于 B^4的 $g_*(K)$ 重爆破空间中，使得

$$[\Delta] = -\sum_{j=1}^{g_*(K)} 2e_j.$$

特别地，我们有 $\Delta \cdot \Delta = -4g_*(K)$，因此对 $\mathcal{K}$ 进行光滑系数为$4g_*(K)$的接触手术是可填充的。由命题陈述之前的说明可知，系数更大的所有接触手术也都是可填充的。□

事实上，若找到一个圆盘$\Delta \subset B^4\#k\overline{\mathbb{C}P}^2$，其横截边界为 K，且同调类如 (1) 所示，则系数 n_j 与切片亏格 $g_*(K)$ 的关系如下。按照上述方式安排，使 Δ 与每个例外球面的交点均为横截，这样吹下后便得到一个具有 k 个阶数分别为 n_1、.....、n_k 的多重点的圆盘。阶数为 n_j 的普通多重点可以通过辛扰动分解为一组 $\frac{1}{2}n_j(n_j-1)$ 个普通双重点，而后每个双重点都可通过平滑化得到 B^4 中的一个嵌入辛曲面。由于该曲面必须实现 K 的切片亏格，因此有：

命题 2.17。 若横截结 K 的边界是嵌入辛圆盘 $\Delta \subset B^4\#k\overline{\mathbb{C}P}^2$，且其同调类如(1)所示，则

$$2g_*(K) = \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j-1).$$

特别地， Δ 的某个邻域的补集给出了对某个 K 的勒让德逼近进行正接触手术所得结果的辛填充，其光滑手术系数 r 由下式给出

$$r = 2g_*(K) + \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

最后一个等式由 (2) 得出。由于所有 $n_j > 0$ 我们推得如下结论，它与命题 2.16 一起完成命题 1.7 的证明。

推论 2.18。 对一个光滑结为 K 的勒让德结 $\mathcal{K}$ 进行的任何可填充接触手术，其光滑手术系数 r 满足 $r \geq 2g_*(K)$。除非 K 同痕于嵌入辛圆盘在 B^4中的横截边界，特别是除非 $g_*(K) = 0$，否则该不等式为严格不等式。

与此相关，我们有以下简单的观察。

命题 2.19。 设 $\mathcal{K}$ 是 S^3 中的一个勒让德结，并假设 $n > 0$ 是一个整数，使得

- 该接触结构 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 是弱可填充的。

- 光滑手术系数 $r = n + \mathrm{tb}(\mathcal{K})$ 满足

$$r \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 19\}.$$

那么 $\xi_{n-1}^{-}(\mathcal{K})$ 也弱可填充。

证明。 允许的 r 取值列表之所以重要，是因为这些值恰好是这样的整数：对于 r 的任何平方和表示（如式 (2)），至少有一个 n_j 必须等于 1。我们已经看到，在这种情况下，膨胀的四维球中的相应嵌入圆盘与某个例外球面横截于一点，因此可以吹下该球面，从而得到较小一个整数手术的填充。□

例如，由这一结果可知，对于非切片纽结 K，与可填充接触手术对应的最小可能光滑手术系数为 4。

命题 2.16 表明，光滑手术系数 $4g_*(K)$ 总是足够大，能够实现可填充接触手术（如果存在这种手术）；此外，从某种意义上说，该系数对应于一个以 K 为边界、浸入 B^4 的一般位置辛圆盘。对于给定的 K，确定可填充手术的最小系数是多少，是一个有趣的问题；小于 $4g_*(K)$ 的取值对应于具有比横截双点更“有趣”（例如，重数更高）的奇点的辛圆盘。

例 2.20. 考虑椒结 $K = P(-2, 3, 7)$。Fintushel 和 Stern [17] 指出，沿 K 进行 18-手术会得到一个透镜空间，因此根据推论 1.5(b)， K 的某个合适的勒让德代表对应着可填充接触手术。由于 K 的切片亏格为 5，命题 2.16 蕴含产生光滑 20-手术的接触手术是可填充的；当然，系数为 18 的透镜空间手术也可填充。我们声称，事实上，在所选代表上最小的可填充接触手术对应于光滑 17-手术。促成这一结果的观察是，由于 K 的切片亏格为 5， B^4 中任何以 K 为边界的适当嵌入辛曲面都具有亏格 5。

要证明 17-手术必定可填充，一种方法是先注意到，可填充的 18-手术对应于一个嵌入辛圆盘 $\Delta \subset B^4 \# k\overline{\mathbb{C}P}^2$，且有 $-\Delta \cdot \Delta = 18$。注意，不包含 1 的 18 的平方和表示只有 $3^2 + 3^2$。按照 (1) 和 (2) 实现这一平方和的辛圆盘 Δ将满足 $k = 2$ 和 $n_1 = n_2 = 3$，于是根据命题 2.17 可得 $g_*(K) = 6$，这就产生了矛盾。因此， Δ 与至少一条例外曲线的交数必为 1；如前所述，这意味着下一个更小的手术系数对应的手术可填充。

现在我们断言，与 K 上的光滑 16 手术相对应的接触手术是不可填充的。事实上，假设存在一个圆盘 $\Delta \subset B^4 \# k\overline{\mathbb{C}P}^2$，满足 $-\Delta \cdot \Delta = 16$，且其同调类如 (1) 所示。如果某个 $n_j = 1$，那么我们就可以吹下，从而得到光滑 15 手术的一个填充；由推论 2.5 可知，该填充是负定的。但根据 [33, 定理 1.3], , 对 $P(-2, 3, 7)$ 进行 15 手术所得的流形不具有任何可填充接触结构；事实上，它不以任何负定 4-流形为边界。因此，我们必须有 (2) 将 16 表示为不含 1 的平方和，这意味着要么 $k = 4$ 且 $n_1 = \cdots = n_4 = 2$，要么 $k = 1$ 且 $n_1 = 4$。在第一种情况下，应用命题 2.17 可推出 $g_*(K) = 4$；而第二种情况给出的亏格为 6，这两种情况都不可能。

注意到，光滑 17 手术的可填充性也可以直接从 $P(-2, 3, 7)$ 表达式中看出：它是 KnotInfo 中所列正辫 $\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1^2\sigma_2^7 \in \mathrm{Br}_3$ 的闭包。事实上，在

进行共轭、应用辫关系并引入因子 $\sigma_2\sigma_2^{-1}$ 后，给定辫的闭包等价于拟正辫的闭包

$$(\sigma_1\sigma_2)^3(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^2\sigma_2^2\sigma_2,$$

我们可以将其视为一个奇异辛圆盘的辫单值化：该圆盘有两个节点，以及一个对应于全扭转 $(\sigma_1\sigma_2)^3$ 的尖点奇性。后者经过一次重数为三的爆破后变得光滑，而两个节点的重数均为二，由此得到一个嵌入辛圆盘 $\Delta \subset B^4\#3\overline{\mathbb{C}P}^2$，其自交数为 $[\Delta] = -3e_1 - 2e_2 - 2e_3$，且自交数为 -17。

现在我们考虑如下问题：对于正扭结 $T(p,\ q)$，确定可填充手术的最小系数。该纽结以横截结的形式实现，并按标准方式表示为正辫的闭包。在我们的记号中，总令 p 和 q 互素；又由于 $T(p,\ q)$ 与 $T(q,\ p)$ 横截同位，我们还假设 $p > q$。

首先，回顾推论 2.5：对于任何纽结 $K \subset S^3$，若其存在可填充的正向接触手术，且对应的光滑手术系数为 n（这也必然为正），则相应接触结构的辛填充是负定的：特别地，手术流形 $S^3_n(K)$ 是某个光滑紧致负定 4-流形的边界。正如引言中提到的，Owens 和 Strle [40] 定义了

$$m(K) = \inf\{r \in \mathbb{Q}_{>0} \mid S^3_r(K) \text{ bounds a negative definite 4-manifold}\}.$$

对于环面结，他们明确地确定了 m；事实上，他们证明了

$$m(T(p,q)) = pq - c(p,q) \tag{3}$$

对于某个有理数 $c(p,\ q)$，其取决于 p/q 的连分数展开。（此外，尽管 $m(T(p,\ q))$ 是以下确界定义的，Owens-Strle 证明流形 $S_{m(T(p,q))}(T(p,\ q))$ 围成一个负定 4-流形。）这里的“欧几里得”连分数展开为 $\frac{p}{q} = [a_1, \ldots, a_n]^+$，若有

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}. \tag{4}$$

任意有理数 $\frac{p}{q} > 1$ 都可以写成这种形式，其中 $a_j \geq 1$ 对所有 j均成立；如果要求 $a_n \geq 2$，那么该表达式是唯一的（我们始终假设这些条件成立）。据此，式 (3) 中的常数 $c(p,\ q)$ 为

$$c(p,q) = \begin{cases} \dfrac{q}{p^*} & \text{if } n \text{ is even in (4)} \\ \dfrac{p}{q^*} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

这里，$p^* \in \{1, \ldots, q-1\}$ 和 $q^* \in \{1, \ldots, p-1\}$ 分别表示 p 和 q 模 q 和 p的逆元。[40, 命题 4.1] 的证明还表明

$$c(p,q) = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_m]^+$$

其中，当 n 为偶数或奇数时，m 分别为 2 或 1。这意味着，小于或等于 $c(p,\ q)$ 的最大整数为 a_n，它是 p/q 的连分数中的最后一个系数。特别地，能够界定一个光滑负定 4- 流形（无论是否为辛流形）的 $T(p,\ q)$ 上最小的正整数手术系数是

$$\lceil m(T(p,q)) \rceil = pq - \lfloor c(p,q) \rfloor = pq - a_n.$$

定理 2.21。 设 $\mathcal{T}(p,q)$ 是结型 $T(p,q)$中的一个具有最大 *Thurston-Bennequin* 不变量的勒让德结。那么，$\mathcal{T}(p,q)$ 允许可填充正接触手术，其中最小的整数手术是对应于光滑手术系数 $\lceil m(T(p,q))\rceil$ 的手术。

证明。 由推论 2.5 及 Owens-Strle 的结果可知，$\mathcal{T}(p,q)$ 上最小的可填充接触手术的光滑系数至少为 $\lceil m(T(p,q))\rceil$。我们希望证明这个最小可能的接触手术确实是辛可填充的；鉴于本节开头的说明，这等价于证明 $T(p,q)$ 围成一个嵌入辛圆盘 Δ，它位于 B^4 的某个爆破中，且满足 $-\Delta\cdot\Delta = pq - a_n$。

为此，我们回顾一些关于代数曲线和吹起的基本事实。环面结$T(p,q)$（作为 $\mathcal{T}(p,q)$ 的横截推离及一个正辫）可以实现为 $\mathbb{C}^2$ 中曲线 $C=\{x^p+y^q=0\}$ 在原点处奇点的链环。在原点处的爆破 $\pi\colon \widetilde{\mathbb{C}}^2\to\mathbb{C}^2$ 可用坐标变换 $x=u, y=uv$ （或者在另一坐标图中，用 $x=uv, y=u$）来描述。按此规则变换 C 的方程，得到全变换 π^*C，即

$$\pi^*C=\{u^q(u^{p-q}+v^q)=0\}.$$

约化曲线 $u=0$ 描述了该坐标系-~中的爆破所产生的例外曲线，而剩余的表达式 $u^{p-q}+v^q=0$ 对应于 C 的严格变换 C。特别地，从上面的表达式可以看出，例外曲线 E 在 π^*C 中出现，重数为 q；我们称 q 为奇点的重数。通常将$\sim C = C-qE$ 写作除子；这里滥用记号，将 C 与 $\pi^*(C)$混为一谈。（注意，在爆破的另一个坐标图中，严格变换是光滑的，且与例外曲线不相交。）由此可知， $\widetilde{C}$ 的自交数比 C的自交数小 q^2。当然，原曲线 C 位于 4-球中，因此其同调类是平凡的，自交数也为零；我们之所以这样表述结果，是为了后续的迭代。

记录了这一操作对（通常仍然奇异的）真~ ~变换 C的自交数的影响后，注意到 C 是一条由与 C同类方程描述的曲线，因此我们可以重复~这一过程。具体来说，若 $p-q>q$，那么将 C 视为由方程 $x^{p-q}+y^q=0$ 给出的曲线，与第一次相同的爆破会产生另一条重数为 q 的例外曲线，并使自交数再减少 q^2。另一方面，若 $p-q=r<q$，那么我们使用变换 $x=uv$、 $y=u$爆破曲线 $x^r+y^q=0$，并得到全变换$u^r(v^r+u^{q-r})=0$。因此，这次爆破的重数为 r，自交数减少 r^2。

显然，这一过程与商 p/q的欧几里得算法及其连分数密切相关。（例如，参见 [44, 命题 6.11]。）为简化记号，记作$p=p_0$ 和 $q=p_1$。那么，欧几里得算法给出：

$$\begin{aligned} p_0 &= a_1p_1+p_2\\ p_1 &= a_2p_2+p_3\\ &\vdots\\ p_{n-2} &= a_{n-1}p_{n-1}+p_n\\ p_{n-1} &= a_np_n \end{aligned}$$

其中每一行都表示将 p_j 除以 p_{j+1}，得到商 a_{j+1} 和余数 $p_{j+2}<p_{j+1}$。当余数为零时，算法终止，如上方最后一行所示。于是 p_n

是 p_0 和 p_1 的最大公约数。在我们的例子中，这当然意味着 $p_n = 1$。此外，系数a_j 正是式 (4) 中出现的那些系数。

结合前面的讨论，算法的第一行告诉我们，在消解 C 的奇点时，要进行 a_1 次爆破，每次的重数均为 p_1，因此每次都会使自交数减少 p_1^2。同理，第 j 行表示我们要进行 a_j 次爆破，每次的重数均为 p_j。最后一行表明还需要进行 a_n 次爆破，但请注意，由于 $p_n = 1$，上一步得到的曲线具有 $0 = x^{p_{n-1}} + y^{p_n} = x^{p_{n-1}} + y$ 的形式，它已经是光滑的（当然，它与最新的例外曲线有 a_n 阶相切，但这与我们无关）。

由此可知，$T(p, q)$ 在 B^4 的一次爆破中界定了一个光滑、适当嵌入且复的（因而是辛的）圆盘 Δ，其自交数为

$$-\Delta \cdot \Delta = a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + \cdots + a_{n-1} p_{n-1}^2.$$

另一方面，对于 $j = 1, \ldots\ldots, n$，如果我们将上述欧几里得算法的第 j 行乘以 p_j，然后依次将每一行代入前一行，就会得到

$$p_0 p_1 = a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + \cdots + a_{n-1} p_{n-1}^2 + a_n p_n^2.$$

回想一下 $p_n = 1$ 并回到 $p_0 = p$ 和 $p_1 = q$，这表明 $pq - a_n = -\Delta \cdot \Delta$，正如所需 . □

注2.22。根据这一结果，自然可以预期，若对 $T(p, q)$ 进行正有理接触手术，则其中可填充的最小手术对应的光滑系数恰为有理数 $m(T(p, q))$。

3. 主要定理的证明

虽然定理 1.1 是以沿勒让德结进行接触手术的形式陈述的，但就我们的目的而言，采用横截结和横截手术更为自然。我们将在下文回顾这些概念之间的关系（特别是 Conway [9] 的工作澄清了这一关系）。

3.1. 开书与接触手术及横截手术。回想一下，闭合连通定向三维流形 Y 的开书分解由一个定向链环 $B \subset Y$（即开书的绑定）以及一个纤维丛投影 $\pi : Y - B \to S^1$ 组成；对于 B 的每个分支 B_i，都存在一个管状邻域 $nbd(B_i) \cong D^2 \times B_i$，在该邻域中，$\pi$ 可识别为到 D^2 的角坐标的投影。这些邻域必须与定向适当相容，使得对于每个 $\theta \in S^1$，由 θ 的原像的闭包所给出的曲面 $\Sigma_\theta = \pi^{-1}(\theta)$ 都是 B 的定向连通塞弗特曲面，也称为开书的页 。

开书也可以用一对 (Σ, ψ) 来描述，其中 Σ 是带边界的紧致连通定向曲面，ψ 是一个保定向微分同胚，将 Σ 映到自身，并在 $\partial\Sigma$的一个邻域上保持不动；它称为单值化。按如下方式构造：考虑映射环面

$$M(\psi) = [0, 1] \times \Sigma/(1, x) \sim (0, \psi(x)), \tag{5}$$

为便于后文引用，我们将用 $[s, x]_\psi$ 表示点（s, x） $\in [0, 1] \times \Sigma$在 M（ψ）中的等价类。特别地，M（ψ）的边界为（$[0, 1]/$（$0 \sim 1$））$\times \partial\Sigma = S^1 \times \partial\Sigma$。在本文中，我们始终将 S^1 视为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1]/0 \sim 1$，并通常用 ϕ 表示相应的坐标。

将空间 $D^2\times\partial\Sigma$（由若干实心环面组成）粘接到 $M(\psi)$ 上，其边界 $\partial D^2\times\partial\Sigma$ 以显然的方式与 $\partial M(\psi)$ 识别，并使 $\partial\Sigma$ 成为该并集上一个开书分解的绑定。Y 的开书分解等价于这样一个对 (Σ,ψ)，以及一个从 Y 到 $M(\psi)\cup_\partial(D^2\times\partial\Sigma)$ 的微分同胚；通常我们会略去这一微分同胚。

若面积形式 $d\lambda$ 在各页上为正，且 λ 在 $\partial\Sigma$ 的定向切向量上为正，则开书 (Σ,ψ) 与接触结构 $\xi=\ker\lambda$ 相容；此时接触结构由该开书支撑。任何关于 Y 的开书都支撑唯一的接触结构同伦类；反过来，任何接触结构都同痕于某个开书所支撑的接触结构。请注意，3-流形 Y 及其所支撑的接触结构，仅取决于 ψ 在固定 $\partial\Sigma$ 某个邻域的同伦下的等价类。我们用 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ 表示这类同伦类构成的群；需要说明的是，尽管记号未体现这些限制，我们的 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ 由保持定向且固定 $\partial\Sigma$ 某个邻域的微分同胚构成，并按照这类映射之间的同伦取商。

固定 Y 上的一个开书分解 $(\Sigma,\ \psi)$，以及与之相容的接触结构 $\xi=\ker\lambda$。若纽结 $K\subset Y$ 满足 $TK\pitchfork\xi$，且 λ 在沿 K 的定向切向量上为正，则称其为横截的。特别地，若 K 是 Y 的某个开书分解的绑定分支，则 K 是其所支撑的接触结构中的横截结。取绑定的一个分支 K，并对整数 $n>0$ 按如下方式构造新的开书 $(\Sigma',\ \psi'_n)$。

(1) 选取与 K 对应的 Σ 的边界分支的环形领圈邻域 $A\cong S^1\times[0,1]$，并通过同伦使 ψ 在 A 上为恒等映射。我们将 $S^1\times\{0\}$ 与边界分支 K 等同。(2) 令 $\Sigma'=\Sigma\cup H$，其中 $H\cong[0,1]\times[0,1]$ 是连接到 $S^1\times\{0\}$ 上两点的 1-柄，从而 Σ' 是一个比 Σ 多一个边界分支的定向曲面。(3) 将 ψ 延拓为 Σ'，规定其在 $\Sigma'-\Sigma$ 上为恒等映射。令 ψ'_n 为 ψ 与 $t_{K_1}^{-1}\circ t_{\partial_1}\circ t_{\partial_2}^{n-1}$ 复合所得的微分同胚。此处 t_C 表示沿简单闭曲线 C 的右手德恩扭转。记 ∂_1、∂_2 为 Σ' 中分别平行于与 H 相邻的 $\partial\Sigma'$ 的两个分支的两条简单闭曲线，并记 K_1 为与 K 平行的曲线 $S^1\times1\subset\Sigma$。

因此，通过在对应于 K 的边界分支上添加一个 1-柄，并与绕 K 的左扭转、沿一个新边界分支的右扭转，以及沿另一个新边界分支的 $n-1$ 次右扭转复合，即可构造 $(\Sigma',\ \psi'_n)$。这一构造与我们所讨论情形的关联如下。

引理 3.1。设 $(Y,\ \xi)$ 是一个接触流形，且 $\mathcal{K}$ 是 Y 中的一个定向 *Legendrian* 纽结。

(1) 存在一个支撑 ξ 的开书分解 (Σ_0,ψ_0)，使得 $\mathcal{K}$ 位于开书的一页上。*(2)* 对 (Σ_0,ψ_0) 进行适当的稳定化，可得到一个支撑 ξ 的开书分解 (Σ,ψ)，其中 $\mathcal{K}^-$ 对 $\mathcal{K}$ 的负稳定化位于某一页上，并且与一个绑定分支平行；该绑定分支与 $\mathcal{K}^-$ 的横截推离同痕。*(3)* 对任意 $n>0$，由上述方式从 (Σ,ψ) 构造的开书 (Σ',ψ'_n) 描述了一个 3-流形，其接触结构与沿 $\mathcal{K}^-$ 进行接触 n-手术所得的结果 $\xi_n^-(\mathcal{K}^-)$ 接触同胚。*(4)* 对任意 $n>0$，$\xi_n^-(\mathcal{K})$ 与 $\xi_{n+1}^-(\mathcal{K}^-)$ 之间存在接触同构。*(5)* 由 (Σ',ψ'_n) 描述的接触结构与沿绑定分支 K 进行非容许横截手术所得的结果接触同胚；并且对 K 进行的任何整数非容许横截手术，都可以用这种方式对某个 $n>0$ 加以描述。

证明。(1) 是广为人知的；例如参见 [15] 。(2) 由 [3] 的引理 6.5 得出。(3) 本质上就是用于描述接触手术的 Ding-Geiges-Stipsicz算法 [12] ；这一点以及 (4) 和 (5) 均由 Conway [9] 详细阐述（另见 [34, 引理 2.6]）。□

特别地，考虑由沿勒让德结 $\mathcal{K}$ 进行某种 正接触手术所产生的接触结构的性质时，若以可能将 $\mathcal{K}$ 替换为 $\mathcal{K}^-$ 并将接触手术系数加一为代价，我们可以假设 $\mathcal{K}$ 平行于某个开书的绑定分支。（注意， $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{K}^-$ 的横截推移是横截同位的。）

注 3.2. 在上述描述中，接触结构 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 由抽象开放书分解 (Σ', ψ_n') 描述。特别地，它仅在接触同构意义下确定，而非在同痕意义下确定。关于接触手术的更精确描述可见 [30] 和 [12], ，其中说明了如何将限制在 $\mathcal{K}$ 的邻域补集上的接触结构 ξ 延拓至手术过程中粘合进去的环面上，并特别说明了其中涉及的选择。对于具有 $|n| > 1$ 的整数系数 n 接触手术，恰有两种可能性，对应于符号的一种选择。事实上，这两种选择确定的接触结构 $\xi_n^+(\mathcal{K})$ 和 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 接触同胚（但一般不同痕），本质上对应于在上述描述中选择将哪个边界分支标记为 ∂_2。

有了上述结果，我们可以证明定理 1.1 的一个方向。

定理 3.3。 设 $\mathcal{K}$ 是接触流形 (Y, ξ) 中的一个勒让德结，且存在某个 $n > 0$，使得接触结构 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 弱可填充。那么(Y, ξ) 弱可填充，并且存在(Y, ξ) 的一个弱填充(Z, ω)，其中含有一个适当嵌入的辛圆盘 Δ，其边界是 $\mathcal{K}$ 的正向横截推离。

证明。 设 (Z', ω') 是 $(Y', \xi_n^-(\mathcal{K}))$ 的一个弱辛填充（其中 Y' 是接触手术结果所对应的光滑流形）。根据上面的说明，我们不妨设 $\mathcal{K}$ 平行于开书 (Σ, ψ) 的一个绑定分支 K，该开书对应于 (Y, ξ)；因此， $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 由上文所述的开书 (Σ', ψ_n') 支持，并且 K 是 $\mathcal{K}$ 的横截推离。令 K' 为 $\partial\Sigma'$ 中与上文对 (Σ', ψ_n') 的描述中标记为 ∂_2 的分支相对应的分支。

将 Y' 视为 $\partial Z'$，令 Z 为沿着 K'向 Z' 附加一个 2-柄所得的结果，其框架等于由页 Σ'诱导的框架。于是， ∂Z 是所谓“封帽”操作的结果；它带有一个自然的开书，其页由 Σ' 与沿 K'粘合的一个圆盘并合而成，单值化则通过在圆盘上取恒等映射来延拓。在所得曲面中，扭转 $t_{\partial_2}^{n-1}$ 在同痕意义下是平凡的，而曲线 ∂_1 和 K 此时彼此平行，因此 ψ_n' 中出现在这些曲线上的右扭转和左扭转会在封帽后的开书中相互抵消。换言之，封帽后的开书等价于 Y上的原开书（Σ， ψ），尤其是 $\partial Z = Y$。

由 Wendl 定理 [50, 定理 5] 可知，流形 Z 带有一个辛形式 ω ，该形式弱填充由封口开书 (Σ, ψ) 支持的接触结构；事实上， $\omega|_{Z'}$ 可以取为在 Y'的一个小邻域之外与 ω' 一致。特别地，我们发现 (Y, ξ) 弱可填充。此外，Wendl 的构造表明，用于构造 Z 的 2-柄的余核是一个辛圆盘 Δ ，其边界（正向）横截。拓扑上，从 Y' 到 Y的这个余边界无非是从 Y 到 Y'的手术迹反向而行；从这个角度看，显然余核的边界与 K光滑同痕。用开书的术语来说，余核的边界可以

看作封住 Σ'所用圆盘中心所描出的辫，而由下文的引理 3.4 可知，这个辫也与 K 横截同位。□

请注意，证明定理 3.3 的论证实际上表明，若 (Z', ω') 是 $(Y', \xi_n^-(\mathcal{K}))$ 的弱填充，那么按照证明中的做法附加一个 2-柄后，我们会发现 Z' 与填充 Z 中（辛）余核圆盘的一个邻域的补集辛同胚，其中 Z 是 (Y, ξ) 的填充。这就证明了定理 1.1 中的“此外”部分。

定理 1.1 逆向部分的证明，归结为说明可以通过从弱填充中移除辛圆盘的一个适当邻域来“撤销”之前的构造。我们将在以下各节中完成这一过程。

3.2. 辫与单值化。 在下面的论证中，若能以一种特定方式安排 K 相对于 (Y, ξ) 的开书分解的位置，将会很方便。回忆一下，若纽结 $K \subset Y$在开书的各页上处处横截（特别是 K 不与绑定相交），且与各页正向相交，则称 K 相对于该开书是编织的 。Mitsumatsu 和 Mori 的一个定理 [37, 附录] （另见 Pavelescu [43]）指出，(Y, ξ) 中的任何横截结，都可以通过横截结之间的同痕，变为一个相对于支撑 ξ的给定开书编织的横截结。

编织的横截结可以用单值化 ψ 来描述，这与经典辫的描述方式类似。具体而言，若 Σ 是开书的一页，而 $K \cap \Sigma$ 由点 p_1、.....、$p_k \in Int(\Sigma)$ 组成，那么 K 由 $\psi \in$ 在映射类群 Mod(Σ) 中的一个提升的选取决定，反之亦然；该提升是一个元素 $\psi \in$，属于保持集合 $\{p_1, \ldots, p_k\}$ 的微分同胚同伦类群 Mod(Σ, $\{p_1, \ldots, p_k\}$)，也就是曲面辫群。若 K 是开书的一个绑定分支，则下文特别表明，K 横截同位于一个 1-辫，即与每一页恰好相交一次的辫；它可以由 ψ 的一个特定提升来描述。

引理 3.4。 设(Σ, ψ) 是接触流形(Y, ξ)的开书分解，且 K 是由 Σ 的一个边界分支给出的正横截结。考虑该边界分支的一个环形领圈邻域 A，在此邻域上 ψ 为恒等映射，并令 $p \in \Sigma$ 是 A 内部的一个点。在 A 中选取两条互不相交、边界平行的简单闭曲线，使得 p 位于两条曲线之间；令 γ_1 为较靠近边界的曲线，γ_2 为另一条曲线。令 $\psi \in \mathrm{Mod}(\Sigma, p)$ 为一个映射类，它在 A 之外与 ψ 一致，并由沿 γ_1 的一次右德恩扭转与沿 γ_2 的一次左德恩扭转˜复合而成。那么，带标记点曲面(Σ, p) 及其单值化 $\psi \in \mathrm{Mod}(\Sigma, p)$ 所表示的 *1*-辫横截同位于 K。

引理所述的情形如图 2 所示。

在证明引理以及进行后续某些计算时，下面这段补充说明会很有用。

补充说明：相容接触形式的构造。我们简要回顾与开书 (Σ, ψ) 相容的接触形式的构造（我们遵循 [50, 第 3 节。2]中的步骤）。首先，取一个 1-形式 α 定义在 Σ 上，使得

- $d\alpha$ 是 Σ上的正面积形式。
- α 在 $\partial\Sigma$ 附近具有如下标准形式。对于 Σ 的每个边界分支，选取一个环形邻域 $A \cong S^1 \times [\tau_0, 1]$，使得 ψ 在其上限制为恒等映射，并取定向坐标 (θ, τ)，要求 $\alpha = (2 - \tau)\, d\theta$。这里 τ_0 是一个常数，满足 $0 < \tau_0 < 1$，并且我们假设 Σ 的边界对应于 $\tau = \tau_0$。

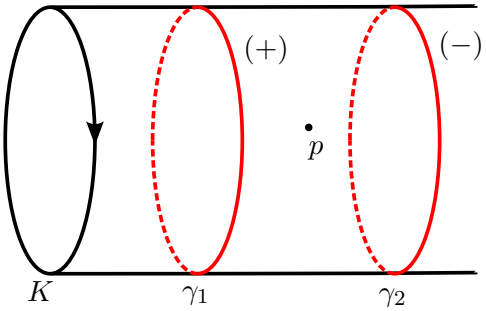


图 2。由 p 描述的辫，在由沿 γ_1 的右德恩扭转和对 γ_2 的左扭转给出的单值化下，与 K 横截同位。

- 此外，如果 $D \subset Int(\Sigma)$ 是一个带有 $\psi|_D = id$ 的圆盘，并取极坐标 (ρ, θ)，那么我们可以选择 α，使得 $\alpha = \frac{1}{2}\rho^2\, d\theta$ 在 D 上。

接下来，通过插值论证，可以在映射环面 $M(\psi)$ 上构造一个 1-形式 α_ψ，使得它在每个切片 $\{\phi\} \times \Sigma$ 上都满足 $d\alpha_\psi > 0$。此外，我们可以假设 α_ψ 在子集 $S^1 \times A$ 和 $S^1 \times D$ 上与 α（的拉回）一致，其中 $S^1 \times A$ 和 $S^1 \times D$ 分别对应上文提到的环带 A 和圆盘 D。于是对于任意小的 $\epsilon > 0$，形式 $d\phi + \epsilon\alpha_\psi$ 是 $M(\psi)$ 上的接触形式，并且在边界环面附近具有形式 $d\phi + \epsilon(2 - \tau)\, d\theta$。（回想一下，$\phi$ 是我们通常用来表示与映射环面的纤维化相对应的坐标 S^1 的记号。）

最后，通过使用 $(\rho, \phi, \theta) \mapsto (\phi, \theta, \tau = \rho)$ $\rho \geq \tau_0$给出的 $(D^2 - 0) \times S^1$ 与 $S^1 \times A$ 之间的坐标识别来填充绑定 $D^2 \times \partial\Sigma$（其中 $\partial\Sigma$ 的一个分量已与 S^1识别）。为使接触形式延拓穿过绑定，首先选择一个满足 $0 < \tau_0' < \tau_0$的常数 τ_0'，以及 $\lambda_0 = f$上的 1-形式 $\rho(\, d\theta + g)\, \rho(\, d\phi)$，使得：

- (f, g) 定义了第一象限中的一条路径：当 ρ 从 0 增加到 1 时，该路径从 $(1, 0)$ 经过 $(0,1)$。
- λ_0 是 $\{\rho < \tau_0\} \subset D^2 \times S^1$上的光滑接触形式。
- 对于 $\rho \in [\tau_0, 1)$，我们有 $f(\rho) = 0$。
- 对于 $\rho \in [\tau_0', 1)$，我们有 $g(\rho) = 1$

如果 ϵ 被选作如上所述的选择，我们按如下方式修改 λ_0。选择另一个函数 $f_\epsilon(\rho)$，使得

- $f_\epsilon = f$ 在 $[0, \tau_0']$ 上，
- $f_\epsilon' < 0$ 在 $[\tau_0', \tau_0]$ 上
- $f_\epsilon(\rho) = \epsilon(2 - \rho)$ 在 $[\tau_0, 1]$ 上。

那么，由下式给出的 $D^2 \times S^1$ 上的 1-形式 λ_ϵ

$$\lambda_\epsilon = \begin{cases} f_\epsilon(\rho)\, d\theta + d\phi & \text{for } \rho \in [\tau_0', 1] \\ \lambda_0 & \text{for } \rho \leq \tau_0' \end{cases}$$

是 $D^2 \times S^1$ 上的光滑接触形式；当 $\rho \geq \tau_0$ 时，它与形式 $d\phi + \epsilon\alpha_\psi$ 一致，而对于 $\rho < \tau_0'$，它与λ_0一致。特别要注意，通过选择 $f(\rho) = 1$ 和 $g(\rho) = \frac{1}{2}\rho^2$，使得 $\rho < \tau_0'' < \tau_0'$，我们可以得到一个接触形式，它在绑定分支的某个邻域 $D^2 \times S^1$ 上的坐标 $(\rho,\ \phi,\ \theta)$ 中具有如下形式

$$\lambda = d\theta + \tfrac{1}{2}\rho^2\, d\phi \quad (\rho < \tau_0'').$$

插叙至此结束。

引理 *3.4* 的证明。 只需将范围限制在 K 的一个邻域内。具体而言，我们考虑将 $nbd(K)$ 配备一个开书，其页为环带 A，单值化是 ψ 的限制，即恒等映射。设 ψ_s、 $s \in [0,1]$ 是一个支撑于 A 中的同伦，其中 $\psi_0 = \tilde{\psi}$ 且 $\psi_1 = \psi$ （该同伦是相对于 ∂A 的一个小邻域而言的，但当然会移动点 $\sim p$）。于是， $\psi = \mathrm{id}$ 与 ψ （作为 A 的映射）的映射环面之间的一个同构由下式给出

$$M(\tilde{\psi}) \to M(\mathrm{id})$$
$$[s,a]_{\tilde{\psi}} \mapsto [s, \psi_s(a)]_{\mathrm{id}},$$

使用 (5) 后引入的记号。特别地， $M(\psi)$ 中由 $s \mapsto [s,p]_{\tilde{\psi}}$ 参数化的辫对应于 $M(\mathrm{id})$ 中的曲线 $s \mapsto [s, \psi_s(p)]_{\mathrm{id}}$。

在 $A = S^1 \times [0,1]$ 上选取定向坐标 (θ, τ)，其中 $\tau = 0$ 对应于边界分支 K。这意味着 τ 是领圈上的一个指向内侧的坐标，而作为 Σ 边界的 K 上的定向由 θ 增大的方向给出。根据上文的旁论，我们可以假设 $nbd(K)$ 上的接触结构由以下方式给出：将 $nbd(K) = S^1 \times D^2$ 与 S^1 上坐标为 θ 的部分，以及 D^2 上以 (ρ, ϕ) 表示的极坐标部分识别起来；对于选定的 $\tau_0'' < 1$，接触形式在集合 $\{\rho \leq \tau_0''\}$ 上由 $\lambda = d\theta + \frac{1}{2}\rho^2\, d\phi$ 给出。开书投影 $(\theta, \rho, \phi) \mapsto \phi$ 支撑这一接触结构，而页是带有坐标 (θ, ρ) 的环带。因此，映射环面 $M(\mathrm{id})$ 可以通过自然映射 $[s, (\theta, \tau)]_{\mathrm{id}} \mapsto (\theta, \rho = \tau, \phi = s)$ 与 $S^1 \times D^2$ 识别（将边界分支 $\{\tau = 0\}$ 压缩成一个圆之后）。

为方便起见，假设 $p \in A$ 由点 $(\theta, \tau) = (0, T)$ 给出，其中 $T < \tau_0''$。通过为 γ_1 和 γ_2上的扭转写出一个显式模型，不难看出，同伦 ψ_s 可以选取得使得在给定坐标中，路径 $s \mapsto \psi_s(p)$ 为 $s \mapsto (\theta = s, \tau = T)$。因此，根据上述 $\tilde{} M(\psi)$ 与 $M(id)$ 之间的识别，所考虑的 $M(\mathrm{id})$ 中的辫就是定向曲线 $c(s) = (\theta = s, \tau = T, \phi = s)$。这条曲线的切向量显然具有 $\lambda(c'(s)) > 0$；事实上，若取 $c_\tau(s) = (\theta = s, \tau, \phi = s)$，那么令 τ从 T减小至 0，便得到从 1-辫到定向绑定 $\{\tau = 0\}$的横截同伦。□

3.3. **切除辛圆盘**。 我们继续采用上一节的记号：给定一个接触三维流形 (Y, ξ)，它具有一个弱辛填充 (Z, ω)，其中包含一个适当嵌入的辛圆盘 Δ，其边界是一个正横截结 $K \subset Y$。本节及下一节的目标是证明：

定理 3.5。 辛圆盘 Δ 有一个任意小的开邻域 U，使得若 $Z' = Z - U$ 和 $\omega' = \omega|_{Z'}$，则 (Z', ω') 是定义在 $Y' = \partial Z'$ 上的接触结构 ξ' 的弱辛填充。此外，接触结构 ξ' 可由 ξ 沿 K 进行非容许横截手术得到，或者（等价地）由沿 K 的 ***Legendrian*** 逼近进行正接触手术得到。

这本质上是对定理 1.2 的重述。综合这一定理与定理 3.3，可推出定理 1.1。

作为准备，通过同伦，我们可以假设横截结 K 相对于（Y， ξ）的开书分解是一个 1-辫。特别地，我们可以设 K 由单值化的提升 ψ 确定，该提升将其映射到相对于一点 p （以及 $\partial\Sigma$）的 Σ 的映射类群中的一个元素，我们仍将其记为 ψ。事实上，我们可以假设此提升固定 p的一个圆盘邻域 $D \subset \Sigma$，并将所得的选择记为 $\psi \in \mathrm{Mod}(\Sigma, D)$。选择 ψ 本质上等价于在 K上选择一个框架；通过将 ψ 与围绕 ∂D的 Dehn 扭转复合，可以实现任意所需的框架。绑定在 Y中的补集被识别为

ˆ ˆ 映射环面 M（ψ） $= [0,1] \times \Sigma/\sim$，而提升 ψ 的选择确定了一个识别nbd（K）$\cong S^1 \times D$。

- (nbd) 上的坐标为（κ_1， ρ， κ_2），其中（ρ， κ_2）是 D with$\rho \leq 1$ 上的极坐标。所有角坐标均取在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$中。
- 开书投影 π： $Y - B \to S^1$ 在 $nbd(K)$ 中由 $\pi(\kappa_1, \rho, \kappa_2) = \kappa_1$ 给出，因此开书的页与 ker($d\kappa_1$) 相切。

- 根据第 3.2 节中的补充说明，在 K 的这个邻域内，接触形式可以取为

$$\lambda_Y = d\kappa_1 + \epsilon\rho^2\, d\kappa_2$$

对任意小的 ϵ （因为在 $nbd(K)$ 中我们有 $\phi = \kappa_1$）。

现在转向弱填充 Z。圆盘 Δ 有一个与 $\Delta_1 \times \Delta_2$微分同胚的邻域，其中 Δ_i是一个坐标为 (r_i, θ_i) 的单位圆盘， $i = 1,2$。我们可以假设在这个微分同胚下， $\partial\Delta_1 \times \Delta_2$与 $nbd(K) = S^1 \times D$相识别，尽管框架未必一致。特别是，经过一次同伦后，我们可以假设这种识别由一个微分同胚给出

$$F : \partial\Delta_1 \times \Delta_2 \to nbd(K) = S^1 \times D$$
$$F : (r_1 = 1, \theta_1, r_2, \theta_2) \mapsto (\kappa_1 = \theta_1, \rho = r_2, \kappa_2 = \theta_2 + n\theta_1)$$

其中某个整数 n 表示由圆盘 Δ_1ˆ ˆ 诱导在 K 上的框架与对应于所选 ψ的框架之间的差异。为便于后续使用，我们始终假设 ψ 的选取满足 $n > 0$。

回想一下，假设 $\Delta \subset Z$ 是辛的；将形式 ω 按比例缩放后，我们可以设其辛面积为 π。根据标准邻域定理，由于 Δ 的法丛（辛意义下）是平凡的，因此存在一个辛同胚，将 Z 中 Δ 的某个管状邻域 U_Z映到 $\Delta_1 \times 0 \subset \Delta_1 \times \Delta_2$的一个邻域 U_Δ，其中后者上的辛结构由标准直和形式给出

$$\omega_0 = r_1\, dr_1 \wedge d\theta_1 + r_2\, dr_2 \wedge d\theta_2.$$

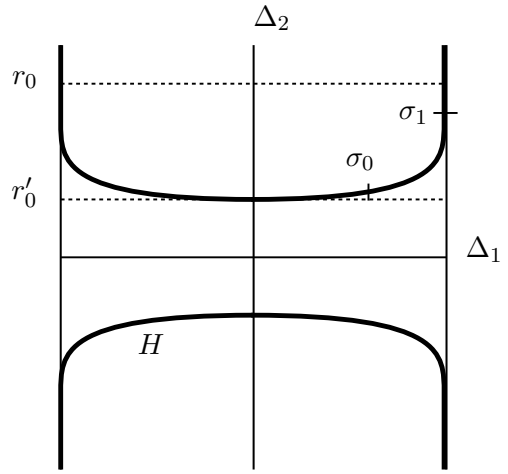
选取足够小的 r_0，使得子集 $\{r_2 \leq r_0\}$ 包含于 U_Δ 中，从而我们可以通过辛同胚将该集合与 Z 的一个子集进行识别。下文中，我们将在 $\Delta_1 \times \Delta_2$ 上使用上述标准结构，同时理解为我们的构造应限制在子集 U_Δ 上，并通过辛同胚传输到 $U_Z \subset Z$ 中。

现在，(Z， ω) 被假定为 (Y， ξ) 的弱填充，其中 ξ 是由开书 (Σ， ψ) 所确定的接触结构。请注意，在构造此类接触形式时改变 ϵ 的选择（如第 3.2 节中的插述所述），对应于对 ξ 的同伦；根据 Gray 稳定性，这样的同伦可以通过对 Y 的同伦来实现。对 Z 的一个微分同胚若在远离 Y 的领圈邻域处为恒等，并在领圈内实现该同伦，则其拉回会将 ω 变为弱填充修改后接触结构的辛形式，并在 Z 上确定一个与原结构变形等价的辛结构。特别地，常数 r_0 在此过程中不会改变，因此结论是，我们可以将 ϵ 选取得任意小，而不会影响 r_0。

考虑一个实心环面 $D^2 \times S^1$，其坐标为 (σ， α， β)，其中 (σ， α) 是单位圆盘 D^2 上的极坐标，且 α， $\beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。我们通过映射将 $D^2 \times S^1$ 嵌入到 $\Delta_1 \times \Delta_2$ 中

$$i : D^2 \times S^1 \to \Delta_1 \times \Delta_2$$
$$i : (\sigma, \alpha, \beta) \mapsto (r_1 = r_1(\sigma), \theta_1 = \alpha, r_2 = r_2(\sigma), \theta_2 = \beta), \tag{6}$$

其中 $r_1(\sigma)$ 和 $r_2(\sigma)$ 是下文描述的光滑函数。我们将此嵌入的像记为 $H \subset \Delta_1 \times \Delta_2$，通常通过 i 来识别 $H = D^2 \times S^1$。示意图如下所示， H 由下图描述。



函数 $r_1(\sigma)$、 $r_2(\sigma)$ 的选取如下。假设常数 $r_0 \in (0,1)$ 如前所述已给定。固定常数 $0 < \sigma_0 < \sigma_1 < r_0 < 1$, 并假设 ϵ 足够小，以满足:

$$\epsilon < \min\{\sigma_0, \sigma_1 - \sigma_0, 1/2n\sigma_1^2\}. \tag{7}$$

现在要求 $r_1(\sigma)$ 是一个满足以下条件的光滑函数

$$r_1(\sigma) = \begin{cases} k\sigma & 0 \le \sigma \le \sigma_0 \\ 1 & \sigma_1 - \epsilon \le \sigma \le 1 \end{cases}$$

并且在其他情况下递增，其中 $k > 0$ 是一个满足 $k\sigma_0 < 1$ 的常数。再选取一个满足 $0 < r_0' < r_0 < 1$ 的常数 r_0'，我们选取 $r_2(\sigma)$ 为一个光滑且严格递增的函数，使得

$$\begin{aligned} r_2(0) &= r_0' \\ r_2(\sigma) &\le r_0 \quad 0 \le \sigma \le \sigma_1 \\ r_2(\sigma) &= \sigma \quad \sigma_1 \le \sigma \le 1 \end{aligned}$$

超曲面 H 将 $\Delta_1 \times \Delta_2$ 分隔为两个子集 U_1 和 U_2，其中 U_1 是 $\Delta_1 \times 0$ 的一个邻域，而 U_2 是补区域。按照上述方式将 $\Delta_1 \times \Delta_2$ 视为 Z 的一个子集后，我们可以将其看作 $U_1 \subset Z$，并定义 $Z' = Z - U_1$。当然，除微分同胚外， Z' 与上述常数和嵌入的选取无关。

边界 $Y' = \partial Z'$ 是通过从 Y 中移除 $nbd(K)$ 并将其替换为 H得到的。 $nbd(K)$ 与 H 上的坐标通过上述嵌入 i 和映射 F 相关联。具体而言，在子集 $\{\sigma \ge \sigma_1\} \subset H$ 上，我们有如下变换

$$(\sigma, \alpha, \beta) \mapsto (\kappa_1 = \alpha, \rho = r_2(\sigma), \kappa_2 = \beta + n\alpha), \tag{8}$$

实际上，在此范围内我们有 $r_2(\sigma) = \sigma$。

注意： $nbd(K)$ 上的坐标 $(\kappa_1, \rho, \kappa_2)$ 对 Y 是正向定向的。 H 上的坐标 (σ, α, β) 对应于 H 上由 U_1 的边界所诱导的定向。在该区域

$\sigma \geq \sigma_1$ 这两者的定向相反，这一点反映在上述变换是反定向的这一事实上。

最后，回顾一下，Y上的开书限制在 $nbd(K)$上时，由映射 $\pi(\kappa_1, \rho, \kappa_2) = \kappa_1$给出。根据上述内容，这对应于映射 $\pi' : (\sigma, \alpha, \beta) \mapsto \alpha$，该映射可延拓到 $0 \times S^1$ 在 $H = D^2 \times S^1$ 中的补集，将其作为一个带有绑定分支 $B' = 0 \times S^1$的开书。结合原开书在远离 $nbd(K)$处的其余部分，这定义了 Y'上的开书(Σ', ψ')；我们令 ξ' 表示由该开书支撑的 Y'上的（唯一同伦类的）接触结构。注意，该开书的页是曲面 $\Sigma' = \Sigma - D$。^ 我们将看到，单值化 ψ' 由 ψ 限制到 Σ' 所得的结果，通过绕一条与 ∂D平行的曲线作n 次右手德恩扭转得到。在此之前，我们验证 ω 限制到 Z' 确实给出了由(Σ', ψ')支撑的接触结构的弱填充。

考虑 在 $\Delta_1 \times \Delta_2$ 上考虑以下 Liouville 向量场，它定义在 $\Delta_1 \times 0$ 之外 ：

$$X = \frac{1}{2} r_1 \, \partial_{r_1} + (\frac{1}{2} r_2 - \frac{c}{r_2}) \, \partial_{r_2},$$

其中 $c > 0$ 是一个常数。注意， X 沿着 Δ_1 的方向径向向外，沿着 Δ_2 的方向径向向内，只要 $r_2 < \sqrt{2c}$ 成立即可。特别地，只要 $c > \frac{1}{2} r_0^2$ 成立，我们就有 X 与 H 横截，并指向 U_1 内部（即，指向 Z' 外部）；我们固定一个满足此条件的 c 。

与 X 相关的 ω_0 的原始形式为

$$\iota_X \omega_0 = \frac{1}{2} r_1^2 \, d\theta_1 + (\frac{1}{2} r_2^2 - c) \, d\theta_2,$$

将其拉回到 H 上，得到如下形式

$$\lambda_0 = i^*(\iota_X \omega_0) = \frac{1}{2} r_1(\sigma)^2 \, d\alpha + (\frac{1}{2} r_2(\sigma)^2 - c) \, d\beta.$$

现在回想一下，(σ, α, β) 是一组坐标，它使 H 定向为 U_1 的边界，而非 Z' 的边界。使用正向坐标系 (σ, α, β')，其中 $\beta' = -\beta$，我们得到：

- 形式 $d\lambda_0 = r_1 r_1' \, d\sigma \wedge d\alpha - r_2 r_2' \, d\sigma \wedge d\beta'$ 在开书$\pi'(\sigma, \alpha, \beta') = \alpha$ 的一页上限制后是非退化的。事实上，该页的切向量由 $\ker(d\alpha)$ 给出，其余定向由 $d\alpha$确定，并且我们有

$$d\lambda_0 \wedge d\alpha = r_2 r_2' d\sigma \wedge d\alpha \wedge d\beta'.$$

  由于 $r_2(\sigma)$ 严格为正且递增，因此这是正的。
- 特别地，该页切空间的一个正向有序基为 $\{\partial_{\beta'}, \partial_\sigma\}$（因为此基后接 ∂_α ，对 Y' 而言是正向的）。由于 ∂_σ 是沿该页边界指向内侧的向量，因此 $\partial_{\beta'}$ 给出了该页边界的定向。
- 我们有 $\lambda_0(\partial_{\beta'}) = c - \frac{1}{2} r_2(\sigma)^2$。由于 $r_2(0) = r_0' < r_0$且 $c > \frac{1}{2} r_0^2$，因此它沿绑定 $B' = \{\sigma = 0\}$ 为正。

因此， λ_0 在 H 上定义了一个接触结构，该结构与我们在 H上引入的开书相容。接下来仍需将接触结构 $\ker(\lambda_0)$ 与 Y上给定的接触结构进行“拼接”；回想一下，后者由 nbd（K）上的形式 $\lambda_Y = d\kappa_1 + \epsilon \rho^2 \, d\kappa_2$的核给出，其中一部分被识别为区域 $\{\sigma \geq \sigma_1\} \subset H$。具体而言，该识别由映射 j 给出： $\{\sigma \geq \sigma_1\} \to \{\rho \geq \sigma_1\}$ 其中

$$j : (\sigma, \alpha, \beta) \mapsto (\kappa_1 = \alpha, \rho = \sigma, \kappa_2 = -\beta' + n\alpha).$$

因此，我们得到一个形式 $\lambda_{Y'} = j^*\lambda_Y$，其定义为

$$\begin{aligned}\lambda_{Y'} &= d\alpha + \epsilon\sigma^*(-d\beta' + nd\alpha) \\ &= -\epsilon\sigma^2\, d\beta' + (1 + \epsilon n\sigma^2)\, d\alpha \qquad (\sigma \geq \sigma_1).\end{aligned} \tag{9}$$

另一方面，我们已经看到，在 H上，

$$\lambda_0 = (c - \frac{1}{2}r_2(\sigma)^2)\, d\beta' + \frac{1}{2}r_1(\sigma)^2\, d\alpha,$$

对于 $\sigma \leq \sigma_0$，它化简为

$$\lambda_0 = (c - \frac{1}{2}r_2(\sigma)^2)\, d\beta' + \frac{1}{2}k^2\sigma^2\, d\alpha \qquad (\sigma \leq \sigma_0) \tag{10}$$

˜现在，由 $\lambda = f(\sigma)\ d\beta' + g(\sigma)\ d\alpha$给出的 H上的光滑1-形式，当平面内的曲线（$f(\sigma)\ g(\sigma)$）以逆时针方向绕原点旋转，且 $fg' - gf' > 0$对所有 σ都成立时，是一个正接触形式。考虑到 f 和 g 如（9）和（10）所示的预期行为，我们首先选择 f使得：

$$\begin{array}{ll} f(\sigma) = c - \frac{1}{2}r_2(\sigma)^2 & (\sigma \leq \sigma_0) \\ f(\sigma) = -\epsilon\sigma^2 & (\sigma \geq \sigma_1) \\ f'(\sigma) < 0 & (\sigma > 0) \end{array}$$

事实上，回想一下， $r_2(\sigma)$的选择满足：对于 $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$， $r_0' \leq \overline{r_2(\sigma)} \leq r_0 < \sqrt{2c}$ （并且 $r_2(\sigma)$递增），因此存在所需的光滑插值。此外，我们可以假设 f唯一的零点位于 $\sigma = \sigma_1 - \epsilon$处；由于 $\epsilon < \sigma_1$，我们可以安排使得对于 $\sigma \in [\sigma_1 - \epsilon, \sigma_1]$，有

$$|f'(\sigma)| \geq \epsilon\sigma_1. \tag{11}$$

对于函数 g，由于 $k\sigma_0 < 1$，我们可以安排

$$\begin{array}{ll} g(\sigma) = \frac{1}{2}k^2\sigma^2 & (\sigma \leq \sigma_0) \\ g(\sigma) = 1 + \epsilon n\sigma^2 & (\sigma \geq \sigma_1 - \epsilon) \\ g'(\sigma) > 0 & (\sigma > 0) \end{array}$$

˜根据构造， λ 在 $\{\sigma \leq \sigma_0\}$ 上与 λ_0 一致，并在 $\{\sigma \geq \sigma_1\}$上与 $\lambda_{Y'}$ 一致。由于在该区间内 $fg' > 0$且 $gf' < 0$，因此 $\{\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1 - \epsilon\}$上的绕数条件成立。最后，虽然对于 $\sigma \in (\sigma_1 - \epsilon, \sigma_1])$，$f$（$\sigma$） f'（σ） < 0，但容易验证约束 (7)、(11) 也蕴含该区间内的绕数条件成立。

因此 λ是 $\tilde{H}$上的正接触形式，并且与 $Y - nbd$（K）上的 λ_Y一起， $= Y' - H$ 在整个 Y' 上给出一个接触形式；该形式在 H之外与形式 λ_Y一致。

˜**命题 3.6**。 接触结构 $\xi' = \ker(\lambda)$ 与上述构造的 Y' 上的开书相容，并由 Z' 上的辛结构弱填充，该辛结构是通过限制 ω得到的。

˜证明。 与开书的相容性意味着， λ 在˜ ˜各页的定向边界上为正，并且$d\lambda$ 是各页内部的面积形式。由于$\lambda = \lambda_Y$在 H之外，且 λ_Y与原开书相容，我们只需在 H中检查这些条件。˜在新的绑定分支 $B' \subset H$ 上的正性由以下事实可得： $\lambda = \lambda_0$ 在 B' 附近成立，而我们已经对 λ_0检查过这一条件。

˜为了考察 $d\lambda$ 在各页上的正性，记

$$d\tilde{\lambda} = f'(\sigma)\, d\sigma \wedge d\beta' + g'(\sigma)\, d\sigma \wedge d\alpha.$$

˜因此 $d\lambda \wedge d\alpha = -f'(\sigma)\ d\sigma \wedge d\alpha \wedge d\beta' > 0$ 由于 $f' < 0$，结论随即成立，因为页的定向切向量属于 ker($d\alpha$)。

弱填充成断言是指假设可知，在接触外成立，事实上在 $\{\sigma \geq r_0\}$上也成立。在 $\{r_2 \leq r_0\} \subset \Delta_1 \times \Delta_2 \subset Z$ 中，˜辛形式是我们的标准辛形式 ω_0，因此要验证正性，只需证明 $i^*\omega_0 \wedge \lambda$ 为正，其中 i： $H \to \Delta_1 \times \Delta_2$ 是之前给出的嵌入。我们利用式（6）（以及$\beta' = -\beta$）进行计算：

$$\begin{aligned} i^*\omega_0 \wedge \tilde{\lambda} &= (r_1(\sigma)r_1'(\sigma)\, d\sigma \wedge d\alpha - r_2(\sigma)r_2'(\sigma)\, d\sigma \wedge d\beta') \wedge (f(\sigma)\, d\beta' + g(\sigma)\, d\alpha) \\ &= (r_1(\sigma)r_1'(\sigma)f(\sigma) + r_2(\sigma)r_2'(\sigma)g(\sigma))\, d\sigma \wedge d\alpha \wedge d\beta'. \end{aligned}$$

˜现在，当 $\sigma \leq \sigma_0$时，这自动为正，因为在该区域中， $\lambda = \lambda_0$ 由 ω的李维尔向量场诱导。更一般地，回顾一下，对于 $\sigma > 0$， r_2 和 r_2' 为正，并且对所有 σ， g（σ） > 0 。当 $\sigma < \sigma_1 - \epsilon$时，我们有 r_1（σ） > 0 以及 r_1'（σ） > 0 ，而在此区域内， f（σ） > 0。当 $\sigma \geq \sigma_1 - \epsilon$ 时，函数 f 为负，但在此区间内 r_1'（σ） $= 0$ 。因此，上面括号中的第一项非负，而第二项为正，从而证明了该结论。

□

上述命题证明了定理 3.5，但尚未证明接触流形（Y'， ξ'）是通过对K的一个勒让德结的逼近施行正接触手术而从（Y， ξ）得到的。下面我们将讨论这一问题。

3.4. **单值化与框架**。 回顾一下，我们已选择将给定开书在 Y 上的单值化 $\psi \in$ Mod(Σ) ˆ 提升为元素 $\psi \in$ Mod(Σ, D) $\cong$ Mod(Σ')（所有映射类群均默认相对于边界取值），这意味着要为 1-辫 K 选择一个框架。我们称之为“页框架”，尽管严格来说，这个框架并非由开书决定，甚至也不是由 K 作为 Mod(Σ, p) 中元素的表示决定的。我们将圆盘 $\Delta \subset Z$ 诱导的、相对于页框架的框架记为 n，并希望理解上述构造所确定的 Y' 上开书的单值化。为此，我们必须谨慎对待“相对单值化”这一概念。

设 π： $M \to S^1$ 是一个纤维丛投影，其中我们将 $S^1 = [0,1]/(0 \sim 1)$ 视为带有商映射 q： $[0,1] \to S^1$。若 $F = \pi^{-1}([0])$ 是基点上方的纤维，则 $[0,1]$ 上的丛 $\tilde{\pi}$： $q^*M \to [0,1]$ 通过某个丛同构 φ： $q^*M \to [0,1] \times F$ 同构于 $[0,1] \times F$，并且我们可以假设该同构在 $F = \{0\} \times F$ 上为恒等映射。注意，根据诱导纤维丛的构造， q^*M 在 0 和 1 上方的纤维与 $F = \pi^{-1}([0])$ 有典范的同一化。于是， π 的单值化定义为以下复合

$$F = \{1\} \times F \to \tilde{\pi}^{-1}(1) = \pi^{-1}([0]) = F$$

其中箭头由 φ 确定。如果 μ 是这个复合，那么 μ 在共轭（对应于纤维识别的选择，我们从现在起假设该选择固定）和同伦（对应于 φ 的选择）意义下是良定义的。因此，丛 M 同构于映射环面 $M(\mu) = [0,1] \times F/(1, x) \sim (0, \mu(x))$。

现在设 $B \subset F$ 是一个子集，且 μ： $F \to F$ 是一个在 B 上为恒等映射的微分同胚。（在我们的情形中， F 将是一个紧曲面，而 B 是其边界的一个领圈。）那么

映射环面 $M(\mu)$ 包含一个纤维为 B 的子丛，即 $[0,1]\times B/(0,b)\sim(1,b)$。特别地，将 (t,b) 映射到 $M(\mu)$ 中所考虑的同一元素的映射 $S^1\times B\to M(\mu)$，就是该子丛的一个典范平凡化。此外，将 μ 通过一个在 B 上固定的同伦修改为另一个微分同胚 μ'，会产生一个丛同构 $M(\mu)\to M(\mu')$，并且该丛同构保持子丛的相应平凡化。换言之，$\mathrm{Mod}(F,B)$ 中的一个元素对应于一个良定义的丛与子丛对，其中子丛带有平凡化。反过来，设 $\pi\colon M\to S^1$ 是一个以 $F=\pi^{-1}([0])$ 为纤维的纤维丛，且 $N\subset M$ 是一个满足 $N\cap F=B$ 的子丛。另设 N 是一个平凡丛，并且已经选定了一个平凡化 $S^1\times B\to N$。那么，只要 $B\subset F$ 是一个合理的子集（例如，一个闭子流形），就可以选择 q^*M 上方的平凡化 φ，使其限制为 q^*N 上给定的平凡化。特别地，我们得到一个在 B 上为恒等映射、且在关于 B 的同伦意义下良定义的单值化微分同胚：也就是说，得到 $\mathrm{Mod}(F,B)$ 中的一个元素，我们称之为相对单值化。

前文讨论的要点在于，相对单值化不仅由带有平凡子丛的丛 $\pi\colon M\to S^1$ 决定，还取决于对该子丛的额外平凡化选择。请注意，严格来说，开书分解的单值化概念是相对单值化的一种特例。下面的例子与我们的情形有关。设 $A=[0,1]\times S^1$ 为一个环带，其定向坐标为 (τ,ϕ)（我们照常取 $\phi\in[0,1]/(0\sim1)$）。对于一个整数 k，令 $\psi_k\colon A\to A$ 为微分同胚 $\psi_k(\tau,\phi)=(\tau,\phi-k\tau)$；它在相对于 ∂A 的意义下同痕于沿 A的核心圆作 k 次右手德恩扭转。（严格来说，在此定义中将 $-k\tau$ 替换为一个单调光滑函数更为恰当；该函数在 τ 的某个邻域内等于 0，在 τ 的某个邻域内等于 $-k$。）映射环面 $M(\psi_k)$ 因而可具体描述为

$$M(\psi_k)=[0,1]\times[0,1]\times S^1/(1,\tau,\phi)\sim(0,\tau,\phi-k\tau),$$

其丛投影为 $[s,\tau,\phi]_{\psi_k}\mapsto s$。这里我们将 $[\cdot]_{\psi_k}$ 记作模去上述由 ψ_k 所诱导关系后的等价类。作为 S^1 上的丛，平凡映射环面 $M(\mathrm{id})$ 与 $M(\psi_k)$ 同构，其同构映射为

$$\begin{aligned}G\colon M(\mathrm{id})&\to M(\psi_k)\\ [s,\tau,\phi]_{\mathrm{id}}&\mapsto[s,\tau,\phi+k\tau s]_{\psi_k}.\end{aligned}$$

特别地，我们可以将 $M(\psi_k)$ 视为平凡丛 $M(\mathrm{id})$，只是其边界上的平凡化不同，以体现相对单值化。实际上，$\partial M(\psi_k)$ 的平凡化由显然的映射 $[0,1]\times\partial A/\sim_{\psi_k}\to S^1\times\partial A$ 给出，该映射将 $[s,j,\phi]_{\psi_k}$ 送到 $(s,\ \{j\}\times\phi)$，其中 $j=\{0,1\}$（将 $\partial A=\{0,1\}\times S^1$ 视为.....）。与 G 复合后，相应的平凡化 $\partial M(\mathrm{id})\to S^1\times\partial A$ 映射

$$\begin{aligned}[s,0,\phi]_{\mathrm{id}}&\mapsto(s,\{0\}\times\phi)\\ [s,1,\phi]_{\mathrm{id}}&\mapsto(s,\{1\}\times(\phi+ks)).\end{aligned}$$

换言之，配备这些边界平凡化的平凡丛 $M(\mathrm{id})$，其相对单值化同痕于 k 个右德恩扭转。

回到开书分解的情形，称 Y 配备了一个开书分解（Σ，ψ），意味着绑定B 的小邻域的补集被识别为映射环面 Σ_ψ。此外，$Y-nbd(B)$ 上的丛结构利用 B 的子午线在边界处进行了平凡化。同样，在之前的情形中，

提升 $\hat{}\,\psi \in \mathrm{Mod}(\Sigma,\ D)$ 的选择给出了平凡化 $nbd(K) \cong S^1 \times D$，我们已在坐标系 $(\kappa_1,\ \rho,\ \kappa_2)$ 中记录了这一点。

流形 Y' 是通过将 $nbd(K)$ 替换为 $H \cong D^2 \times S^1$ 得到的，替换方式使得在 ∂H 附近，H 上的坐标 $(\sigma,\ \alpha,\ \beta)$ 与 $nbd(K)$ 上的坐标通过变换 (8) 相关：

$$(\sigma, \alpha, \beta') \mapsto (\kappa_1 = \alpha, \rho = \sigma, \kappa_2 = \beta + n\alpha).$$

Y' 上的开书 π' 在 H 上由映射 $\pi'(\sigma,\ \alpha,\ \beta) = \alpha$ 描述。稍微滥用一下记号，我们将其视为定义在 $\sigma \in [0,1]$ 上（而不只是半开区间上），因此 π' 的纤维是一个环带 $A = [0,1] \times S^1$，由坐标 $(\sigma,\ \beta)$ 描述。换言之，删去绑定 $B' = \{\sigma = 0\}$ 的一个小开邻域并重新赋予坐标后，新的开书在此坐标系下由一个平凡映射环面 $S^1 \times A$ 描述，其坐标为 $(\alpha,\ \sigma,\ \beta)$。（注意，此坐标系反转了 H 上的定向；正如我们所见，这使其定向与 Y' 的定向一致。）在 $\sigma = 0$ 处的边界分支上，由投影到 α 和 β 坐标所给出的此丛的自然平凡化，对应于由 B' 的子午线给出的平凡化，这正是开书所要求的。在 $\sigma = 1$ 处，平凡化由上述坐标变换决定，是由 $(\alpha,\ 1,\ \beta) \mapsto (\alpha,\ \beta + n\alpha)$ 给出的映射 $S^1 \times \{0\} \times S^1 \to S^1 \times S^1$。与上面的例子比较，我们得到：

命题 3.7。上述过程在 Y' 上得到的开书(Σ', ψ') 的单值化如下所述。记 $\Sigma' = (\Sigma - D) \cup A$，其中 A 是沿着 ∂D粘合到 Σ 上的一个环带。单值化 ψ' 在 $\Sigma - D$上$\hat{}$等于所选的提升 ψ，而在 A 上则由围绕 A的核的 n 个右手德恩扭转复合给出。

$\hat{}$ 请注意，提升 ψ有多种选择，它们彼此相差围绕 $\hat{}\partial D$的 Dehn 扭转。向 ψ 添加这样的 Dehn 扭转会改变 K上的相应框架；特别是，添加一个右德恩扭转会使“页框架”增加 1。由 Δ 诱导的 K 的框架与此选择无关，但整数 n 表示 Δ 给出的框架与页框架之间的差。因此，沿 ∂D 向 ψ 添加一个右扭转，意味着 n减小1，而命题中描述的单值化 ψ' 是良定义的。

引理 3.8。设 $K \subset Y$ 是接触流形 $(Y,\ \xi)$ 中的一个正横截结，并设 λ 是 K 的一个选定框架。那么，存在一个支撑 ξ 的 Y 上的开书，使得 K 与一个绑定分支横截同位，并且由该开书的页诱导出的 K 上的框架小于 λ。

证明。回想一下，要构造 [3]，使横截结 K 成为某个开书的绑定分支，首先要对 K取一个勒让德结逼近 $\mathcal{K}$，并找到一个开书，使该逼近位于某一页上，且该页所诱导的框架等于 $\mathcal{K}$的接触标架。然后，通过适当的稳定化，可得到一个开书，其绑定分支 B 是 $\mathcal{K}$ 的横截推离（因而与 K横截同位）；此外，页上有一条与该绑定分支平行的曲线 $\mathcal{K}^-$，是 B 的勒让德结逼近（也是 $\mathcal{K}$的负稳定化）。对 $\mathcal{K}$ 进行负稳定化，不会改变其横截推离的横截同位类。因此，在构造开始时对 $\mathcal{K}$ 进行多次负稳定化，就可以设想 $\mathcal{K}^-$ 的接触标架小于 λ，事实上可以小到任意程度。$\mathcal{K}^-$ 的接触标架与页所诱导的框架相同，而后者对应于页对$B \simeq K$ 所诱导的框架。□

命题 3.9。 设(Z,ω)是(Y,ξ)的弱辛填充，且 $\Delta \subset Z$是一个适当嵌入的辛圆盘，其边界 $K \subset Y$ 为（正向）横截边界。设 $Z' = Z - nbd(\Delta)$ 是按照命题 *3.6* 弱填充(Y',ξ') 的辛流形。那么，接触结构 ξ' 可由 ξ 沿 K进行非容许横截手术得到。另一种描述是， ξ' 可看作沿 K的勒让德结逼近进行正接触手术的结果。

证明。 令 λ表示由 Δ在 K 上诱导的框架，并应用前述引理中的横截同伦，使得 K 成为（Y,ξ）的某个开书的绑定分支，且页框架小于 $\lambda-1$。注意，将该同伦的迹附加到领圈 ∂Z内的 Δ 上后，我们仍可假设 $\partial\Delta = K$ （如第 2.2 节中推论 1.5(a) 的证明所示；见 [16]）。

现在应用引理 3.4 中的同伦，将 K 实现为一个辫，使其邻近开书的边界，如图 2 所示，并将单值化的提升对应到 Mod(Σ, D) 中的一个类。（同样，我们在同伦过程中保持 Δ 不变。）我们需要考察由此提升诱导的框架与绑定分支的页框架之间的关系。通过考虑由点 $p' = (0, T') \in A$给出的平行推移，可以很容易地在引理 3.4 证明中构造的模型里进行分析。曲线 $s \mapsto (\theta = s, \tau = T', \phi = s)$ 在该模型中与原辫正向相交一次，而绑定上的页框架为零（对应于 $\{\tau = 0\}$ 与平行推移 $(\theta = s, \tau = \epsilon, \phi = 0)$ 之间的链接数）。因此，辫的“页框架”比绑定上的页框架大 1；根据我们先前的选择，它仍小于 λ。特别地，整数 n表示 λ 与由提升后的单值化在辫上给出的框架之差，且该整数为正。

现在，借助前一个命题中的单值化描述，该命题很容易得证。事实上，对于图 2 所示的辫，上述命题表明，从开书的角度看，(Y', ξ') 可通过从 A 中移除 p 的一个小邻域，并沿着与新边界分支平行的一条曲线添加 $n > 0$ 个右德恩扭转来描述。这个开书恰好等价于引理 3.1 之前所描述的开书（将该描述中的 n 替换为 $n+1$），因而描述了沿绑定进行的（整数）非容许横截手术；或者等价地说，它描述了在 A 上取一条与边界平行的曲线所给出的 K 的勒让德结逼近上的正接触手术。□

命题 3.9 完成了定理 3.5 的证明；定理 3.5 与定理 3.3 一起推出定理 1.1。

3.5. **强填充性与弱填充性**。 自然会问，假设 (Z,ω) 是强填充，能否将填充 (Z',ω') 取为强填充。这本质上是一个同调条件：事实上，Eliashberg 的一个结果 [14, 命题 4.1] 表明，当且仅当辛形式在边界的某个邻域内是恰当的，弱填充才能变形为强填充。有鉴于此，回顾一下，对于一个带框结 $K \subset Y$，沿 K 按给定框架进行手术所得的结果 Y'，其贝蒂数 $b_1(Y)$ 和 $b_1(Y')$ 至多相差一。更具体地说， K 的子午线m，视为 Y' 中的对象，在 $H_1(Y';\mathbb{R})$ 中代表一个元素；除非 K 是零调且该框架是零调框架，否则这个元素是平凡的。

定理 3.10。 在定理 *1.1* 的情形下，设 (Z,ω) 是 (Y,ξ)的强辛填充，并且以下两个条件之一成立：

（1）辛形式 ω 在 $Y \cup \Delta$ 的某个邻域上是恰当的，或者（2）将 K 的子午线 m 视为 Y' 中的一个实系数同调类时，它是平凡的。

那么，（Z', ω'）可以变形为（Y', ξ'）的强辛填充。

证明。 如上所述，要证明 (Z', ω') 可以变形为强填充，只需证明 $\omega' = \omega|_{Z'}$ 在 Y'附近是恰当形式。由于 Y' 是 $Y \cup \Delta$的管状邻域的一个边界分支，定理陈述中的第一个条件显然足以保证这一点。

对于第二个条件，设 N 和 U_Δ 分别是 $Y = \partial Z$ 和 $\Delta \subset Z$的小邻域，并考虑 de Rham 上同调中的 Mayer-Vietoris 序列

$$H^1(V) \to H^2(N \cup U_\Delta) \to H^2(N) \oplus H^2(U_\Delta),$$

其中 $V = N \cap U_\Delta$ 是 $K \subset Y$的一个邻域，并向 Z中加厚。由于 ω 在 N 上是恰当的，且$H^2(U_\Delta) = 0$，类 $[\omega] \in H^2(N \cup U_\Delta)$属于 $H^1(V) \cong \mathbb{R}$的像。在假设 $[m] = 0$ 属于 $H_1(Y')$的条件下，复合

$$H^1(V) \to H^2(N \cup U_\Delta) \to H^2(Y')$$

（其中第一个映射是 Mayer-Vietoris 边界映射，第二个映射是包含映射）是平凡映射，这就验证了定理。

验证上述复合为零的一种方法是通过 Poincar´e 对偶性转到同调，并考察复合映射

$$H_3(V, \partial V) \to H_2(N \cup U_\Delta, \partial) \to H_1(Y').$$

由于$V \cong S^1 \times D^3$，第一个群由相对类 $[D^3, \partial D^3]$生成，它映射到第二个群中的类 $[\partial D^3]$。从几何上看，将 N视为 $Y \times I$，将 V视为 $nbd（K）\times I$，我们有 $D^3 = D^2 \times I$，其中 D^2 是 K 的一个子午盘。因此， ∂D^3 对应于 $D^2 \times \{0, 1\} \cup m \times I$，其中 $m = \partial D^2$ 是子午线。上面的第二个映射由链与 Y'的交给出；对于 ∂D^3，交集只有圆 $m \times \{1\}$。因此 $[\partial D^3] \mapsto [m]$，结论成立。□

推论 3.11. 若 $\mathcal{K} \subset S^3$ 是 S^3 上标准接触结构中的一个勒让德结，且 $n > 0$ 是给定的整数，那么 $\xi_n^-(\mathcal{K})$ 弱辛可填充，当且仅当它强辛可填充。

证明. 若 n 对应的手术的光滑手术系数不为零，则 K 的子午线在 $H_1(Y'; \mathbb{R})$ 中为零（事实上，后一个群是平凡群），因此结论由上述定理的情形 (2) 得出。光滑零手术的情形恰好对应于横截推离 K 在一个对 S^3 的（弱）填充中界定一个自交数为零的辛圆盘。如第 2.1 节所示，这等价于 K 在 B^4 中界定一个嵌入辛圆盘，而其辛形式是恰当的。结论由定理 3.10 的情形 (1) 得出。□

4. 低交叉数纽结

表 1 列出了 KnotInfo 数据库中交叉数不超过 10 个且存在可填充正手术的纽结。该表仅收录数据库中标记为拟正的纽结；我们不区分纽结及其镜像（除切片结外，两者至多只有一个是拟正的）。

表中的“Y”表示存在某个横截代表，其勒让德近似具有可填充正接触手术；该代表由 KnotInfo 中出现的拟正辫表达式、对其进行简单修改后得到的表达式，或表中所示的辫给出。若从 KnotInfo 所给的表达式中无法明显看出拟正辫表达式

Name	可填充手术?	$\mu(K)$	注记	Name	可填充手术?	$\mu(K)$	注释
3_1	Y	4	环面结 $T(3,2)$	10_{49}	Y	≤ 12	
5_1	Y	8		10_{53}	N	∞	$c_* > g_*$
5_2	Y	4	扭结 K_3	10_{55}	Y	≤ 8	
7_1	Y	12		10_{63}	Y	≤ 8	
7_2	Y	4	扭结 K_5	10_{66}	Y	≤ 12	
7_3	Y	≤ 8		10_{80}	Y	≤ 12	
7_4	N	∞	$c_* > g_*$	10_{101}	N	∞	$c_* > g_*$
7_5	Y	≤ 8		10_{120}	N	∞	$c_* > g_*$
8_{15}	Y	≤ 8		10_{124}	Y	13	环面结 $T(5,3)$
8_{19}	Y	9	环面结 $T(4,3)$	10_{126}	Y	4	
8_{20}	Y	0		10_{127}	Y	≤ 8	
8_{21}	Y	4		10_{128}	Y	9	辫 $3(12)^3(\bar{3}23)$
9_1	Y	16	环面结 $T(9,2)$	10_{131}	Y	4	辫 $(1234\bar{3}\bar{2}\bar{1})(23\bar{2})2(12\bar{1})(\bar{4}123^2\bar{2}\bar{1}4)$
9_2	Y	4	扭结 K_7	10_{133}	Y	4	
9_3	Y	≤ 12		10_{134}	Y	≤ 12	
9_4	Y	≤ 8		10_{139}	Y	13	辫 $(12)^3(\bar{2}1^22)21$
9_5	N	∞	$c_* > g_*$	10_{140}	Y	0	
9_6	Y	≤ 12		10_{142}	Y	≤ 12	辫 $1^21^2(321\bar{2}\bar{3})1^223$
9_7	Y	≤ 8		10_{143}	Y	4	
9_9	Y	≤ 12		10_{145}	Y	≤ 8	辫 $32^21(32^2\bar{3})(21\bar{2})$
9_{10}	N	∞	$c_* > g_*$	10_{148}	Y	4	辫 $(\bar{1}2^21)(\bar{2}12)(221\bar{2}\bar{2})$
9_{13}	N	∞	$c_* > g_*$	10_{149}	Y	≤ 8	
9_{16}	Y	≤ 12		10_{152}	Y	13	辫 $(12)^31(\bar{2}1^22)(21\bar{2})$
9_{18}	Y	≤ 8		10_{154}	Y	≤ 12	辫 $1^22^21(\bar{2}32)2^23$
9_{23}	Y	≤ 8		10_{155}	Y	0	
9_{35}	N	∞	$c_* > g_*$	10_{157}	Y	≤ 8	
9_{38}	N	∞	$c_* > g_*$	10_{159}	Y	4	
9_{45}	Y	≤ 8		10_{161}	Y	≤ 12	
9_{46}	Y	0		10_{165}	N	∞	$c_* > g_*$
9_{49}	N	∞	$c_* > g_*$				

表 1. 可进行可填充正接触手术的纽结。

如何体现可填充手术的存在（如定理 2.12 所述），我们便使用记号 1，2，3，.. 。以及 1，2，3，.. 。来表示辫子生成元σ_1、 σ_2、 σ_3，.. 。及其逆元，并给出一个辫子表达式。

对于具有可填充正手术的那些纽结，表中列出了最小可填充手术系数 $\mu(K)$ 的值或上界。大多数上界与命题 1.7 给出的通用上界一致，不过在情形 $g_*(K) = 0$ 和 $g_*(K) = 1$ 中，值 $\mu(K) = 0$ 和 $\mu(K) = 4$ 分别是精确的，这可由该命题及命题 2.19 得出。通过观察辛圆盘中的高重数奇点，可得到低于 $4g_*(K)$ 的 $\mu(K)$ 估计值；辫（单值化）表达式为此提供了证据。例如，纽结 10_{128} 可表示为一个辫的闭包，其中包含表达式 $(12)^3$,，该表达式对应于普通三重点奇点的单值化。当 $\mu(K)$ 的值被标示为精确时，其结论可由本文其他部分（尤其是第 2.3 节）中的论证得出。表中所有不具有可填充正手术的纽结，其无法进行此类手术的原因均可由推论 1.3 得出：它们的扣结数大于其

切片亏格。在这些情形中， $c_*(K)$ 的值在许多（或许是全部）情况下由 Owens 和 Strle [41] 得出。

参考文献

[1] Chris Anderson, Kenneth L. Baker, Xinghua Gao, Marc Kegel, Khanh Le, Kyle Miller, Sinem Onaran, Geoffrey Sangston, Samuel Tripp, Adam Wood 和 Ana Wright，通过实验研究隧道数为 > 1 的 L-空间结，预印本 arXiv:1909.00790。[2] Sebastian Baader，轨道结的切片数与戈迪安数，《大阪数学杂志》42 (2005)，第 1 期，257–271。MR 2132015[3] Kenneth L. Baker、John B. Etnyre 和 Jeremy Van Horn-Morris，《缆绕、接触结构与映射类幺半群》，《微分几何杂志》90 (2012)，1–80。[4] John A. Baldwin 和 Steven Sivek， L-空间结是纤维化的且强拟正的，载于《规范理论与低维拓扑：进展与互动》（John A. Baldwin、Hans U. Boden、John B. Etnyre 和 Liam Watson 编），第 5 卷，《开书系列》第 1 期，数学科学出版社，2022 年，第 81–94 页。[5] Michel Boileau 和 Stepan Orevkov，伪凸球内解析曲线的拟正性，《巴黎科学院报告》S

´ **332** 2001 9, 825 830 1836094 er. I Math. ( )，第 – 期。MR Michel

[6] Boileau 和 Claude Weber，关于 J. Milnor 的代数纽结戈迪安数问题，《数学教学》(2) 30 (1984)，第 3–4 期，173–222。MR 767901[7] Chang Cao、Nathaniel Gallup、Kyle Hayden 和 Joshua M. Sabloff，拓扑上不同的拉格朗日填充与辛填充，《数学研究快报》21 (2014)，第 1 期，85–99。MR 3247041[8] J. C. Cha 和 C. Livingston，KnotInfo：结不变量表，http://www.indiana.edu/ knotinfo（2015 年 5 月 19 日）。[9] James Conway，接触三维流形中纽结的横截手术，《美国数学会汇刊》372 (2019)，第 3 期，1671–1707。MR 3976573[10] James Conway、John B. Etnyre 和 B¨ulent Tosun，辛填充、接触手术与拉格朗日圆盘，《国际数学研究通知》 (2021)，第 8 期，6020–6050。MR 4251270[11] Aliakbar Daemi 和 Cristopher Scaduto，陈-西蒙斯泛函、奇异瞬子与四维扣结数，预印本 arXiv:2007.13160。[12] Fan Ding、Hansj¨org Geiges 和 Andr´as I. Stipsicz，接触三维流形的手术图，《土耳其数学杂志》28 (2004)，41–74。[13] Y. Eliashberg， R^4 中 2-结的拓扑与辛几何，载于《Floer纪念文集》，《数学进展》第 133 卷，Birkh¨auser，巴塞尔，1995 年，第 335–353 页。MR 1362834[14] Yakov Eliashberg，关于辛填充的几点意见，《几何与拓扑》8 (2004)，277–293。MR 2023279[15] John B. Etnyre，《开书分解与接触结构讲义》，《Clay数学会议录》5 (2006)，103–141。[16] John B. Etnyre 和 Marco Golla，辛帽，预印本 arXiv:2001.08978。[17] Ronald Fintushel 和 Ronald J. Stern，通过对纽结做手术构造透镜空间，《数学杂志》175 (1980)，第 1 期，33–51。MR 595630[18] Hiroshi Goda 和 Masakazu Teragaito，产生透镜空间的纽结 Dehn手术与纽结的亏格，《剑桥哲学会数学会议录》129 (2000)，第 3 期，501–515。MR 1780501[19] Marco Golla，接触手术的 Ozsv´ath-Szab´o 不变量，《几何与拓扑》19 (2015)，第 1 期，171–235。MR 3318750[20] C. McA. Gordon，Dehn手术与卫星纽结，《美国数学会汇刊》275 (1983)，第 2 期，687–708。MR 682725[21] Joshua Evan Greene，L-空间手术、亏格界与缆绕猜想，《微分几何杂志》100 (2015)，第 3 期，491–506。MR 3352796[22] M. Gromov，辛流形中的伪全纯曲线，《数学发明》82 (1985)，第 2 期，307–347。MR 809718[23] Kyle Hayden 和 Joshua M. Sabloff，正结与拉格朗日可填充性，《美国数学会会刊》143 (2015)，第 4 期，1813–1821。MR 3314092[24] Matthew Hedden，关于结 Floer 同调与缆绕 II，《国际数学研究通知》15 (2009)，2248–2274。[25] Matthew Hedden，正性概念与 Ozsv´ath-Szab´o 同痕不变量，《结理论及其应用杂志》19 (2010)，第 5 期，617–629。MR 2646650[26] Jennifer Hom，关于缆绕与 L-空间手术的注记，《代数与几何拓扑》11 (2011)，第 1 期，219–223。MR 2764041[27] ，边界Heegaard Floer同调与缆结的 tau不变量，《拓扑学杂志》7 (2014)，第 2 期，287–326。MR 3217622[28] ，卫星结与 L-空间手术，《伦敦数学会会刊》48 (2016)，第 5 期，771–778。MR 3556360[29] Jennifer Hom、Tye Lidman 和 Faramarz Vafaee，Berge-Gabai结与 L-空间卫星操作，《代数与几何拓扑》14 (2014)，第 6 期，3745–3763。MR 3302978

[30] Ko Honda，《紧接触结构的分类 I》，《几何与拓扑》4 (2000)，309–368。[31] Tetsuya Ito，关于正辫链 HOMFLY 多项式的注记，《国际数学杂志》33 (2022)，第 4 期，论文编号 2250031，18 页。MR 4402791[32] Andr´as Juh´asz 和 Ian Zemke，新的 Heegaard Floer 切片亏格与扣结数界，预印本 arXiv:2007.07106。[33] Amey Kaloti 和 B¨ulent Tosun，不存在可填充接触结构的双曲有理同调球，《数学研究快报》24 (2017)，第 6 期，1693–1705。MR 3762690[34] Paolo Lisca 和 Andr´as I. Stipsicz，接触手术与横截不变量，《拓扑学杂志》4 (2011)，第 4 期，817–834。[35] Thomas E. Mark 和 B¨ulent Tosun，正有理接触手术下 Heegaard Floer 不变量的自然性，《微分几何杂志》110 (2018)，第 2 期，281–344。MR 3861812[36] Dusa McDuff，有理与纤维化辛四维流形的结构，《美国数学会杂志》3 (1990)，第 3 期，679–712。MR 1049697[37] Yoshihiko Mitsumatsu，接触结构向叶状结构的收敛，《2005 年叶状结构》，World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2006 年，附录由 Mitsumatsu 和 Atsuhide Mori 撰写，第 353–371 页。MR 2284791[38] Yi Ni，结 Floer 同调可检测纤维结，《数学发明》170 (2007)，第 3 期，577–608。MR 2357503[39] S. Yu. Orevkov，圆盘中辫单值化由代数函数实现的可能性，《巴黎科学院报告》S´er. I Math. 326 (1998)，第 7 期，867–871。MR 1648548[40] Brendan Owens 和 Saˇso Strle，Dehn手术与负定四维流形，《精选数学》 (N.S.) 18 (2012)，第 4 期，839–854。MR 3000471
[41] ，浸入圆盘、切片数与同痕解结数，《通信分析与几何》24 (2016)，第 5 期，1107–1138。MR 3622316[42] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o，关于结 Floer 同调与透镜空间手术，《拓扑学》44 (2005)，第 6 期，1281–1300。MR 2168576[43] Elena Pavelescu，接触三维流形中纽结的辫化，《太平洋数学杂志》253 (2011)，第 2 期，475–487。MR 2878820[44] Patrick Popescu-Pampu，连分数的几何与曲面奇点的拓扑，载于《几何与拓扑中的奇点 2004》，《纯数学高级研究》第 46 卷，日本数学会，东京，2007 年，第 119–195 页。MR 2342890[45] Lee Rudolph，代数函数与闭辫，《拓扑学》22 (1983)，第 2 期，191–202。MR 683760
[46] ，闭辫所围曲面的特殊位置，《伊比利亚美洲数学杂志》1 (1985)，第 3 期，93–133。MR 836285
[47] ，拟正性作为切片性的障碍，《美国数学会通报》(N.S.) 29 (1993)，第 1 期，51–59。MR 1193540
[48] ，正链是强拟正的，载于《Kirbyfest 论文集》（加利福尼亚州伯克利，1998），《几何与拓扑专著》第 2 卷，几何与拓扑出版社，考文垂，1999 年，第 555–562 页。MR 1734423[49] ，复平面曲线的结理论，载于《结理论手册》，Elsevier B. V.，阿姆斯特丹，2005 年，第 349–427 页。MR 2179266[50] Chris Wendl，接触三维流形之间的非恰当辛协边，《微分几何杂志》95 (2013)，第 1 期，121–182。

数学系，弗吉尼亚大学，夏洛茨维尔，弗吉尼亚州电子邮件地址：tmark@virginia.edu

数学系，阿拉巴马大学，塔斯卡卢萨，阿拉巴马州电子邮件地址：btosun@ua.edu