arXiv:2301.10175v2 [physics.class-ph] 1 Mar 2024

经典力学高阶导数表述的内禀变分结构

John W. Sanders

城堡军事学院机械工程系，南卡罗来纳军事学院，171 Moutrie St, 查尔斯顿，SC 29409 jsande12@citadel.edu ORCiD: 0000-0003-3059-3815

摘要

本文研究经典力学高阶导数表述的几何结构。研究表明，所有高于二阶的偶数阶经典力学表述都具有内禀变分性，即其运动方程始终可以从最小作用量原理导出，即使系统是非哈密顿系统。本文特别关注四阶表述，因为研究表明，它是控制方程具有内禀变分性的最低阶表述。本文推导了四阶表述的诺特对称性及其相应的守恒律（包括其哈密顿量），并给出了自然辅助条件。高阶导数表述的内禀变分结构使得我们能够将非哈密顿系统视为哈密顿系统处理，从而直接应用于经典问题。本文以经典阻尼谐振子为例进行说明，并为一个高阶纳维–斯托克斯方程构造了作用量。

1 引言

自经典力学诞生以来，人们一直在哈密顿系统与非哈密顿系统之间划定一条清晰的界线 [1, 2]。然而，最近的一项发现 [3–6] 模糊了这条界线。显然，只需在时间的四阶层面考察运动方程，就始终可以将非哈密顿系统视为哈密顿系统。在四阶层面，经典方程具有内在的变分性质，即使系统是非保守的或非完整的，它们也总能由驻定作用量积分导出 [5]。这已经促成了两项经典应用：对阻尼动力系统进行直接模态分析 [4] ，以及随后提出一种计算阻尼系统共振频率的新型且更高效的算法 [6]。鉴于这些近期应用，本文作者认为，经典力学的高阶导数表述值得进一步研究；而本文的核心目的，正是考察此类表述的几何结构。事实上，本文将证明，高于二阶的每一种偶阶经典力学表述都具有内在的变分性质。

“高阶导数理论”的概念并不新颖，事实上可以追溯到 Ostrogradsky 的时代 [7], 。他研究了依赖高于一阶时间导数的拉格朗日量。Ostrogradsky 著名的不稳定性定理 [7] 表明，相应的哈密顿量

对于此类拉格朗日量没有下界。即便如此，高阶导数拉格朗日量仍得到了广泛研究；例如，可参阅 VandenBerg 和 VanderVorst [8], 、Kalies 和 VanderVorst [9], 的研究，以及其中引用的文献。

Ostrogradsky 的工作 [7] 后来在量子引力物理学中找到了应用 [10–15]。众所周知，量子力学难以与爱因斯坦的广义相对论统一，因为后者（一个二阶理论；爱因斯坦场方程通过里奇曲率对度规张量的依赖是二阶的）不可重整化 [10]。高阶导数理论因具有可重整化性 [13]，曾被视为量子引力的候选理论。遗憾的是，与奥斯特罗格拉德斯基不稳定性定理 [7], 一致，此类理论通常会容许所谓的“坏幽灵”：具有负动能的量子态，从而导致幺正性的丧失 [11]。一个值得注意的例外是四阶 Pais-Uhlenbeck 振子 [10, 11]。尽管如此，量子引力仍然是一个未解难题，而且高阶导数理论能否成为解决问题的关键尚不清楚。

直到最近，高阶导数方程才在经典力学和工程学中找到应用。诚然，高阶导数长期以来一直是经典力学关注的对象。一个广为人知的例子是，垂直过山车环形轨道从完美的圆形演变为回旋线形状，以避免加加速度出现不连续 [16]。另一个值得注意的例子是，设计控制方案，使无人驾驶飞行器实现最小跃度轨迹；参见 Mellinger 和 Kumar [17] 的研究及引用该研究的论文。然而，经典运动方程始终是时间的二阶方程；自 Ostrogradsky 以来，经典力学家似乎一直没有认真考虑过包含高阶时间导数的方程 [7]。

Sanders [3] （本文作者）证明，阻尼简谐振子属于四阶 Pais-Uhlenbeck 振子这一类 [10, 11], ，由此推论，单个阻尼振子在数学上等价于两个耦合的“双振子”：它们不带阻尼器，但具有复数值刚度的弹簧 [3]。通过拓展这一结果 [3], ，Sanders [4] 得以对具有任意自由度的非比例阻尼线性系统进行直接模态分析，同时也为直接模态分析具有黏性阻尼和幂律硬化的阻尼非线性振子开辟了道路 [4]。随后，Sanders and Inman [6] 证明，双振子方法提供的共振频率计算通常比 Foss [18] 和 Traill-Nash [19]的传统方法更高效。

Sanders [4] 认识到，四阶动力学本质上具有变分结构，随后为任意机械系统的四阶运动方程建立了一般的变分表述 [5]。Sanders [5] 考虑了如下形式的作用量

$$\mathcal{S}^*[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\mathcal{R}_i\mathcal{R}_i dt, \quad \mathcal{R}_i \equiv \ddot{q}_i - f_i(q_j, \dot{q}_j, t), \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

其中， $q_i = q_i(t)$ 是适当的广义坐标[1]， t_1 且 t_2 是任意时刻， $\mathcal{R}_i$ 是二阶表述的残差， n 是系统的自由度，并且我们对重复的下标指标采用爱因斯坦求和约定。如 Sanders [5], 所指出，这里的“拉格朗日量”，

$$L^*(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) = \frac{1}{2}\mathcal{R}_i\mathcal{R}_i, \tag{2}$$

[1]为了保持　　量纲一致性，广义坐标可能需要进行无量纲化　　n.

表面上与高斯约束函数 [20, 21], 相似，但两者通常并不相同。对坐标 $q_i(t)$ 进行变分后，对于满足 $\mathcal{R}_i = 0$的实际运动，一阶变分 $\delta L^* = \mathcal{R}_i \delta \mathcal{R}_i$ 为零，而二阶变分 $\delta^2 L^* = \delta \mathcal{R}_i \delta \mathcal{R}_i$ 严格非负。因此，显然 L^* 在实际运动时取得局部极小值， $\mathcal{S}^*$ 也是如此。对 L^* 求极小值是数值分析中广为人知的最小二乘原理。对 $\mathcal{S}^*$ 求极小值——它只是 L^* 在任意时间区间上的平均值——或可称为“时间平均最小二乘原理”。

这里我们暂且指出，式 (2) 中的拉格朗日量 L^* 并非唯一能够导出四阶方程的拉格朗日量。有时，量 $\mathcal{R}_i \mathcal{R}_i$ 中包含可表示为全时间导数的项；众所周知，这些项可以从作用量中消去，而不影响运动方程。我们将在第3节中再讨论这一问题。

这一 $\mathcal{S}^*$ 的重要意义在于，它为任何经典机械系统的四阶方程提供了一个驻定作用量。与通常的哈密顿作用量 [1, 2] 不同， $\mathcal{S}^*$ 甚至适用于非保守系统和非完整系统，模糊了哈密顿系统与非哈密顿系统之间的区别，并使非哈密顿系统也能像哈密顿系统一样得到处理。四阶表述是否具有实际应用价值，值得进一步研究经典力学的高阶表述。

本文其余部分安排如下。第2节概述四阶表述的内禀变分结构，包括各种诺特对称性、相应的守恒定律以及自然辅助条件。第3节以经典阻尼简谐振子为案例研究，阐释第2节的一般结果。第4节将第2节的结果推广至任意高阶偶数阶表述。最后，第5节简要总结主要结果，并给出一个高阶纳维–斯托克斯方程的候选作用量 [22]。

2 四阶表述的变分结构

$\mathcal{S}^*$ 的一阶变分为

$$\delta \mathcal{S}^* = \int_{t_1}^{t_2} \left(\mathcal{R}_i \delta \ddot{q}_i - \mathcal{R}_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \mathcal{R}_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i \right) dt, \tag{3}$$

分部积分后，我们得到

$$\delta \mathcal{S}^* = \int_{t_1}^{t_2} \left[\ddot{\mathcal{R}}_i + \frac{d}{dt} \left(\mathcal{R}_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \right) - \mathcal{R}_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right] \delta q_i dt + \left[- \left(\mathcal{R}_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} + \dot{\mathcal{R}}_i \right) \delta q_i + \mathcal{R}_i \delta \dot{q}_i \right]_{t_1}^{t_2}. \tag{4}$$

将 $\mathcal{S}^*$ 的最小化视为运动原理时，可得到欧拉-拉格朗日方程

$$\ddot{\mathcal{R}}_i + \dot{\mathcal{R}}_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} + \mathcal{R}_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \right) = 0. \tag{5}$$

这些方程是时间的四阶方程，在数学上等价于原始的二阶方程 $\mathcal{R}_i = 0$ ，且在 q_i、 $\dot{q}_i$、 $\ddot{q}_i$和... ... q_i上具有相同的初始条件。具体而言，如果$q_i(0) = q_i^0$且 $\dot{q}_i(0) = v_i^0$，那么我们要求

$$\ddot{q}_i(0) = f_i(q_j^0, v_j^0, 0) \tag{6}$$

and

$$\dddot{q}_i(0) = \dot{f}_i(q_j^0, v_j^0, 0) \tag{7}$$

以恢复原始二阶问题的解。

2.1 诺特对称性与守恒定律

众所周知，拉格朗日量中的每个连续对称性都对应一个守恒定律 [23], ，而本文的表述也不例外。这里我们将研究由式 (2) 给出的拉格朗日量 L^* 的对称性及其对应的守恒量。

每个坐标 q_i 及其对应的速度 $v_i = \dot{q}_i$ 都有正则共轭动量，这些动量可以直接从式 (4) 中的边界项辨认出来。具体而言，与坐标 q_i 共轭的动量为

$$p_i = -\left(\mathcal{R}_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} + \dot{\mathcal{R}}_i\right), \tag{8}$$

与速度 v_i 共轭的动量为

$$P_i = \mathcal{R}_i. \tag{9}$$

显然，对于实际运动（$\mathcal{R}_i = 0$），这些动量恒等于零，因此是平凡的运动常量。尽管如此，在四阶方程完整解集的背景下，它们仍具有几何意义。当 L^* 在某个广义坐标 q_i下具有对称性时，共轭动量 p_i 对于四阶运动方程的所有解都是守恒的——不仅对真实解如此，对额外解也如此。此外，由于 L^* 并非唯一，广义动量也不是唯一的。从 L^* 中消去全时间导数会得到不同的广义动量，这些动量对于实际运动可能不恒等于零。我们将在第3节回到这一问题。

正如坐标的对称性会导致共轭动量守恒，时间对称性也与适当的哈密顿量守恒相关。与 L^* 相关的哈密顿量通过勒让德变换得到

$$H^* = p_i v_i + P_i \dot{v}_i - L^* = \frac{1}{2} P_i P_i + P_i f_i(q_j, v_j, t) + p_i v_i, \tag{10}$$

其中 $L^* = \frac{1}{2}\mathcal{R}_i\mathcal{R}_i = \frac{1}{2}P_iP_i$和

$$\dot{v}_i = \ddot{q}_i = \mathcal{R}_i + f_i(q_j, v_j, t) = P_i + f_i(q_j, v_j, t) \tag{11}$$

已用坐标、速度和共轭动量表示。显然，这个哈密顿量与系统的总机械能截然不同，尽管它仍然是一个守恒量。事实上，与共轭动量一样， H^* 在实际运动（$\mathcal{R}_i = 0$）中为零，因此是一个平凡的运动常数。尽管如此，在四阶方程完整解集的背景下，它仍具有几何意义。当 L^* 具有时间对称性时， H^* 对四阶运动方程的所有解都是守恒的——不仅对真实解如此，对额外解也是如此。

2.2 哈密顿方程

为得到哈密顿正则方程，我们用 H^*表示 $\mathcal{S}^*$ ，

$$\mathcal{S}^* = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{q}_i + P_i \dot{v}_i - H^*\right) \mathrm{d}t, \tag{12}$$

求出一阶变分，并进行分部积分：

$$\delta\mathcal{S}^* = \int_{t_1}^{t_2} \Bigg[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H^*}{\partial p_i}\right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H^*}{\partial q_i}\right) \delta q_i \tag{13}$$

$$+ \left(\dot{v}_i - \frac{\partial H^*}{\partial P_i}\right) \delta P_i - \left(\dot{P}_i + \frac{\partial H^*}{\partial v_i}\right) \delta v_i \Bigg] \mathrm{d}t. \tag{14}$$

令 $\delta\mathcal{S}^* = 0$ ，得到以下正则方程：

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}, \qquad \dot{v}_i = \frac{\partial H^*}{\partial P_i} \tag{15}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial q_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial v_i}. \tag{16}$$

第一组方程 $\dot{q}_i = \partial H^*/\partial p_i$ 得到 $\dot{q}_i = v_i$。第二组方程 $\dot{v}_i = \partial H^*/\partial P_i$ 得到 (11) 式右侧的表达式，它在数学上等价于 (9) 式。第三组方程 $\dot{p}_i = -\partial H^*/\partial q_i$, 得到欧拉-拉格朗日方程 (5)。第四组也是最后一组方程 $P_i = -\partial H^*/\partial v_i$ 得到 (8) 式。因此，这些正则方程在数学上等价于四阶问题，而四阶问题又在数学上等价于原始的二阶问题。

2.3 哈密顿-雅可比理论

哈密顿形式体系在哈密顿与雅可比的变换理论中达到巅峰，其精髓凝聚于哈密顿-雅可比方程 [1, 2, 21, 24–27]。哈密顿-雅可比方程的优点在于，它将求解（通常数量众多的）广义坐标 $q_i(t)$ 和速度 $v_i(t)$ 的问题，化简为求解一个标量函数的问题：哈密顿主函数 $\mathrm{S}^* = \mathrm{S}^*(q_i, v_j, t)$。该函数充当生成函数，用于将坐标和共轭动量变换为一组新的坐标和共轭动量；在这组新变量下，哈密顿量H^* 恒等于零（也就是说，不仅对实际运动如此，对所有可能的运动也都如此），从而使哈密顿方程变得平凡：新坐标及其共轭动量分别等于各自的初始值。因此，S^* 包含了初值问题的全部解，找到前者便等于解决了后者。

从历史上看，哈密顿-雅可比理论因统一了粒子力学与波动光学 [24] ，并为薛定谔方程 [28, 29]中的量子力学奠定了基础而备受赞誉。迄今为止，哈密顿-雅可比理论仅适用于哈密顿系统。现在，我们将推导出一个甚至对非哈密顿系统也适用的哈密顿-雅可比方程。

为推导哈密顿-雅可比方程，哈密顿主函数 $\mathrm{S}^* = \mathrm{S}^*(q_i, v_j, t)$ 可定义为作用量积分 $\mathcal{S}^*$：该积分是在广义坐标和速度满足欧拉-拉格朗日方程 (5) 的条件下计算的，且时间积分的起点为

任意初始时刻 t_0，终点为当前（可变）时刻 t:

$$\mathrm{S}^*(q_i, v_j, t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{R}}_i\tilde{\mathcal{R}}_i \mathrm{d}t, \tag{17}$$

˜其中， $\mathcal{R}_i$ 表示在满足欧拉-拉格朗日方程(5)的广义坐标和速度下计算得到的残差 $\mathcal{R}_i$ 。

从(17)出发，并像处理作用量 $\mathcal{S}^*$那样对S^* 求一阶变分，我们得到

$$\delta\mathrm{S}^* = \left[p_i\delta q_i + P_i\delta v_i\right]_{t_0}^{t}, \tag{18}$$

这里我们用到了欧拉-拉格朗日方程(5)成立这一事实。但根据链式法则，

$$\delta\mathrm{S}^* = \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial v_i}\delta v_i. \tag{19}$$

因此，我们可以将共轭动量识别为S^*的偏导数:

$$p_i = \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial q_i}, \quad P_i = \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial v_i}. \tag{20}$$

现在从(17)出发并计算全时间导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{S}^*}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{R}}_i\tilde{\mathcal{R}}_i. \tag{21}$$

但同样根据链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{S}^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial v_i}\dot{v}_i + \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial t}. \tag{22}$$

因此，我们有

$$\frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial v_i}\dot{v}_i - \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{R}}_i\tilde{\mathcal{R}}_i + \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial t} = 0. \tag{23}$$

左边除时间偏导数之外的所有项，构成哈密顿量 H^*，其中共轭动量按照（20）替换为相应的偏导数。按此方式在（10）中替换共轭动量后，我们得到哈密顿-雅可比方程

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial v_i}\frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial v_i} + \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial v_i}f_i(q_j, v_j, t) + \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial q_i}v_i + \frac{\partial\mathrm{S}^*}{\partial t} = 0. \tag{24}$$

与经典哈密顿-雅可比方程不同，上述方程对所有机械系统都成立，无论是哈密顿系统还是非哈密顿系统。它将经典力学中的每一个问题都归结为寻找一个标量函数 $\mathrm{S}^*(q_i, v_j, t)$。

2.4 自然辅助条件

变分原理的另一个优美之处在于，除了运动方程之外，它们还能给出自然辅助条件。考察式（4）中的边界项，

$$\left[p_i\delta q_i + P_i\delta\dot{q}_i\right]_{t_1}^{t_2}, \tag{25}$$

自然辅助条件应为：在 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 两处， $p_i = 0$ 和 $P_i = 0$ （或者等价地，在 $t = t_1$ 和 $t = t_2$ 两处， $\mathcal{R}_i = 0$ 和 $\mathcal{R}_i = 0$ ）。请记住，初始条件 $\dot{}$ 使得 $\mathcal{R}_i = 0$ 和 $\mathcal{R}_i = 0$ 在时刻 $t = 0$ 成立，从而保证四阶表述的解与原始二阶表述的解一致。因此，可以说，实际运动是由式（1）给出的作用量 $\mathcal{S}^*$ 所导出的四阶系统的“自然演化”。

2.5 广义刚度和阻尼系数

这里暂且指出，四阶控制方程 (5) 表面上与阻尼振子系统颇为相似。这提示我们可以定义广义刚度

$$\ell_{ji} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \tag{26}$$

以及广义阻尼系数

$$h_{ji} \equiv -\frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}, \tag{27}$$

使 (5) 可写为

$$\ddot{\mathcal{R}}_i - \dot{\mathcal{R}}_j h_{ji} + \mathcal{R}_j \ell_{ji} = 0. \tag{28}$$

作为参考，二阶系统 $\ddot{q}_i + H_{ij}\dot{q}_j + L_{ij}q_j = 0$ 的广义阻尼系数为 $h_{ij} = H_{ij}$ ，广义刚度为 $\ell_{ij} = L_{ij}$。实际上，残差 $\mathcal{R}_i$——对于实际运动，它们恒等于零——在更广泛的背景下，即四阶方程完整解集的范围内，通常呈现出某种反阻尼振荡。

广义阻尼系数的含义足够明确： $h_{ji} = 0$ 当且仅当f_j 不依赖于 $\dot{q}_i$时，此时 $\mathcal{R}_i$ 的控制方程不显式依赖于 $\dot{\mathcal{R}}_j$。如果所有 h_{ji} 都为零，那么该系统就是完全无阻尼的。

广义刚度的含义不那么明确，但更有意思。显然，恰好当 f_j 相对于 $q_i(t)$ 的微小变分保持平稳时， $\ell_{ji} = 0$ 此时， $\mathcal{R}_i$ 的控制方程不显式依赖于 $\mathcal{R}_j$。笔者不知道这种情形有何经典解释，但它或许对实际运动具有某种实际意义。

3 案例研究：经典阻尼简谐振子

经典阻尼简谐振子的残差为

$$\mathcal{R} \equiv \ddot{x} + 2\omega\zeta\dot{x} + \omega^2 x, \tag{29}$$

其中， $\omega > 0$ 是无阻尼固有频率， $\zeta \geq 0$ 是阻尼比。通过设定 $\omega = 1$ 可以实现无量纲化，不过由于这里只有一个坐标，因此无量纲化并非必需。作为参考，广义阻尼系数 (27) 为 $h = 2\omega\zeta$ ，广义刚度 (26) 为 $\ell = \omega^2$。

由式 (2) 给出的拉格朗日量 L^* 为

$$L^* = \frac{1}{2}\left(\ddot{x}^2 + 4\omega\zeta\ddot{x}\dot{x} + 2\omega^2\ddot{x}x + 4\omega^2\zeta^2\dot{x}^2 + 4\omega^3\zeta\dot{x}x + \omega^4 x^2\right), \tag{30}$$

由此得到的运动方程为

$$\dddot{\dddot{x}} + 4\omega^2\left(\frac{1}{2} - \zeta^2\right)\ddot{x} + \omega^4 x = 0, \tag{31}$$

正如 Sanders 先前所得出的结果， [3, 4], 他指出，也可以先对二阶方程求两次导数，再手动消去奇数阶导数（阻尼项），从而得到相同的方程。与 x 相关的共轭动量为

$$p = 4\omega^2\zeta^2\dot{x} + 2\omega^3\zeta x - \dddot{\ddot{x}} - \omega^2\dot{x}, \tag{32}$$

哈密顿量为

$$H^* = \frac{1}{2}\left[\ddot{x}^2 - 4\omega^2\left(\frac{1}{2} - \zeta^2\right)\dot{x}^2 - \omega^4 x^2\right] - \dddot{\ddot{x}}\dot{x}, \tag{33}$$

二者都很容易证明在实际运动中为零。

请注意，拉格朗日量并不唯一。（30）中的两项可以消去，因为它们可表示为全时间导数： $\ddot{x}\dot{x} \sim d/dt\,(\dot{x}^2)$ 、 $\dot{x}x \sim d/dt\,(x^2)$ 。由此得到另一个拉格朗日量,

$$L^*_{(2)} = \frac{1}{2}\left(\ddot{x}^2 + 2\omega^2\ddot{x}x + 4\omega^2\zeta^2\dot{x}^2 + \omega^4 x^2\right), \tag{34}$$

它导出相同的运动方程（31）和相同的哈密顿量（33），但共轭动量不同

$$p_{(2)} = 4\omega^2\zeta^2\dot{x} - \dddot{\ddot{x}} - \omega^2\dot{x}, \tag{35}$$

它与 p 相差 $2\omega^3\zeta x$ ，因此在实际运动中并非恒为零。此外，（30）中的 $\ddot{x}x$ 项可以通过一次分部积分处理，从而得到另一个拉格朗日量

$$L^*_{(3)} = \frac{1}{2}\left[\ddot{x}^2 - 4\omega^2\left(\frac{1}{2} - \zeta^2\right)\dot{x}^2 + \omega^4 x^2\right], \tag{36}$$

这就是 Sanders [3, 4] 所考虑的拉格朗日量形式。它导出相同的运动方程（31）和相同的哈密顿量（33），但共轭动量又有所不同

$$p_{(3)} = -4\omega^2\left(\frac{1}{2} - \zeta^2\right)\dot{x} - \dddot{\ddot{x}}, \tag{37}$$

它与 $p_{(2)}$ 的差为 $\omega^2\dot{x}$ ，对于实际运动也并非恒等于零。拉格朗日量（因而广义动量）的非唯一性是一种众所周知的现象，并不代表该表述存在缺陷。所有这类拉格朗日量构成的族都会导出相同的运动方程（31）。

Sanders and Inman [6] 利用控制方程 (31) 不含奇数阶导数这一事实，快速计算非比例阻尼系统的共振频率。通过将四阶系统写成增广二阶系统，Sanders and Inman [6] 以比先前标准方法 [18, 19]更少的计算量得到了共振频率。这是对四阶表述内禀变分结构的直接应用。事实上，更一般地说，这种内禀变分结构使我们能够将任何非哈密顿系统视为哈密顿系统来处理。

4 向更高阶推广

同一策略可以推广，用于构造经典力学任意高偶数阶表述的变分表述。对二阶表述的残差 $\mathcal{R}_i$ 求 N 阶时间导数，我们得到

$$\mathcal{R}_i^{(N)} = q_i^{(2+N)} - f_i^{(N)}(q_j, \dot{q}_j, t) = 0, \quad i, j = 1, 2, ..., n, \tag{38}$$

其中，括号内的上标表示时间导数的阶数：$(\cdot)^{(N)} \equiv d^N/dt^N(\cdot)$ 和 $N \geq 0$。现在考虑以下作用量：

$$\mathcal{S}_N^*[q_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\mathcal{R}_i^{(N)}\mathcal{R}_i^{(N)} dt. \tag{39}$$

对广义坐标 $q_i(t)$ 取变分，一阶变分为

$$\delta\mathcal{S}_N^* = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{R}_i^{(N)}\delta\mathcal{R}_i^{(N)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{R}_i^{(N)}\delta q_i^{(2+N)} - \mathcal{R}_i^{(N)}\delta f_i^{(N)}\right] dt, \tag{40}$$

对于满足 $\mathcal{R}_i \equiv 0$ 的实际运动，该式显然为零。经过分部积分，

$$\delta\mathcal{S}_N^* = \int_{t_1}^{t_2} \left[(-1)^{2+N}\mathcal{R}_i^{(2N+2)}\delta q_i - \mathcal{R}_i^{(N)}\delta f_i^{(N)}\right] dt. \tag{41}$$

对于足够光滑的 f_i，令任意 δq_i 对应的 $\delta\mathcal{S}_N^* = 0$ 为零所得到的运动方程，在满足 $\mathcal{R}_i \equiv 0$ 的运动情况下，在数学上等价于 $\mathcal{R}_i^{(2N+2)} = 0$。但是，$\mathcal{R}_i^{(2N+2)}$ =0 正是 $(2N + 4)$ 阶运动方程。取 $N = 0$，可得四阶方程；取 $N = 1$，可得六阶方程，依此类推。

此外，显然，对于实际运动，$\mathcal{S}_N^*$ 取得局部极小值，因为

$$\delta^2\mathcal{S}_N^* = \int_{t_1}^{t_2} \delta\mathcal{R}_i^{(N)}\delta\mathcal{R}_i^{(N)} dt \tag{42}$$

严格非负。

我们得出结论：所有高于二阶的经典力学偶数阶表述都具有内禀变分结构，也就是说，即使系统是非哈密顿的，其运动方程仍可由最小作用量原理导出。众所周知，奇数阶方程都不具有变分结构，[21], 因此，四阶是经典方程具有内禀变分结构的最低阶数。

5 总结与结论

我们可以将本文的原创性结果概括如下：

1. 经典力学中所有高于二阶的偶数阶表述，即使对于非哈密顿系统而言，也都内在地具有变分结构。对于 $(2N + 4)$ 阶表述，式 (39) 给出了一个适当的作用量，其中 $\mathcal{R}_i$ 为二阶表述的残差。

2. 四阶表述是具有内在变分结构的最低阶表述。第 2 节推导了各种对称性及其相关的守恒定律。尽管拉格朗日量以及由此得到的广义动量并不唯一，但所有这类拉格朗日量构成的族会给出相同的控制方程 (5)。对于实际运动，哈密顿量 (10) 恒等于零。

3. 四阶表述的自然辅助条件在施加后，会产生与二阶表述一致的运动。因此，可以说实际运动是四阶表述的自然演化。

这些结果的一个直接推论是，通过考虑高阶运动方程，总是可以将非哈密顿系统视为哈密顿系统。例如，高阶纳维–斯托克斯方程 [22] 的一个合适作用量为

$$\mathcal{S}^* = \int \frac{1}{2}\mathcal{R}_i\mathcal{R}_i dx^4, \quad \mathcal{R}_i \equiv \rho\frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} - (\mu+\lambda)\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} - b_i, \tag{43}$$

其中，积分是在流体所占据的时空范围内进行的，$\mathcal{R}_i$ 是二阶纳维–斯托克斯方程 [22], 的残差，此处用密度场 $\rho(x_j, t)$、速度场 $v_i(x_j, t)$、压力场 $p(x_j, t)$、体力场 $b_i(x_j, t)$以及黏度系数μ, λ表示。此类表述还可能有哪些应用，尚待探索。或许可以借助合适作用量 [9]的性质来探讨解的存在性和唯一性。

参考文献

[1] Hamilton, W. R.，1834年。“动力学的一般方法”。皇家学会哲学汇刊，124，页247–308。[2] Hamilton, W. R.，1835年。“关于动力学一般方法的第二篇论文”。皇家学会哲学汇刊，125，页95–144。[3] Sanders, J. W.，2021年。阻尼简谐振子的四阶动力学。arXiv预印本。https://arxiv.org/abs/2109.06034。[4] Sanders, J. W.，2022年。“基于四阶动力学的复刚度阻尼双振子方法”。非线性动力学，109(2)，页285–301。[5] Sanders, J. W.，2023年。“更正：基于四阶动力学的复刚度阻尼双振子方法”。非线性动力学，111，页2959–2960。[6] Sanders, J. W. 和 Inman, D. J.，2023年。“利用双振子快速计算非比例阻尼系统的共振频率”。美国机械工程师学会振动与声学期刊，145(3)，页031008–1–7。[7] Ostrogradsky, M.，1850年。“关于与等周问题相关的微分方程的回忆录”。圣彼得堡科学院回忆录，6，页385–517。[8] VandenBerg, J. B. 和 VanderVorst, R. C. A. M.，2002年。“二阶拉格朗日扭转系统：简单闭特征”。美国数学会汇刊，354，页1393–1420。[9] Kalies, W. 和 VanderVorst, R.，2004年。“二阶拉格朗日量的闭特征”。爱丁堡皇家学会会刊A辑：数学，134，页143–158。

[10] Pais, A. 和 Uhlenbeck, G. E.，1950年。“具有非局域作用量的场论”。《物理评论》，79，页145–165。[11] Bender, C. 和 Mannheim, P. D.，2008年。“四阶导数Pais-Uhlenbeck振子模型的无鬼定理”。《物理评论快报》，100(11)。[12] Smilga, A. V.，2009年。“关于Pais-Uhlenbeck振子动力学的评论”。《对称性、可积性与几何：方法与应用》（SIGMA），5(17)。[13] Mostafazadeh, A.，2010年。“一种可导出稳定且幺正量子系统的Pais-Uhlenbeck振子哈密顿表述”。《物理快报A辑》，375，页93–98。[14] Baleanu, D.、Petras, I.、Asad, J. H. 和 Velasco, M. P.，2012年。“分数阶Pais-Uhlenbeck振子”。《国际理论物理学杂志》，51。[15] Chen, T.-J.、Fasiello, M.、Lim, E. A. 和 Tolley, A. J.，2013年。“带约束的高阶导数理论：驱除奥斯特罗格拉德斯基鬼”。《宇宙学与天体粒子物理学杂志》，2013(2)。[16] Tipler, P. A. 和 Mosca, G.，2007年。《科学家与工程师物理学》。麦克米伦。[17] Mellinger, D. 和 Kumar, V.，2011年。“四旋翼飞行器的最小跃度轨迹生成与控制”。载于2011年IEEE机器人与自动化国际会议，页2520–2525。[18] Foss, K. A.，1956年。《使阻尼线性动力系统运动方程解耦的坐标》。技术报告。[19] Traill-Nash, R. W.，1983年。“具有非经典阻尼的系统动力学中的模态方法”。《地震工程与结构动力学》，9，页153–169。.[20] 高斯，C. F.，1829年。“论力学的一条新的普遍基本定律”。《纯粹与应用数学杂志》，4，页232–235。[21] 兰乔斯，C.，1970年。《力学变分原理》，第4版。多伦多大学出版社。[22] 斯托克斯，G.，1845年。“论运动流体内摩擦理论，以及弹性固体的平衡与运动理论”。《剑桥哲学学会会刊》，8，页287–319。[23] 诺特，E.，1918年。“不变变分问题”。哥廷根科学学会通报：数学与物理学部，1918年，页235–257。[24] Hamilton, W. R.，1833年。“论用特征函数的系数表示光线与行星轨道的一般方法”。《都柏林大学评论与季刊》，1，页795–826。[25] 雅可比，C. G. J.，1837年。“论变分法与微分方程理论”。《纯粹与应用数学杂志》（《纯粹与应用数学杂志》），1837(17)，页68–82。[26] 雅可比，C. G. J.，1842—1843年。《动力学讲义》。1842—1843年柯尼斯堡讲课。[27] 惠特克，E. T.，1904年。《质点与刚体分析动力学论》。剑桥大学出版社。¨薛定谔，E.，1926年。“作为本征值问题的量子化”。《物理学年鉴》（《物理学年鉴》），79，页361–376、489–527、734–756。¨薛定谔，E.，1926年。“作为本征值问题的量子化”。《物理学年鉴》（《物理学年鉴》），81，页109。