广义死亡—出生过程下合作的演化

Chaoqian Wang[1], * 和 Attila Szolnoki[2], †
[1]Department of Computational and Data Sciences,George Mason University, Fairfax, VA 22030, USA[2]Institute of Technical Physics and Materials Science, Centre for Energy Research, P.O. Box 49, H-1525 Budapest, Hungary

根据演化死亡—出生规则，随机选择一名参与者使其死亡，而邻居则按照各自适应度的比例竞争空缺位置。因此，焦点参与者的状态被完全忽略，对策略更新没有任何影响。本文通过引入权重因子来比较焦点参与者与入侵邻居的收益值，重新审视并推广了这一规则。我们借助演化图论，在联合传递图上分析该模型，以探究权重因子可能带来的影响。我们发现，在弱选择强度下，焦点权重总是阻碍合作。令人惊讶的是，结果显示，权重因子存在一个非平凡的临界点，合作成功阈值会从正无穷变为负无穷。一旦焦点权重超过这一临界点，合作便不再可能实现。我们在不同大小的方格晶格上进行蒙特卡洛模拟，证实了理论预测。我们还验证了结论的稳健性：这些结论适用于任意双人囚徒困境、具有任意边权重的扩散图，以及相互作用图与扩散图任意重叠的情形。

arXiv:2301.10205v1 [physics.soc-ph] 24 Jan 2023

I. 引言

演化博弈论是一种广泛使用的框架，用于理解在个体倾向于背叛的情况下，合作如何在自私个体之间涌现 [1]。在演化的不同阶段，生命迈向更高层次时，这种冲突是关键障碍 [2–4]。近几十年来，人们发现了若干机制来解释这一过程 [5]。其中一种是网络互惠，由于它广泛存在于现实情境中，因此引起了大量研究关注 [6–9]。为探究持续交互与有限交互可能带来的后果，人们提出了演化图论 [10, 11], , 并在各种图上研究合作的演化，包括等温图[12], 时变图 [13], 异质图 [14],多层图 [15], 和有向图 [16]。人们普遍认为，结构化种群通常会促进合作 [10, 15, 17, 18], , 但也并非总是如此 [19, 20]。

进化动力学的核心假设是，个体倾向于模仿收益更高的策略。个体对这种差异的总体敏感程度由选择强度刻画。因此，模型可以采用强选择 [17], 中等 [21–25], 或弱选择情形 [10]。一方面，实验室实验表明，人类种群中的选择强度处于中等水平 [26, 27]。另一方面，有人可能认为弱选择假设不太相关，因为它几乎忽略了演化的驱动力。然而，弱选择假设背后的合理性在于，个体适应度受到多种因素影响，而博弈交互的结果只是这些因素之一 [18]。此外，这一假设使计算在解析上变得可行，因此成为理论研究方法颇具吸引力的试验场 [28, 29]。这些计算的一个关键问题是确定“困境强度”的阈值，超过该阈值时合作会受到促进。对于双人博弈 [10]„ 目前已有适用于任意种群结构 [30]的计算结果。更一般地，关于多人博弈中促进合作的解析阈值，也已取得显著成果。对于公共物品博弈[31], , Li 等人 [32] 推导出了随机正则图上促进合作的阈值，而 Su 等人 [20, 33]则推导出了传递图上促进合作的阈值。一些学者还认为，在超图上研究多人博弈是很自然的 [34, 35], , 但这一视角仍有待探索。

选择强度决定个体在考虑替代策略时对更高收益的敏感程度，而参与者是否愿意改变当前策略则是另一个独立因素。研究者从不同角度考察了这一方面，例如策略学习能力 [36–38], 行为惯性 [21, 39–43], 过度自信 [44–46], 以及固执性 [47–49]。从概念上说，这可以与节点的自环 [50, 51] 相关联（但本文并未在图层面考虑自环，而是独立研究焦点权重）。这些概念的共同之处在于，在策略更新中引入焦点个体的权重。当这一权重较高时，个体的惯性／过度自信程度也较高，因此更不愿改变策略。重要的是，选择强度与焦点权重之间存在显著差异：选择强度的影响可能是双向的，较高（较低）的收益会提高（削弱）繁殖活动；而焦点权重对策略更新的影响则是单向的，只会降低其发生概率。

起初，人们或许会认为，为所有个体引入相同的焦

*电子邮箱地址：CqWang814921147@outlook.com
†电子邮箱地址：szolnoki.attila@ek-cer.hu

点权重值似乎是一种与策略无关的改动。因此，它对策略竞争的影响并不明显。事实上，一些先前的研究表明，策略更新中的适度焦点权重能够促进合作 [40, 42, 43]。然而，这些研究采用数值模拟分析了结构化种群，或对混合均匀的种群进行了理论分析。在本研究中，我们利用演化博弈图论中所谓的同祖方法（IBD），对有限结构化种群进行了理论分析 [11, 20]。

我们的首要目标是从分析角度探究焦点权重这一概念对结构化种群中合作演化的影响。从这一角度来看，采用所谓的死亡-繁殖策略更新是合乎逻辑的选择，因为传统上，这一流程完全忽略焦点玩家的状态，可将其视为权重为零的极限情况。在广义情形下，通过引入非零权重，我们可以逐步偏离经典动力学，并揭示修改后的动力学规则所带来的影响。在技术上，我们采用了 Su等人 [20]提出的类似概念，他们在互动过程中考虑了焦点权重。然而，在我们的研究中，焦点权重决定的是策略更新的概率，而非互动所产生的收益值。下文将定义我们的模型，其中引入焦点权重可视为对经典死亡-繁殖动力学规则的扩展。

II. 模型

A. 联合传递图与随机游走

种群结构可由一个互动图 $\mathcal{G}_I$ 和一个扩散图 $\mathcal{G}_R$来描述。二者是联合的，这意味着它们共享同一个节点集 $V = \{1, 2, \ldots, N\}$。每个节点代表一名参与者，种群规模为 N。联合互动图和扩散图都是传递的：对于所有节点 i 和 j，都存在一个同构，将 i 变换为 j [20, 52, 53]。直观而言，各节点对整个网络结构的感知是一致的。常见的传递图包括但不限于环形网络、具有周期性边界条件的格子，以及完全连接的种群。

参与者在交互图 $\mathcal{G}_I$ 上进行博弈，并在扩散图 $\mathcal{G}_R$ 上更新策略。本研究聚焦于策略更新，因此我们假设交互图为无权图，以简化交互图。由于具有传递性，每个节点的度都相同；因此，它们在 $\mathcal{G}_I$ 上都有 k 个邻居。对于给定节点，交互图上的每条边权重均为 $1/k$。相反，我们假设扩散图为加权图。对于节点 i，其在 $\mathcal{G}_R$ 上连接到邻居 j 的每条边都可能有不同的权重，记为 e_{ij}，因此得到 $\sum_{j\in V} e_{ij} = 1, \ \forall i \in V$。此外，我们假设对称性（$e_{ij} = e_{ji}, \ \forall i, \ j \in V$，即本研究中的所有图均为无向图），并排除自环（$e_{ii} = 0, \ \forall i \in V$），这对扩散图和无权交互图均适用。

为了量化博弈中获得的收益值，我们定义联合图上的（n, m）随机游走，其中在 $\mathcal{G}_I$ 上进行 n 步，在 $\mathcal{G}_R$ 上进行 m 步（不要求按顺序进行） [20, 53]。（n, m）随机游走最终回到起始节点的概率记为 $p^{(n,m)}$。（n, m）随机游走最终到达合作参与者的概率记为 $s^{(n,m)}$。（n, m）随机游走终止位置所对应参与者的期望收益记为 $\pi^{(n,m)}$。由于传递性，对于平稳分布中的所有节点，我们可以使用相同的记号 $p^{(n,m)}$、 $s^{(n,m)}$ 和 $\pi^{(n,m)}$ 。接下来，我们定义决定参与者收益值的所用博弈。

B. 在交互图上进行博弈

根据演化协议，我们随机选择一名参与者更新其策略。被选中的焦点玩家与其在交互图上的邻居进行 k 场博弈。本文聚焦于最简单的双人博弈——捐赠博弈 [18]。在每场捐赠博弈中，参与者可以采用两种策略之一：合作（C）或背叛（D）。合作意味着向受赠者捐赠 c，而另一名参与者会获得增加后的收益 b（$b > c$）。另一方面，背叛者不会向伙伴捐赠任何东西。参与者的总收益是其与邻居进行的 k 场博弈的平均值。

借助随机游走的术语，我们可以将以（n, m）随机游走终止位置为焦点的焦点玩家的期望收益写为

$$\pi^{(n,m)} = -cs^{(n,m)} + bs^{(n+1,m)}. \tag{1}$$

这里，第一项是焦点玩家的付出，第二项则是来自互动图上邻居的收益。

C. 在扩散图上更新策略

确定相关参与者的收益值后，焦点玩家会考虑适应度，并按照广义死亡-繁殖规则更新其策略。我们假设参与者 i 的适应度 F_i 按 $F_i = 1 - \delta + \delta\pi_i$ [20, 33] 计算，其中 π_i 是参与者i 的收益， δ 是选择强度。本文假设处于 $\delta \to 0$ 极限时为弱选择。

重要的是，我们提出一个新参数 w （$0 \leq w < 1$），用于衡量焦点玩家在策略更新过程中的权重。比较适应度时，焦点玩家以权重 w 衡量自身适应度，并以权重 $1 - w$ 衡量其他参与者的适应度。直观而言， w 越大，改变策略的动机就越弱。

根据扩展后的动力学规则，策略更新概率不仅取决于邻居的适应度，也取决于焦点玩家的适应度

通过适当的权重因子。更准确地说，焦点玩家 i 以一定概率模仿邻居玩家 j 的策略

$$P(i \leftarrow j) = \frac{(1-w)e_{ij}F_j}{wF_i + (1-w)\sum_{l\in V} e_{il}F_l}, \quad \text{for } j \in V. \tag{2}$$

否则，参与者 i 不会改变其策略。正如我们先前所述，在焦点玩家 i 的状态不起作用的 $w = 0$ 极限下，公式（2）还原为经典的先死亡后繁殖规则。在另一个 $w = 1$ 极限下，焦点玩家保留其原有策略，系统则被困在初始状态中。在这两个极端情况之间，我们可以探究当 $0 < w < 1$时，非零权重值（即参与者不愿改变策略）如何影响结构化种群中合作的演化。

III. 理论分析

A. 合作成功的一般条件

接下来，我们采用前文提到的IBD方法，确定合作者成功扩散的必要条件 [11, 54]。在低突变率极限 $\mu \to 0$ 下，其中 μ 表示突变率，有利于合作而非背叛的条件形式如下 [54]:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \delta}(\mathcal{B}_i - \mathcal{D}_i) \right\rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} > 0, \tag{3}$$

其中，焦点玩家 i是系统中唯一的初始合作方。这里，$\mathcal{B}_i$ 表示玩家 i 繁殖其策略的概率，而 $\mathcal{D}_i$ 表示玩家 i 被取代的概率。此外，$\langle\cdot\rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}}$ 表示在中性漂变下、仅有一名合作方 i时，对稳态分布取平均。

我们的理论分析主要旨在为广义死亡-出生规则下合作成功提供一个解析阈值。这可以通过计算条件 (3) 得出。显然，阈值越低，合作越容易扩散。

此外，我们采用了参考文献 [11], 中的低突变展开，该展开通常适用于传递图。即,

$$s^{(n,m)} - s^{(n,m+1)} = \frac{\mu}{2}(Np^{(n,m)} - 1) + \mathcal{O}(\mu^2), \tag{4}$$

其中，最后一项 $\mathcal{O}(\mu^2)$ 可以忽略。

B. 广义死亡-出生规则的应用

正如我们强调的，在广义死亡-出生规则中，我们通过一个权重因子来考虑焦点玩家的状态；直接计算条件 (3) 时，这一点很重要。不过，我们首先需要澄清以下术语。

参与者 i 的“死亡”过程可以描述如下。选择焦点玩家时，以概率 $1/N$选中参与者 i 。随后，参与者 i 以公式（2）给出的概率采用邻居玩家 j 的策略。或者，参与者 i的“出生”过程如下。以参与者 i 的邻居 j作为焦点玩家的概率为 $1/N$。然后，焦点玩家 j 以公式（2）给出的概率采用参与者 i 的策略。因此，$\mathcal{D}_i$ 和 $\mathcal{B}_i$ 可以写为

$$\mathcal{D}_i = \frac{1}{N}\frac{\sum_{j\in V}(1-w)e_{ij}F_l}{wF_i + (1-w)\sum_{l\in V} e_{il}F_l}, \tag{5a}$$

$$\mathcal{B}_i = \frac{1}{N}\sum_{j\in V}\frac{(1-w)e_{ji}F_i}{wF_j + (1-w)\sum_{l\in V} e_{jl}F_l}. \tag{5b}$$

利用这两项，并考虑到适应度为 $F = 1 - \delta + \delta\pi$，所需的条件（3）可计算如下:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{\partial}{\partial \delta}(\mathcal{B}_i - \mathcal{D}_i) \right\rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} > 0 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1-w}{N}\left(\langle \pi_i \rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} - w\left\langle \sum_{j\in V} e_{ji}\pi_j \right\rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} \right. \\
&\left. -(1-w)\left\langle \sum_{j\in V} e_{ji}\sum_{l\in V} e_{jl}\pi_l \right\rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} \right) \\
&-\frac{1-w}{N}\left(-w\langle \pi_i \rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} + w\left\langle \sum_{l\in V} e_{il}\pi_l \right\rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} \right) > 0 \\
\Leftrightarrow\ &\langle \pi_i \rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} - \frac{2w}{1+w}\left\langle \sum_{j\in V} e_{ij}\pi_j \right\rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} \\
&-\frac{1-w}{1+w}\left\langle \sum_{j,l\in V} e_{ji}e_{jl}\pi_l \right\rangle_{\substack{\delta=0 \\ s_i=C}} > 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

参与者 i 作为随机游走的起始节点，公式（6）可写为

$$\pi^{(0,0)} - \frac{2w}{1+w}\pi^{(0,1)} - \frac{1-w}{1+w}\pi^{(0,2)} > 0, \tag{7}$$

这是条件 (3) 的一种特定形式。为了得到阈值的显式形式，我们首先需要按以下方式变换式 (4):

$$\begin{aligned}
&s^{(n,m)} - \frac{2w}{1+w}s^{(n,m+1)} - \frac{1-w}{1+w}s^{(n,m+2)} \\
&= \frac{2w}{1+w}\left(s^{(n,m)} - s^{(n,m+1)} \right)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1-w}{1+w}\left(s^{(n,m)}-s^{(n,m+1)}+s^{(n,m+1)}-s^{(n,m+2)}\right)$$
$$=\frac{\mu}{2}\left(Np^{(n,m)}+\frac{1-w}{1+w}Np^{(n,m+1)}-\frac{2}{1+w}\right)$$
$$+\frac{2}{1+w}\mathcal{O}(\mu^2), \tag{8}$$

其中，与 $\mathcal{O}(\mu^2)$ 成正比的最后一项可以忽略。下文中，我们采用捐赠博弈的简化收益结构。

C. 捐赠博弈的理论阈值

为了得到捐赠博弈所需的阈值，我们从式 (7) 出发，利用式 (1) 将 $\pi^{(n,m)}$ 转换为 $s^{(n,m)}$，并利用式 (8) 将 $s^{(n,m)}$ 替换为 $p^{(n,m)}$。也就是说，

$$\begin{aligned}
&\pi^{(0,0)}-\frac{2w}{1+w}\pi^{(0,1)}-\frac{1-w}{1+w}\pi^{(0,2)}>0\\
\Leftrightarrow\ &\left(-cs^{(0,0)}+bs^{(1,0)}\right)-\frac{2w}{1+w}\left(-cs^{(0,1)}+bs^{(1,1)}\right)\\
&-\frac{1-w}{1+w}\left(-cs^{(0,2)}+bs^{(1,2)}\right)>0\\
\Leftrightarrow\ &-c\left(s^{(0,0)}-\frac{2w}{1+w}s^{(0,1)}-\frac{1-w}{1+w}s^{(0,2)}\right)\\
&+b\left(s^{(1,0)}-\frac{2w}{1+w}s^{(1,1)}-\frac{1-w}{1+w}s^{(1,2)}\right)>0\\
\Leftrightarrow\ &-c\left(Np^{(0,0)}+\frac{1-w}{1+w}Np^{(0,1)}-\frac{2}{1+w}\right)\\
&+b\left(Np^{(1,0)}+\frac{1-w}{1+w}Np^{(1,1)}-\frac{2}{1+w}\right)>0.
\end{aligned} \tag{9}$$

显然，$p^{(0,0)}=1$，因为没有移动时个体会停留在原来的位置。同样，$p^{(1,0)}=p^{(0,1)}=0$，因为不允许自环，所以个体无法在一步之内离开初始节点后再返回。至于 $p^{(1,1)}$ 的计算，则取决于具体情况。两张图以任意方式重叠的一般情形将在第 V 节讨论。这里，我们考虑一种常见情形：某个节点在交互图和扩散图中拥有相同的邻居。为了刻画局部结构，我们计算所谓的辛普森度 [55]。如前所述，在交互图中有 k 个邻居可供选择，且每个邻居被选中的概率相同。这种情况下，这些邻居同时也是扩散图中的邻居。节点 i 与一个邻居 l 之间发生一步移动的概率为 e_{li}。因此，$p^{(1,1)}=\sum_{l\in V}1/k\times e_{li}=1/k$。根据这些 $p^{(n,m)}$ 值，我们可以计算阈值，得到：

$$\frac{b}{c}>\frac{N-2+Nw}{N-2k-Nw}k\equiv\left(\frac{b}{c}\right)^*, \tag{10}$$

其中，右侧“>”中的表达式记为 $(b/c)^*$，并且当 $(b/c)^*>0$ 时，“>”成立。这里，

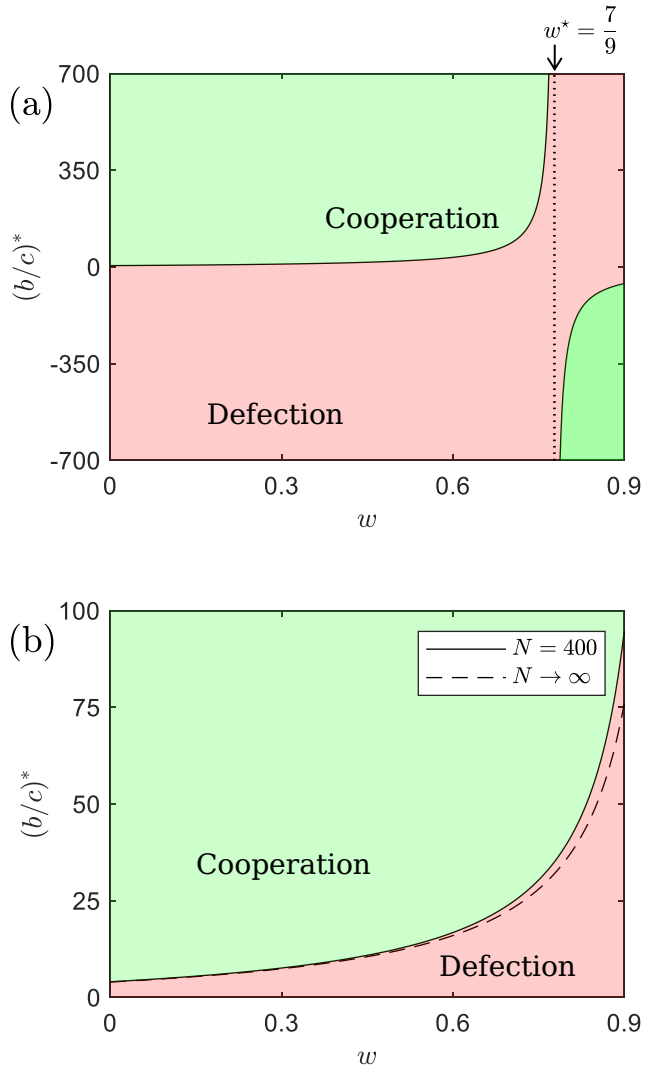

图 1：由式 (10) 描述的合作成功 (b/c) 阈值随 w 的变化，其中 $k=4$。图 (a) 展示了一个包含 $N=36$ 名参与者的系统。阈值在 $w^\star=1-2k/N=7/9$ 处有一个临界点。如果 $w<w^\star$，则 $(b/c)^*>0$，且当 $b/c>(b/c)^*$ 时，合作更有利。如果 $w>w^\star$，则 $(b/c)^*<0$；因此，合作永远无法实现。图 (b) 展示了 $N=400$ 和 $N\to\infty$ 的情况。当 $N=400$ 时，我们有 $w^\star=0.98$。在 $w<0.9$ 的范围内，若 $b/c>(b/c)^*$，则合作更有利。这些曲线彼此接近，表明由 $N=400$ 名参与者组成的种群，对于该近似而言已足够大。

$(b/c)^*$ 的值确定了合作受到青睐时的阈值。当 $(b/c)^*<0$ 时，式 (10) 的结果应为 $b/c<(b/c)^*$，这意味着合作无法实现，因为 $b/c>0$ 始终成立。

为了更深入地了解阈值如何取决于权重因子，我们考虑具有冯·诺依曼邻域的方格晶格这一特定拓扑结构 $(k=4)$。根据公式 (10) 计算得到的 $(b/c)^*$ 对 w 的依赖关系如图1所示。图1(a)展示了

种群规模为 $N = 36$的情况。这里，我们可以在b/c的（*） $w = w^\star$处观察到一个临界点。当$w < w^\star$时，如果 $b/c >$ （b/c）*，演化将有利于合作。如图1(a)所示，阈值（b/c）* 随 w增大而上升，这意味着焦点权重越大，越难促成合作。当 $w > w^\star$时，若 $b/c <$（b/c）*，合作便会受到青睐；这意味着由于捐赠博弈的 $b > c > 0$ 约束，合作无法实现。在这些参数下，临界点位于 $w^\star = 7/9$，如图1(a)中的竖直虚线所示。

当（b/c）* 的值从正无穷变为负无穷时， $w^\star$ 临界点的位置可表示为以下形式：

$$w^\star = 1 - \frac{2k}{N}. \tag{11}$$

该公式表明，当$k < N/2$时， $w^\star < 1$ 始终成立。在这种情况下，如果合作在经典死亡—出生过程中受到促进（即在 $w = 0$ 处，$(b/c)^* > 0$ ），就始终存在一个临界点。反之，当 $k > N/2$时，我们有 $w^\star < 0$；无论对于传统的（$w = 0$）更新规则，还是广义的（$w >$0）更新规则，合作都无法实现。

接下来，我们采用足够大的系统规模 $N = 400$，如图1(b) 所示。此时临界点位于$w^\star = 0.98$，非常接近 $w = 1$ 极限情形。这实际上意味着，对于几乎所有 w 值，都可以实现合作。该系统规模对应的实线表明，$(b/c)^*$ 阈值会随着 w 的增加而单调上升。因此，增加焦点权重，或增强参与者维持原有策略的意愿，都会使合作更难实现。

作为比较，我们还给出了 $N \to \infty$ 极限下的阈值。$N \to \infty$ 的 $(b/c)^*$ 阈值的解析公式可写为

$$\left(\frac{b}{c}\right)^*_{N\to\infty} = \frac{1+w}{1-w}k, \tag{12}$$

这是著名的 $b/c > k$ 规则[18]的推广。图 1(b) 中的虚线表示该函数。我们可以看到，对于几乎所有 w 值，$N = 400$ 和 $N \to \infty$ 的曲线都彼此接近，这表明 $N = 400$ 足以被视为弱选择极限下的大种群（尤其是当 w 较小时），特别是当 w 较小时。例如，当 $w < 0.6$ 时，差异小于 5%。

IV. 数值模拟

为支持我们的解析预测，我们还采用具有周期性边界条件的 $L \times L$方格晶格拓扑进行了蒙特卡洛（MC）模拟。相应地，种群总规模为 $N = L^2$ 名参与者。按照标准模拟方案，我们随机将每个个体的策略分配为合作或背叛；在启动演化时，这使合作型个体所占比例为 $\rho_C \approx 0.5$ 。

在一个基本步骤中，我们随机选取一个焦点个体，让其与最近的四个邻居进行捐赠博弈。根据弱选择方法，将由此产生的收益值取平均，以确定该个体的适应度。邻居的收益和适应度值也以相同方式计算。随后，焦点参与者按照公式（2）中的扩展死亡—出生规则所确定的概率，采用某个邻居的策略。完成一个蒙特卡洛步时，我们将上述过程重复 N 次，从而确保平均而言每个个体都被选取一次。

一次独立运行最多包含 4×10^5 个完整的蒙特卡洛步。由于在弱选择强度下，系统很容易到达完全合作（$\rho_C = 1$）或完全背叛（$\rho_C = 0$）的吸收态，因此可以认为这一弛豫时间足够长 [30]。如果系统在上述时间段内未达到固定状态，我们就将最后一个时间步的合作个体占比 ρ_C 作为结果。为获得可靠的统计数据，我们进行 $10^4 - 10^6$ 次独立运行（次数取决于系统规模），并对结果取平均。不同权重因子和选择强度下得到的 $\langle\rho_C\rangle$ 数值汇总于图2中。

图2(a)展示了在 6×6 格点上得到的结果，其中采用了 $w = 0$、0.4、0.6和0.8这些权重因子。通过增大 b 来改变收益成本比，同时保持 $c = 1$ 不变。正如预期，增大 b/c会使较小权重因子下的合作个体占比上升。当 $\langle\rho_C\rangle$超过0.5时，我们将此处识别为临界（b/c）* 值。作为比较，我们还用竖直虚线标出了根据式（10）得到的（b/c）* 阈值。这些值分别为$b/c^* = 4.85$、14.23和34.75，对应于 $w = 0$、0.4和0.6。为完整起见，我们还研究了 $w = 0.8$情形；对于该系统规模而言，这一情形超出了 $w^\star$ 临界点。我们的理论预测此处为（b/c）$^* = -314$ 。事实上，正如(a)图插图所示，随着 b/c增大，$\langle\rho_C\rangle$ 会降低；只有当 $b/c <$ （b/c）*时，演化才有利于合作。可以看出，在相同参数值下，有利于合作的参数区域与图1(a)所示区域一致。

根据我们的理论，当 20×20 系统规模与大种群极限相当时，临界点非常接近 $w = 1$，且对于所有提及的 w 值，系统行为在定性上相似。为验证这一点，我们还给出了该系统规模下的结果。如图2(b)所示，我们的观测结果证实，对于所有研究的 w 值，系统行为都相似，并且 ρ_C 总是随着 b/c的增大而增大。对于 $w = 0$，0.4、0.6，以及 $w = 0.8$，理论阈值分别为（b/c）$^* = 4.06$、9.62、16.79和39.89。竖直虚线标出了这些值；在我们的数值模拟中，当 $\langle\rho_C\rangle$ 超过0.5时，这些值与 b/c 值相符。

我们能够将理论上的（b/c）* 值

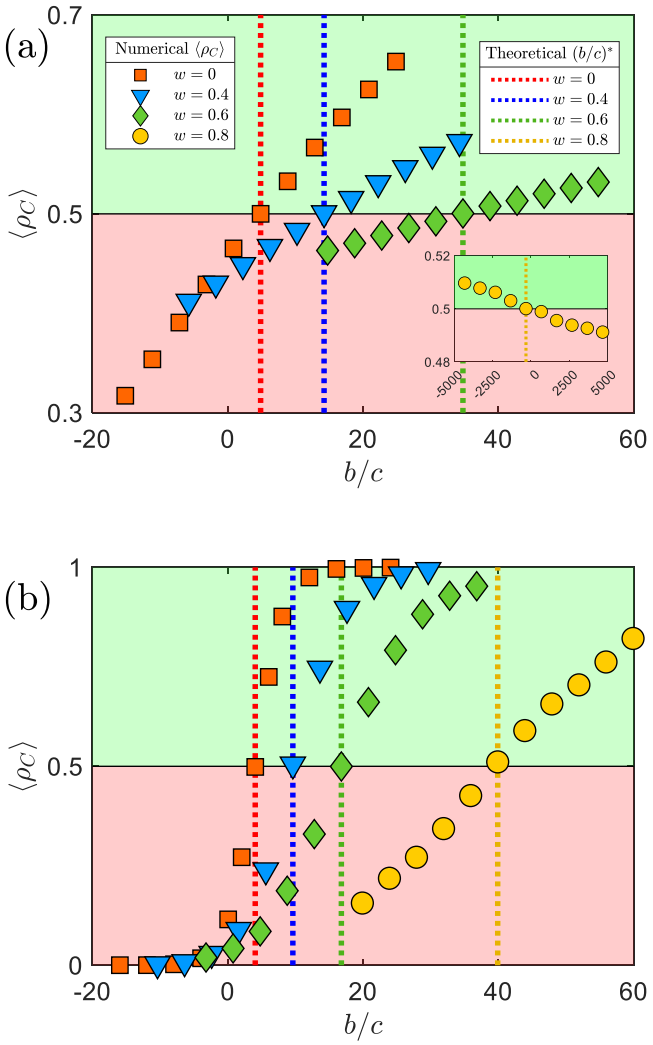

图 2：在保持 $c = 1$ 固定的情况下改变 b/c 控制参数，对不同尺寸方格晶格进行的蒙特卡罗模拟。图中绘出了不同焦点权重下合作个体所占的比例，具体数值见图例。面板 (a) 展示了 $L = 6$ 线性尺寸下的结果，平均值取自 10^6 次独立运行。面板 (b) 展示了针对 $L = 20$得到的结果，平均值取自 10^4 次独立运行。两个面板均采用 $\delta = 0.01$ 选择强度，但面板 (a) 的插图展示的是采用 $\delta = 0.0001$得到的结果。竖直虚线表示合作成功的理论阈值位置。数值结果证实了所有权重值下的解析预测。

与 ρ_C 超过 0.5 的位置联系起来，原因如下。众所周知，在中性漂变的 $\delta = 0$ 极限下，系统最终会进入某个均匀吸收态，而达到完全合作状态的概率取决于初始合作个体的N_C/N 比例 [2, 56, 57]。例如，在我们的理论分析中，我们分析了从 $N_C = 1$ 个合作型个体开始的情况，这意味着当 $\delta = 0$时，系统以概率 $1/N$ 达到完全合作；因此，合作成功的符号是

当 $\langle\rho_C\rangle > 1/N$时。同时，系统的性质（是否有利于合作）独立于初始状态。因此，一旦推导出合作成功的条件，该条件便表明初始有 N_C 个合作个体时最终达到完全合作的概率为 $\langle\rho_C\rangle > N_C/N$ [58]。在我们的数值模拟中，我们随机且 $N_C/N \approx 0.5$地为每个个体分配策略；因此，$\langle\rho_C\rangle > 0.5$ 是演化有利于合作的直接标志。

V. 扩展到不同的图和博弈

在此之前，我们假设交互图与扩散图重合，其中采用冯·诺依曼邻域的方格晶格提供了一种可检验的拓扑结构。接下来，我们放宽这一严格限制，以检验观察结果的稳健性，并了解焦点权重如何改变系统行为。此外，我们还考虑了其他博弈中的模型。

首先，我们展示模型对不同图的稳健性。我们仍保留基本假设：交互图无权重、不包含自环，且联合图是传递的。这样，计算 $p^{(0,0)}$ =1, $p^{(1,0)} = 0$, $p^{(0,1)} = 0$ 保持不变。然而，确定 $p^{(1,1)}$仍是一项尚未解决的任务。因此，方程（9）的通解为

$$\left(\frac{b}{c}\right)^* = \frac{(1+w)N-2}{(1-w)Np^{(1,1)}-2}, \tag{13}$$

其中 $0 \le p^{(1,1)} \le 1$，因为 $p^{(1,1)}$ 表示一个概率。临界点 $w^\star$ 的一般形式为

$$w^\star = 1 - \frac{2}{Np^{(1,1)}}. \tag{14}$$

根据式（13）和式（14），当 $p^{(1,1)} > 2/N$ 时，临界点 $w^\star$ ex- ists 位于 0 和 1 之间。在这种情况下，阈值 $(b/c)^*$ 随着 w in $0 \le w < w^\star$ 增大，并在 $w = w^\star$ 处从正无穷变为负无穷。当 $p^{(1,1)} < 2/N$ 时，我们有 $w^\star < 0$，合作永远不会受到青睐。总之，在给定 $0 \le p^{(1,1)} \le 1$ 的情况下，该陈述成立，这验证了结论对于具有任意边权重的扩散图的稳健性。这种稳健性对于以任意方式重叠的交互图和扩散图也成立。

其次，我们展示了结论对不同博弈的稳健性。我们在任意双人囚徒困境中考察这些结论，该困境由四个参数 R、S、T 和 P 描述，其中 $T > R > P > S$。与一般记号一致，合作方在另一位参与者合作时的收益为 R，在另一位参与者背叛时的收益为 S。此外，背叛方在另一位参与者合作时的收益为 T，在另一位参与者也背叛时的收益为 P。特别地，对于捐赠博弈，我们有 $R = b - c$、$S = -c$、$T = b$、$P = 0$。

根据 Tarnita 等人 [59], 提出的结构系数定理，有利于合作演化的条件是 $\sigma R + S > T + \sigma P$，或者

$$\frac{R-P}{T-S} > \frac{1}{\sigma}, \tag{15}$$

其中， σ 是与收益值无关的结构系数。将我们在捐赠博弈中得到的条件 (13) 代入，即可确定结构系数 σ,

$$\sigma = \frac{(b/c)^* + 1}{(b/c)^* - 1} = \frac{1 + p^{(1,1)} + w(1 - p^{(1,1)}) - \frac{4}{N}}{1 - p^{(1,1)} + w(1 + p^{(1,1)})}. \tag{16}$$

当 $p^{(1,1)} > 1/(N-1)$ 时， $1/\sigma$ 随 w增加而增大，且增加 w不利于合作。根据排序 $T > R > P > S$，我们有 $(R-P)/(T-S) < 1$，这意味着如果 $1/\sigma > 1$，合作就永远不会受到青睐。为确保 $1/\sigma < 1$，我们有 $p^{(1,1)} > 2/(N(1-w)) > 2/N > 1/(N-1)$。总之，在任意双人囚徒困境中，合作要么随着 w 增加而变得不利，要么在任何 w下都无法实现。

VI. 结论

在演化博弈动力学中，人们经常假设个体倾向于学习能够带来更高适应度的策略。然而，受认知偏差影响，个体在学习策略时对自身适应度的感知可能会有所偏差。本文将死亡—繁殖学习过程加以推广，纳入焦点权重，从而使死亡—繁殖协议能够在一定程度上考虑焦点玩家的地位。更具体地说，较高的权重会额外提高焦点玩家适应度的重要性，从而降低合作和背叛双方更换策略的频率。尽管这一扩展对策略本身保持中立，我们发现，使用焦点权重实际上会在演化过程中助长背叛、阻碍合作。这一点可由以下事实支持：

合作成功的阈值 $(b/c)^*$ 会随着焦点权重 w 的增大而提高。

我们的理论分析揭示了权重因子 $w^\star = 1 - 2k/N$的一个非平凡临界点；超过该临界点后，$(b/c)^*$会从正无穷变为负无穷，合作也将无法实现。重要的是，当 $k < N/2$时，有限种群中始终存在这样的临界点。为了寻找一个简单且可检验的例子，我们考察了具有周期性边界条件的方格晶格拓扑，在该拓扑上可以进行蒙特卡罗模拟。我们的数值计算证实了理论预测，并凸显了结果的有效性。

此外，我们从两个方面验证了观察结果的稳健性。首先，对于边权重任意的扩散图，以及交互图与扩散图以任意方式重叠的情况，我们的结论依然成立。其次，在任意双人囚徒困境中，结论也不会改变。

最后，我们在弱选择极限下得到的结果，与针对中等或强选择强度下空间种群的观察结果相矛盾。已有研究普遍报告称，如果引入某种行为惯性，帮助参与者更长时间地维持其策略，那么这种对微观动力学的修改就能显著促进合作[37, 39, 46, 60–64]。这一现象可以这样解释：在结构化种群中，合作与背叛的传播速度存在显著差异。合作个体推进缓慢，因为它们需要建立一个保护域；而背叛则能迅速入侵，因为它可以受益于与相似参与者为伴。引入惯性后，两种情况下的传播都会减慢，但减慢幅度有所偏向：背叛者传播受到的影响更大，从而形成了一种有利于合作个体的机制。这些不同的结论表明，强选择与弱选择极限下的演化结果并不一定具有可比性 [8, 65–67]。

A.S. 获得了国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）K142948 号项目的资助。

[1] K. Sigmund, *The calculus of selfishness* （普林斯顿大学出版社, 2010 年）。[2] M. A. Nowak、A. Sasaki、C. Taylor 和 D. F udenberg, 《自然》（伦敦）**428**，646（2004 年）。[3] J. Maynard Smith 和 E. Szathm ´ *The Major Transi-* ary, （W. *tions in Evolution* 1995 生津，）[4] M. A. Nowak, H. Freeman & Co. *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life* 2006 （哈佛大学出版社，）。[5] M. A. Nowak, 《科学》**314**，1560（2006 年）。[6] G. Szab´o 和 G. F´ath, 《物理学报告》**446**，97（2007 年）。[7] M. Perc、J. J. Jordan、D. G. Rand、Z. Wang、S. Boc- caletti 和 A. Szolnoki, 《物理学报告》**687**，1（2017 年）。[8] C. P. Roca、J. A. Cuesta 和 A. S´anchez, 《生命物理学评论》**6**，208（2009 年）。

[9] M. Perc, J. G´omez-Gardenes, A. Szolnoki, L. M. Flor´ıa, and Y. Moreno, J. R. Soc. Interface **10**, 20120997 (2013). [10] E. Lieberman, C. Hauert, and M. A. Nowak, 《自然》（伦敦）**433**, 312 (2005). [11] B. Allen and M. A. Nowak, EMS Surv. Math. Sci. **1**, 113 (2014). [12] B. Allen, G. Lippner, and M. A. Nowak, Nat. Commun. **10**, 5107 (2019). [13] A. Li, L. Zhou, Q. Su, S. P. Cornelius, Y.-Y. Liu, L. Wang, and S. A. Levin, Nat. Commun. **11**, 2259 (2020). [14] A. McAvoy, B. Allen, and M. A. Nowak, 《自然·人类行为》**4**, 819 (2020). [15] Q. Su, A. McAvoy, Y. Mori, and J. B. Plotkin, 《自然·人类

行为. 6, 338 (2022). [16] Q. Su, B. Allen, and J. B. Plotkin, 美国国家科学院院刊 119 (2022). [17] M. A. Nowak and R. M. May, 《自然》（伦敦）359, 826 (1992). [18] H. Ohtsuki, C. Hauert, E. Lieberman, and M. A. Nowak, 《自然》（伦敦）441, 502 (2006). [19] C. Hauert and M. Doebeli, 《自然》（伦敦）428, 643 (2004). [20] Q. Su, A. Li, L. Wang, and H. Eugene Stanley, 伦敦皇家学会会刊B辑 286, 20190041 (2019). [21] G. Szab´o and C. T˝oke, Phys. Rev. E 58, 69 (1998). [22] G. Szab´o and C. Hauert, 《物理评论快报》89, 118101 (2002). [23] C. Wang, Q. Pan, X. Ju, and M. He, 《混沌、孤子与分形》146, 110871 (2021). [24] C. Wang, C. Huang, Q. Pan, and M. He, 《混沌、孤子与分形》158, 112092 (2022). [25] C. Wang and C. Huang, Physica A 606, 128097 (2022). [26] D. G. Rand, C. Tarnita, H. Ohtsuki, and M. Nowak, 美国国家科学院院刊 110, 2581 (2013). [27] I. Zisis, S. D. Guida, T. A. Han, G. Kirchsteiger, and T. Lenaerts, Sci. Rep. 5, 18076 (2015). [28] H. Ohtsuki and M. A. Nowak, J. Theor. Biol. 243, 86 (2006). [29] G. Wild and A. Traulsen, J. Theor. Biol. 247, 382 (2007). [30] B. Allen, G. Lippner, Y.-T. Chen, B. Fotouhi, N. Mo- meni, S.-T. Yau, and M. A. Nowak, 《自然》（伦敦）544, 227 (2017). [31] O. P. Hauser, C. Hilbe, K. Chatterjee, and M. A. Nowak, 《自然》（伦敦）572, 524 (2019). [32] A. Li, B. Wu, and L. Wang, Sci. Rep. 4, 5536 (2014). [33] Q. Su, L. Wang, and H. E. Stanley, 《新物理学杂志》20, 103030 2018( ). [34] G. Burgio, J. T. Matamalas, S. G´omez, and A. Arenas, 《熵》22, 744 (2020). [35] U. Alvarez-Rodriguez, F. Battiston, G. F. de Arruda, Y. Moreno, M. Perc, and V. Latora, 《自然·人类行为》5, 586 (2021). [36] A. Szolnoki and G. Szab´o, 《欧洲物理快报》77, 30004 (2007). [37] X. Chen and L. Wang, 《国际现代物理学杂志C辑》19, 1377 (2008). [38] A. Szolnoki and X. Chen, Chaos Soliton. Fract. 138, 109935 2020( ). [39] A. Szolnoki, M. Perc, G. Szab´o, and H.-U. Stark, Phys. Rev. E 80, 021901 (2009). [40] R.-R. Liu, Z. Rong, C.-X. Jia, and B.-H. Wang, 《欧洲物理快报》91, 20002 2010( ). [41] Y. Zhang, F. Fu, T. Wu, G. Xie, and L. Wang, Phys. Rev. E 84, 066103 (2011).

[42] W.-B. Du, X.-B. Cao, R.-R. Liu 和 Z. Wang，Commun. Theor. Phys. 58, 451 (2012)。[43] S. Chang、Z. Zhang、Y. Wu 和 Y. Xie，Physica A 490, 419 2018( )。[44] D. D. Johnson 和 J. H. Fowler，《自然》（伦敦）477, 317 2011( )。[45] K. Li、A. Szolnoki、R. Cong 和 L. Wang，Sci. Rep. 6, 21104 2016( )。[46] A. Szolnoki 和 X. Chen，Phys. Rev. E 98, 022309 (2018)。[47] T. Cimpeanu、F. C. Santos、L. M. Pereira、T. Lenaerts 和 T. A. Han，Sci. Rep. 12, 1723 (2022)。[48] A. Szolnoki、M. Perc 和 M. Mobilia，Phys. Rev. E 89, 042802 2014( )。[49] T. Cimpeanu、C. Perret 和 T. A. Han，Knowledge- Based Systems 233, 107545 (2021)。[50] J. Tkadlec、A. Pavlogiannis、K. Chatterjee 和 M. A. Nowak，Nat. Commun. 12, 4009 (2021)。[51] J. Tkadlec、A. Pavlogiannis、K. Chatterjee 和 M. A. No wak，PLoS Comput. Biol. 16, e1007494 (2020)。[52] P. D. Taylor、T. Day 和 G. Wild，《自然》（伦敦）447, 469 2007( )。[53] F. D´ebarre、C. Hauert 和 M. Doebeli，Nat. Commun. 5, 3409 (2014)。[54] M. A. Nowak、C. E. Tarnita 和 E. O. Wilson，《自然》（伦敦）466, 1057 (2010)。[55] B. Allen、J. Gore 和 M. A. Nowak，Elife 2, e01169 (2013)。[56] J. T. Cox 和 D. Griffeath，Ann. Probab. 11, 876 (1983)。[57] J. T. Cox 和 D. Griffeath，Ann. Probab. 14, 347 (1986)。[58] Y.-T. Chen，Ann. Appl. Probab. 23, 637 (2013)。[59] C. E. Tarnita、H. Ohtsuki、T. Antal、F. Fu 和 M. A. Nowak，J. Theor. Biol. 259, 570 (2009)。[60] Y. Liu、L. Zhang、X. Chen、L. Ren 和 L. Wang，Physica A 392, 3640 (2013)。[61] Y. Zhang、F. Fu、G. Xie 和 L. Wang，Phys. Rev. E 84, 066103 2011( )。[62] D. Jia、J. Jin、C. Du 和 L. Shi，Physica A 509, 817 (2018)。[63] A. Szolnoki 和 X. Chen，Chaos Soliton. Fract. 130, 109447 2020( )。[64] S. Chang、Z. Zhang、Y. Wu 和 Y. Xie, Physica A 490, 419 2018( )。[65] F. Fu、L. Wang、M. A. Nowak 和 C. Hauert，Phys. Rev. E 79, 046707 (2009)。[66] C. Li、B. Zhang、R. Cressman 和 Y. Tao，PLoS ONE 8, e66560 (2013)。[67] W. Zhong、J. Liu 和 L. Zhang, BioSystems 111, 102 (2013)。