刚体运动欧拉方程的精确解及其在卫星消旋中的应用

Christian Peterson*

科罗拉多大学科罗拉多斯普林斯分校物理系，科罗拉多州科罗拉多斯普林斯，邮编 *80918*

（日期：11/21/2022）

利用雅可比椭圆函数，求得了力矩作用下任意非对称刚体运动欧拉方程的精确解，并确定了椭圆函数振幅及参数所满足的微分方程。随后将该解应用于具有任意初始转速的卫星消旋问题，结果显示数值解与解析解一致。接着，利用四元数旋转矩阵将体固连坐标系中的解变换至惯性坐标系，并在图示及 Mathematica 笔记本中的动画中展示其运动；该笔记本已公开发布于 Wolfram 社区。

arXiv:2301.10220v1 [physics.class-ph] 21 Nov 2022

I. 引言

质心在固连于刚体的坐标系中的转动由欧拉运动方程描述。这组三个常微分方程相互耦合且具有非线性，决定了刚体沿主轴方向的角速度动力学。由于刚体运动在航天器和飞机姿态控制中的实际应用价值，它一直受到众多研究者的关注。若干研究探讨了力矩作用下欧拉方程在特殊情形中的解析解，例如假设刚体对称或近似对称，或假设其中一个角速度接近于零[1–4]。Longuski 和 Tsiotras [5] 给出了受力矩作用的一般刚体的一阶近似解。Panayotounakos 等人 [6] 通过将欧拉方程化为标准形式的第二类阿贝尔微分方程，给出了非对称刚体的完整解析解。

本文假设角速度具有雅可比椭圆函数形式，给出了欧拉方程的解析解。已知，无力矩运动的欧拉方程具有雅可比椭圆函数解，其中离心率和振荡幅值为常数[7–9]。在本研究中，这些参数的

* cpeter16@uccs.edu

雅可比椭圆函数均假设为时间的函数。通过待定系数法推导出椭圆函数参数的微分方程，并通过施加特殊形式的力矩精确求解这些方程。结果表明，解析解与欧拉方程的数值积分结果一致。随后将该解应用于卫星去旋，该卫星最初绕其主轴以任意初始条件旋转。通过由四元数组成的旋转矩阵，将其从体固连坐标系变换到惯性坐标系。随后给出主轴、角动量和力矩，以展示旋转卫星的演化过程。

II. 体固连坐标系中的刚体动力学

体固连坐标系中描述转动的欧拉方程为:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_1}\omega_2\omega_3 + \frac{\tau_1}{I_1}, \tag{1}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)}{I_2}\omega_3\omega_1 + \frac{\tau_2}{I_2}, \tag{2}$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)}{I_3}\omega_1\omega_2 + \frac{\tau_3}{I_3}. \tag{3}$$

在此坐标系中，惯性张量为对角矩阵，其主惯性矩为常数 I_1、 I_2、 I_3 ；沿各相应轴的角速度分别记为 ω_1、ω_2 和 ω_3。本文旨在利用雅可比椭圆函数，求解受到时变力矩 τ_1、 τ_2 和 τ_3 作用的非对称刚体在体固连坐标系中的时变角速度。无需失去一般性，可将转动惯量排列为:

$$I_1 < I_2 < I_3.$$

对正的约化力矩系数作如下代换,

$$\mu_1 = \frac{I_3 - I_2}{I_1},$$
$$\mu_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2},$$
$$\mu_3 = \frac{I_2 - I_1}{I_3},$$

从而可将欧拉方程改写为，

$$\dot{\omega}_1 = -\mu_1\omega_2\omega_3 + \frac{\tau_1}{I_1}, \tag{4}$$

$$\dot{\omega}_2 = \mu_2\omega_3\omega_1 + \frac{\tau_2}{I_2}, \tag{5}$$

$$\dot{\omega}_3 = -\mu_3\omega_1\omega_2 + \frac{\tau_3}{I_3}. \tag{6}$$

雅可比椭圆函数 $\mathrm{sn}(u,k)$、$\mathrm{cn}(u,k)$ 和 $\mathrm{dn}(u,k)$ 可像三角函数一样，通过椭圆上的比值来定义，其中自变量 u 类似于角变量，而新自变量 k 表示椭圆的离心率，其取值可为任意 $0 \le k \le 1$。$\mathrm{sn}(u,k)$ 和 $\mathrm{cn}(u,k)$ 的周期为 $4K(k)$，而 $\mathrm{dn}(u,k)$ 的周期为 $2K(k)$，其中 $K(k)$ 是第一类完全椭圆积分。当定义椭圆函数的参考椭圆的离心率 k 趋于零时，$K(k)$ 趋近于 $\pi/2$；此时，函数 $\mathrm{sn}(u,k)$ 和 $\mathrm{cn}(u,k)$ 分别变为正弦和余弦，而 $\mathrm{dn}(u,k)$ 在极限情况下则等于 1。椭圆函数关于 u 的导数为，

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}(u,k) = \mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k), \tag{7}$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{cn}(u,k) = -\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k), \tag{8}$$

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{dn}(u,k) = -k^2\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k), \tag{9}$$

按照 Dixon 的 [10] 约定，关于模数的导数为，

$$\frac{d}{dk}\,\mathrm{sn}(u,k) = \frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}^2(u,k) + \frac{u}{k}\,\mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k) - \frac{\mathrm{E}(u,k)}{kk'^2}\,\mathrm{cn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k). \tag{10}$$

$$\frac{d}{dk}\,\mathrm{cn}(u,k) = -\frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k) - \frac{u}{k}\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k) + \frac{\mathrm{E}(u,k)}{kk'^2}\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k), \tag{11}$$

$$\frac{d}{dk}\,\mathrm{dn}(u,k) = -\frac{k}{k'^2}\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k) - ku\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k) + \frac{k\,\mathrm{E}(u,k)}{k'^2}\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k), \tag{12}$$

其中，$\mathrm{E}(u,k)$ 是第二类不完全椭圆积分，且 $k'^2 = 1 - k^2$。假设存在椭圆函数解，我们设，

$$\omega_1 = A_1(t)\,\mathrm{dn}(u(t),k(t)), \tag{13}$$

$$\omega_2 = A_2(t)\,\mathrm{sn}(u(t),k(t)), \tag{14}$$

$$\omega_3 = A_3(t)\,\mathrm{cn}(u(t),k(t)), \tag{15}$$

其中，角速度振幅 $A_i(t)$、$u(t)$ 和 $k(t)$ 通常都可能随时间变化。交换 $\mathrm{cn}(u,\ k)$ 和 $\mathrm{dn}(u,\ k)$ 函数后，还可得到另一种解；合适的

选择取决于 $A_3(t)$ 和 $A_1(t)$ 的比值。对假设的解求时间导数，可得：

$$\dot{\omega}_1 = -\frac{A_1 k}{A_3 A_2}\left(\frac{k'^2(k\dot{u}+\dot{k}u)-E\dot{k}}{k'^2}\right)\omega_3\omega_2 + \dot{A}_1\,\mathrm{dn}(u,k) - \frac{A_1 k\dot{k}}{k'^2}\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k), \tag{16}$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{A_2}{A_1 A_3}\left(\frac{k'^2(k\dot{u}+\dot{k}u)-E\dot{k}}{kk'^2}\right)\omega_1\omega_3 + \dot{A}_2\,\mathrm{sn}(u,k) + \frac{A_2 k\dot{k}}{k'^2}\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}^2(u,k), \tag{17}$$

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{A_3}{A_2 A_1}\left(\frac{k'^2(k\dot{u}+\dot{k}u)-E\dot{k}}{kk'^2}\right)\omega_2\omega_1 + \dot{A}_3\,\mathrm{cn}(u,k) - \frac{A_3 k\dot{k}}{k'^2}\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k). \tag{18}$$

然后，将方程 (16)、(17) 和 (18) 中的系数分别与方程 (4)、(5) 和 (6) 中的系数相等，可得以下六个方程，

$$\mu_1 = \frac{A_1 k}{A_3 A_2}\left(\frac{k'^2(k\dot{u}+\dot{k}u)-E\dot{k}}{k'^2}\right), \tag{19}$$

$$\mu_2 = \frac{A_2}{A_1 A_3}\left(\frac{k'^2(k\dot{u}+\dot{k}u)-E\dot{k}}{kk'^2}\right), \tag{20}$$

$$\mu_3 = \frac{A_3}{A_2 A_1}\left(\frac{k'^2(k\dot{u}+\dot{k}u)-E\dot{k}}{kk'^2}\right), \tag{21}$$

$$\frac{\tau_1}{I_1} = \dot{A}_1\,\mathrm{dn}(u,k) - \frac{A_1 k\dot{k}}{k'^2}\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k), \tag{22}$$

$$\frac{\tau_2}{I_2} = \dot{A}_2\,\mathrm{sn}(u,k) + \frac{A_2 k\dot{k}}{k'^2}\,\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{cn}^2(u,k), \tag{23}$$

$$\frac{\tau_3}{I_1} = \dot{A}_3\,\mathrm{cn}(u,k) - \frac{A_3 k\dot{k}}{k'^2}\,\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{cn}(u,k). \tag{24}$$

将方程 (21) 乘以方程 (20) 的倒数，可得，

$$A_2(t) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}}A_3(t). \tag{25}$$

同理，将方程 (19) 除以方程 (21)，可得 $k(t)$ 为，

$$k(t) = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_3}}\frac{A_3(t)}{A_1(t)}. \tag{26}$$

只要 $k(t) < 1$，此解就适用。如果 $A_3(t)$ 大于$\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}}A_1(t)$，那么解中的 $\mathrm{cn}(u,\ k)$ 和 $\mathrm{dn}(u,\ k)$ 函数将互换，并且在整个推导过程中，指标 1 和 3 也将互换。方程 (19)、(20) 或 (21) 中的任意一个与方程 (25) 结合，都可得到 $u(t)$ 的微分方程，

$$\dot{u}(t) = \sqrt{\mu_3\mu_2}A_1(t) + \frac{\dot{k}}{k}\left(\frac{\mathrm{E}(u,k)}{k'^2} - u(t)\right), \tag{27}$$

该 $A_3(t)$ 的微分方程可由方程 (23)、(24) 和 (25) 得出，结果为 ，

$$\dot{A}_3(t) = \frac{\tau_3}{I_3}\,\mathrm{cn}(u,k) + \sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_2}}\frac{\tau_2}{I_2}\,\mathrm{sn}(u,k). \tag{28}$$

注意到,

$$\dot{k}(t) = k(t)\left(\frac{\dot{A}_3(t)}{A_3(t)} - \frac{\dot{A}_1(t)}{A_1(t)}\right),$$

并利用恒等式,

$$\mathrm{sn}^2(u,k) + \mathrm{cn}^2(u,k) = 1$$

我们利用式（22）求得关于 $A_1(t)$ 的微分方程,

$$\dot{A}_1(t) = \frac{\tau_1 k'^2}{I_3\,\mathrm{dn}(u,k)(1-k^2\,\mathrm{cn}^2(u,k))} + \dot{A}_3(t)\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_3}}\frac{k\,\mathrm{sn}^2(u,k)}{1-k^2\,\mathrm{cn}^2(u,k)}. \tag{29}$$

为求解式（28）和式（29），我们假设力矩具有以下形式,

$$\tau_1 = \frac{f_1(t)I_1\,\mathrm{dn}(u,k)(1-k^2\,\mathrm{cn}^2(u,k))}{k'^2} - f_3(t)\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_3}}\frac{I_1\,\mathrm{dn}(u,k)k\,\mathrm{sn}^2(u,k)}{k'^2}, \tag{30}$$

$$\tau_2 = f_3(t)\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_3}}I_2\,\mathrm{sn}(u,k), \tag{31}$$

$$\tau_3 = f_3(t)I_3\,\mathrm{cn}(u,\ k), \tag{32}$$

其中， $f_1(t)$ 和 $f_3(t)$ 是任意可积函数。因此，我们有:

$$A_1(t) = \int_0^t f_1(t)dt, \tag{33}$$

$$A_3(t) = \int_0^t f_2(t)dt. \tag{34}$$

如果 $f_1(t)$ 和 $f_3(t)$ a re 的选取满足 $k=0$，则公式（27）化简为一个可分离变量方程，从而得到 ，

$$u(t) = \sqrt{\mu_3\mu_2}\int_0^t A_1(t)dt, \tag{35}$$

并且公式（22）化简后，绕 1轴的力矩为:

$$\tau_1 = f_1(t)I_1\,\mathrm{dn}(u,k) \tag{36}$$

通过这种方式，我们可以选择欧拉方程的期望解，进而完整确定实现该解所需的固定坐标系力矩。当所有力矩均为零时， A_1、 A_2和 k 为常数，而 $u(t)$呈线性变化，这对应于已知的刚体运动无力矩解。

III. 卫星消旋的应用

第 II 节给出的解析解用于对图 1 所示卫星进行消旋，其初始角速度绕三个主轴方向均不为零。本节末尾提供了 Wolfram Cloud 上包含该仿真的 Mathematica 笔记本链接。该卫星的主转动惯量为：

$$I_1 = 0.359903 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$
$$I_2 = 0.462824 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$
$$I_3 = 0.549196 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

它们是通过结合长方体和圆柱体的转动惯量，并应用施泰纳平行轴定理计算得出的。

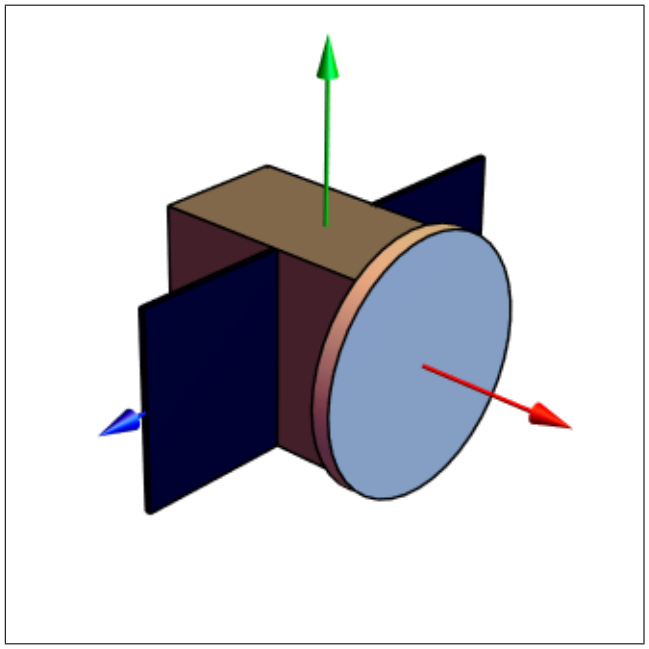


图 1：卫星模型。红色、绿色和蓝色箭头分别对应具有主转动惯量 I1、I2、I3 的轴。

我们选择高斯指数衰减的振幅函数 $A_1(t)$和 $A_3(t)$,

$$A_1(t) = A_{10}\, e^{-zt^2},$$
$$A_3(t) = A_{30}\, e^{-zt^2},$$

施加于卫星的初始条件选为 $A_{30} = 1$、 $k = .35$ 和 $A_{10} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_3}}\, A_{30}$。方程 (13)、(14) 和 (15) 给出的角速度绘于图 2、

图 3 和图 4 中，每幅图里的红线表示这些角速度。图中的黑色虚线表示由方程 (31)、(32) 和 (36) 给出的力矩所得的欧拉方程数值解。给出的力矩绘于图 5、图 6 和图 7。

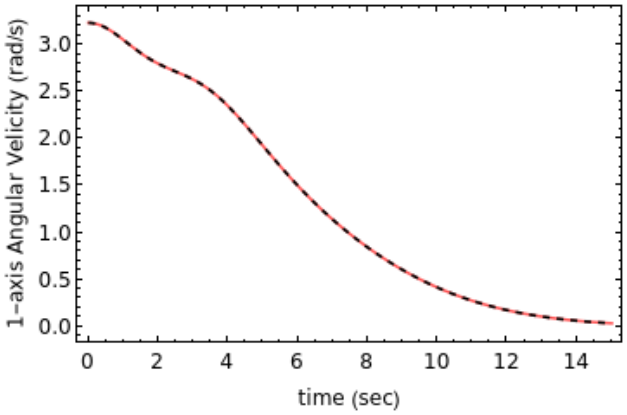


图2：沿1轴的角速度。红线为解析解，黑色虚线为欧拉方程的数值解

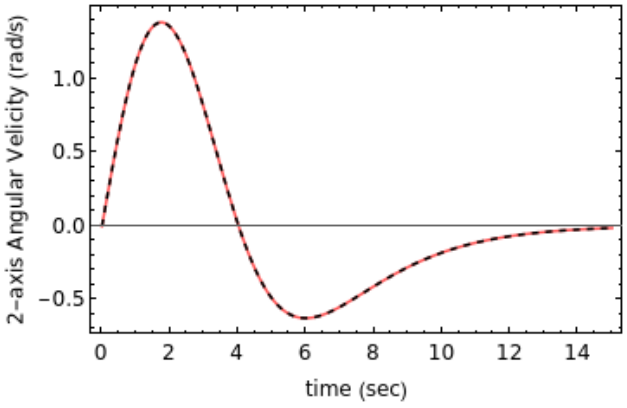


图3：沿2轴的角速度。红线为解析解，黑色虚线为欧拉方程的数值解

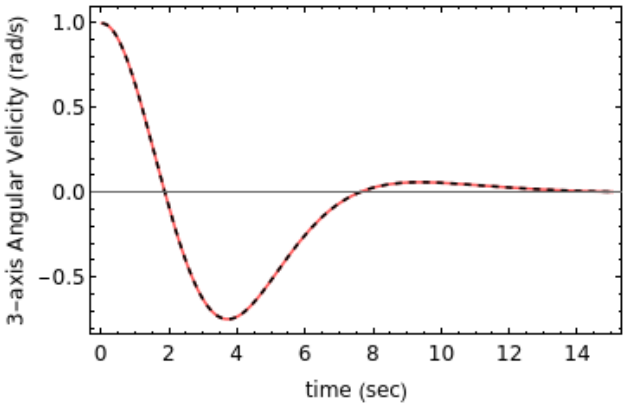


图4：沿3轴的角速度。红线为解析解，黑色虚线为欧拉方程的数值解

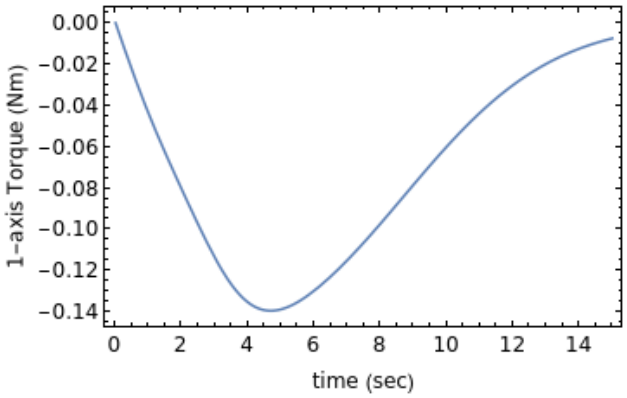


图5：沿1轴的力矩。

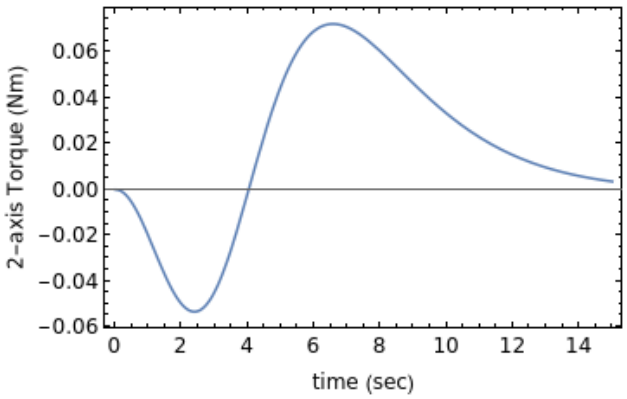


图6：沿2轴的力矩。

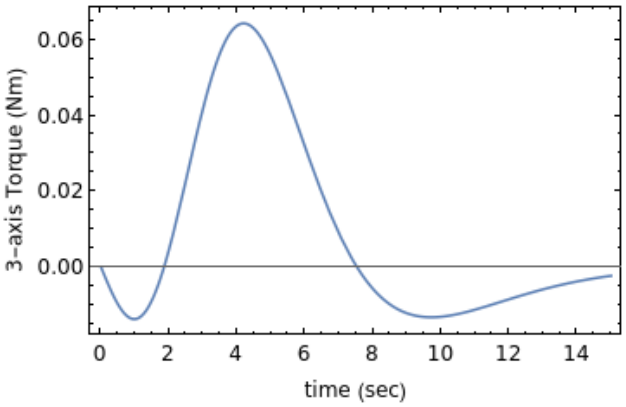


图 7：沿 3 轴的力矩。

按照 Coutsias 等人的详细论述，使用四元数将体固连坐标系中的解转换到惯性坐标系[11]。通过数值方法求解四元数 q_0、 q_1、 q_2 和 q_3 ，所用方程为：

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

旋转矩阵 Q 根据四元数可表示为：

$$Q = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2) & q_1q_2-q_0q_3 & q_1q_3+q_0q_2 \\ q_1q_2+q_0q_3 & \frac{1}{2}(q_0^2-q_1^2+q_2^2-q_3^2) & q_2q_3-q_0q_1 \\ q_1q_3-q_0q_2 & q_2q_3+q_0q_1 & \frac{1}{2}(q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

体固连坐标系中的向量 $\vec{x}$ 通过 $\vec{X} = Q^T \cdot \vec{x}$转换到惯性坐标系。利用旋转矩阵，将主轴、力矩向量和角动量向量转换到图 8、9 和 10 所示的惯性坐标系中。为便于绘图，力矩向量和角动量向量均已归一化，并分别用橙色和黑色箭头表示。

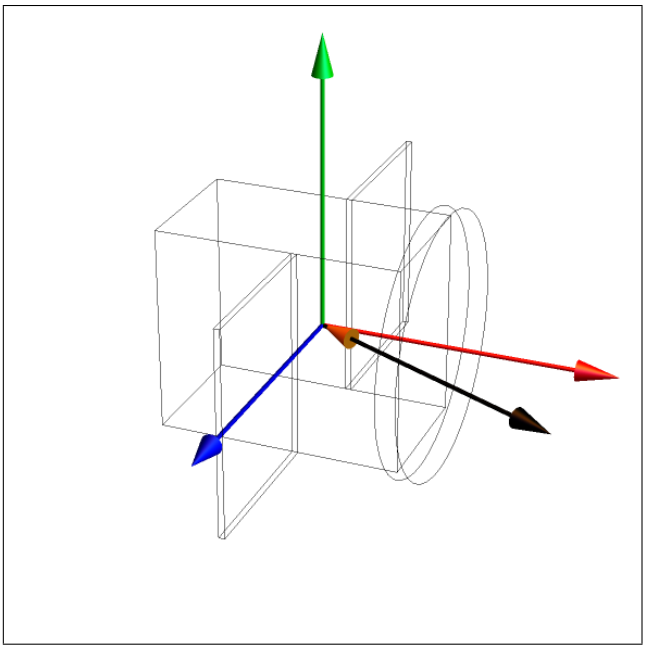


图 8：t = 0s 时的去旋转卫星

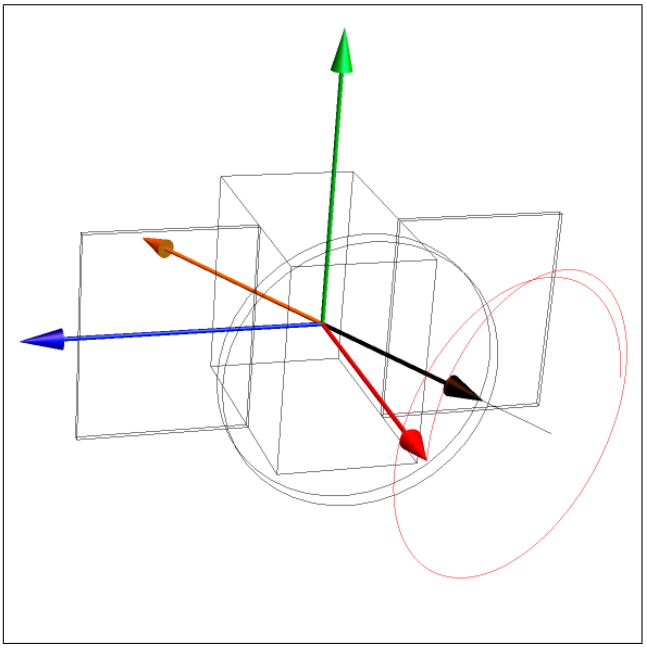


图 9：t = 4s 时的去旋转卫星

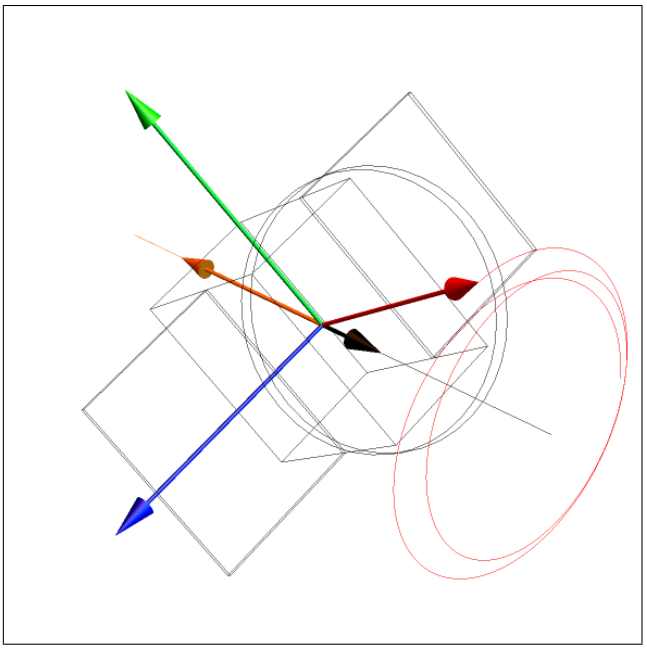


图10：t = 8s 时的去旋转卫星

用于绘制和制作解的动画的 Mathimatica 笔记本已在 Wolfram 社区上公开发布。可通过以下网址找到：https://community.wolfram.com/ groups/-/m/t/2701672

IV. 讨论

本文使用雅可比椭圆函数重新表述并给出了带力矩的欧拉方程的解析解。对于一般力矩，方程 (27)、(28) 和 (29) 中的 $u(t)$、 $A_1(t)$ 和 $A_3(t)$ 似乎无法积分；然而，采用方程 (30)–(32) 中所示形式的力矩后，可以确定 $A_1(t)$ 和 A_3 。随后，我们通过将模数限制为常数，求出了 $u(t)$。该解应用于卫星去旋，这或许有助于设计更高效的航天器姿态控制系统。使用 Mathematica 的 NDSolve 函数进行的分析表明，当模数较小时， $u(t)$、 $A_1(t)$ 和 $A_3(t)$ 方程的数值解与欧拉方程的数值解一致。然而，随着模数增大，这些解会逐渐偏离，这为进一步研究雅可比椭圆函数解提供了方向。

---

[1] J. Longuski，发表于轨道动力学会议 （1980年），第1642页。

[2] J. A. Oldenburg 和 S. G. Tragesser, 《制导、控制与动力学杂志》**25**, 591 (2002).[3] S. L. McNair 和 S. Tragesser, 《宇航科学杂志》**64**, 1 (2017).[4] V. T. Coppola, 《非线性动力学》**14**, 295 (1997).[5] P. Tsiotras 和 J. M. Longuski, (1996).[6] D. E. Panayotounakos、I. Rizou 和 E.E. Theotokoglou, 《应用数学与计算》**217**, 8534 (2011).[7] L. Landau, E. Lifshitz, 《力学》(Addison-Wesley 出版公司, 1960).[8] E. Whittaker,《质点与刚体分析动力学论》(Cambridge, University Press, 1917).[9] C. Peterson 和 W. Schwalm, 《美国物理学杂志》**89**, 349 (2021).[10] A. Dixon,《椭圆函数的基本性质》及例题(Wentworth 出版社, 2016).[11] E. A. Coutsias 和 L. Romero, 《四元数及其在刚体动力学中的应用》(桑迪亚国家实验室, 2004).