arXiv:2301.10298v1 [math.DG] 24 Jan 2023

鞍焦点奇点的分类

I. K. Kozlov* 和 A. A. Oshemkov†

摘要

本文提出了一种算法，用于在半局部等价意义下对具有三个自由度的可积哈密顿系统的非退化鞍焦点奇点进行拓扑分类。特别地，我们证明，任何鞍焦型奇点都可以表示为一种几乎直积，其中作用群为循环群。基于所构造的算法，我们得到了复杂度为1、2和3的鞍焦型奇点的完整列表，也就是说，这些奇点的叶分别包含一个、两个或三个秩 0 奇点。此前，L. M. Lerman 也描述了复杂度为1的两种鞍焦型奇点。

关键词和短语：可积系统，刘维尔叶状结构，鞍焦奇点。参考文献：18篇。

1 引言

我们研究奇异叶邻域内可积哈密顿系统奇点的拓扑性质。更具体地说，我们考察具有三个自由度的系统中的鞍焦奇点，并将其视为半局部刘维尔等价类（即奇异叶邻域内刘维尔叶状结构的叶状同胚类）。特别是，本文提出了一种算法，用于构造复杂度为 k 的鞍焦奇点的完整列表，也就是说，叶上具有 k 个秩 0 奇点（见第 3 节）。基于这一算法，我们对复杂度为 ≤ 3 的鞍焦型奇点进行了分类（见定理 4、5、6）。

关于可积系统和非退化奇点的所有必要信息可见 [3] 或 [4]。这里我们仅简要给出必要的定义。

具有 n 个自由度的可积哈密顿系统 是一个 $2n$ 维辛流形（M^{2n}，ω），其上定义了 n 个函数 f_1、……、f_n，使得哈密顿向量场 sgrad f_i 是完备的、两两对易的，并且几乎处处在 M^{2n} 上线性无关。映射 $\Phi = (f_1, \ldots\ldots, f_n) : M \to \mathbb{R}^n$ 称为可积哈密顿系统（M^{2n}，ω，f_1，……，f_n）的动量映射 。

*无所属单位，电子邮件：ikozlov90@gmail.com

†力学与数学系，莫斯科国立大学，俄罗斯莫斯科，119991，电子邮件：a@oshemkov.ru

请注意，哈密顿系统的定义通常包含一个哈密顿量 ——从集合 f_1，……， f_n 中选出的某个特定函数 H（或 f_i 的函数），其哈密顿流在相空间 M^{2n} 上定义了一个动力系统。对我们而言，哈密顿量的选择并不重要，因为我们关注的不是动力学，而只是由第一积分 f_1，……， f_n生成的叶状结构的拓扑，其定义如下。

定义1。 将可积哈密顿系统的相空间分解为 $\Phi^{-1}(y)$ 的连通分支（即第一积分 $f_1, \ldots,$ f_n的公共等值面的连通分支），称为该系统对应的刘维尔叶状结构 。

定义2。 若存在一个同胚 $\Psi\colon U_1 \to U_2$，将 U_1 上的刘维尔叶状结构的每个叶映射到 U_2上的一个叶，则称定义在 U_1 和 U_2 上的两个可积哈密顿系统拓扑等价 （或刘维尔等价）。

通常，刘维尔叶状结构并非局部平凡的，而且具有奇点。本文研究所有奇点均为非退化奇点的刘维尔叶状结构。这些奇点是可积系统的一般奇点。事实上，它们是“莫尔斯奇点”的多维辛类比。我们只给出非退化奇点的一条特征性质（定理1），并可将其作为定义（精确定义见 [3] 或 [4]）。

最简单的“基本”非退化奇点有三种类型，分别由以下刘维尔叶状结构给出：

- E 是由函数 p^2+q^2 在 $(\mathbb{R}^2, dp\wedge dq)$ 中零点邻域定义的刘维尔叶状结构（椭圆型）；
- H 是由函数 pq 在 $(\mathbb{R}^2, dp\wedge dq)$ 中零点邻域定义的刘维尔叶状结构（双曲型）；
- F 是由一对对易函数 $p_1q_1+p_2q_2$ 和 $p_1q_2-q_1p_2$ 在 $(\mathbb{R}^4, dp\wedge dq)$ 中零点邻域定义的刘维尔叶状结构（焦点-焦点型）。

若刘维尔叶状结构由函数 $f_1, \ldots, f_n$给出，则其奇点是指满足由 sgrad f_i 生成的子空间维数小于 n的点。奇点的秩是该子空间的维数。特别地，这些刘维尔叶状结构的奇点 E、 H 和 F 的秩均为 0。

定理1 (Eliasson；参见 [3,5])。 在秩为 r 的非退化奇点邻域内，刘维尔叶状结构局部叶保持辛同构于由 k_e 份叶状结构 E、 k_h 份叶状结构 H、 k_f 份叶状结构 F 以及平凡叶状结构 $\mathbb{R}^r\times\mathbb{R}^r$ 组成的直积。

三元组 $(k_e,\ k_h,\ k_f)$ 称为非退化奇点的类型。显然，奇点的类型是唯一确定的。

李乌维尔叶状结构的一个奇异性 是奇异叶上的动量映射之芽，即包含奇点的叶。若其所有奇点均为非退化的，则称该奇异性为非退化的（在

特别是，若其类型分别为椭圆型、双曲型或焦点型，则称为椭圆型、双曲型或焦点型奇异性）。

奇异性的秩是其上各点秩的最小值。对于本文所研究的几乎直积型奇异性（见定义3），其所有最小秩点的类型都相同。此类型（k_e， k_h， k_f）称为奇异性的类型。

设 W_1，.....， W_l 分别是无奇点的叶状结构或最简单的奇异性之一：椭圆型、双曲型或焦点-焦点型。它们的直积 $W_1 \times \cdots \times W_l$ 具有自然的刘维尔叶状结构，并带有一个奇异性。此奇异性称为直积奇异性，而与其刘维尔等价的奇异性称为直积型奇异性。

定义3。奇异性的几乎直积是一个直积奇异性 $W_1 \times \cdots \times W_l$ 在有限群 G 的作用 ψ 下所得的商，该作用满足以下条件：

1. 作用 ψ 在 $W_1 \times \cdots \times W_l$ 上的作用是按分量进行的，即

$$\psi(g)(x_1, \ldots, x_l) = (\psi_1(g)(x_1), \ldots, \psi_l(g)(x_l)),$$

其中， ψ_1、.....、 ψ_l 是群 G 在奇点 W_1、.....、 W_l 上的作用，

2. 在每个因子 ψ_i（g）上： $W_i \to W_i$ 的作用是一个保留定义刘维尔叶状结构的函数（尤其是保留该叶状结构本身）的辛同胚，

3. 作用 ψ 在 $W_1 \times \cdots \times W_l$ 上是自由的。

与几乎直积（$W_1 \times \cdots \times W_l$）$/G$ 刘维尔等价的奇异性称为几乎直积型奇异性。

注1。 下文我们只考虑几乎直积型奇异性，因为 *N. T. Zung* 在 *[17]* 中证明，任何满足不可分裂条件的非退化奇异性（这意味着，对于奇异叶上每个秩最小的奇点，其局部分岔图与整个奇异性的分岔图一致）都是几乎直积型奇异性。力学和物理学中的可积系统里出现的大多数奇异性都是不可分裂的（见 *[3]*）。然而，不满足不可分裂条件的奇异性会出现在具有旋转不变性的系统中（例如，见 *[19]* 以及其中引用的参考文献）。此外，还可以构造“人为”的“可分裂”奇异性示例（见 *[4]*）。

注意，*Zung* 定理本质上是拓扑的，即李乌维尔等价的奇点几乎直积未必叶向辛同胚。由于本文只在李乌维尔等价的意义下考虑奇点，因此几乎直积型奇点有时简称为几乎直积。

许多研究从不同角度探讨了可积哈密顿系统（或刘维尔叶状结构）的奇点：研究特定

可积系统、奇点不变量（拓扑的、光滑的、辛的），以及某种固定类型的奇点分类。由于非退化奇点的局部分类由 Eliasson 定理（定理1）描述，因此本文所说的奇点分类通常指其半局部分类，即奇异叶邻域内刘维尔叶状结构的叶状同胚意义下的分类。

还要注意，对于具有两个自由度的可积哈密顿系统，其等能流形上的刘维尔叶状结构（尤其是其中的奇点）的“整体”性质已有一套成熟的理论加以描述。该理论由 A. T. Fomenko 的相关研究发展而来（见 [6, 7]）。其详细论述见于著作 [3]。

下面列出关于从半局部角度对非退化秩0奇点进行分类的主要结果。

- 秩 0 的 (1, 0, 0) 型和 (0, 1,0) 型奇点广为人知。 [3] 对其性质进行了详细探究（另见 [2] 中以原子术语描述这些奇点的内容，以及 [14] 中以 f-图描述的内容）。特别地，与极小极大奇点相对应的椭圆型 2-原子唯一，而其余的 2-原子均为鞍型。例如，图 1 和图 2 以示意图形式展示了复杂度为 1 和 2 的所有 2-原子及其标准记号。
- L. M. Lerman、Ya. L. Umansky [10], A. V. Bolsinov [1], V. S. Matveev [12] 已对鞍-鞍型奇点（即类型为 (0，2，0) 且秩为 0 的奇点）给出了完整列表并进行了研究。结果表明，对于复杂度 1 和 2，分别存在 4 个和 39 个拓扑不同的鞍-鞍奇点。
- 纯鞍情形下的完整答案，即类型为 (0，n，0) 且秩为 0 的奇点的完整答案，由 A.A. Oshemkov [15]获得。例如，对于复杂度 1，类型为 (0，3，0) 且秩为 0 的奇点共有 32 个（见 [16]）。
- A.M. Izosimov [8]完成了任意复杂度下类型为 (0，0，m) 且秩为 0 的奇点的分类（即纯焦点情形下的分类）。
- 复杂度为 1 的鞍焦型奇点由 L. M. Lerman 描述（见 [11]）。

本文将研究鞍焦型（即类型为 (0,1,1)）且秩为 0 的奇点。更准确地说（根据注 1），我们将研究几乎直积型的奇点（$\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$）$/G$，其中 $\mathcal{V}_m$ 是某个复杂度为 m 的鞍型2-原子，而 $\mathcal{F}_n$ 是某个复杂度为 n 的焦点奇点。按照 [17], 的说法，如果 $g \in G$ 的任意（非恒等映射）元素都在乘积 $\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$ 的每个分量上非平凡地作用，则称几乎直积为鞍焦奇点的极小模型 。通过将每个因子除以在另一个因子上平凡作用的子群，可以将任意几乎直积化为其极小模型。

在 N. T. Zung 的文章 [17] 中指出，几乎直积型奇异性的极小模型是唯一的。一般来说，这并不成立。

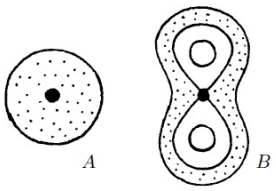

图1：复杂度为1的原子

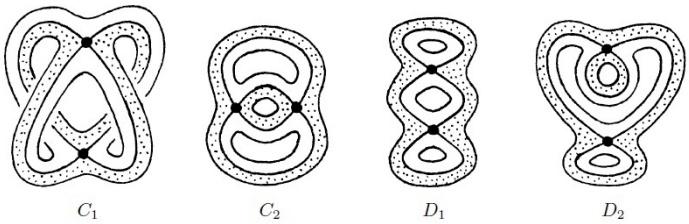

图2：复杂度为2的原子

例 2. 考虑 2-原子 B, D_1 （见图 *1* 和图 *2*）以及直线 $W_{\text{reg}} \approx S^1 \times \mathbb{R}$ 上的正则李乌维尔叶状结构。与这些 2-原子对应的 3-原子 $B \times S^1$和 $(D_1 \times S^1)/\mathbb{Z}_2$是刘维尔等价的（见 *[3]*）。$B \times W_{\text{reg}}$和 $(D_1 \times W_{\text{reg}})/\mathbb{Z}_2$ 的奇点也刘维尔等价，尽管它们是极小模型。

关于极小模型唯一性的论断对于某些奇点类别成立（例如，对于秩 0 的椭圆型或鞍点奇点，见 [15]）。然而，正如下例所示，对于鞍焦奇点，极小模型也不唯一。

例3. 群 $\mathbb{Z}_2$ 沿周期积分作用于$\mathcal{F}_1$，使其平移半个周期的极小模型 $B \times \mathcal{F}_1$ 和 $(D_1 \times \mathcal{F}_1)/\mathbb{Z}_2$刘维尔等价。

下文将在引理1中证明一个更一般的论断（例3是它的特例）。

我们将证明，总能“消去”焦点奇点自同构群的连续分支中的这类作用。具体而言，对于鞍焦奇点，我们引入简单极小模型的概念（见定义 4），并证明以下结论（见定理2和定理3）：

- 任意奇异性都刘维尔等价于某个简单极小模型；
- 此外，对于任意几乎直积 $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$，都可以通过对某个子群 $N \triangleleft G$ 的作用取商，得到一个简单极小模型；
- 对于简单极小模型，群 G 总是循环的；
- 对于简单极小模型，其因子 $\mathcal{V}_m$ 和 $\mathcal{F}_n$ 以及群 G 的阶都是唯一确定的。

2 鞍焦型奇异性的简单极小模型

2.1 简单极小模型的存在性

定义 4. 如果几乎直积 $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ 是简单极小模型，则其中任意一个（非平凡）元素 $g \in G$

1. 在 $\mathcal{V}_m$ 和 $\mathcal{F}_n$ 上都非平凡地作用，

2. 在 $\mathcal{F}_n$ 上没有秩0 的不动点。

简单极小模型的这一定义与 N.T. Zung 的 [17] 中极小模型的定义不同，区别在于增加了条件 (2)。

定理2. 考虑一个鞍焦型奇点，它是几乎直积$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$。令 $N \subset G$ 为由以下元素生成的子群：这些元素在鞍点分量上作用平凡，或在焦点分量上有不动点。那么

1. 子群 N 是正规子群，且 $G/N \cong \mathbb{Z}_k$，

2. $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/N$ 与直积 $\mathcal{V}'_{m'} \times \mathcal{F}_{n'}$ 叶向辛同胚，其中 $V'_{m'} = V_m/N$，且 n' 是子群 N 在焦点奇点 $\mathcal{F}_n$ 的秩0 点集上作用的轨道数，

3. $(\mathcal{V}'_{m'} \times \mathcal{F}_{n'})/\mathbb{Z}_k$ 如果奇点 $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ 有一个简单极小模型 .

定理 *2* 的证明。 显然， N 是 G的正规子群。下面证明几乎直积（$\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$）$/G$可以通过$N$进行“分解”，也就是说，我们可以用（$\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$）$/N$替换$\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$，并用 G/N替换 G。

显然，若在几乎直积（$W_1 \times W_2$）$/G$中，群 G在分量 W_2上的作用是平凡的，则（$W_1 \times W_2$）$/G$与（W_1/G）$\times W_2$叶向辛同胚。因此，不失一般性，我们可以假设几乎直积（$\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$）$/G$是一个极小模型（即满足定义4中的条件（1））。

根据假设， G 是焦点奇点自同构群 Aut($\mathcal{F}_n$)的一个子群，即由奇点 $\mathcal{F}_n$ 到自身的叶向辛同胚组成、且在叶状结构的底空间上恒等的群。该群在 [8]中已有描述。我们回顾其中证明的一些结论。设 H_f 是自同构群 Aut($\mathcal{F}_n$)中焦点奇点的哈密顿自同构子群，并设 x_1，.....， x_n 是按顺序编号的焦点奇点的奇点。

断言 4 （见 [8,断言 6]）。 群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$ 同构于 $\mathbb{Z}_k \times H_f$，其中k 是 n的因子，$\mathbb{Z}_k = \langle a \rangle$, $a\ (x_q) = x_{q+k}$ （模 n） 对任意奇点 x_q均成立。

推论1 （见 [8,断言 7]）。 群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n)$中的所有有限阶元素都属于其“紧致部分” Aut_0（$\mathcal{F}_n$） $= \mathbb{Z}_k \times S^1$。

推论2。 对于任意鞍焦奇点的极小模型，群 G 要么是循环的，要么同构于 $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$。更确切地说，$G \cap H_f \cong \mathbb{Z}_l$ 和 $G/\ (G \cap H_f)\ \cong \mathbb{Z}_k$，其中 $k, l \geq 1$ （此处形式上令 $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$）。

为了证明定理2，剩下的工作是对该奇点取群 $G \cap H_f \cong \mathbb{Z}_l$ 的作用下的商，即证明以下命题。

引理1。 任何形如$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$的鞍焦奇点，只要群 G通过哈密顿自同构作用于 $\mathcal{F}_n$（即保持 $\mathcal{F}_n$的所有奇点不变），便叶向辛同胚于奇点$(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$。

引理*1*的证明。 我们将2-原子 $\mathcal{V}_m$ 表示成便于处理的形式。我们希望对 $\mathcal{V}_m$ 进行切割，使得 $\mathcal{V}_m/G$ 能够由其各部分拼接而成。为此，我们使用下面这个显然的断言。

断言 5. 若群 G 在一个2-原子 $\mathcal{V}_m$上自由作用，则可将其切分为“十字形区域”K_i 和“带状区域” L_j，使得群 G 在这些“十字形区域”和“带状区域”的集合上自由作用。

在所考虑的情形下，群 G 在 $\mathcal{V}_m$上自由作用，因为它在$\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n$ 上自由作用，并保持 $\mathcal{F}_n$的所有奇点不变。例如，图 3 展示了 2-原子 D_1的类似表示；群 $\mathbb{Z}_2$在其上作用（作为中心对称），并且图中标出了该作用的基本区域。



图 3： $\mathbb{Z}_2$ 在 D_1上的作用的基本区域

设 $\mathcal{V}_m/G$ 是通过沿某些“十字形区域” $K_1 \ \dots \ K_p$ $L_1 \ \dots \ L_q$ $x \in \partial\big(\big(\bigcup K_i\big) \cup$,,和“带状区域” $\big(\bigcup L_j\big)\big)$ $\sigma \ x$ $\mathcal{V}_m/G \ \times \mathcal{F}_n$,,的边界粘合而得到的。任取一个边界点 。记 ( ) 为与其等同的点。那么 ( ) 同胚于商空间

$$\Big(\bigcup K_i \times \mathcal{F}_n\Big) \cup \Big(\bigcup L_j \times \mathcal{F}_n\Big) \Big/ \sim_1,$$

其中，对于任意点 $y \in \mathcal{F}_n$，$(x, y) \sim_1 (\sigma(x)\ y)$。反过来，$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ 同胚于商空间

$$\Big(\bigcup K_i \times \mathcal{F}_n\Big) \cup \Big(\bigcup L_j \times \mathcal{F}_n\Big) \Big/ \sim_2,$$

其中，对于任意点 $y \in \mathcal{F}_n$，$(x, y) \sim_2 (\sigma(x)\ h_x(y))$，其中 h_x 是奇异性 $\mathcal{F}_n$ 的某个哈密顿自同构。

任意哈密顿自同构 h 在哈密顿自同构类中同伦于恒等映射（如果 h 是沿哈密顿向量场 v 流动单位时间的映射，那么该同伦就是沿 v 流动 t 时间的映射）。因此，$(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$ 和 $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ 同胚，因为我们可以在一个“矩形”上“展开”每个映射 h_x ——也就是边界附近的一个小邻域。为此，可以使用以下断言，它很容易利用管状邻域定理证明。

断言 6。 如果沿余维为 1 的子流形 Q^{n-1} 切开流形 M^n，然后用一个与原映射同伦的映射粘合所得的边界分支，那么得到的流形与 M^n 同胚。

这意味着 $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/G$ 和 $(\mathcal{V}_m/G) \times \mathcal{F}_n$ 是刘维尔等价的。接下来需要证明，它们之间的刘维尔等价可以取为辛的。为此，只需注意到所构造的同伦自同构 h_x 保持

辛结构。所有哈密顿自同构 h_x的同伦都可以取为关于点 x 光滑依赖的，这一点由以下简单断言保证。

断言7. 设 $\mathcal{F}_n$ 是一个焦点奇点， f_1、 f_2 是它的积分，使得哈密顿向量场 $\operatorname{sgrad} f_2$ 的轨线是周期为 2π 的闭合曲线。那么，函数 $H_1 = H_1(f_1, f_2)$ 和 $H_2 = H_2(f_1, f_2)$ 定义了 $\mathcal{F}_n$ 上相同的哈密顿自同构；换言之，沿哈密顿向量场$\operatorname{sgrad} H_1$ 和$\operatorname{sgrad} H_2$ 的1位移相等，当且仅当

$$H_2 - H_1 = \frac{c_1}{2\pi} f_2 + c_2,$$

其中 $c_1 \in \mathbb{Z}$、 $c_2 \in \mathbb{R}$。

引理1得证。 □

将极小模型按群 $G \cap H_f$ 的作用取商后，得到一个带有群 $G/(G \cap H_f)$ 作用的简单极小模型。因此，定理2的第3项成立。定理2的第2项由引理1推出，第1项由推论2推出。定理2得证。 □

2.2 简单极小模型的唯一性

定理3. 对于焦点奇点的任意简单极小模型 $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ ，其2-原子 $\mathcal{V}_m$、焦点奇点 $\mathcal{F}_n$ 和群 $\mathbb{Z}_k$ 均由奇点本身的结构唯一确定。

我们将鞍焦型奇点的临界点的一些性质列为以下断言。由于我们知道群 $\mathbb{Z}_k$ 如何作用于简单极小模型（见定理2），因此很容易证明这些性质。

断言8. 考虑一个鞍焦型奇点的简单极小模型 $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ 。记其秩为 i的临界点集合为 K_i 。则在奇异叶的充分小邻域内，以下结论成立。

1. 分岔图，即奇点所有临界点在动量映射下的像，是一条直线 l 与一个平面 Π的并集，二者在一点 P处横截相交。

2. 集合 K_0 由位于点 P的逆像中的 $\frac{mn}{k}$ 个点组成。*3.* 集合 $K_0 \cup K_1$ 构成一个包含于直线 l的逆像中的二维辛子流形 M_1^2。其上诱导的刘维尔叶状结构与 $\frac{n}{k}$ 个2原子 $\mathcal{V}_m$刘维尔等价。*4.* 集合 $K_0 \cup K_2$ 构成一个包含于平面 Π的逆像中的四维辛子流形 M_2^4。*(a)* 若 k 为奇数，则其上诱导的刘维尔叶状结构与 $\frac{m}{k}$ 个焦点奇点 $\mathcal{F}_n$ 的并刘维尔等价。

(b) 若 $k = 2k_1$，且 $\mathbb{Z}_k = \langle a \rangle$ 在 $\mathcal{V}_m$ 上的作用恰有 s 个秩0的点，其稳定子为 $\mathbb{Z}_2$（即在元素 a^{k_1}的作用下不动的点），其中 $0 \leq s \leq m$，则其上诱导的刘维尔叶状结构与 $\binom{m-s}{k}$ 个焦点奇点 $\mathcal{F}_n$ 和 $\binom{s}{k_1}$ 个焦点奇点 $\mathcal{F}_n$ 的并刘维尔等价。[2]

注意以下事实，它可由断言8的第4项推出。

推论 3. 如果对于两个形如$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ 的简单极小模型， $\mathbb{Z}_k$ 在 $\mathcal{V}_m$ 上的作用中秩为0 且稳定子为 $\mathbb{Z}_2$的点的数量不同，那么这些奇点不刘维尔等价。

定理 *3* 的证明。 设$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ 是给定鞍焦奇点的某个简单极小模型。那么，根据断言8的第3项，流形 $M_1^2 = K_0 \cup K_1$ 上诱导的刘维尔叶状结构唯一确定2-原子 $\mathcal{V}_m$ 以及比值 $\frac{n}{k}$。

要确定 n （即极小模型中的因子 $\mathcal{F}_n$ ），考虑 $M_2^4 = K_0 \cup K_2$上诱导的刘维尔叶状结构。根据断言8的第4项，该叶状结构要么是若干个复杂度为 N的 c 焦点奇点 $\mathcal{F}_N$ 的并，要么是a 个复杂度为 $\mathcal{F}_N$的焦点奇点与 b 个 $\mathcal{F}_{2N}$焦性奇点的并，其中 a, $b \geq 1$。在第二种情况下，我们立即得到 $n = 2N$ （并且利用已知的a 和 b，也可以轻松计算出 s）。但是，如果实现的是第一种情况，即 M_2^4 上的诱导叶状结构只包含复杂度相同的 N焦点奇点，那么理论上有两种可能： $s = 0$ 或 $s = m$。在第一种情况下 $s = 0$ ，我们将得到 $n = N$ （以及 $k = \frac{m}{c}$ ）；在第二种情况下 $s = m$ ，我们得到 $n = 2N$ （以及 $k = \frac{2m}{c}$ ）。一般来说，仅凭关于子流形 M_1^2和 M_2^4上诱导的刘维尔叶状结构的信息，我们无法区分这两种可能。换言之，根据断言8的第3项和第4项，我们可以区分任意简单极小模型，但以下配对除外：

1. $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$，其中群 $\mathbb{Z}_k$ 的任意非平凡元素在 $\mathcal{V}_m$ 上的作用都没有秩 0 不动点；2. $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$，其中 $\mathcal{V}_m$ 的对合 a^k（此处 a 是群$\mathbb{Z}_{2k}$ 的一个生成元）保持所有秩 0 的 m 点不动。

事实证明，满足此类条件的两种作用只能存在于某些特殊形式的 2-原子 $\mathcal{V}_m$ 上，以下简要命题对此作了描述。

断言 9。如果某个 2-原子 $\mathcal{V}_m$ 上存在一个对合，使所有秩0 的点保持不动，那么该原子必属于图 *4* 所示的两个原子系列之一（图中也展示了它们的 f-图）。

在书籍 [3] （图 4 源自该书）中，这些 2-原子系列被列为最大对称原子的示例，分别记作 X_m 和 Y_m。请注意，2-原子 X_m 和 Y_m 的性质取决于数值 m（其值等于它们的复杂度）的奇偶性。具体而言，2-原子 X_{2r} 描述两个圆分岔为两个圆；2-原子 Y_{2r} 则描述一个圆分岔为一个圆。

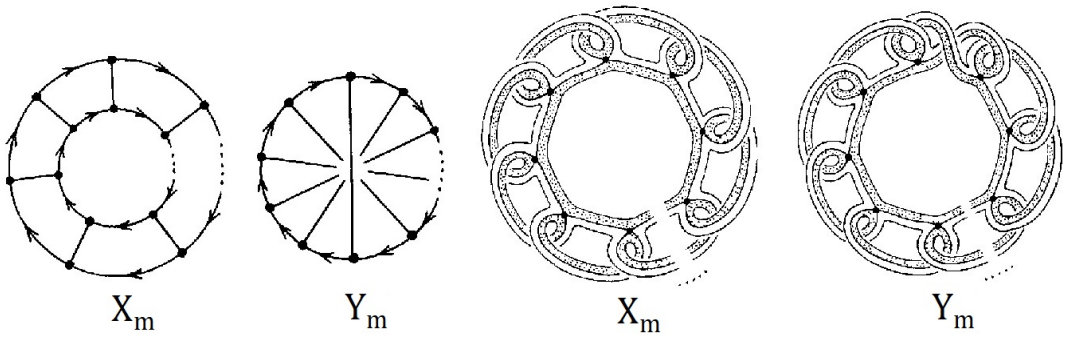

图4：原子 X_m 和 Y_m 及其 f-图

原子 X_{2r+1} 和 Y_{2r+1} 的区别在于定义其上叶状结构的函数符号不同；它们分别描述两个圆变为一个圆，或一个圆变为两个圆的变换。

如上所述，对于形式为 1 和 2 的简单极小模型，流形 M_1^2 和 M_2^4 上诱导的刘维尔叶状结构相同。考虑这些奇异性的其他特征，同时注意到根据断言 9，我们知道哪些 2-原子 V_m 可以出现在形式为 1 和 2 的极小模型中。

对于鞍焦型奇异性，有一个简单的特征：一对数字，分别等于动量映射像中的平面 Π 将空间分成的两个半空间内各点的逆像中刘维尔环面的数量（见条目1，断言8）。考虑群 $\mathbb{Z}_k$ 和 $\mathbb{Z}_{2k}$ 对系列 X_m 和 Y_m 中满足 1 和 2 所列条件的 2-原子的所有可能作用，我们得到以下结论。

断言10。 设$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/Z_k$ 和$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/Z_{2k}$ 是形式*1*和*2*的简单极小模型，其中 $\mathcal{V}_m$ 是级数 X_m 或 Y_m中的一个*2*-原子。那么，对于动量映射像中由分岔图上的平面 Π 划分成的两个半空间，其内正则点的原像中 *Liouville*环面的数量等于

- 当 $\mathcal{V}_m = X_m$时，若 m 为偶数，则$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/Z_k$ 对应*(2, 2)*，而$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/Z_{2k}$ 对应*(1, 1)*，
- 当 $\mathcal{V}_m = Y_m$时，若 m 为偶数，则$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/Z_k$ 对应*(1, 1)*，而$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/Z_{2k}$ 对应*(1, 1)*，
- 当 $\mathcal{V}_m = X_m$ 或 $\mathcal{V}_m = Y_m$时，$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n)/Z_k$ 对应*(2, 1)*，而$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{2n})/Z_{2k}$ 对应*(1, 1)*，其中 m 为奇数。

因此，只需证明奇点 $(Y_m \times \mathcal{F}_n)/Z_k$ 和 $(Y_m \times \mathcal{F}_{2n})/Z_{2k}$（其中 m 为偶数）并非刘维尔等价。为此，只需研究奇异叶 L 的组合结构（即分岔图中直线 l 与平面 Π 的交点的原像）。具体而言，我们需要考察叶 L 按不同秩的点所作的分层，即集合 $L \cap K_i$，以及它们彼此如何连接。

L 中的每个三维轨道都是一个实心环面 $\mathbb{R}^2\times S^1$。其边界包含两个一维轨道 $\mathbb{R}^1$、两个二维轨道 $\mathbb{R}^1\times S^1$ 和四个零维轨道（其中一些轨道可能重合）。我们可以考察由相连的三维轨道和一维轨道构成的链。对于所考察的奇点 $(Y_m\times\mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ 和 $(Y_m\times\mathcal{F}_{2n})/\mathbb{Z}_{2k}$，这些链各不相同。例如，考虑 $n=1$ 和 $m=2$ 的情形（注意，Y_2 是 2-原子 C_1，见图 2）。$C_1\times\mathcal{F}_1$ 有 4 条链，每条链由 1 个一维轨道和 1 个三维轨道组成。而 $(C_1\times\mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$ 有 2 条链，每条链包含 2 个一维轨道和 2 个三维轨道。一般情形下，证明类似。

定理3得证。 □

3 低复杂度奇点的算法描述与分类

3.1 2-原子的对称群

为了描述低复杂度的鞍焦奇点，我们简要回顾低复杂度 2-原子的对称群结构（详情见 [3] ）。

设 $\mathcal{V}_m$ 为任意一个 2-原子。用 Sym($\mathcal{V}_m$) 表示 2-原子 $\mathcal{V}_m$ 在同痕意义下的自同构群。 [3]表明这是一个有限群，并且它与该 2-原子的 f-图的自同构群同构。表1包含复杂度为 $m=1$，2，3的原子的群 Sym($\mathcal{V}_m$)。文献 [3]中给出了复杂度为3的 2-原子列表。这些原子的示意图见图5。

m	1	2				3									
原子 $\mathcal{V}_m$	B	C_1	C_2	D_1	D_2	E_1	E_2	E_3	F_1	F_2	G_1	G_2	G_3	H_1	H_2
Sym($\mathcal{V}_m$)	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	e	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_2$	S_3	e	e	$\mathbb{Z}_2$	e	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	e

表1：复杂度为1、2、3的鞍原子的对称群

注2。 原子2 C_2 的对称群为$\mathrm{Sym}(C_2)=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$。若像图6中那样对称地表示原子2 C_2，则$\mathrm{Sym}(C_2)$ 的非平凡元素是绕轴 x、y 和 z旋转 π 。前两种对称变换没有秩0的不动点，后一种则使秩0 的点保持不动。

3.2 鞍焦奇点的分类算法

根据定理2，要对鞍焦奇点进行分类，只需考虑它们的简单极小模型。它们都具有形式$(\mathcal{V}_m\times\mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$。注意，

- 奇异性$(\mathcal{V}_m\times\mathcal{F}_n)/\mathbb{Z}_k$ 的复杂度等于 md，其中 $n=kd$,
- 群 $\mathbb{Z}_k$ 的生成元作为阶为 k 的元素，在原子 $\mathcal{V}_m$ 的对称群 Sym($\mathcal{V}_m$) 中作用于 $\mathcal{V}_m$,

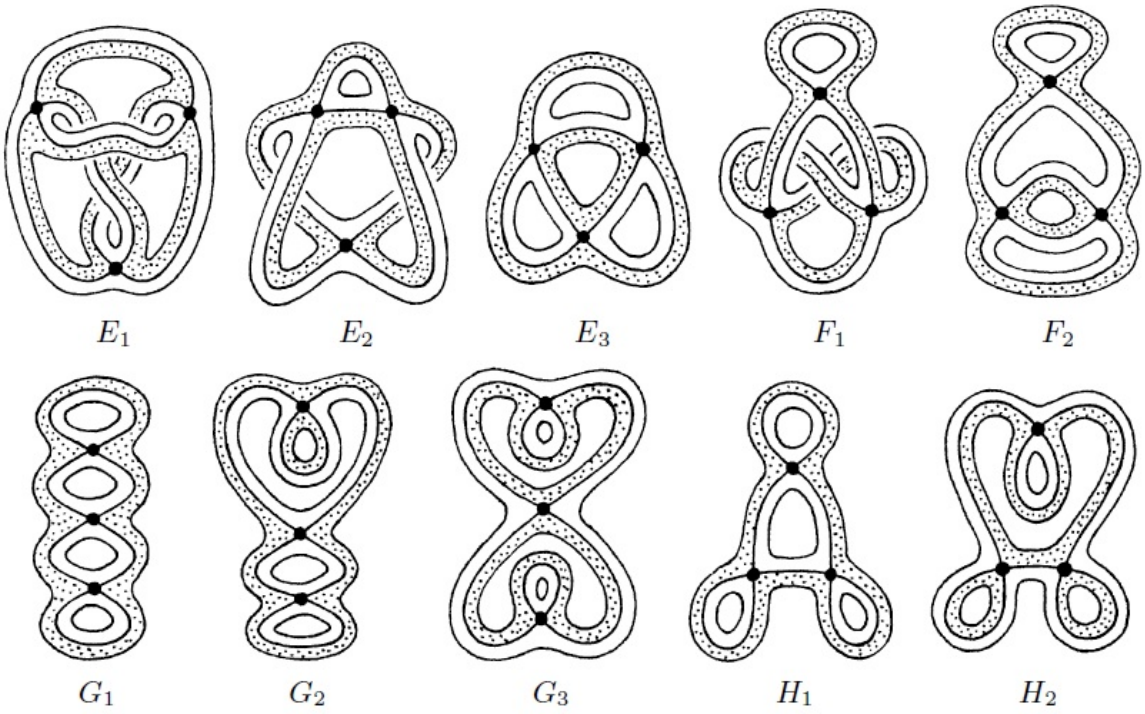

图5：复杂度为3的原子

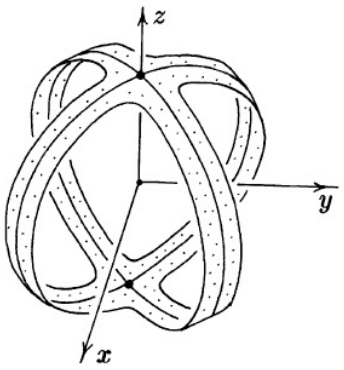

图6：原子 C_2 的对称性

- 对称群 Sym($\mathcal{V}_m$) 的阶不超过 $2m$。

根据这些考虑，我们得到以下算法，用于获取复杂度为 p 的鞍焦奇点完整列表。

1. 枚举数字 p 的所有可能因子 m 。

2. 对于每个复杂度为 m 的鞍型2-原子 $\mathcal{V}_m$ ，我们考虑所有可能的 k ，使得群 Sym($\mathcal{V}_m$) 包含子群 $\mathbb{Z}_k$。

3. 我们考虑所有可能的以下形式的简单极小模型

$$(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_{\frac{kp}{m}})/\mathbb{Z}_k, \tag{1}$$

如果它们存在。

4. 如果同一类型 (1) 有多个简单极小模型，则检查它们是否李乌维尔等价。

下面证明，对于任意给定复杂度 p 的奇点，该算法都能在有限步内结束。显然，对于数值 m、k 和 2-原子 $\mathcal{V}_m$ （在李乌维尔等价意义下），变体的数量有限。因此，只需证明在步骤 3 中只需考虑有限个奇点。如果群 $\mathbb{Z}_k$ 在 (1) 中对任一因子的作用彼此共轭（通过刘维尔叶状结构的自同构），那么所得的纤维化便是李乌维尔等价的。

注意，对于任意简单极小模型 $(\mathcal{V}_m \times \mathcal{F}_n/)\,\mathbb{Z}_k$，因子 $\mathcal{F}_n/\mathbb{Z}_k$ 都是非退化焦点型奇点（即类型为 (0，0，1)）。对于固定的 k 和 n，所有此类奇点$\mathcal{F}_n/\mathbb{Z}_k$ 都李乌维尔等价（例如，参见 [8]）。因此，对于固定的 k 和 n，简单极小模型中群 $\mathbb{Z}_k$ 在 $\mathcal{F}_n$ 上的任意两个作用，都可以通过 $\mathcal{F}_n$ 的李乌维尔等价相互转化。

尚需证明以下断言。

断言 11. 在2-原子 $\mathcal{V}_m$的李乌维尔自同构下，群 $\mathbb{Z}_k$ 在2-原子 $\mathcal{V}_m$上的作用只有有限种。

断言 11 可由以下简单命题推出。

断言 12. 设 ρ_1 和 ρ_2 是有限群 G 在2-原子 cV_m^2 上的两种作用，它们保持辛结构及定义刘维尔叶状结构的函数（因此也保持刘维尔叶状结构本身）。那么，如果这两种作用在2-原子 $\mathcal{V}_m^2$的奇异叶的一维边集上的作用方式相同，则它们在2-原子 $\mathcal{V}_m^2$的某个自同构下重合。换言之，存在一个李乌维尔等价$f\colon\ \mathcal{V}_m^2 \to \mathcal{V}_m^2$，使得对任意 $g \in G$ $\rho_2(g) = f^{-1} \circ \rho_1(g) \circ f$。

断言 12 的证明本质上与 [8] 中断言8的证明相似。

断言 *12* 的证明。通过将 2-原子切分成“十字形区域”，再切分成更小的部分，可以轻松地为 ρ_1 和 ρ_2 的作用构造同胚基本区域。自同构 f 将这些区域对应起来，随后扩展为一个等变映射。断言 12 得证。 □

注 3。并非所有在边集上作用方式相同的映射都彼此共轭。例如，沿哈密顿向量场的平移在边集上的作用相同，但并不与恒等映射共轭。我们利用了群 G 是有限群这一点，因此不存在一个有限阶的 $\mathcal{V}_m^2$ 自同构在边上作用恒等。

注 4。在断言 *12* 中，不能将叶状同胚 f 替换为辛同胚。2-原子具有辛不变量，群 G 必须保持这些不变量。

备注 5。 边置换的数量是有限的，因此断言 *11* 可以推广。也就是说，与断言 *12* 类似，可以证明：如果作用在 $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$ 中生成相同的子群，那么这些作用是共轭的。特别地，可以考虑 $G \subset \mathrm{Sym}(\mathcal{V}_m)$。

3.3 复杂度1、2 和3的鞍焦奇点

现在我们明确描述所有具有小复杂度的鞍焦型非退化奇点（即类型为 (0，1，1) 的奇点）。

定理4. 任何复杂度1 的鞍焦奇点都刘维尔等价于以下2 个几乎直积中的一个，且恰好是其中之一：

$$B \times \mathcal{F}_1, \qquad (B \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2. \tag{2}$$

注6. 这两个奇点此前均由 *L. M. Lerman* 描述过（见 *[11]*）。我们将对此给出另一种证明。

定理*4*的证明. 我们应用上文所述的算法。

1. 复杂度 $p = 1$。 p 的唯一因子是 $m = 1$。

2. 唯一的复杂度1焦点奇点是2-原子 B。对称群为 Sym(B) $= \mathbb{Z}_2$。因此 $k = 1$ 或 2。

3. 对于 $k = 1$，我们得到直积 $B \times \mathcal{F}_1$。$k = 2$ 的唯一简单极小模型是 $(B \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$。

根据定理3，群或因子不同的简单极小模型并不刘维尔等价。我们得到了所需的奇点列表（2）。定理4得证。

□

定理5。 任何复杂度为2 的鞍焦奇点，都恰好刘维尔等价于以下11 个几乎直积之一：

$$B \times \mathcal{F}_2, \quad (B \times \mathcal{F}_4)/\mathbb{Z}_2, \quad D_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (D_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad D_2 \times \mathcal{F}_1,$$
$$C_1 \times \mathcal{F}_1, \quad (C_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2, \quad (C_1 \times \mathcal{F}_4)/\mathbb{Z}_4, \quad C_2 \times \mathcal{F}_1,$$
$$\textit{and two variants of } (C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2.$$

$(C_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$ 的两种变体，其区别在于群 $\mathbb{Z}_2$ 在 C_2 上的作用中秩为0 的不动点数量不同。

注7。 换句话说，若按图*6*所示表示2原子 C_2，那么对于一种几乎直积$(C_2 \times \mathcal{F}_2)$ $/\mathbb{Z}_2$，群 $\mathbb{Z}_2$ 绕着 $z-$ 轴旋转 π；对于另一种，则绕着 $x-$ 轴或 $y-$ 轴旋转 π。

定理*5*的证明。定理5的证明与定理4类似。我们只考虑几乎直积（$C_2 \times \mathcal{F}_2$）$/\mathbb{Z}_2$ 的情形。将2-原子 C_2 表示为图6所示。根据推论 3，定理条件中指出的奇点在刘维尔意义下不等价。绕x 轴和 y 轴旋转 π 所对应的奇点是刘维尔等价的，因为这些作用在2-原子 C_2的自同构群中共轭。定理5得证。

□

复杂度 3 的鞍焦型奇点也以类似方式进行分类。

定理 6. 任意复杂度为3 的鞍焦奇点，刘维尔等价于以下21 种几乎直积中的且仅其中一种：

$B \times \mathcal{F}_3$, $(B \times \mathcal{F}_6)/\mathbb{Z}_2$, $E_1 \times \mathcal{F}_1$, $(E_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$, $(E_1 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_3$, $(E_1 \times \mathcal{F}_6)/\mathbb{Z}_6$, $E_2 \times \mathcal{F}_1$, $(E_2 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$, $E_3 \times \mathcal{F}_1$, $(E_3 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$, $(E_3 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_2$, $F_1 \times \mathcal{F}_1$, $F_2 \times \mathcal{F}_1$, $G_1 \times \mathcal{F}_1$, $(G_1 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$, $G_2 \times \mathcal{F}_1$, $G_3 \times \mathcal{F}_1$, $(G_3 \times \mathcal{F}_2)/\mathbb{Z}_2$, $H_1 \times \mathcal{F}_1$, $(H_1 \times \mathcal{F}_3)/\mathbb{Z}_3$, $H_2 \times \mathcal{F}_1$.

参考文献

[1] Bolsinov, A. V. 1991，《福缅科–齐尚不变量的计算方法》，载于 Fomenko, A. T.（编），《可积系统的拓扑分类》（《苏联数学进展》第6卷），美国数学会，普罗维登斯，第147–183页。[2] Bolsinov, A. V., Matveev, S. V. & Fomenko, A. T. 1990，《具有两个自由度的可积哈密顿系统的拓扑分类：低复杂度系统列表》，《俄罗斯数学评论》，第45卷，第2期，第59–94页。[3] Bolsinov, A. V. & Fomenko, A. T. 2004，《可积哈密顿系统：几何、拓扑与分类》，Chapman & Hall / CRC，博卡拉顿、伦敦、纽约、华盛顿。[4] Bolsinov, A. V. & Oshemkov, A. A. 2006，《可积哈密顿系统的奇点》，载于 Bolsinov, A. V., Fomenko, A. T. & Oshemkov, A. A.（编），《可积系统理论中的拓扑方法》，剑桥科学出版社，剑桥，第1–67页。[5] Eliasson, L. H. 1990，《具有泊松对易积分的哈密顿系统的标准形——椭圆情形》，《赫尔维数学评论》，第65卷，第1期，第4–35页。[6] Fomenko, A. T. 1987，《可积哈密顿系统中等能面的拓扑及可积性障碍》，《苏联科学院数学辑刊》，第29卷，第3期，第629–658页。[7] Fomenko, A. T. 1988，《李乌维尔可积哈密顿系统的拓扑不变量》，《泛函分析及其应用》，第22卷，第4期，第286–296页。[8] Izosimov, A. M. 2011，《拉格朗日叶状结构的几乎环面奇点分类》，《数学文集》，第202卷，第7期，第1021–1042页。[9] Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1987；1988，《四维辛流形上的泊松作用结构。I；II》，《苏联数学选刊》，第6卷，第365–396页；第7卷，第39–48页。[10] Lerman, L. M. & Umanskii, Ya. L. 1994；1994；1995，《四维可积哈密顿系统及简单奇点扩展邻域中的泊松作用分类。I；II；III》，《数学文集》，第77卷，第2期，第511–542页；第78卷，第2期，第479–506页；第186卷，第10期，第1477–1491页。

[11] Lerman, L. M. 2000, 《简单奇点扩展邻域内可积哈密顿系统的等能结构：三个自由度》, 《美国数学会译丛（第2辑）》, 第200卷, 第219–242页。[12] Matveev, V. S. 1996, 《具有两个自由度的可积哈密顿系统：焦点-焦点型与鞍点-鞍点型奇点的饱和邻域的拓扑结构》, 《数学文集》, 第187卷, 第4期, 第495–524页。[13] Matveev, V. S. & Oshemkov, A. A. 1999, 《鞍点-鞍点型奇点不变邻域的算法分类》, 《莫斯科大学数学通报》, 第54卷, 第2期, 第44–47页。[14] Oshemkov, A. A. 1995, 《二维曲面上的莫尔斯函数：奇点编码》, 《斯捷克洛夫数学研究所论文集》, 第205卷, 第119–127页。[15] Oshemkov, A. A. 2010, 《可积哈密顿系统零秩双曲奇点的分类》, 《数学文集》, 第201卷, 第8期, 第1153–1191页。[16] Oshemkov, A. A. 2011, 《可积哈密顿系统的复杂度1鞍点奇点》, 《莫斯科大学数学通报》, 第66卷, 第2期, 第60–69页。[17] Nguyen Tien Zung. 1996, 《可积哈密顿系统的辛拓扑。I：具有奇点的阿诺德–刘维尔理论》, 《组合数学》, 第101卷, 第179–215页。[18] Nguyen Tien Zung. 1997, 《关于焦点-焦点奇点的注记》, 《微分几何及其应用》, 第7卷, 第123–130页。[19] E. A. Kudryavtseva, A. A. Oshemkov, 《旋转曲面上带磁场的可积力学系统的分岔》, 《切比雪夫文集》, 第*21*卷, 第2期（2020）, 第244–265页。