arXiv:2301.10312v1 [math.CO] 24 Jan 2023

紧无限矩阵

Ron Aharoni*和 He Guo†

2022年11月

摘要

我们给出 Gollin 和 Jo´o [4] 最近一项结果的简洁证明：如果一个可能为无限的齐次线性方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$（其中 $A=(a_{i,j})$ 是一个 $I\times J$ 矩阵）只有平凡解，那么存在一个单射 $\phi:J\to I$，使得对所有 $j\in J$，$a_{\phi(j),j}\neq 0$。

1 引言与预备知识

全文中，I 和 J 都是可能为无限集的集合。

- 令 $FS(J)$ 表示 $\mathbb{R}^J$ 中有限支撑向量的集合，并令 $RFS(I,J)$ 表示行属于 $FS(J)$ 的 $I\times J$ 矩阵的集合。
- 矩阵 M 的第 i 行记作 M_i，而其 (i,j) 项有时记作 $M_{i,\ j}$，有时（通常如此）记作 $m_{i,\ j}$。
- 矩阵 M 的行集记作 $Row(M)$，列集记作 $Col(M)$。
- 对于可能为无限的集合 K，令 e_j 表示 $FS(K)$ 标准基中的第 j 个向量：$e_j(k)=\delta^k_j$，对任意 $k\in K$ 均成立。
- 矩阵 $M\in RFS(I,J)$ 的核 $ker(M)$ 为 $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^J\mid M\vec{x}=\vec{0}\}$。

定义 1.1. 若 $ker(A)=\{\vec{0}\}$，则称矩阵 $A\in RFS(I,J)$ 为紧矩阵；也就是说，方程组 $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有平凡解。

请注意，$A\vec{x}$ 是 A 各列的一个可能无限的线性组合。条件 $A\in RFS(I,J)$ 意味着乘积 $A\vec{x}$ 有定义。因此，紧性比 $Col(A)$ 的线性无关性要求更强。在有限情形下，这两个条件等价；若它们成立，则 $rank(A)=|J|$，因此 $|J|\leq|I|$。

例 1.2。由 $a_{i,\ 1}=1$ 和 $a_{i,\ i+1}=-1$ 对每个 i 定义的 $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ 矩阵 $A=(a_{i,\ j})$，以及 $a_{i,\ j}=0$ 对 i 的所有其他取值的定义，是列无关的，但不是紧的，因为 $A\vec{1}=\vec{0}$。

*以色列理工学院数学系，海法 32000，以色列；莫斯科物理技术学院。电子邮箱：ra@technion.ac.il。研究经费由以色列科学基金会（ISF）第 2023464 号资助项目、以色列理工学院折扣银行讲席，以及欧盟“地平线2020”研究与创新计划下的玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议第 823748 号提供。

†以色列理工学院数学系，以色列海法 32000。电子邮件：hguo@campus.technion.ac.il。

不等式 $|J| \leq |I|$ 很容易看出在无限情形下也成立——见下文的推论 2.3。本文探讨的主题是对这一事实的加强。无限组合学中反复出现的一个主题，是用满足特定情境条件的单射取代大小之间的不等式。一个著名的例子是 Erd˝os 关于门格尔定理无限版本的猜想（在 [2] 中得到证明）：给定有向图中任意两个顶点集 A、B，存在一个由互不相交的 $A-B$路径组成的集合 F，以及一个分隔集 S，使得 S 由F中的每条路径各选取一个顶点组成。这蕴含 $|S| = |F|$，但给出的信息更具体。在我们的情形中，相关条件概括如下：

定义 1.3. 若存在一个单射 $\phi : J \to I$，使得对所有 $j \in J$，$a_{\phi(j),j} \neq 0$，则称 $I \times J$ 矩阵 $A = (a_{i,j})$ 为 loaded。

Gollin 和 Jo´o [4] 证明了：

定理 1.4. 紧矩阵是 loaded 的。

例 1.2 中的矩阵是列无关的，但并非 loaded。因此，紧性条件确实是必要的；仅有列无关性并不足够。

定理 1.4 的有限情形是拟阵一项广为人知性质的特例：

事实 1.5. 设 $\mathcal{M}$ 是一个秩有限的拟阵。设 B 是 $\mathcal{M}$的一个基，H 是一个独立集。那么存在一个单射 $f : H \to B$，使得对于每个 $h \in H$，$f(h)$ 属于张成 h 的 B的极小子集。

证明它的一种方法用到了霍尔定理。对于 T 的每个子集，令 U_T 为对$t \in T$取并所得的集合，其中包含 B中张成 t的极小子集。于是，由于 $T \in \mathcal{M}$，我们有 $|U_T| \geq |T|$。

要推出定理 1.4 的有限情形，取 $\mathcal{M}$ 的底集为 $\mathbb{R}^I$，独立集为 $\mathbb{R}^I$中的线性无关向量集合，令 B 为 $\{e_i \in \mathbb{R}^I \mid i \in I\}$，并令 H 为 $Col\,(A)$。

注 1.6。无限情形不能用这种方法推出，因为 B是 $FS\,(I)$ 的一个基，而不是 $\mathbb{R}^I$的基；$\mathbb{R}^I$是 $Col\,(A)$ 的容域。

定理 1.4 有限情形的另一种证明利用了这样一个事实：$rank\,(A)$ 是最大的 k，存在一个行列式非零的 $k \times k$ 子矩阵。

关于无限情形，[4] 中的证明巧妙地运用了 Wojciechowski [6], 提出的一种可匹配判据（即“婚姻定理”），它是 Nash-Williams 定理的一个改进版本。我们稍后会再回到这一思路。本文的主要目标是给出一个直接而简单的证明。在此过程中，我们还将指出关于无限线性空间的一些事实。

我们将使用 Cowen 和 Emerson 的一个紧致性定理 [3]。

定理 1.7. 如果一个线性方程组 T 的每个有限子集都可解，那么 T 也可解。

2 与紧性等价的条件

如果不存在一个线性系统 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解使得 $x_j = 1$，则称变量 x_j 为顽固变量。紧性等价于所有变量都是顽固变量。

引理 2.1. 变量 x_j 是顽固变量，当且仅当 $e_j \in span(Row(A))$ 对于 $e_j \in \mathbb{R}^J$.

这里，与通常一样，对于线性空间中向量的集合 S，$span(S)$ 是 S 中向量的有限线性组合所构成的集合。

证明。“若”部分显然。为证明“仅若”方向，假设 x_j 是顽固的。将方程 $x_j = 1$ 加入方程组。根据假设，新方程组不可解，而由定理 1.7，它有一个不可解的有限子系统 I'。于是，高斯消元法得到一行 $(0, 0, 0, \dots | 1)$；与通常一样，“|”将方程中表示 A 的行与右端项分开。这意味着存在系数 λ_i，$i \in I'$，使得 $\sum_{i \in I'} \lambda_i (A_i | 0) + \lambda (e_j | 1) = (0, 0, 0, \dots | 1)$（由此得出 $\lambda = 1$）。于是 $e_j = -\sum_{i \in I'} \lambda_i A_i$。 □

定理 2.2. 设 $A \in RFS(I, J)$。以下各条件等价：

(1) A是紧的。

(2) $span(Row(A)) = FS(J)$。

(3) A 是左可逆的，即存在一个 $J \times I$ 矩阵 $Z \in RFS(J, I)$，使得 $(ZA)_{\ell,\ k} = \delta^{\ell}_{k}$（$Z \in RFS(J, I)$ 意味着 ZA 定义良好）。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)：由于 $A \in RFS(I, J)$，$span(Row(A)) \subseteq FS(J)$。根据引理 2.1，如果 A 是紧的，则对于每个满足 $j \in J$ 的 $e_j \in \mathbb{R}^J$，都有 $e_j \in span(Row(A))$，从而证明了 $FS(J) \subseteq span(Row(A))$。

(2) $\Rightarrow$ (3)：根据引理 2.1，对于每个 $j \in J$，我们有 $e_j \in FS(J) = span(Row(A))$，因此存在有限个非零系数 $\lambda_{j,\ i_1}$，...，$\lambda_{j,\ i_{t(j)}}$，使得 $\lambda_{j,\ i_1} A_{i_1} + \cdots + \lambda_{j,\ i_{t(j)}} A_{i_{t(j)}} = e_j$。所需的矩阵 B 定义为：对于每个 $j \in J$ 和 $p = i_1$，...，$i_{t(j)}$，令 $B_{j,\ p} = \lambda_{j,\ p}$，其余所有元素均为 0。

(3) $\Rightarrow$ (1)：假设 $(ZA)_{\ell,\ k} = \delta^{\ell}_{k}$。设 $\vec{x}$ 是 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的一个非平凡解，且 $x_j \neq 0$。那么 $ZA\vec{x} = \vec{0}$，这意味着 $(ZA)_j \vec{x} = \vec{0}$，因此 $x_j = 0$，矛盾。 □

推论 2.3. 若 $A \in RFS(I, J)$ 是紧的，则 $|I| \geq |J|$。

我们需要以下基本事实，为完整起见，给出其证明。

Lemma 2.4. 若 $S, L \subseteq FS(J)$，$span(S) = FS(J)$ 且 L 线性无关，则 $|L| \leq |S|$.

证明。若 S 是有限的，则这是关于有限维向量空间的经典定理。否则，对每个 $v \in L$，令 $\Phi(v)$ 为 S 的一个有限子集，它张成 v。根据有限情形，对每个有限子集 T，都有 $|\Phi^{-1}(T)| \leq |T|$ S。因此，Φ 是从 L 到 $\binom{S}{<\infty}$ 的有限多对一函数，其中 $\binom{S}{<\infty}$ 是 S 的有限子集所构成的集合，这意味着 $|L| \leq |\omega| \cdot |\binom{S}{<\infty}| = |S|$。 □

推论 2.3 的证明。根据 (2)，$Row(A)$ 张成 $FS(J)$。将引理 2.4 应用于空间 $FS(J)$，其中有 $L = \{e_j \in \mathbb{R}^J \mid j \in J\}$ 和 $S = Row(A)$。 □

若 $J \subseteq I$，则称一个 $I \times J$ 矩阵 A 为对角矩阵，当且仅当 $a_{i,\ j} = 0$ 对所有 $i \neq j$都成立。若一个对角矩阵同时满足 $a_{j,\ j} \neq 0$ 对所有 $j \in J$都成立，则称其为严格对角矩阵。

对矩阵 A 进行初等行变换，是指交换两行；或将一行A_i 替换为有限多行 A_k 的线性组合，其中 A_i 以非零系数出现。

在本节余下部分中，我们假设 $I = \mathbb{Z}^+$。若存在一列矩阵 $B^{(0)} = A, B^{(1)}, B^{(2)}, \cdots \in RFS(I, J)$，使得对于每个 $k \in I$，$B^{(k)}$ 与 B 的前 k 行相同，且 $B^{(k)}$ 可由$B^{(k-1)}$ 经过有限次初等行变换得到，则称矩阵 $A \in RFS(I, J)$ 可化约为矩阵 $B \in RFS(I, J)$。

如果 A 可化约为严格对角矩阵，则称矩阵 A 是严格行对角化的。在可数情形中，还有另一个与紧性等价的条件。

定理 2.5. 设 $A \in RFS(I, J)$，其中 I, J是可数的，且 $J \subseteq I$。当且仅当 A是严格行对角化的， A才是紧的。

“若”部分的证明。假设 A 可严格行对角化，即 A 可约化为自豪对角矩阵 B，且 A 不紧，这意味着存在 $\vec{x} \in \mathbb{R}^J$，使得$A\vec{x} = \vec{0}$ 且对于某个 $j \in J$有 $x_j \neq 0$。那么根据可约性的定义，经过有限次初等行变换， A 可化为一个矩阵 $B^{(j)}$，其前 j 行与自豪对角矩阵 B的前几行相同。因此 $B^{(j)}\vec{x} = \vec{0}$，特别地 $B^{(j)}_j \vec{x} = \vec{0}$。由于 $B^{(j)}_{j\,j}$，是 $B^{(j)}_j$ 中唯一的非零元素， $B^{(j)}_j \vec{x} = \vec{0}$意味着 $B^{(j)}_{j,\,j} x_j = 0$，这推出 $x_j = 0$，矛盾。

□

我们将“仅当”部分的证明推迟到第 3.1.1 节。

3 定理 1.4 的证明

3.1 可数情形

我们构造一个单射 $\phi : J \to I$，使得 $a_{\phi(j),\,j} \neq 0$ 对所有 $j \in J$均成立。值 $\phi(j)$ 以归纳方式定义。

我们从 $j = 1$ 开始。由引理 2.1， x_1 的顽固性意味着

$$e_1 = \sum_{i \in I_1} \lambda_i^{(0)} A_i$$

对于一个有限集 $I_1 \subseteq I$。令 $i_1 \in I_1$ 满足 $\lambda^{(0)}_{i_1} \neq 0$。定义 $\phi(1) = i_1$。通过置换行，我们可以（并且确实）假设 $i_1 = 1$。

令 $A^{(0)} = A$，并令 $A^{(1)} = (a^{(1)}_{m,\,n})$ 为将 A_1 替换为 e_1 后的 A。事实 $\lambda^{(0)}_1 \neq 0$ 意味着A_1 是 e_1 和 I_1 中其他行的线性组合，因此

$$span(Row(A^{(1)})) = span(Row(A^{(0)})) = span(Row(A)). \tag{1}$$

接下来考虑 $j = 2$。由于 x_2 是顽固的，由引理 2.1 和 (1)，我们有 $e_2 \in span(Row(A))$ =$span(Row(A^{(1)}))$，因此

$$e_2 = \sum_{i \in I_2} \lambda_i^{(1)} A_i^{(1)}$$

对于一个有限集 $I_2 \subseteq I$。注意到 $A^{(1)}_1 = e_1$，存在 $i_2 \neq 1$ 使得 $\lambda^{(1)}_{i_2} \neq 0$ 且 $a^{(1)}_{i_2\,,\,2} \neq 0$。定义 $\phi(2) = i_2$。通过置换各行，不妨设 $i_2 = 2$。注意，在原矩阵中 A,$a_{i_2,\,2} \neq 0$，因为对所有 $\ell \neq 1$ 都有 $A^{(1)}_\ell = A_\ell$。因此， ϕ 在 $\{1, 2\}$ 上是单射，并满足定理 1.4 的要求。我们将 $A^{(1)}$ 的第 i_2 行替换为 e_2，得到 $A^{(2)}$ =$(a^{(2)}_{m,\,n})$。我们有

$$span(Row(A^{(2)})) = span(Row(A^{(1)})) = span(Row(A)).$$

根据构造， $A^{(2)}_\ell$ 对于 $\ell \in \{1, 2\}$ 是 e_ℓ，对于 $\ell > 2$是 A_ℓ。

假设我们定义了一个单射 ϕ，其定义在 $\{1, \ldots, j\}$ 上并满足定理 1.4 的要求；另有一个矩阵 $A^{(j)} = (a^{(j)}_{m,\,n})$，满足 (i) 对所有 $\ell \in \{1, \ldots, j\}$ 都有 $A^{(j)}_\ell = e_\ell$，且对所有 $\ell > j$ 都有 $A^{(j)}_\ell = A_\ell$；以及 (ii)

$$span(Row(A^{(j)})) = span(Row(A)).$$

接下来考察 $j+1$ 2 1 x_{j+1} $e_{j+1} \in span\ Row\ A$ $=$。根据引理，$span\ Row\ A^{(j)}$ $I_{j+1} \subseteq I$ $j+1$ 2 1 x_{j+1} $e_{j+1} \in span\ Row\ A$ $=$ 的顽固性意味着 (( )) (( )), 因此存在一个有限集满足 $span\ Row\ A^{(j)}$ $I_{j+1} \subseteq I$

$$e_{j+1} = \sum_{i \in I_{j+1}} \lambda_i^{(j)} A_i^{(j)}. \tag{2}$$

存在满足 $\lambda_{i_{j+1}}^{(j)} \neq 0$ 和 $a_{i_{j+1},\ j+1}^{(j)} \neq 0$ 的 $i_{j+1} \notin \{1, \ldots, j\}$。令 $\phi(j+1) = i_{j+1}$，则 $A_{i_{j+1}}^{(j)} = A_{i_{j+1}}$，因此满足定理 1.4 中所需的性质。于是 $a_{i_{j+1},\ j+1} = a_{i_{j+1},\ j+1}^{(j)} \neq 0$。通过置换各行，不妨设 $i_{j+1} = j+1$。将 $A_{i_{j+1}}^{(j)}$ 替换为 e_{j+1} 以得到 $A^{(j+1)}$，我们有

$$span(Row(A^{(j+1)})) = span(Row(A^j)) = span(Row(A)).$$

此外， $A_\ell^{(j+1)}$ 对于 $\ell \in \{1, \ldots, j+1\}$ 是 e_ℓ，对于 $\ell > j+1$ 是 A_ℓ。

继续下去，我们得到所需的单射 ϕ。

3.1.1 完成定理 2.5 的证明

“仅当”部分的证明。假设 A 是紧的。证明与定理 1.4 的证明类似。沿用上文的记号，假设对于某个 $j \geq 0$， A 可化约为满足$A_{p,\ q}^{(j)} = \delta_p^q$ 的矩阵 $A^{(j)}$，其中任意 $p \leq j$ 和任意 q均如此。对于 $j+1$，我们有

$$e_{j+1} = \sum_{i \in I_{j+1}} \lambda_i^{(j)} A_i^{(j)}.$$

我们选取行 $A_\phi^{(j)}{}_{(j+1)}$，将其替换为线性组合 $\sum_{i \in I_{j+1}} \lambda_i^{(j)} A_i^{(j)} = e_{j+1}$ （注意，$\lambda_\phi^{(j)}{}_{(j+1)}$中， $A_\phi^{(j)}{}_{(j+1)}$的系数非零），并将其与第（$j+1$）行交换。到目前为止，我们只进行了有限次初等行变换。将所得矩阵记为 $A^{(j+1)}$。那么，$A^{(j+1)}$ 的前 j 行与 $A^{(j)}$ 相同（因为 $\phi(j+1) \notin \{1, \ldots, j\}$），且其第（$j+1$）行为 e_{j+1}。如此归纳进行，便得到一个紧的行对角矩阵。

□

3.2 一般情形（可能不可数）

不可数 J 的情形，利用以下事实来证明： $A \in RFS(I, J)$。这使得我们能够按一定顺序选择上述证明中的变量 x_j，从而存在一个序数 $\alpha \leq \omega$，满足以下条件：

出现在方程 $A_i \vec{x} = 0$、$i \in I_j$、 $j < \alpha$ 中的所有变量，都是某个 $k < \alpha$ 的 x_k。（这里的 I_j 与上述证明中的相同。）

从系统中移除这些方程和变量后，得到的便是一个紧系统，我们可以继续进行归纳。

在第4节讨论匹配的较简单情形时，我们将重复这一论证。

4 婚姻定理

定义 4.1. 若二分图的两侧为 (M, W)，且包含一个覆盖 M 的匹配，则称其为可匹配的。

对于矩阵 $A=(a_{i,j})_{i\in I,j\in J}$，令 G_A 为二分图，其两侧为 (J,I)，边集 E 定义为：若 $a_{i,j}\neq 0$，则 $(j,i)\in E$。定理 1.4 可重新表述为：

定理 4.2. 若 A 是紧的，则 G_A 是可匹配的。

一般图中已知可匹配的充要条件（称为“婚姻定理”），但在本文的语境下，只需要可数图的判据。在这种情况下，基本上已知两种判据。一种是 Wojchiechowsky 对 Nash-Williams 所证明判据的改进，即不存在一种子结构，我们称之为“NWW 障碍”。这里不作定义，因为它相当复杂，而且与本文并无直接关系。例如，可参见 [4]。在 [6] 中已证明，这一判据也适用于“女性”一侧（W）具有可数度的二分图。

另一种判据由 Podewski 和 Steffens 证明。它要求不存在另一类子结构，我们称之为“PS 障碍”。在 [1] 中已证明，这两种判据在一般情况下等价；也就是说，无论是否可数，存在 PS 障碍当且仅当存在 NWW 障碍。

下面给出 PS 障碍的定义。对于一个顶点集合 T，令 $N(T)=N_G(T)$ 表示 T 在 G 中的邻点集合。当 v 是单个顶点时，我们将 $N(\{v\})$ 简记为 $N(v)$。

定义 4.3。

(1) 若匹配 F 满足

$$N(\bigcup F\cap M)=\bigcup F\cap W.$$

(2) 若对于 $\bigcup F\cap M$ 的每个匹配 K，都有 $\bigcup K\cap W=\bigcup F\cap W$，则称波为临界的。

(3) 若 F 是波，$a\in M\setminus\bigcup F$ 且 $N(a)\subseteq\bigcup F$，则称有序对 (F,a) 为阻碍。

(4) 若 F 是临界的，则称阻碍 (F,a) 为 Podewski–Steffens（简称 PS）障碍。

显然，有限波是临界的，有限阻碍是一个障碍。存在障碍就意味着不可匹配，而存在阻碍则未必如此。容易看出，给定条件 (1)，条件 (2) 等价于不存在一条以非-F 边开头的无限 F-交替路径。

不含 PS 障碍的图称为无障碍图。显然，如果一个图可匹配，那么它就是无障碍的。Podewski 和 Steffens [5] 证明了反方向：

定理 4.4. 如果 M 是可数的，且该图无障碍，那么它是可匹配的。

这可直接由以下引理得出。

引理 4.5. *[5]* 如果 G 是无障碍的，那么对每个 $m\in M$，都存在 $w\in N(m)$，使得$G-m-w$ 是无障碍的。

事实上，该引理还蕴含更强的结论：

定理 4.6. 若对每个 $w\in W$，$N(w)$ 都是可数的，且该图无障碍，则它可匹配。

证明。证明过程仿照第3.2节。取 $m_1 \in M$。根据引理 4.5，存在 $w_1 \in N(m_1)$，使得 $G_1 := G - m_1 - w_1$ 无障碍，并定义 $\phi(m_1) = w_1$。接下来，将引理应用于 G_1，其中 $m_2 \in N(w_1)$，

设 $X_1 = N(w_1)$。若 $X_1 \neq \{m_1\}$，选取 $m_2 \neq m_1 \in X_1$，并选取满足 $G_2 := G_1 - m_2 - w_2$ 无障碍的 $w_2 \in N_{G_1}(m_2)$。

继续这样选取 m_i 和 w_i。对于某个 $\alpha \leq \omega$，我们将有 $\{m_j \mid j \leq \alpha\} = \bigcup_{i \leq \alpha} N(w_i)$，也就是说，所有 $N(w_i)$ 都已被表示。M 中剩余的元素只与 $W \setminus \{w_i$ 中的元素相连：$i \leq \alpha\}$；由于剩余的图无障碍，我们可以重新开始这一过程。 □

定理 1.4意味着，若 A 是紧的，则 G_A 不含 PS 障碍。在 [4] 中，已直接证明若 A 是紧的，则不存在 NWW阻碍；根据 [1]的结果，这意味着它不含 PS 障碍。由于 PS 障碍更简单，以下内容或许值得关注：

C挑战4.7。直接证明：如果 G_A 包含一个 PS 障碍，那么 A 就不是紧的。

下面的例子表明，仅有阻碍并不足以达到这一目的，也就是说，必须用到“阻碍中不存在无限交替路径”这一条件。

例4.8。考虑如下方程组：对每个 $k = 1$，2，.....，第$2k-1$个方程为 $x_{2k-1} + x_{2k} + x_{2k+1} = 0$，第$2k$个方程为 $x_{2k} + x_{2k+1} = 0$。注意，对每个 $j = 1$，2，.....，x_{j+1} 都会出现在第 j个方程中，因此它们与 x_1 共同构成一个阻碍。但该方程组是紧的，因为第$2k-1$个和第 $2k$个方程推出所有奇数编号的变量都为零。随后，偶数编号的方程推出所有偶数编号的变量都为零。

致谢。我们感谢 Dani Kotlar 提供了有益的意见。

参考文献

[1] R. Aharoni. 关于横截线存在的两个条件等价性. *J. Combin. Theory Ser. A* **34** 1983 202 214

( ) – . [2] R. Aharoni 和 E. Berger. 无限图的门格尔定理. *Invent. Math.* **176** (2009) 1–62. [3] R. Cowen 和 W. Emerson. 线性方程的紧致性定理. *Studia Logica* **57** (1996) 355–357. [4] J. P. Gollin 和 A. Jo´ *Linear* o. 无限线性方程组中变量与方程的匹配. *Algebra Appl.* **660** 2023 40 46

( ) – . [5] K.-P. Podewski 和 K. Steffens. 可数族的单射选择函数. *J. Combin. Theory Ser. B* **21** 1976 40 46

( ) – . [6] J. Wojciechowski. 集合系统存在横截线的判据. *J. London Math. Soc.* **56** 1997 491 503

( ) – .