arXiv:2301.10318v1 [math.GT] 24 Jan 2023

虚拟结理论的几何基础

Micah Chrisman

Abstract. 虚结以图示方式定义为一组图形，称为虚结图；若通过有限序列的扩展 Reidemeister 变换即可相互转化，则这些图形被视为等价。相比之下， $\mathbb{R}^3$ 中的结可以用几何方式定义。它们是结空间 $\mathbb{K}$ 中的点。结空间具有一种拓扑，使等价的结位于同一道路连通分支中。本文旨在运用层论，为虚结构建一个完全几何化的模型。该几何模型将一种直观认识形式化：虚结是一个实际的结，存在于可变的环境空间中；通常的图示理论则如经典情形那样自然导出。为此，本文证明存在一个位点（VK $J_{\mathbf{VK}}$），使其层范畴 Sh(VK $J_{\mathbf{VK}}$) 可以自然地解释为“虚纽结空间”。Grothendieck 拓扑斯中的一个点，即一个几何态射 Sets $\to$Sh(VK)，就是一个虚结。虚同痕关系由该空间中的路径生成，更确切地说，是由几何态射 Sh($[0,1]$) $\to$Sh(VK $J_{\mathbf{VK}}$) 生成。以离散拓扑空间 $\mathbb{G}$ 为值域的虚结不变量，是几何态射 Sh(VK $J_{\mathbf{VK}}$) $\to$ Sh($\mathbb{G}$)；同样，以 $\mathbb{G}$ 为值域的经典结不变量是连续函数 $\mathbb{K} \to \mathbb{G}$。经典结到虚结的嵌入也可由一个几何态射实现。

1. 引言

1.1. 动机。量子结不变量可以通过三种截然不同的方式导出。其中两种是几何方法，另一种则是图表方法。第一种几何方法运用 Chern-Simons 理论，从单连通紧李群 G 出发，将平凡 G丛上 $\mathbb{S}^3$的 G-联络空间上的积分定义为量子不变量。该积分是 Wilson 环的真空期望值，而 Wilson 环本身是沿着框架结 [3, 4, 35]的积分。第二种几何推导使用结空间的上同调。结空间 $\mathbb{K}$ 是光滑嵌入 $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ 的集合，其拓扑结构使得它的道路连通分支对应于定向结型。首先，通过 $\mathbb{K}$ 上以阿贝尔群 [34]为系数的上同调谱序列构造有限型不变量。随后，对于每个半单李代数，都可以将量子不变量还原为弦图代数上的权系。图表推导则改用量子群以及 Yang-Baxter 方程 [21]的解。

由 Kauffman 创立的虚纽结理论 [22], 为研究结图理论提供了一个通用框架。除了通常的平面纽结图之外，虚纽结理论还纳入了一类非平面结图。总而言之，这些新的虚纽结图在一组扩展 Reidemeister 变换下被视为等价（见下文第 2.2 节）。这种扩展的意义在于，虚结图可作为经典纽结图的“代数闭包”。例如，每个亏格一的 Wirtinger 群都是某个虚结图的群 [23] ，而且存在 Jones 多项式为单位的非经典虚结图 [22]。并非每个这样的 Wirtinger 群都是 $\mathbb{S}^3$ 中某个结的基本群，而是否存在 Jones 多项式为单位的非平凡结，至今仍是著名的未解问题。这种代数实现的其他例子还出现在拟群理论 [9, 12] 和 Kashiwara-Vergne 问题 [6]中。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：57K12，次要分类号：57K10、18B25、18F10。*Key words and phrases.* 经典结、虚结、几何态射、层论。

量子结不变量在物理学 [35], 、低维拓扑 [13], 和数论 [14, 24]中有许多著名应用。由于虚结图类似于经典纽结图的“代数闭包”，我们有理由期待，虚纽结理论的进展能够为这些领域带来新的见解。纽结理论与物理学、拓扑学和数论的结合，运用了几何方法与图示方法的混合。然而，与经典情形不同，虚纽结理论的图示模型尚无已知的、完全几何化的对应物。尤其是，目前并不存在“虚结空间”。这种不平衡使人们难以发现虚纽结理论与其潜在应用之间预期存在的关联。

一种常见的变通方法是采用虚结理论的最小亏格模型（例如参见 [2, 17,19, 29, 33]）。回想一下，每个虚结图都可以（非唯一地）表示为闭可定向曲面上的纽结图。随后，可以通过限制在亏格尽可能小的曲面上来定义不变量和几何性质。根据 Kuperberg定理 [26], ，每种虚结类型在这样的曲面 Σ 上都有一个最小亏格代表，且该代表在同痕和保向微分同胚意义下唯一 $\psi : \Sigma \to \Sigma$，因此定义是良定的。不过，最小亏格模型缺少经典几何模型所具备的若干理想特性。首先， $\mathbb{S}^3$ 中纽结的等价关系由同痕生成，而最小亏格模型定义的等价关系无法简化为仅由同痕生成。事实上，任意 $\Sigma \neq \mathbb{S}^2$ 的映射类群都非平凡。其次，虚结理论的最小亏格模型无法还原图示模型，因为并非所有虚结图都能在最小亏格曲面上实现。最后，判定给定的 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中的纽结是否具有最小亏格通常是一个难题（参见 [11]）。因此，对于最小亏格较大或交叉数较大的纽结，最小亏格模型并不实用。

在这里，我们引入一种虚纽结理论模型。从逻辑角度看，该模型具有几何性，其意义与经典结理论具有几何性相同。该模型将一种直观概念形式化：虚结是在可变环境空间中存在的实际结。无需借助图表即可还原虚拟结类型。此外，虚结之间的等价关系完全由同痕生成。所有虚结不变量也都能以几何方式实现。

1.2. 主要结果概述。该几何模型建立在将结空间 $\mathbb{K}$ 推广为“虚结空间”的基础上。先考虑经典情形，并注意到 $\mathbb{K}$ 中的点是结，每个结都可由连续函数 $\mathbb{I} \to \mathbb{K}$指定，其中 $\mathbb{I} = \{0\}$ 是单点空间。 $\mathbb{K}$ 的道路连通分支就是定向结型。因此，同痕关系由路径 $\mathbb{I} = [0,1] \to \mathbb{K}$确定。若 $\mathbb{G}$ 是离散拓扑空间，则任何连续函数 $\mathbb{K} \to \mathbb{G}$ 都是结不变量。因此，几何结理论是在拓扑空间范畴 Top 中对拓扑空间及连续函数进行阐释的。

为了诠释虚纽结理论中的“几何的”，我们首先在拓扑斯及几何态射的 2-范畴 $\mathfrak{Top}$ 中，重新诠释“结空间”“结”“同伦”和“结不变量”。对于拓扑空间 $\mathbb{X}$，将 $\mathbb{X}$ 的开集范畴记作 $\mathbf{X}$，将 $\mathbb{X}$ 上的层范畴记作 Sh(X)。结空间 $\mathbb{K}$ 被重新诠释为 Grothendieck 拓扑斯 Sh(K)，即 $\mathbb{K}$上的层构成的拓扑斯。纽结由 Sh(K) 的点取代，也就是几何态射 Sh(1) = Sets →Sh(K)。路径 $\mathbb{I} \to \mathbb{K}$ 由几何态射 Sh(I) → Sh(K) 取代，结不变量则由几何态射 Sh(K) →Sh(G) 取代。层论模型等价于几何模型。因此，“几何的”和“层论的”可以互换使用。

“虚结空间”将由位点 (VK $J_{\mathbf{VK}}$) 上的层 Grothendieck 拓扑斯 Sh(VK) = Sh(VK $J_{\mathbf{VK}}$) 扮演。虚结是 Sh(VK) 的点。几何态射

虚结空间各点之间的 Sh(I) →Sh(VK) 生成虚同痕的等价关系。虚同痕的等价类与图示虚结理论的等价类一一对应。几何态射 Sh(VK) →Sh(G) 对应于虚结不变量。摘要见图1。这里 $J_{\mathbf{K}}$ 表示 K 上的开覆盖拓扑。

		位点 (C J)	
		(K $J_{\mathbf{K}}$)	(VK $J_{\mathbf{VK}}$)
Geometric Morphisms	集合 →Sh(C J)	纽结	虚结
	Sh(I) →Sh(C J)	同痕	虚同痕
	Sh(C J) →Sh(G)	$\mathbb{G}$ 值 结不变量	$\mathbb{G}$值 虚拟纽结不变量

FIGURE 1. 层论的结理论与虚拟结理论之间的比较 y.

或者，我们也将虚结不变量描述为上同调类。对于阿贝尔群 G ，奇异上同调群 $H^0(\mathbb{K}, G)$ 是取值于 G 的结不变量群。这里将证明，对于任意离散阿贝尔群 $\mathbb{G}$，取值于 $\mathbb{G}$ 的虚结不变量群为 H^0 (Sh(VK) $\Delta_{\mathbb{G}}$)，即系数取为常值层 $\Delta_{\mathbb{G}}$ 的第零层上同调群。这一结果应与最小亏格模型相对照；在该模型中，不变量以最小亏格代表上的常系数定义。从层论的视角来看，虚结不变量取值于局部常值系数。局部系数实质上记录了不变量的取值在稳定化下如何变化。因此，这些不变量对任意代表都有定义，而不只是对最小亏格的代表。

将经典结理论和虚结理论同时提升到 2-范畴框架，可以更直接地研究二者之间的关系。典范例子是“经典结到虚结的嵌入”。我们将证明，这可以实现为一个几何态射 Sh(K) → Sh(VK)。更一般地，若 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 是 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中关于 Σ 某个定向曲面的纽结空间，则存在一个几何态射 Sh(K(Σ)) →S h(VK)。这使“将加厚曲面中的结投影到虚结”这一常用说法得到了形式化。

形式化是本文的另一个主要目标。请回想，文献中常将“虚结”定义为“虚结图的等价类”。后者更准确地说应称为虚纽结类型。这意味着“虚结”本身实际上并未得到定义。类似地，“虚同痕”常被混同为“扩展 Reidemeister 变换的有限序列”。要连接虚纽结理论的几何模型和图示模型，需要更精确的表述。因此，我们定义了变空间结和变空间同痕这两个中间概念。直观地说，变空间结是加厚曲面中的一个实际的结，其环境空间并非常量。变空间同痕是变空间结之间的一个实际同痕。随后将证明，变空间结和变空间同痕分别与几何态射 Sets →Sh(VK) 和 Sh(I) →Sh(VK) 一一对应。

1.3. 结构安排。第2节讨论结理论的几何模型、图示模型和层论模型。第3节介绍虚结空间以及虚纽结理论的几何模型。第4.1、5.1和6.1节分别对变空间结、变空间同痕和变空间结

不变量进行形式化。随后证明，它们分别与我们通过层论定义的虚结、虚同痕和虚结不变量一一对应（分别见第4.2、5.2和6.2节）。关于虚结空间的层上同调，见第6.1节。第7节研究层论纽结空间之间的几何态射。第8节进一步讨论虚纽结理论中的形式化，并提出一些问题及未来研究方向。

2. The languages of knot theory

2.1. 几何与层论模型。结 $K:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^3$ 是圆的光滑嵌入。结的集合 $\mathbb{K}$ 的拓扑定义如下：对每个 $z\in\mathbb{S}^1$ 和 $K\in\mathbb{K}$，取 $K(z)$ 处的泰勒级数系数，并要求幂级数随 z连续变化。更准确地说，存在一个单射 $j^\infty:C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3)\to C^0(\mathbb{S}^1,J^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3))$，其中 $J^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3)$ 是∞-阶喷射空间。对于 $A\in C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3)$ 和 $z\in\mathbb{S}^1$，$j^\infty(A)(z)$ 是 A 在 z处的 ∞-阶喷射。赋予 $C^0(\mathbb{S}^1,J^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3))$ 紧开拓扑，并通过单射 j^∞，赋予 $C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3)$ 子空间拓扑。那么$C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3)$ 是一个无限维光滑流形（[25], 定理 IX.42.1）。特别地，它是豪斯多夫的。结的子空间 $\mathbb{K}\subseteq C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3)$ 在 $C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^3)$ 中开且稠密（见 [16], 定理 2.1.4 和 2.2.13 ）。结 $K,\overline{K}:\mathbb{S}^1\to\mathbb{R}^3$ 的环境同痕对应于相应点 $K,\overline{K}\in\mathbb{K}$ 之间的一条路径$\sigma:\mathbb{I}\to\mathbb{K}$。反过来，若 $K,\overline{K}\in\mathbb{K}$属于 $\mathbb{K}$的同一道路连通分支，则 K 和 K 环境同痕。结不变量是连续函数 $\nu:\mathbb{K}\to\mathbb{G}$，其中 $\mathbb{G}$ 为离散空间。若 $K\in\mathbb{K}$，也用 $K:\mathbb{I}=\{0\}\to\mathbb{K}$ 表示将 0 映到结 K 的映射。映射 K,σ,ν 将构成下文定义的结理论标准几何模型。

现在，设 $\mathbb{X}$、$\mathbb{Y}$ 是任意拓扑空间，$f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ 是它们之间的连续函数。回顾一下，f 诱导出直接像函子 $f_*:\mathbf{Sh(X)}\to\mathbf{Sh(Y)}$，其定义为 $f_*(F)(U)=F(f^{-1}(U))$，其中 F 是 $\mathbb{X}$ 上的一个层，$U\subseteq\mathbb{Y}$ 是开集。f_* 的左伴随是逆像函子 $f^*:\mathbf{Sh(Y)}\to\mathbf{Sh(X)}$。为定义 f^*，首先将 $\mathbb{Y}$ 上的每个层 P 与一个 ´étale 空间 $p:\mathbb{E}\to\mathbb{Y}$ 相对应。在范畴 Top 中沿 f 拉回，得到一个 ´étale 空间 $q:f^*(\mathbb{E})\to\mathbb{X}$。接着，这又可以与 $\mathbb{X}$ 上的一个层 Q 相对应。定义 $f^*(P)=Q$。直接像函子和逆像函子构成伴随关系 $f^*:\mathbf{Sh(Y)}\rightleftarrows\mathbf{Sh(X)}:f_*$，其中 f^* 是左正合的（即保持有限极限）。这称为从 Sh(X) 到 Sh(Y) 的几何态射，记作 $f:\mathbf{Sh(X)}\to\mathbf{Sh(Y)}$。

记 $\mathfrak{Top}$ 为对象是拓扑斯的 2-范畴。拓扑斯 $\mathcal{E}$、$\mathcal{F}$ 之间，$\mathfrak{Top}$ 中的态射 $f:\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ 是一个几何态射；几何态射又是任意满足 f^* 左正合的伴随关系 $f^*:\mathcal{F}\rightleftarrows\mathcal{E}:f_*$。几何态射 f、g 之间，$\mathfrak{Top}$ 中的 2-胞腔 $f\Rightarrow g$ 是一个自然变换 $f^*\to g^*$。从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{F}$ 的几何态射范畴记作 $\mathbf{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})$。拓扑空间上的层范畴是一个 Grothendieck 拓扑斯，因此上一段中的构造给出一个函子 $\mathcal{T}:\mathbf{Top}\to\mathfrak{Top}$，其定义为 $\mathcal{T}(\mathbb{X})=\mathbf{Sh(X)}$，且 $\mathcal{T}(f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y})=(f:\mathbf{Sh(X)}\to\mathbf{Sh(Y)})$。

将 $\mathcal{T}(f:\mathbb{X}\to\mathbb{Y})=(f:\mathbf{Sh(X)}\to\mathbf{Sh(Y)})$ 应用于结 $K:\mathbb{I}\to\mathbb{K}$、同痕 $\sigma:\mathbb{I}\to\mathbb{K}$和不变量 $\nu:\mathbb{K}\to\mathbb{G}$，便可在 $\mathfrak{Top}$中对“结”“同痕”和“结不变量”作出诠释。反过来，也可以从 $\mathfrak{Top}$中相应类型的几何态射唯一地恢复结、同痕和不变量。事实上，函子 $\mathcal{T}:\mathbf{Top}\to\mathfrak{Top}$限制后，在饱和空间的全子范畴 $\mathfrak{sob}$ 与空间拓扑斯之间给出一个 2-范畴等价（见 [18], 推论 7.27）。在 $\mathfrak{sob}$中，只要对所有$x\in\mathbb{X}$，$f(x)\in\mathrm{cl}(\{g(x)\})$，就存在一个 2-胞腔 $f\Rightarrow g$，其中 $f,g:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$。这在 $\mathbf{Hom}_{\mathfrak{sob}}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ 上定义了一个偏序：当且仅当存在一个 2-胞腔$f\Rightarrow g$时，$f\le g$。若 $\mathbb{Y}$ 是饱和的，且 $f:\mathbf{Sh(X)}\to\mathbf{Sh(Y)}$ 是一个几何态射，则该等价将 f对应到一个连续函数 $f^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}}:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$，使得 $\mathcal{T}(f^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}})\cong f$。于是得到以下结果：

命题 2.1.1. 设 $f, \overline{f} \in$ Hom(Sh(X), Sh(Y))，其中 $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = (\mathbb{I}, \mathbb{K})$、$(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ 或 $(\mathbb{K}, \mathbb{G})$。设映射 $f^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}}$, $\overline{f}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 在等价 $\mathfrak{T}$ 下分别对应于 $f, \overline{f}$。则 $f \cong \overline{f}$ 当且仅当 $f^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}} = \overline{f}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}}$。
证明。由于 $\mathbb{Y} = \mathbb{K}$ 或 $\mathbb{G}$, $\mathbb{Y}$ 是豪斯多夫的，因此单点集合是闭集。如果 $g, h : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是连续的，且 $g \hat{O}\Rightarrow h$ 是一个 2-胞腔，那么对于所有 $x \in \mathbb{X}$，都有 $g(x) = h(x)$。因此，若 $f, \overline{f} \in$ Hom(Sh(X), Sh(Y)) 自然同构，则它们对应的连续函数 $f^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}}, \overline{f}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 相等。反过来，若 $f^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}} = \overline{f}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}}$，则 $f \cong \mathfrak{T}(f^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}}) = \mathfrak{T}(\overline{f}^{\mathbb{X}}_{\mathbb{Y}}) \cong \overline{f}$。□

因此，只要将自然同构的几何态射视为相同，就可以像在 Top 中那样在 $\mathfrak{Top}$ 中发展结理论。令 $\tau_0 : \{0\} \to \mathbb{I}$, $\tau_1 : \{1\} \to \mathbb{I}$ 为包含映射，并设 $0 = \mathfrak{T}(\tau_0)$, $1 = \mathfrak{T}(\tau_1)$。若存在几何态射 $\sigma :$ Sh(I) $\to$ Sh(K)，使得 $\sigma \bigcirc 0 \cong K$ 且 $\sigma \bigcirc 1 \cong \overline{K}$，则称两个几何态射 $K, \overline{K} :$ Sets $\to$ Sh(K) 同痕。命题 2.1.1 表明，$K, \overline{K} :$ Sets $\to$ Sh(K) 同痕，当且仅当 $K_{\mathbb{K}}, \overline{K}_{\mathbb{K}} : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$ 同痕。对于几何态射 $\nu :$ Sh(K) $\to$ Sh(G)，$\nu \bigcirc K \cong \nu \bigcirc \overline{K}$ 当且仅当 $\nu^{\mathbb{K}}_{\mathbb{G}} \bigcirc K_{\mathbb{K}} = \nu^{\mathbb{K}}_{\mathbb{G}} \bigcirc \overline{K}_{\mathbb{K}}$。因此，若 $K, K :$ Sets $\to$ Sh(K) 同痕，则 $\nu \bigcirc K \cong \nu \bigcirc K$。如有需要，可以将 $\mathbb{G}$ 中的公共值唯一地恢复为点 $\nu^{\mathbb{K}}_{\mathbb{G}} \bigcirc K_{\mathbb{K}} = \nu^{\mathbb{K}}_{\mathbb{G}} \bigcirc K_{\mathbb{K}}$。

因此，我们有结理论的一阶语言 $\mathfrak{L}_g$ 的两个模型（见 [28], 第 1.1 节或 [27], 第 X.1 节）。语言本身由一个纽结型 $\mathfrak{K}$、一个称为同痕的关系 $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{K} \times \mathfrak{K}$，以及一组称为不变量的函数符号 $\mathfrak{f} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{S}$ 组成，其中 $\mathfrak{S}$ 是值的型。在 Sets 中，标准几何模型 SG 将 $\mathfrak{K}$ 指派给 $\mathfrak{K}^{(SG)} = \mathbb{K}$。该模型将 $\mathfrak{I}$ 指派给等价关系 $\mathfrak{I}^{(SG)} \subseteq \mathfrak{K}^{(SG)} \times \mathfrak{K}^{(SG)}$，使得 $(K, \overline{K}) \in \mathfrak{I}^{(SG)}$ 当且仅当 K、$\overline{K}$ 位于 $\mathbb{K}$ 的同一道路连通分支中。每个函数符号 $\mathfrak{f}$ 都被指派给一个连续函数 $\mathfrak{f}^{(SG)} : \mathfrak{K}^{(SG)} \to \mathfrak{S}^{(SG)}$，其中 $\mathfrak{S}^{(SG)}$ 是带离散拓扑的某个集合。层论模型 ST 通过将每个 $K \in \mathbb{K}$ 与一个连续函数 $K : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$ 等同，并应用函子 $\mathfrak{T}$，从 SG 得到。这给出集合 $\mathfrak{K}^{(ST)}$。同痕关系 $\mathfrak{I}^{(ST)}$ 和函数符号 $\mathfrak{f}^{(ST)}$ 按照前一段的说明进行解释。这些观察表明：

定理 2.1.2。 ST 层论模型和 SG标准几何模型是几何结理论语言 $\mathfrak{L}_g$ 的同构模型。

最后，值得指出的是，$\mathbb{K}$ 的拓扑结构也可以从 Sh(K) 中恢复，这同样得益于 $\mathfrak{sob}$ 与空间拓扑斯之间的二范畴等价。此外，Sh(K) 的终对象 1 的子对象范畴作为 Heyting代数与 $\mathbb{K}$ 的开集格同构（见 [27], 命题 II.3.4）。

2.2. 图示模型。本节回顾结理论的几种图示模型，并介绍 Carter-Kamada-Saito模型的一种修改形式，后文将会用到。图示结理论的语言 $\mathfrak{L}_d$ 包含一个纽结图型 $\mathfrak{D}$、一个称为 Reidemeister等价的关系 $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$，以及一组函数符号 $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{S}$，称为不变量，其中 $\mathfrak{S}$ 再次表示值的型。图示结理论具有如下形式的公理：对于所有函数符号 $\mathfrak{f}$，$(\forall x_1, x_2)(\mathfrak{R}(x_1, x_2) \hat{O}\Rightarrow \mathfrak{f}(x_1) = \mathfrak{f}(x_2))$。标准图示模型 SD 将 $\mathfrak{D}^{(SD)}$赋予 $\mathbb{S}^2$上的定向纽结图集合。关系 $\mathfrak{R}^{(SD)} \subseteq \mathfrak{D}^{(SD)} \times \mathfrak{D}^{(SD)}$ 是包含所有 Reidemeister变换和平面同痕（或等价地，$\mathbb{S}^2$的保向微分同胚）的最小等价关系。Polyak的 [30] Reidemeister变换最小生成集描绘于图 2 顶部。关系 $\mathfrak{R}^{(SD)}$ 的一个等价类称为一个（定向）纽结类型。函数符号 $\mathfrak{f}$ 被赋予一个函数 $\mathfrak{f}^{(SD)} : \mathfrak{D}^{(SD)} \to \mathfrak{S}^{(SD)}$，该函数满足关于 $\mathfrak{f}$的公理。因此，它是纽结类型的不变量。

本文将 Kauffman 针对虚结图提出的图示纽结理论称为 Kauffman 虚图模型（KVD）。该模型为平面纽结图的集合赋予 $\mathfrak{D}^{(KVD)}$，其中

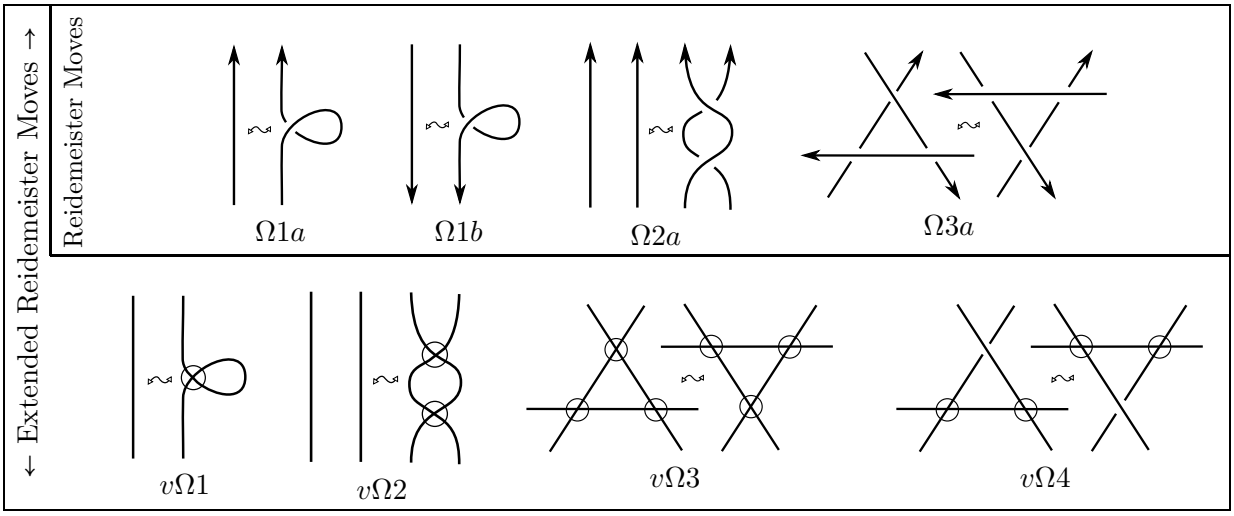


FIGURE 2. Reidemeister变换与扩展 Reidemeister 变换。

除两种常见的交叉外，还允许出现虚交叉（见图 3）。关系 $\mathfrak{R}^{(KVD)} \subseteq \mathfrak{D}^{(KVD)} \times \mathfrak{D}^{(KVD)}$ 是由扩展 Reidemeister 变换（见图 2）和平面同痕生成的最小等价关系。对于变换 $v\Omega 1 - v\Omega 4$，弧的方向任意指定。 $\mathfrak{R}^{(KVD)}$ 的等价类就是（有向）虚结类型。每个 $\mathfrak{f} : \mathfrak{D} \to \mathfrak{S}$ 都被赋予一个函数 $f^{(KVD)} : \mathfrak{D}^{(KVD)} \to \mathfrak{S}^{(KVD)}$，该函数在每种虚结类型上均为常数。

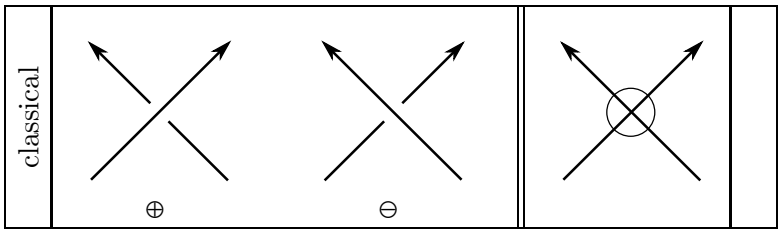


FIGURE 3. 交叉类型。

每个虚结图 X 都可以表示为某个紧致、连通且定向曲面 Ξ上的图表 D。简而言之，在X 的每个经典交叉处放置一个 0-柄（即一个圆盘 $\mathbb{D}^2$），并沿着 D的每条弧放置一个无扭转的 1-柄（即一个带 $\mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^1$）。在虚交叉处，各条弧上的带彼此上下交错穿过。0-柄与 1-柄的并集是一个支撑着纽结图 D的紧曲面 Ξ。见图 4。这样的有序对 (Ξ, D)，其中 D 是 Ξ的变形收缩，称为抽象结图（Kamada-Kamada [20]）。

通过将其扩展为由有序对 (Ξ, D) 构成的集合，可以将其构造为图示纽结理论的另一种模型，其中 Ξ 是任意紧致、连通的定向曲面，而 D 是 Ξ 上的纽结图。Carter-Kamada-Saito模型 (CKS) 将 $\mathfrak{D}^{(CKS)}$ 定义为这类有序对的集合。对于有序对 (Ξ_1, D_1)、$(\Xi_2, D_2) \in \mathfrak{D}^{(CKS)}$，若存在一个紧致、连通的定向曲面$\Xi_{1.5}$，以及保向嵌入 $\upsilon_1 : \Xi_1 \to \Xi_{1.5}$、$\delta_2 : \Xi_2 \to \Xi_{1.5}$，使得 $\upsilon_1(D_1)$ 与$\delta_2(D_2)$ 通过 Reidemeister变换关联，或二者相等，则记作 $(\Xi_1, D_1) \overset{s}{\leftrightarrow} (\Xi_2, D_2)$。这称为稳定Reidemeister变换。将 $\mathfrak{R}^{(CKS)} \subseteq \mathfrak{D}^{(CKS)} \times \mathfrak{D}^{(CKS)}$ 定义为包含所有稳定Reidemeister变换的最小等价关系。函数符号赋给那些在稳定Reidemeister变换下保持不变的函数 $\mathfrak{f}^{(CKS)} : \mathfrak{D}^{(CKS)} \to \mathfrak{S}^{(CKS)}$

这些函数在稳定Reidemeister变换下保持不变。Carter、Kamada 和 Saito [10] 证明，$\mathfrak{R}^{(KVD)}$ 与 $\mathfrak{R}^{(CKS)}$ 的等价类之间存在双射。

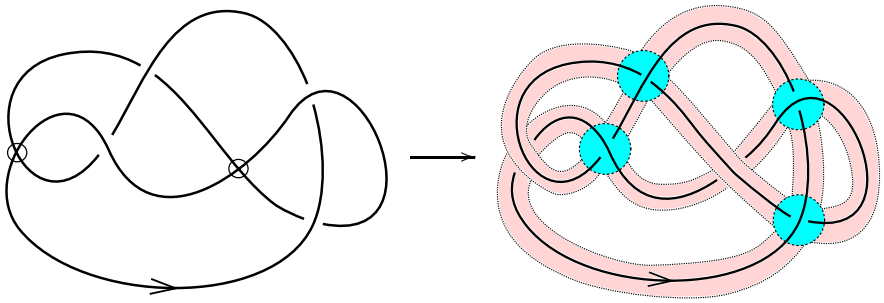


FIGURE 4. 虚结图 X （左）及其抽象结图（Ξ, D）（右 ）.

接下来从虚结空间恢复出的图示模型与 CKS 模型相近。为确保范畴 VK 性质良好，需要对支撑曲面的集合稍作修正。修正的 CKS 模型（CKS^*）将 $\mathfrak{D}^{(CKS^*)}$ 赋给由配对（Σ, D）构成的集合，其中 Σ是带有 $\partial\Sigma = \varnothing$ 的光滑定向曲面，而 D 是 Σ上的纽结图。这里所说的曲面，是第二可数且豪斯多夫的二维流形。曲面不一定连通。注意，这类曲面之间满足 $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2 = \varnothing$ 的光滑保向嵌入 $\upsilon : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ 是开映射。稳定 Reidemeister 变换（Σ_1, D_1） $\overset{s}{\leftrightsquigarrow}$ （Σ_2, D_2）的定义与前相同，唯一的区别是所有映射均定义在无边界定向曲面之间。与之前一样，定义 $\mathfrak{R}^{(CKS^*)} \subseteq_{\mathfrak{D}^{(CKS^*)} \times \mathfrak{D}^{(CKS^*)}}$ 为包含所有稳定 Reidemeister 变换的最小等价关系。

命题 2.2.1。 $\mathfrak{R}^{(CKS)}$ 与 $\mathfrak{R}^{(CKS^*)}$的等价类之间存在一一对应。

证明。假设 $((\Xi, D), (\Xi, \overline{D})) \in \mathfrak{R}^{(CKS^*)}$。那么存在一个稳定Reidemeister变换的有限序列：

$$(\Xi, D) = (\Xi_1, D_1) \overset{s}{\leftrightsquigarrow} (\Xi_2, D_2) \overset{s}{\leftrightsquigarrow} \cdots \overset{s}{\leftrightsquigarrow} (\Xi_n, D_n) = (\overline{\Xi}, \overline{D}).$$

每个中间曲面 Ξ_i 都可以替换为 $\Sigma_i = \Xi_i \setminus \partial\Xi_i$。这不会影响Reidemeister变换，因此可得 $((\Xi \setminus \partial\Xi, D), (\overline{\Xi} \setminus \partial\overline{\Xi}, \overline{D})) \in \mathfrak{R}^{(CKS^*)}$。反过来，假设 $((\Sigma, D), (\overline{\Sigma}, \overline{D})) \in \mathfrak{R}^{(CKS^*)}$。那么存在一个稳定 Reidemeister 变换的有限序列：

$$(\Sigma, D) = (\Sigma_1, D_1) \overset{s}{\leftrightsquigarrow} (\Sigma_2, D_2) \overset{s}{\leftrightsquigarrow} \cdots \overset{s}{\leftrightsquigarrow} (\Sigma_n, D_n) = (\overline{\Sigma}, \overline{D}).$$

在 Σ_i 上的每个纽结图都包含于 Σ_i上的一个紧致连通子曲面 Ξ_i 中。每个Reidemeister变换也都发生在纽结图的一个紧邻域内。因此，对于 $1 \le i \le n-1$，可得 $((\Xi_i, D_i), (\Xi_{i+1}, \overline{D}_{i+1})) \in \mathfrak{R}^{(CKS)}$，进而 $((\Xi_1, D_1), (\Xi_n, \overline{D}_n)) \in \mathfrak{R}^{(CKS)}$。这就证明了该结果，因为用 $\Xi_i \setminus \partial\Xi_i$ 替换 Σ_i 也会保留 $\mathfrak{R}^{(CKS^*)}$等价类。□

3. THE VIRTUAL KNOT SPACE

3.1. 预备知识。类比经典情形，范畴 VK 的对象应为开集。这些开集取自所有光滑嵌入空间 $\mathbb{K}(\Sigma)$ $K : \mathbb{S}^1 \to \Sigma \times \mathbb{R}$，其中 Σ 是带有 $\partial\Sigma = \varnothing$ 的定向曲面（见第 2.2 节）。在定义虚结空间之前，我们先汇集一些关于 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 的事实。对于 $\mathbb{K}$，首先利用射流映射 $j^\infty : C^\infty(\mathbb{S}^1, \Sigma \times \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{S}^1, J^\infty(\mathbb{S}^1, \Sigma \times \mathbb{R}))$，在 $C^\infty(\mathbb{S}^1, \Sigma \times \mathbb{R})$ 上定义一个拓扑，其中 $C^0(\mathbb{S}^1, J^\infty(\mathbb{S}^1, \Sigma \times \mathbb{R}))$ 赋予紧开拓扑。同样， $C^\infty(S^1, \Sigma \times \mathbb{R})$ 是一个无限维光滑流形，并且 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 在 $C^\infty(\mathbb{S}^1, \Sigma \times \mathbb{R})$ 中开且稠密。为求完整，列出以下结果。

命题 3.1.1。如果纽结 $K, \overline{K} \in \mathbb{K}(\Sigma)$ 属于同一道路连通分支，那么 $K, \overline{K}$ 在 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中环境同痕。

证明。由于 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 是光滑流形， K 与 K 之间的连续道路 $\sigma : \mathbb{I} \to \mathbb{K}(\Sigma)$ 可以用一条光滑道路逼近。$\overline{\mathbb{K}}(\Sigma)$ 中的光滑道路给出光滑同痕 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \Sigma \times \mathbb{R}$。根据同痕延拓定理（[16], 定理 8.1.3）， K 与 K 环境同痕。□

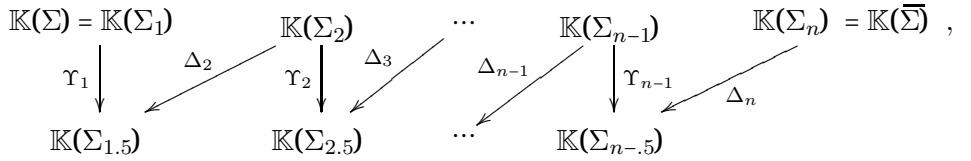
现在假设 Σ_1、Σ_2 是无边界定向曲面，且 $\psi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ 是保向嵌入。由于 $\partial\Sigma_1 = \varnothing$， ψ 是开集。令 $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为恒等映射。映射 $\psi \times \mathrm{id} : \Sigma_1 \times \mathbb{R} \to \Sigma_2 \times \mathbb{R}$ 通过 $\Psi(K) = (\psi \times \mathrm{id}) \bigcirc K$ 定义了一个映射 $\Psi : \mathbb{K}(\Sigma_1) \to \mathbb{K}(\Sigma_2)$。直接验证可知，对于 $\mathbb{K}(\Sigma_1)$ 和 $\mathbb{K}(\Sigma_2)$ 上给定的拓扑，该映射 Ψ 是连续、开且单射的。注意，假设曲面 Σ_1、Σ_2 的边界为空具有重要意义：这是为了确保所有这类映射 ψ 和 Ψ 都是开映射。

记号 3.1.2（大写与小写映射）。如果 $\psi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ 是曲面的嵌入，我们将使用大写字母 Ψ 表示开映射 $\Psi : \mathbb{K}(\Sigma_1) \to \mathbb{K}(\Sigma_2)$，其中 $\Psi(K) = (\psi \times \mathrm{id}) \bigcirc K$。反过来，假设表示映射 $\Psi : \mathbb{K}(\Sigma_1) \to \mathbb{K}(\Sigma_2)$ 的大写字母 Ψ 都具有这种形式。小写字母 ψ 表示相应的嵌入 $\psi : \Sigma_1 \to \Sigma_2$。

在下一小节中，我们将使用大写映射 Ψ 来正式定义 VK 的态射。由于 Ψ 是开映射、连续且单射，因此直观上可将其视为广义包含映射，类似于 $\mathbb{K}$ 的开集范畴 K 中的态射。如果 $U_1 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_1)$ 和 $K \in \Psi(U_1) \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_2)$，那么 U_1 就可以视为 K 的广义邻域。

我们以一个技术引理结束本小节。接下来（见定理 5.2.5）将用它证明，虚结理论的几何模型能够还原其图示模型 CKS^*。

引理 3.1.3. 假设 (Σ, D)、$(\overline{\Sigma}, \overline{D}) \in \mathfrak{D}^{(CKS^*)}$，并令 $K \in \mathbb{K}(\Sigma)$、$\overline{K} \in \mathbb{K}(\overline{\Sigma})$ 分别为具有图表 D、$\overline{D}$ 的结。那么，(Σ, D)、$(\overline{\Sigma}, \overline{D})$ 具有相同的虚结类型，当且仅当存在一个由曲面和大写映射构成的 Top 中的如下形式的图表：



以及道路连通分支 $C_1 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_1)$、$C_{1.5} \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_{1.5}) \ldots, C_n \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_n)$，使得 $K \in C_1$、$\overline{K} \in C_n$，并且对于 $1 \le i \le n-1$， $\Upsilon_i(C_i) \subseteq C_{i+.5}$、$\Delta_{i+1}(C_{i+1}) \subseteq C_{i+.5}$。

证明。对于正向，假设存在一列 $(\Sigma, D) = (\Sigma_1, D_1) \overset{s}{\rightsquigarrow} (\Sigma_2, D_2) \overset{s}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{s}{\rightsquigarrow} (\Sigma_n, D_n) = (\Sigma, D)$ 稳定 Reidemeister 变换。对于每个整数 i, $1 \le i \le n-1$，存在一个曲面 $\Sigma_{i+.5}$ 以及嵌入 $\upsilon_i : \Sigma_i \to \Sigma_{i+.5}$, $\delta_{i+1} : \Sigma_{i+1} \to \Sigma_{i+.5}$，使得 $\upsilon_i(D_i)$ 和 $\delta_i(D_{i+1})$ 相等或 Reidemeister 等价。设 $K_i \in \mathbb{K}(\Sigma_i)$ 是一个具有图表 D_i 的结。若 $\upsilon_i(D_i)$ 和 $\delta_i(D_{i+1})$ Reidemeister 等价，则 $\Upsilon_i(K_i)$ 和 $\Delta_i(K_{i+1})$ 环境同痕，因此位于 $\mathbb{K}(\Sigma_{i+.5})$ 的同一道路连通分支中。于是存在道路连通分支 $C_i \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_i)$、$C_{i+.5} \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_{i+.5})$、$C_{i+1} \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_{i+1})$，使得 $K_i \in C_i$、$K_{i+1} \in C_{i+1}$ 和 $\Upsilon_i(C_i) \subseteq C_{i+.5}$、$\Delta_{i+1}(C_{i+1}) \subseteq C_{i+.5}$。逆向蕴含来自一个众所周知的事实：同一加厚曲面中的两个结环境同痕，当且仅当它们具有 Reidemeister 等价的图表。□

3.2. 虚结 site。现在可以将范畴 VK 定义为这样一个范畴：其对象是广义邻域，其态射是广义包含。也就是说，VK 的一个对象是一个开集 $U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$，其中 Σ 遍历所有无边界定向曲面。VK 中从 $U_1 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_1)$ 到 $U_2 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_2)$ 的态射对应于一个首字母大写的映射 $\Psi = \psi \times \mathrm{id} : \mathbb{K}(\Sigma_1) \to \mathbb{K}(\Sigma_2)$

使得 $\Psi(U_1) \subseteq U_2$。态射 $\Psi : U_1 \to U_2$ 应被视为从集合 U_1 到集合 U_2的函数。因此，如果 Ψ, $\Phi : U_1 \to U_2$ 是平行态射，并且对所有 $K_1 \in U_1$，都有 $\Psi(K_1) = \Phi(K_1)$，那么Ψ 和 Φ 在 VK 中是同一个态射。特别地，空集 $\varnothing$是 VK 中的始对象。 $\Phi : U \to V$与 $\Psi : V \to W$的复合定义为 $\Psi \bigcirc \Phi = (\psi \bigcirc \phi) \times \mathrm{id}$。接下来的两个结果将确立 VK 的一些有用性质。

引理 3.2.1. 设 $U_1 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_1)$ $U_2 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_2)$ 为对象，且 $\Psi = \psi \times \mathrm{id} : U_1 \to U_2$ 是 VK 中的一个态射。那么 Ψ 可分解为:

$$\Psi : U_1 \xrightarrow{\Psi' = \psi' \times id} U_2' \xrightarrow{I = \iota \times id} U_2 ,$$

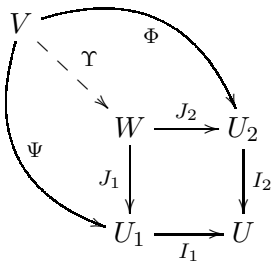
其中 $U_2' \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_2')$、 $\Sigma_2' \subseteq \Sigma_2$ 是一个子曲面， $\psi' : \Sigma_1 \to \Sigma_2'$ 是保向微分同胚， $\iota : \Sigma_2' \to \Sigma_2$ 是包含映射， $\psi = \iota \bigcirc \psi'$，且 $\Psi' : U_1 \to U_2'$ 是 VK 中的一个同构。

证明. 由于 ψ 是一个嵌入，且 Σ_1 是无边界曲面， $\Sigma_2' = \mathrm{im}(\psi)$ 是 Σ_1 的一个子曲面。定义 $\iota : \Sigma_2' \to \Sigma_2$ 为包含映射，并对所有 $z \in \Sigma_1$ 定义 $\psi' : \Sigma_1 \to \Sigma_2'$，使得 $\psi'(z) = \psi(z)$。于是 ψ' 是一个保向微分同胚，且 $\psi = \iota \bigcirc \psi'$。此外， $\Psi' : \mathbb{K}(\Sigma_1) \to \mathbb{K}(\Sigma_2')$ 是一个微分同胚。令 $U_2' = \Psi'(U_1)$。那么存在一个态射 $\Psi' : U_1 \to U_2$，以及一个态射 $(\Psi')^{-1} : U_2' \to U_1$， 它对应于 $\Psi' : \mathbb{K}(\Sigma_1) \to \mathbb{K}(\Sigma_2')$ 的逆微分同胚。这些态射满足 $\Psi' \bigcirc (\Psi')^{-1} = 1_{U_2'}$ 和 $(\Psi')^{-1} \bigcirc \Psi' = 1_{U_1}$，因此 Ψ' 是一个同构。□

注记 3.2.2. 假设 $I : U' \to U$ 是一个态射，其中 I 是按照引理 3.2.1 中的方式由包含映射 $\iota : \Sigma' \to \Sigma$ 大写化得到的。我们常常会宽泛地使用术语，直接称 I 本身为包含映射。

定理 3.2.3. 范畴 VK 有拉回。

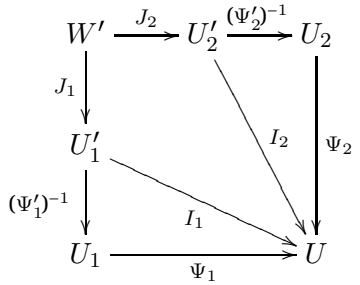
证明。首先考虑范畴 VK 中的图表 $U_1 \xrightarrow{I_1} U \xleftarrow{I_2} U_2$，其中 $U_1 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_1)$、 $U_2 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_2)$、 $U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$，以及 Σ_1、$\Sigma_2 \subseteq \Sigma$ 均为子曲面。我们还假设 $i = 1$、2、 $I_i = \iota_i \times \mathrm{id} : \Sigma_i \times \mathbb{R} \to \Sigma \times \mathbb{R}$，其中 ι_i 是对应于 $\Sigma_i \subseteq \Sigma$ 的包含映射。另请注意， Σ_i 是 Σ 的开子集。因此， $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 是 Σ_1、 Σ_2 和 Σ 的子曲面。现在，若 $I_1(U_1) \cap I_2(U_2) = \varnothing$，我们可以取 $\varnothing$ 作为拉回。否则， $I_1(U_1) \cap I_2(U_2)$ 中的纽结的像都落在 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 上。记这些落在 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 上的纽结构成的集合为 W，于是 $W \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$。令 $J_1 : W \to U_1$、 $J_2 : W \to U_2$ 表示由包含映射诱导的态射。我们断言，下方的方块是一个拉回。假设 $V \subseteq \mathbb{K}(\Gamma)$，且 $\Phi = \phi \times \mathrm{id} : V \to U_2$、 $\Psi = \psi \times \mathrm{id} : V \to U_1$ 是使图表交换的映射。



由于 I_1 和 I_2 都是包含映射，这意味着对于所有 $K \in V$， $\Psi(K)$ 和 $\Phi(K)$ 是位于 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$上方的同一个结，且它们的像包含于 $W \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ 中。令 $\upsilon = \psi : \Gamma \to \Sigma_1 \cap \Sigma_2$。于是，在 VK 中存在一个态射 $\Upsilon : V \to W$，使得对于所有 $K \in V$， $J_1 \bigcirc \Upsilon(K) = \Psi(K)$，且 $J_2 \bigcirc \Upsilon(K) = \Phi(K)$。由于任何其他满足泛性质的态射，对于每个 $K \in V$，也必须与 Ψ 一致，因此根据我们关于平行箭头的约定， Υ 是唯一的。由此，上图是一个拉回。

现在考虑图表 $U_1 \xrightarrow{\Psi_1} U \xleftarrow{\Psi_2} U_2$ 的一般情形。对 Ψ_1、Ψ_2 都应用引理 3.2.1。于是，对于某个开集 $U_i' \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_i')$， Ψ_i可分解为 $U_i \xrightarrow{\Psi_i'} U_i' \xrightarrow{I_i} U$，且 Ψ_i' 是一个

同构 在 VK 中。前一种情形表明，存在如下的 W'，它是 I_1 在 I_2 上的拉回 ：



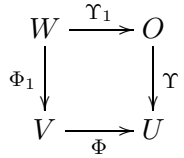
因此，左上方拉回方块的泛性质意味着外侧方块也是一个拉回。由此，VK 具有拉回。□

接下来，我们在 VK 上定义一个 Grothendieck 拓扑 $J_{\mathbf{VK}}$。回顾一下，小范畴 C 中对象 C 上的筛，是一组 S 具有共同余域 C 的态射，并且在右复合下封闭：若 $(f : B \to C) \in S$ 且 $g : A \to B$，则 $f \bigcirc g \in S$。Grothendieck 拓扑 $J_{\mathbf{C}}$ 为 C 的每个对象 C 指定一组筛 $J_{\mathbf{C}}(C)$，称为覆盖筛，并满足某些公理（参见 [27], III.2，定义 1）。这些公理将拓扑空间的开覆盖推广到了范畴。特别地，对于一个拓扑空间，可以将其开集格上的开覆盖拓扑视为一个 Grothendieck 拓扑。因此，对于结空间 $\mathbb{K}$，筛 S 属于 $J_{\mathbf{K}}(U)$，当且仅当 $U = \bigcup_{(V \subseteq U) \in S} V$。由于 VK 的态射 $\Psi : V \to U$ 是广义包含，自然地，我们将 VK 中对象 U 上的筛 S 定义为覆盖筛，当且仅当 U 是其像的并。因此，对于 VK 中的对象 U，筛 S 在 U 上属于 $J_{\mathbf{VK}}(U)$，当且仅当：

$$U = \bigcup_{(\Psi : V \to U) \in S} \Psi(V).$$

引理 3.2.4. $J_{\boldsymbol{VK}}$ 是 VK 上的 Grothendieck 拓扑。

证明。设 $U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ 是 VK 中的一个对象。U 上的极大筛 $\{\Psi : V \to U | \mathrm{cod}(\Psi) = U\}$ 属于 $J_{\mathbf{VK}}(U)$，因为它包含 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 中 U 的任意开覆盖的所有包含态射。这是第一条公理。对于第二条公理（稳定性），必须证明对于任意态射 $\Phi : V \to U$ 和 $S \in J_{\mathbf{VK}}(U)$，都有 $\Phi^*(S) \in J_{\mathbf{VK}}(V)$，其中 $\Phi^*(S) = \{\Psi | \Phi \bigcirc \Psi \in S\}$。接下来需要证明 $\bigcup_{\Psi \in \Phi^*(S)} \Psi(\mathrm{dom}(\Psi)) = V$。设 $K \in V$。由于 S 覆盖 U，存在一个 $\Upsilon : O \to U$ 属于 S，使得 $\Phi(K) \in \Upsilon(O)$。现在将 Υ 沿 Φ 拉回，得到以下交换图：



引理 3.2.3 中拉回的构造意味着 $K \in \Phi_1(W)$。由于 S 是一个筛，$\Phi \bigcirc \Phi_1 \in S$，因此 $\Phi_1 \in \Phi^*(S)$。所以，$\bigcup_{\Psi \in \Phi^*(S)} \Psi(\mathrm{dom}(\Psi)) = V$，稳定性公理得以满足。最后，我们必须证明传递性：若 $S \in J_{\mathbf{VK}}(U)$，R 是 U 上的一个筛，且对所有 $\Phi : V \to U$ 属于 S，都有 $\Phi^*(R) \in J_{\mathbf{VK}}(V)$，则 $R \in J_{\mathbf{VK}}(U)$。由于对所有 $\Phi : V \to U$ 属于 S，都有 $\Phi^*(R) \in J_{\mathbf{VK}}(V)$，因此 V 是开集 $\Upsilon(W)$ 的并，其中 $\Upsilon : W \to V$ 且 $\Phi \bigcirc \Upsilon \in R$。于是，由于 S 覆盖 U，$U = \bigcup_{\Phi \in S} \Phi(V) = \bigcup_{\Phi \in S} \Phi(\bigcup_{\Upsilon \in \Phi^*(R)} \Upsilon(W)) = \bigcup_{\Phi \circ \Upsilon \in R} \Phi \bigcirc \Upsilon(W)$。因此，$R \in J_{\mathbf{VK}}(U)$。□

3.3. 虚纽结理论的几何模型。几何结理论语言的一个模型 VG $\mathfrak{L}_g$，可由结理论的层论模型 ST 得到：只需将位点 (K $J_{\mathbf{K}}$) 上的层全部替换为位点 (VK $J_{\mathbf{VK}}$) 上的层。由此得到以下对“结空间”“结”“同痕”和“结不变量”的诠释。

定义 3.3.1（虚拟结空间）。虚拟结空间是位点 (VK $J_{\mathbf{VK}}$) 上层所构成的 Grothendieck 拓扑斯。为简便起见，我们将 Sh(VK $J_{\mathbf{VK}}$) 简写为 Sh(VK)。

定义 3.3.2（虚结）。虚结是一个几何态射 K : 集合 → Sh(VK)。若两个虚结 K_1, K_0 : 集合 → Sh(VK) 在由此类几何态射组成的范畴 Hom(Sets, Sh(VK)) 中同构，则认为它们相同。

定义3.3.3（虚同痕）。虚同痕是一个几何态射 σ : Sh(I) →Sh(VK)。若两个虚同痕 σ_1, σ_0 : Sh(I) → Sh(VK) 在由此类几何态射组成的范畴 Hom(Sh(I), Sh(VK)) 中同构，则认为它们相同。若 $0, 1$: 集合 →Sh(I) 是~~与包含~~映射 $t_0 : \{0\} \to \mathbb{I}, t_1 : \{1\} \to \mathbb{I}$ 相对应的几何态射，我们就称 σ是虚结 $\sigma \bigcirc\ 0$: 集合 →Sh(VK) 与 $\sigma \bigcirc 1$: 集合 →Sh(VK) 之间的虚同痕。

定义 3.3.4（虚结不变量）。对于一个带有离散拓扑的集合，虚结不变量是一个几何态射 ν : Sh(VK) → Sh(G)。如果两个虚结不变量在几何态射范畴 Hom(Sh(VK),Sh(G)) 中同构，则认为它们相同。

于是 VG 将虚结集合映射到)，将由虚同痕生成的等价关系映射到)$\subseteq \mathfrak{R}^{(VG)} \times \mathfrak{R}^{(VG)}$，而函数符号的解释与第 2.1 节中的相同。

4. Virtual knots

4.1. 变空间结。再次考虑空间 $\mathbb{K}$ 中的结。结是 $\mathbb{K}$中的一个点；由于 $\mathbb{K}$ 是豪斯多夫的，它是其所有邻域交集中的唯一点。因此， K 中的结可以识别为 K 中由满足「是 K 在$\mathbb{K}$中的邻域」这一条件的对象构成的子范畴。这可以借助范畴论中的两个定义方便地表述：元素范畴和连通范畴。如果 F : C →Sets 是一个协变函子，那么$\int_{\mathbf{C}} F$的元素范畴是一个范畴，其对象为有序对 (C, c)，其中 $c \in F(C)$；其态射 $(C_1, c_1) \to (C_2, c_2)$ 对应于 C 中满足 $F(f)(c_1) = c_2$ 的态射 $f : C_1 \to C_2$。下文常将 $F(f)(c)$ 简写为 $f \cdot c$。若范畴 C 中任意两对对象 C、$\overline{C}$ 都可以通过箭头路径相连，则称 C 为连通范畴。所谓箭头路径，是指如下由对象和箭头组成的有限序列：

$$C = C_1 \xrightarrow{u_1} C_{1.5} \xleftarrow{d_2} C_2 \xrightarrow{u_2} \cdots \xleftarrow{d_{n-1}} C_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} C_{n-.5} \xleftarrow{d_n} C_n = \overline{C}$$

箭头的方向无关紧要，因为通过添加方向适当的恒等箭头，任何路径都可以变成交替的。C 的一个连通分支是一个极大的连通子范畴。

对于由 $\mathbb{K}$ 的开集构成的范畴 K，令 F : K → Sets 为遗忘函子，它将对象 U 映射为其中所包含的纽结的集合，并将 K 的每个箭头 $U \to V$ 映射为集合的包含映射。

命题 4.1.1. 纽结 $K \in \mathbb{K}$ 与 $\int_{\mathbf{K}} F$ 的连通分支一一对应。

证明. 对于一个纽结 $K \in \mathbb{K}$， $\int_{\mathbf{K}} F$ 中存在一个全子范畴，由满足U 是 K 的邻域的那些对象 (U, K) 构成。这个子范畴是连通的，因为对象 (U, K) 和 (V, K) 可由路径 (U, K) (U, K) $(U \cap V, K)$ $\longleftarrow$ $\longrightarrow$ (V, K) (V, K)~~)~~连接。此外，该子范畴是极大的，因为~~K 中~~的所有箭头都是包含映射。因此，它是 $\int_{\mathbf{K}} F$ 的一个连通分支。另一方面，如果 (U, K) 和 (V, J) 属于 $\int_{\mathbf{K}} F$ 的同一个连通分支，那么必有 $K = J$，同样是因为 K 中的所有箭头都是包含映射。□

现在，将这一构造应用于 VK。令 F :VK → Sets 表示遗忘函子，它将 VK 中的对象映射到其底层纽结集合，并将每个态射 Ψ 映射为其底层单射。

定义 4.1.2（变空间结）。变空间结是 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的一个连通分支。对于结 $K \in U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$，令 V_K表示满足 $(U, K) \in \mathrm{obj}(\mathrm{V}_K)$ 的变空间结。

细心的读者会注意到，连通范畴的定义与稳定 Reidemeister 等价的定义之间存在形式上的相似性（参见第 2.2 节）。假设我们有一系列稳定 Reidemeister 变换：

$$(\Sigma_1, D_1) \xrightarrow{\upsilon_1} (\Sigma_{1.5}, D_{1.5}) \xleftarrow{\delta_2} (\Sigma_2, D_2) \xrightarrow{\upsilon_2} \cdots \xleftarrow{\delta_{n-1}} (\Sigma_{n-1}, D_{n-1}) \xrightarrow{\upsilon_{n-1}} (\Sigma_{n-.5}, D_{n-.5}) \xleftarrow{\delta_n} (\Sigma_n, D_n),$$

其中 $\upsilon_1(D_1) = D_{1.5} = \delta_2(D_2)$，$\upsilon_2(D_2) = D_{2.5} = \delta_3(D_3)$,....., $\upsilon_{n-1}(D_{n-1}) = D_{n-.5} = \delta_n(D_n)$。因此，每一步唯一可能的变化就是改变底层曲面。适当地选择具有图表 D_i 的结 K_i，并令 $U_i = \mathbb{K}(\Sigma_i)$，我们便得到 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 中的一条箭头路径：

$$(U_1, K_1) \xrightarrow{\Upsilon_1} (U_{1.5}, K_{1.5}) \xleftarrow{\Delta_2} (U_2, K_2) \xrightarrow{\Upsilon_2} \cdots \xleftarrow{\Delta_{n-1}} (U_{n-1}, K_{n-1}) \xrightarrow{\Upsilon_{n-1}} (U_{n-.5}, K_{n-.5}) \xleftarrow{\Delta_n} (U_n, K_n),$$

其中 $\Upsilon_1(K_1) = K_{1.5} = \Delta_2(K_2)$，$\Upsilon_2(K_2) = K_{2.5} = \Delta_3(K_3)$,....., $\Upsilon_{n-1}(K_{n-1}) = K_{n-.5} = \Delta_n(K_n)$。因此，变空间结就是一个固定的结，以及它在各种加厚曲面中的所有呈现方式。此外，作为元素范畴 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的一个分量来看，变空间结的描述与经典结完全相同。因此，变空间结将三个看似不同的概念联系起来：$\mathbb{R}^3$ 中的几何结、虚结图，以及（如下一小节将要说明的）虚结空间中的点。

4.2 虚结与变空间结。现在我们证明，变空间结（定义 4.1.2）与虚结（定义 3.3.2）一一对应。证明将借助几何态射范畴 Hom(Sets, Sh(VK)) K : Sets →Sh(VK) 与连续滤子函子范畴 A :VK → Sets 之间的等价（见 [27], 第 VII.1、~~VII.2、~~ VII.5 和 VII.6 节）。回顾一下，协变函子 $A : \mathsf{C} \to$ Sets 是滤过的（[27], 第 VII.6 节，定义 2），若满足以下条件。

（i）对于某个对象 C，C 中的 $A(C) \neq \varnothing$。

（ii）若 $b \in A(B)$ 且 $c \in A(C)$，则 C 中存在一个图表 $B \xleftarrow{f} D \xrightarrow{g} C$，以及一个 $d \in A(D)$，使得 $f \cdot d = b$ 且 $g \cdot d = c$。（iii）若 f、$g : C \to D$ 满足：对于某个 $c \in A(C)$，有 $f \cdot c = g \cdot c$，则存在一个态射 $e : B \to C$ 和一个 $b \in A(B)$，使得 $f \bigcirc e = g \bigcirc e$ 且 $e \cdot b = c$。态射 e 称为 f、g 的等化子。

此外，若 (C $J_{\mathbf{C}}$) 是一个位点，则滤子函子 $A : \mathsf{C} \to$ 集合在满足以下条件时是连续的：A 将每个覆盖筛映射为集合中的一个联合满态射函数族。因此，若 $S \in J_{\mathbf{C}}(U)$ 且 $u \in A(U)$，则存在一个 $(f : V \to U) \in S$，以及 $v \in A(V)$，使得 $A(f)(v) = u$。

假设 A :VK → 集合是连续且滤过的。首先要证明 A 确定一个变空间结。“确定”一词的含义将在下面的引理和定义中阐明。首先引入一些记号。假设对于 VK 中某个对象$U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$，有 $A(U) \neq \varnothing$。对于每个 $u \in A(U)$，定义：

$$S_u = \{\Psi : V \to U | \Psi \cdot v = A(\Psi)(v) = u \text{ for some } v \in A(V)\}.$$

由于 A 将覆盖筛映射为满态射族，因此对于每个 $u \in A(U)$，都有 $S_u \neq \varnothing$。下一个引理将说明，S_u 中所有态射的像都交于同一个结。

引理 4.2.1. $\bigcap_{(\Psi:V\to U)\in S_u} \Psi(V) = \{K\}$，其中 $K \in U$ 是某个结。

证明。假设 $\bigcap_{\Psi\in S_u} \Psi(V) = \varnothing$。那么对于每个 $K \in U$，都存在一个映射 $\Phi_K : V_K \to U$，使得 $K \in \Phi_K(V_K)$，且 u不在 $A(\Phi_K)$ 的像中。令 S为由这些映射 Φ_K 生成的筛，即形如 $\Phi_K \bigcirc \Upsilon$ 的态射集合，其中 $\Upsilon : W \to V_K$。由于对所有 $K \in U$，都有 $K \in \Phi_K(V_K)$，故 $S \in J_{\mathbf{VK}}(U)$。但 A 并未将 S 映射为满态射族。因此 $\bigcap_{\Psi\in S_u} \Psi(V) \neq \varnothing$。

现在假设 $K_1, K_2 \in \bigcap_{\Psi\in S_u} \Psi(V)$ 和 $K_1 \neq K_2$。由于 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 是豪斯多夫的，因此存在互不相交的开邻域 $V_1 \subseteq U$（包含 K_1）和 $V_2 \subseteq U$（包含 K_2）。此外，由于单点集是

闭集，$\{V_1, V_2, V_3 = U \setminus \{K_1, K_2\}\}$ 是 U 的一个开覆盖。考虑由三个包含态射 $I_j : V_j \to U$（对应于 $j = 1$、2、3）生成的 U 的覆盖筛 S。现在，A 将覆盖筛映射为满态射族，因此必定存在 S 中的一个态射 $\Psi : W \to U$，使得对某个$w \in A(W)$，有 $\Psi \cdot w = u$。因此，$\Psi \in S_u$。由于 $\Psi \in S$，它必定经由 V_1、V_2 或 V_3 中的一个分解。然而，Ψ 不可能经由 V_3 分解，因为它的像必须同时包含 K_1 和 K_2。同理，Ψ 不可能经由 V_1 分解，因为它的像必须包含 K_2。类似地，Ψ 不可能经由 V_2 分解。这就产生了矛盾，所以必有 $K_1 = K_2$。□

定义 4.2.2. 对于连续滤子函子 $A : \mathbf{VK} \to \mathbf{Sets}$，$U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$，$u \in A(U) \neq \varnothing$，$\bigcap_{\Psi \in S_u} \Psi(V)$ 中的结称为由 $u \in A(U)$ 确定的 U 中的结。

因此，必须证明由连续滤子函子确定的结构成 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的一个连通分支。下文将陈述这一点，但证明暂且稍后给出。

引理 4.2.3. 设 $A : \mathbf{VK} \to \mathbf{Sets}$ 连续且滤过。令 V 为 $\int_{\boldsymbol{VK}} F$ 的全子范畴，其对象为 (U, K)，并满足：K 是由某个 $u \in A(U)$ 确定的 U 中的结。那么 V 是一个变空间结。

证明。见第 4.3 节 □

由于虚结是 Sh(VK) 中按自然同构视为等价的点，因此还必须证明，同构的连续滤子函子确定相同的变空间结。下面给出这一结果，请与命题 2.1.1 的证明进行比较。

引理 4.2.4. 若 $A, B : \mathbf{VK} \to$ 集合 是连续滤子函子，且存在自然变换 $\alpha : A \to B$，则 A 和 B 确定相同的变空间结。

证明. 假设 $K \in U$ 由 $u \in A(U)$ 确定。根据引理 4.2.3，只需证明 (U, K) 是由 B确定的 $\int_{\mathbf{VK}} F$的连通分支中的一个对象。定义：

$$S_u^A = \{\Phi : W \to U | \exists a \in A(W) \text{ s.t. } A(\Phi)(a) = u\}, \text{ and}$$
$$S_{\alpha_U(u)}^B = \{\Phi : W \to U | \exists b \in B(W) \text{ s.t. } B(\Phi)(b) = \alpha_U(u)\}.$$

现在，若 $\Phi \in S_u^A$，则 α 的自然性意味着：

$$B(\Phi) \circ \alpha_W(a) = \alpha_U \circ A(\Phi)(a) = \alpha_U(u).$$

于是 $\Phi \in S_{\alpha_U(u)}^B$，由此可得 $S_u^A \subseteq S_{\alpha_U(u)}^B$。因此，$\bigcap_{\Phi \in S_{\alpha_U(u)}^B} \Phi(W) \subseteq \bigcap_{\Phi \in S_u^A} \Phi(W) = \{K\}$。所以，$K \in U$由 $\alpha_U(u) \in B(U)$ 确定。□

反过来，每个变空间结都唯一地（在同构意义下）确定一个连续滤子函子。我们陈述这一结果，但同样将其证明推迟到主定理确立之后。

引理 4.2.5. 设 $K \in O \subseteq \mathcal{K}(\Sigma)$ 是一个结，V_K 是它的变空间结。

(1) 存在一个连续滤子函子 $A_K : \mathbf{VK} \to$ 集合，它确定 V_K。(2) 如果 $A : \mathbf{VK} \to$ 集合确定 V_K，那么 $A \cong A_K$。

证明。见第 4.4 节。□

定理 4.2.6. 变空间结与虚结一一对应 *s.*

证明。由于几何态射范畴 Hom(Sets, Sh(VK)) 等价于连续滤子函子 $A : \mathbf{VK} \to \mathbf{Sets}$ 所成的范畴，只需证明变空间结与连续滤子函子之间存在这样的对应关系。由引理 4.2.4 可知，同构的连续滤子函子确定同一个变空间结。由引理 4.2.5(1) 可知，该对应关系是满射。为证明其为单射，假设 A, $B : \mathbf{VK} \to \mathbf{Sets}$ 确定同一个变空间结 V。若 $(O, K) \in \mathrm{obj(V)}$，则引理 4.4.5(2) 蕴含 $A \cong A_K \cong B$. □

4.3. 引理 4.2.3 的证明。由引理 4.2.1 可知，每个 $u \in A(U)$ 都确定一个结 $K \in U$。接下来的三个引理将描述 VK 的箭头如何作用于 u 和 K。随后给出引理 4.2.3 的证明。

引理 4.3.1. 若 $K \in U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ 是由 $u \in A(U)$ 确定的结，$\Phi : W \to U$ 是一个态射，并且对于某个 $J \in W$，$\Phi(J) = K$，则存在一个 $w \in W$ 使得 $\Phi \cdot w = u$。

证明. 选取 U 的一个开覆盖，其中包含 $\Phi(W)$，并使得 $\Phi(W)$ 是覆盖中唯一包含 K 的开集。考虑由该开覆盖中各元素到 U 的包含映射生成的筛 S；对于包含映射 $\Phi(W) \to U$，我们改用态射 $\Phi : W \to U$。显然，S 是一个覆盖筛。由于 A 将 S 映射为一个满态射族，存在某个态射 $\Upsilon : Y \to U$，使得对于某个 $y \in A(Y)$，$\Upsilon \cdot y = u$，因此 $\Upsilon \in S_u$。现在，Υ 必须经过 Φ 或该开覆盖中的其他某个元素分解。假设 Υ 经过该开覆盖中的某个包含映射 $\Omega : O \to U$ 分解，因此 $\Omega \neq \Phi$。那么 $K \notin \Upsilon(Y)$，这与 $\Upsilon \in S_u$ 且 $\bigcap_{\Psi \in S_u} \Psi(\mathrm{dom}(\Psi)) = \{K\}$ 的事实矛盾。因此，Υ 必须经过 Φ 分解。于是对于某个映射 $\Psi : Y \to W$，有 $\Upsilon = \Phi \bigcirc \Psi$，且 $\Phi \cdot (\Psi \cdot y) = \Upsilon \cdot y = u$。令 $w = \Psi \cdot y \in A(W)$，便证明了该引理。□

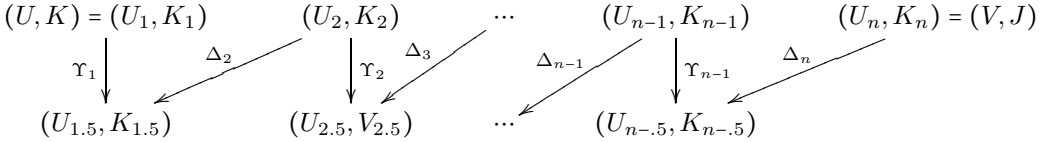
引理 4.3.2. 假设对于某个 $w \in A$，有 $\Phi : W \to U$（W）和 $u \in A$（U）。若 $K \in U$ 是由 u 确定的结，而 $L \in W$ 是由 w 确定的结，则 Φ（L）$= K$。

证明。写作 $S_w = \{\Upsilon : \overline{W} \to W | \exists \overline{w} \in A(\overline{W})$，使得 $\Upsilon \cdot \overline{w} = w\}$。因此，$\{L\} = \bigcap_{\Upsilon_i} \Upsilon(\overline{W})$。根据假设，$\Phi \cdot \Upsilon \cdot \overline{w} = u$。于是，对所有 $\Upsilon \in S_w$，K 都在 $\Phi \bigcirc \Upsilon$ 的像中。因此，对所有 $\Upsilon \in S_w$，K（经由 Φ）的原像都在 Υ 的像中。于是 $\Phi^{-1}(\{K\}) = \{L\}$，结论成立。□

引理 4.3.3. 假设 $\Phi : V \to U$、$v \in A(V)$，且 $J \in V$ 是由 v 确定的结。则 $\Phi(J)$ 是由 $\Phi \cdot v$ 确定的结。

证明。写作 $S_{\Phi \cdot v} = \{\Psi : \overline{U} \to U | \exists \overline{u} \in A(\overline{U})$ s.t. $\Psi \cdot \overline{u} = \Phi \cdot v\}$。由于 A 是滤过的，且 $A(\overline{U})$ $A(V)$ 非空，因此对每个 $\Psi \in S_{\Phi \cdot v}$，存在一个图表 $V \xleftarrow{\Upsilon} W \xrightarrow{\Gamma} \overline{U}$，使得 $\Upsilon \cdot w = v$ 和 $\Gamma \cdot w = \overline{u}$ 对某个 $w \in A(W)$ 成立。于是对每个 $\Psi \in S_{\Phi \cdot v}$，我们有平行箭头 $\Phi \bigcirc \Upsilon, \Psi \bigcirc \Gamma : W \to U$。这些箭头满足 $\Phi \cdot \Upsilon \cdot w = \Phi \cdot v = \Psi \cdot \Gamma \cdot w$。根据 A 的第三滤过性质，存在一个箭头 $\Xi : X \to W$，使得 $\Phi \bigcirc \Upsilon \bigcirc \Xi = \Psi \bigcirc \Gamma \bigcirc \Xi$，且对某个 $x \in A(X)$，$\Xi \cdot x = w$ 成立。于是 $\Upsilon \cdot \Xi \cdot x = v$，因此 $J \in \Upsilon \bigcirc \Xi(X)$。这意味着 $\Phi(J) \in \Phi \bigcirc \Upsilon \bigcirc \Xi(X) = \Psi \bigcirc \Gamma \bigcirc \Xi(X)$。因此，对所有 $\Psi \in S_{\Phi \cdot v}$，$\Phi(J) \in \Psi(\overline{U})$，且 $\Phi(J)$ 是由 $\Phi \cdot v$ 确定的结。□

引理 4.2.3 的证明。取 VK 中某个对象 U，使得 $A(U) \neq \emptyset$。对于 $u \in A(U)$，令 $K \in U$ 为由 u 确定的结。令 $J \in V$ 为与 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 属于同一连通分支的另一个结。于是，$\int_{\mathbf{VK}} F$ 中存在一条箭头路径，连接 $(U, K) = (U_1, K_1)$ 和 $(V, J) = (U_n, K_n)$：



令 $u_1 = u$。根据引理 4.3.3，$K_{1.5} = \Upsilon_1(K_1)$ 是由 $\Upsilon_1 \cdot u_1$ 确定的结。根据引理 4.3.1，存在一个 $u_2 \in A(U_2)$，使得 $\Delta_2 \cdot u_2 = \Upsilon_1 \cdot u_1$，且 K_2 是由 $u_2 \in U_2$ 确定的结。继续归纳地推理可知，对于所有 $2 \leq i \leq n$，都存在一个 $u_i \in A(U_i)$，使得 $\Delta_i \cdot u_i = \Upsilon_{i-1} \cdot u_{i-1}$，且 $K_i \in U_i$ 是由 u_i 确定的结。因此，$J \in V$ 是由 A 确定的结。

最后，必须证明：如果 $K \in U$ 由 $u \in A(U)$ 确定，且 $J \in V$ 由 $v \in A(V)$ 确定，那么 (U, K) 和 (V, J) 属于 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的同一个连通分支。由于 A 是滤过的，因此存在一个图表 $U \xleftarrow{\Phi} W \xrightarrow{\Psi} V$，使得对于某个 $w \in A(W)$，$\Phi \cdot w = u$ 和 $\Psi \cdot w = v$。于是，若 $L \in W$ 是由 $w \in A(W)$ 确定的结，则由引理 4.3.3 可知，$\Phi(L) = K$ 且 $\Psi(L) = J$。因此，(U, K) 和 (V, J) 属于 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的同一个连通分支。□

4.4. 引理 4.2.5 的证明。固定一个结 $K \in O \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$，并令 V_K 为 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 中包含 (O,K) 的连通分支。我们将证明存在一个连续滤子函子 $A_K : \mathbf{VK} \to$ 集合，它确定 V_K。引理 4.2.1、4.3.1、4.3.2 和 4.3.3 对 A_K 应如何定义提供了一些启示。设 $\Psi_1, \Psi_2 : O \to U$ 为态射，$\Psi_1(K)$ 由某个 $u_1 \in A_K(U)$ 确定，而 $\Psi_2(K)$ 由某个 $u_2 \in A_K(U)$ 确定。如果 $u_2 = u_1$，那么 $\Psi_1(K) = \Psi_2(K)$，并且存在一个 $o \in A_K(O)$，使得 $\Psi_1 \cdot o = u_1 = u_2 = \Psi_2 \cdot o$。将第三滤过性质应用于 A_K，意味着 Ψ_1 和 Ψ_2 可以等化。换言之，它们在某个开集 $O' \subseteq O$ 上相同。因此，每个 $u \in A_K(U)$ 都表示一组态射 $\Psi : O \to U$，这些态射在 K 的某个（广义）邻域 O' 上相同。直观来说，$A_K(U)$ 是将 K 映射到 U 的所有方式组成的集合；若两个映射在 K 的某个邻域上相同，则视为等价。我们通过一个定义将其精确表述。

定义 4.4.1（(O,K)-邻域）。设 $O' \subseteq \mathbb{K}(\Sigma')$，且 $\Sigma' \subseteq \Sigma$ 是一个子曲面。设 $K : \mathbb{S}^1 \to \Sigma \times \mathbb{R}$ 可分解为 $\mathbb{S}^1 \xrightarrow{K'} \Sigma' \times \mathbb{R} \overset{\iota \times \mathrm{id}}{\prec} \Sigma \times \mathbb{R}$，其中 $\iota : \Sigma' \to \Sigma$ 是包含映射，且 $K' \in O'$。则称 O' 为 K 的 (O,K)-邻域。略去记号上的区别，结 $K' \in O'$ 也记作 K。令 $\mathcal{O}_K$ 为 K 的 (O,K)-邻域的集合。由定理 3.2.3，$\mathcal{O}_K$ 在拉回下封闭：若 $O'_1, O'_2 \in \mathcal{O}_K$ 且包含映射为 $I_1 : O'_1 \to O$ 和 $I_2 : O'_2 \to O$，则这两个包含映射的拉回 $O'_1 \times_O O'_2$ 也是一个 (O,K)-邻域。

现在，令 U 为 $\mathbf{VK}$ 的任意对象，并令 $O'_1, O'_2 \in \mathcal{O}_K$，其中 $O'_1 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma'_1)$，$O'_2 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma'_2)$。假设 $\Phi_1 : O'_1 \to U$ 和 $\Phi_2 : O'_2 \to U$ 是态射。若存在一个 $O'_3 \in \mathcal{O}_K$ 和包含映射 $I_1 : O'_3 \to O'_1$, $I_2 : O'_3 \to O'_2$，使得 $\Phi_1 \bigcirc I_1 = \Phi_2 \bigcirc I_2$，其中 $O'_3 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma'_3)$ 且 $\Sigma'_3 \subseteq \Sigma'_1 \cap \Sigma'_2$，则记作 $\Phi_1 \sim \Phi_2$。注意，$\sim$ 是一个等价关系。我们将 $\Phi : O' \to U$ 的 $\sim$-等价类记作 $O' \in \mathcal{O}_K$ by $[\Phi]$。

函子 $A_K : \mathbf{VK} \to$ 集合现可定义如下。对于 $\mathbf{VK}$ 的对象 U，定义 $A_K(U)$ 为 $O' \in \mathcal{O}_K$ 的 $\sim$-等价类 $[\Phi]$，$\Phi : O' \to U$ 所构成的集合。对于态射 $\Psi : U \to V$，定义 $A_K(\Psi) : A_K(U) \to A_K(V)$，其方式为 $A_K(\Psi)([\Phi]) = [\Psi \bigcirc \Phi]$。下面给出一个简单的例子。

例 4.4.2. 设 Σ 是 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘，且 $K : \mathbb{S}^1 \to \Sigma \times \mathbb{R}$ 由 $K(e^{i\theta}) = (\frac{1}{2}e^{i\theta}, 0)$ 给出。图 5 描绘了 Σ 上 K 的图表。令 O 为 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 中包含 K 的道路连通分支。令 $\Xi = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$，并设 $U = \mathbb{K}(\Xi)$。令 Σ' 为开环带 $\{re^{i\theta} | \frac{1}{4} < r < 1\}$，且令 O' 为 $\mathbb{K}(\Sigma')$ 中包含 K 的道路连通分支。则 O' 是一个 (O,K)-邻域。考虑图 5 中示意描绘的映射 $\Psi_1 : O \to U$ 和 $\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4 : O' \to U$。显然，$[\Psi_1] \neq [\Psi_4]$ 属于 $A_K(U)$，因为 $\Psi_1(O) \cap \Psi_4(O) = \varnothing$。对于 $\Psi_2 = \psi_2 \times \mathrm{id} : \mathbb{K}(\Sigma') \to \mathbb{K}(\Xi)$，取 $\psi_2(re^{i\theta}) = (e^{ir\pi/8}, e^{i\theta})$。对于 $\Psi_3 = \psi_3 \times \mathrm{id} : \mathbb{K}(\Sigma') \to \mathbb{K}(\Xi)$，令 ψ_3 为 ψ_2 与圆环带 $\{re^{i\theta} | \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{3}{4}\}$ 像中的一次德恩扭转的复合。图 5 中该环带涂成青色。注意，$[\Psi_2], [\Psi_3]$ 均不同于 $[\Psi_1]$，且不同于 $A_K(U)$ 中的 $[\Psi_4]$。此外，$[\Psi_2] \neq [\Psi_3]$，尽管 $\Psi_2(K) = \Psi_3(K)$。将 K 任意微量地扰动到青色区域内，会迫使 Ψ_2 与 Ψ_3 不一致。

引理 4.4.3. 函子 $A_K : \mathbf{VK} \to$ 到集合是滤过的且连续。

证明. 性质 (i) 成立，因为对所有 $W' \in \mathcal{O}_K$，$A_K(W') \neq \varnothing$。现在假设存在平行箭头 $\Phi_1, \Phi_2 : U \to V$，使得对于某个满足 $W' \in \mathcal{O}_K$ 的 $\Psi : W' \to U$，$A(\Phi_1)([\Psi]) = A(\Phi_2)([\Psi])$。于是 $[\Phi_1 \bigcirc \Psi] = [\Phi_2 \bigcirc \Psi]$，因此存在一个 (O,K)-邻域 O'，使得 $\Phi_1 \bigcirc \Psi$ 和 $\Phi_2 \bigcirc \Psi$ 在 O' 上的限制相同。令 $I : O' \to W'$ 表示这个包含映射。于是 $\Phi_1 \bigcirc \Psi \bigcirc I = \Phi_2 \bigcirc \Psi \bigcirc I$，因此 $\Psi \bigcirc I$ 使 Φ_1, Φ_2 相等。用 $\Lambda : O' \to O'$ 表示恒等映射。于是 $A_K(\Psi \bigcirc I)([\Lambda]) = [\Psi \bigcirc I \bigcirc \Lambda] = [\Psi]$，所以 $[\Psi]$ 属于 $A_K(\Psi \bigcirc I)$ 的像。这证明了 (ii)。

对于 (iii)，假设 $A_K(U_1)$ $A_K(U_2)$ 非空，并令 $[\Psi_1] \in A_K(U_1)$、$[\Psi_2] \in A_K(U_2)$，其中 $\Psi_1 : O'_1 \to U_1$，$\Psi_2 : O'_2 \to U_2$ 满足 $O'_1, O'_2 \in \mathcal{O}_K$。令 $O'_1 \times_O O'_2 \in \mathcal{O}_K$ 为包含映射 $O'_1 \to O$, $O'_2 \to O$ 的拉回。令 $I_1 : O'_1 \times_O O'_2 \to O'_1$, $I_2 : O'_1 \times_O O'_2 \to O'_2$ 表示包含映射

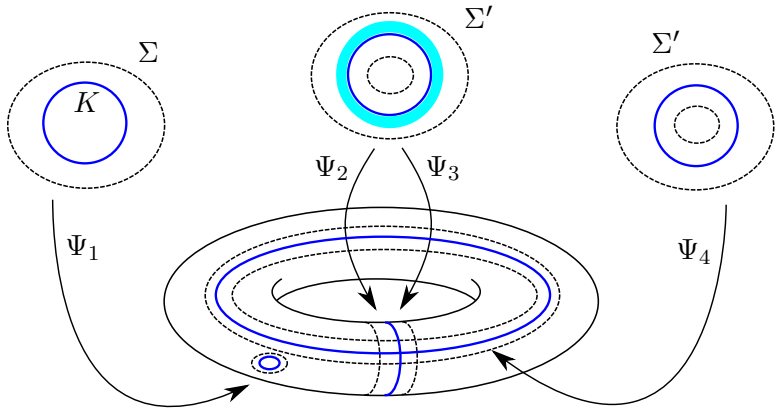


FIGURE 5. 箭头 $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ 并非 $\sim$-等价。参见例 4.4.2。

以及 $\Lambda : O'_1 \times_O O'_2 \to O'_1 \times_O O'_2$ 恒等映射。则 $[\Lambda] \in A_K(O'_1 \times_O O'_2)$，并且有如下图表 :

$$U_1 \xleftarrow{\Psi_1 \circ I_1} O'_1 \times_o O'_2 \xrightarrow{\Psi_2 \circ I_2} U_2 \ ,$$

使得 $A_K(\Psi_1 \bigcirc I_1)([\Lambda]) = [\Psi_1]$ 且 $A_K(\Psi_2 \bigcirc I_2)([\Lambda]) = [\Psi_2]$。这证明了 (iii)。

对于连续性，假设 $S = \{\Psi_i = \psi_i \times \mathrm{id} : U_i \to U\}$ 是 U 的覆盖筛，其中 $U_i \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_i)$。要证明这被映射为一个满态射族，必须证明每个 $[\Phi] \in A_K(U)$ 都属于某个 $A_K(\Psi_i)$ 的像。对于 $O' \in \mathcal{O}_K, O' \subseteq \mathbb{K}(\Sigma')$，记 $\Phi = \phi \times \mathrm{id} : O' \to U$。由于 S 是覆盖筛，存在一个 $\Psi_i \in S$，使得 $\Phi(K) \in \Psi_i(U_i)$。于是我们可以选取 K 的一个支撑曲面 $\Sigma'' \subseteq \Sigma$，以及一个 (O, K)-邻域 $O'' \subseteq \mathbb{K}(\Sigma'')$，使得$\phi(\Sigma'') \subseteq \psi_i(\Sigma_i)$ 且 $\Phi(O'') \subseteq \Psi_i(U_i)$。令 $\psi_i^{-1} : \psi_i(\Sigma_i) \to \Sigma_i$ 为微分同胚$\psi_i : \Sigma_i \to \psi_i(\Sigma_i)$ 的逆映射。设 $\Upsilon_i = (\psi_i^{-1} \bigcirc \phi|_{\Sigma''}) \times \mathrm{id} : O'' \to U_i$。于是 $A(\Psi_i)([\Upsilon_i]) = [\phi|_{\Sigma''} \times \mathrm{id}] = [\Phi]$。□

引理 4.4.4。连续滤子函子 A_K 确定变空间结 V_K。

证明。设 V 是由 A_K确定的变空间结。设 $\Lambda : O \to O$ 为恒等映射。我们将证明，K 是由 $[\Lambda] \in A_K(O)$ 确定的结。假设 属于 $\Psi : V \to O$ 中的 $S_{[\Lambda]}$。那么$A_K(\Psi)([\Phi]) = [\Lambda]$对某个 $[\Phi] \in A_K(V)$成立，其中 $\Phi : W' \to V$，且 W' 是一个 (O, K)-邻域。需要证明 $K \in \Psi(V)$。由于 $A_K(\Psi)([\Phi]) = [\Lambda]$，我们有 $[\Psi \bigcirc \Phi] = [\Lambda]$。于是存在一个 (O, K)-邻域 O' 以及包含映射 $I_1 : O' \to W'$、$I_2 : O' \to O$，使得 $\Psi \bigcirc \Phi \bigcirc I_1 = \Lambda \bigcirc I_2$。又由于 $K \in I_2(O')$，我们有 $K \in \Psi(V)$。因此 $\{K\} = \bigcap_{\Psi \in S_{[\Lambda]}} \Psi(W')$。□

引理 4.4.3 和 4.4.4 合起来证明了引理 4.2.5 (1)。以下结果证明引理 4.2.5 (2)。此处将其改述为更明确的形式，以便后文使用。

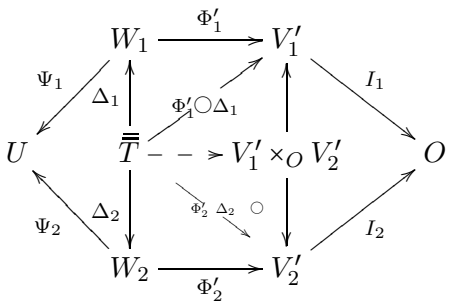
引理 4.4.5. 设 $A : \mathbf{VK} \to$ 集合是一个决定变空间结 V_K 的连续滤子函子。若 $o \in A(O)$ 决定 K，则存在一个自然同构 $\alpha^o : A \to A_K$，满足:

(1) $\alpha^o_O(o) = [\Lambda]$，其中 $\Lambda : O \to O$ 是恒等映射；(2) 对任意 $u \in A(U)$，$\alpha^o_U(u) \in A_K(U)$ 在 U 中决定与 $u \in A(U)$ 相同的结 J。

证明。对于 VK 的每个对象 U，按如下方式定义 $\alpha^o_U : A(U) \to A_K(U)$。首先注意，由于 A 和 A_K 都确定 V_K，当且仅当 $A_K(U) \neq \varnothing$ 时，$A(U) \neq \varnothing$。令 $u \in A(U)$，并令 J 为 U 中由 u 确定的结。由于 A 是滤过的，存在一个对象 W、一个图表 $U \xleftarrow{\Psi} W \xrightarrow{\Phi} O$，以及一个 $w \in A(W)$，使得 $\Psi \cdot w = u$ 且 $\Phi \cdot w = o$。由引理 3.2.1，Φ 可分解为 $W \xrightarrow{\Phi'} V \prec^{I} O$，其中 Φ' 是同构，而 I 是包含映射。令 $L \in W$ 为由 $w \in A(W)$ 确定的结。由

引理 4.3.2， $\Phi(L) = K$ 且 $\Psi(L) = J$。由于 $I(K) = K$，我们有 $\Phi'(L) = K$，因此 $V\prime$ 是一个 (O,K)-邻域。定义 $\Psi_u = \Psi \bigcirc (\Phi')^{-1} : V\prime \to U$，并令 $v' = \Phi' \cdot w_\circ$ 由引理 4.3.3， $K \in V\prime$ 是由 $v' \in A(V\prime)$ 确定的结。此外，我们有 $\Psi_u \cdot v' = \Psi \cdot w = u_\circ$ 因此，由引理 4.3.2， $\Psi_u(K) = J_\circ$ 定义 $\alpha^o_U(u) = [\Psi_u] \in A_K(U)_\circ$

必须证明 $\alpha^o_U(u)$ 定义良好。假设对于 $i = 1, 2$，存在对象 W_i、图表 $U \xleftarrow{\Psi_i} W_i \xrightarrow{\Phi_i} O$ 和 $w_i \in A(W_i)$，使得 $\Psi_i \cdot w_i = u$ and $\Phi_i \cdot w_i = o_\circ$ 由于 A 是滤过的， W_1, W_2 由图表 $W_1 \xleftarrow{\Upsilon_1} T \xrightarrow{\Upsilon_2} W_2$ 连接，使得对于某个 $t \in A(T)\Upsilon_i \cdot t = w_i$，有 $i = 1, 2_\circ$ 此外，由于对于 $i = 1, 2$， $\Psi_i \cdot \Upsilon_i \cdot t = u$，平行箭头 $\Psi_1 \bigcirc \Upsilon_1$ 和 $\Psi_2 \bigcirc \Upsilon_2$ 有一个等化子 $\Upsilon : \overline{T} \to T$，使得对于某个 $\bar{t} \in A(T)$，有 $\Upsilon \cdot \bar{t} = t_\circ$ 同样，平行箭头 $\Phi_1 \bigcirc \Upsilon_1 \bigcirc \Upsilon$ 和 $\Phi_2 \bigcirc \Upsilon_2 \bigcirc \Upsilon$ 的等化子性质给出一个映射 $\overline{\Upsilon} : \overline{T} \to \overline{T}$ 和一个 $\bar{t} \in A(\overline{T})^-$，使得 $\overline{\Upsilon} \cdot \bar{t} = \bar{t}_\circ$ 令 $\Delta_i = \Upsilon_i \bigcirc \Upsilon \bigcirc \overline{\Upsilon}^-$，并像之前一样写作 $\Phi_i = I_i \bigcirc \Phi'_{i\circ}$ 这给出如下交换图，其中 $V'_1 \times_O V'_2$ 是一个拉回。



于是存在一个态射 $\Delta : \overline{T} \to \overline{V}\prime_1 \times_O V'_2$，使右侧菱形图交换。沿着图表追踪可知，$(\Psi_1)_u$ 和 $(\Psi_2)_u$ 在 (O,K)-邻域 $\Delta(\overline{T})$ 上一致。因此， α^o_U 定义良好。

为证明 α^o_U 是单射，假设对于某些 $u_1, u_2 \in A(U)$，有 $\alpha^o_U(u_1) = \alpha^o_U(u_2)_\circ$ 由于 A 是滤过的，存在一个图表 $U \xleftarrow{\Phi_1} W \xrightarrow{\Phi_2} U$ 和一个 $w \in A(W)$，使得 $\Phi_1 \cdot w = u_1$ 和 $\Phi_2 \cdot w = u_{2\circ}$ 于是，对于某个态射 $\Psi_w : W' \to W$，有 $\alpha^o_W(w) = [\Psi_w]$，其中 $W' \in \mathcal{O}_K$，并且存在一个 $w' \in A(W')$，使得 $\Psi_w \cdot w' = w_\circ$ 由于 α^o_U 定义良好，我们可以选择 Ψ_{u_1} 为 $\Phi_1 \bigcirc \Psi_w$，并选择 Ψ_{u_2} 为 $\Phi_2 \bigcirc \Psi_{w\circ}$ 于是有 $[\Psi_{u_1}] = \alpha^o_U(u_1) = \alpha^o_U(u_2) = [\Psi_{u_2}]_\circ$ 因此，存在某个 $Y' \in \mathcal{O}_K$，其包含映射 $I : Y' \to W'$ 满足 $\Psi_{u_1} \bigcirc I = \Psi_{u_2} \bigcirc I_\circ$ 由于 $Y' \in \mathcal{O}_K$，引理 4.3.1 蕴含存在一个 $y' \in A(Y')$，使得 $I \cdot y' = w'_\circ$ 于是 $u_1 = \Psi_{u_1} \cdot I \cdot y' = \Psi_{u_2} \cdot I \cdot y' = u_2$，由此可得 α^o_U 是单射。

接下来将证明 α^o_U 是满射。假设 $[\Psi] \in A_K(U)$，其中 $\Psi : W\prime \to U$，对某个 $W\prime \in \mathcal{O}_K$ 成立。考虑图表 $U \longleftarrow W\prime \xleftarrow{\Psi} \xrightarrow{I} O$，其中 I 是包含映射。由于 $o \in A(O)$ 决定了 K，且 $I(K) = K$，由引理 4.3.1 可知，存在一个 $w' \in W'$ 使得 $I \cdot w' = o_\circ$ 令 $u = \Psi \cdot w'_\circ$ 那么我们可以取 $\Psi_u = \Psi$，使得 $\alpha_U(u) = [\Psi]_\circ$ 因此， α^o_U 是满射。

为证明 α^o 是自然的，令 $\Upsilon : U \to W$ 为一个态射。若 $u \in A(U)$，且 $\Psi_u : V\prime \to U$ 如上所述，则 $\Upsilon \cdot u$ 决定了结 $\Upsilon(\Psi_u(K))$（见引理 4.3.3）。这意味着 α^o_W 将 $\Upsilon \cdot u$ 映为 $[\Upsilon \bigcirc \Psi_u]_\circ$ 因此，$\alpha^o_W(\Upsilon \cdot u) = [\Upsilon \bigcirc \Psi_u] = A_K(\Upsilon)(\alpha^o_U(u))_\circ$

最后，我们证明断言（1）和（2）。对于（1），考虑图表 $O \xleftarrow{\Lambda} O \xrightarrow{\Lambda} O$。由于 O 是一个 (O,K) 邻域，且 $\Lambda \cdot o = o$，因此可得 $\alpha^o_O(o) = [\Lambda]_\circ$ 对于断言（2），若 $\alpha^o_U(u) = [\Psi_u]$，则 $\Psi_u(J) = K_\circ$ 关于 $\{J\} = \bigcap_{\Upsilon \in S_{[\Psi_u]}} \Upsilon(\mathrm{dom}(\Upsilon))$ 的证明，随后可依照引理 4.4.4 完成。□

5. Virtual isotopy

5.1. 变空间同痕。我们已在第4.1节定义了变空间结，现在来定义变空间结的同痕。我们将在第5.2节证明，这些同痕与虚同痕（定义3.3.3）一一对应。与前面一样，我们首先分析结空间 $\mathbb{K}$。

用 $\pi_0(\mathsf{C})$ 表示小范畴 C 的连通分支集合。命题 4.1.1 指出，$\pi_0(\int_{\mathbf{K}} F) \cong \mathbb{K}$ 属于集合范畴。设 $\sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}} : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$ 是 $\mathbb{K}$ 中的一条路径，令 K_t 为包含对象 $(\mathbb{K}, \sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}}(t))$ 的 $\int_{\mathbf{K}} F$的连通分支。定义函数 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{K}} F)$ 如下：$\sigma(t) = \mathsf{K}_t$。由于$\sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}}$ 是连续的，σ 满足以下局部连续性（其中 $\mathsf{C} = \mathsf{K}$，且 $\sigma^N_U = \sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}}|_N$）：

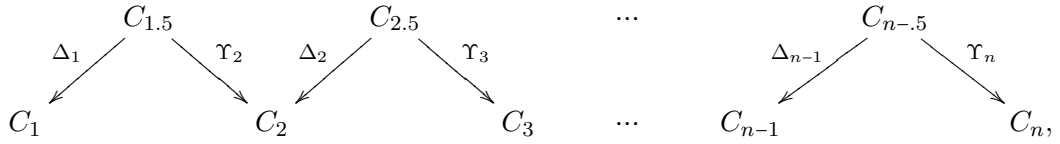
$(\star)$ 对于所有 $U \in \mathrm{obj}(\mathsf{C})$ 和 $t \in \mathbb{I}$，若 $(U, K) \in \mathrm{obj}(\sigma(t))$，则存在 t 的一个邻域 $N \subseteq \mathbb{I}$ 以及一个连续函数 $\sigma^N_U : N \to U$，使得 $\sigma^N_U(t) = K$，并且对于所有 $s \in N$，$(U, \sigma^N_U(s)) \in \mathrm{obj}(\sigma(s))$。

反过来，假设 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{K}} F)$ 满足 $(\star)$。定义 $\sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}} : \mathbb{I} \to \mathbb{K}$ 为 $\sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}}(t) = K_t$，其中 $(\mathbb{K}, K_t) \in \mathrm{obj}(\sigma(t))$。那么 $\sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}}$ 是 $\mathbb{K}$中的一条定义良好的路径。因此，$\sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}}(0)$ $\sigma^{\mathbb{I}}_{\mathbb{K}}(1)$ 在 $\mathbb{R}^3$中同痕。

定义 5.1.1（变空间同伦）。设 $\mathsf{V}_0, \mathsf{V}_1 \in \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$ 为变空间结。从 V_0 到 V_1 的变空间同伦是满足性质 $(\star)$（其中 $\mathsf{C} = \mathsf{VK}$）的函数 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$，且 $\sigma(0) = \mathsf{V}_0$，$\sigma(1) = \mathsf{V}_1$。

以下技术引理将用于建立变空间同伦与稳定的赖德迈斯特等价以及虚同痕之间的联系。它将变空间同伦描述为结空间 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 中的有限序列路径，这些路径由 VK 中的态射拼接而成。

引理 5.1.2. 设 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$ 是从 V_0 到 V_1 的虚同痕。那么对于某个 $n \geq 1$，存在 $\mathbb{I}$ 的一个划分 $l_1 = 0 < l_2 < r_1 < l_3 < r_2 < \ldots < l_n < r_{n-1} < r_n = 1$，以及一个图表：



在 VK 中的道路连通分支 $C_i \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_i)$，以及连续函数：

$$\sigma_1 : \underbrace{[l_1, r_1)}_{N_1} \to C_1,\ \sigma_{1.5} : \underbrace{(l_2, r_1)}_{N_{1.5}} \to C_{1.5},\ \sigma_2 : \underbrace{(l_2, r_2)}_{N_2} \to C_2, \ldots, \sigma_n : \underbrace{(l_n, r_n]}_{N_n} \to C_{1.5}$$

使得以下性质成立：

(1) $\Delta_i \circ \sigma_{i+.5} = \sigma_i|(l_{i+1}, r_i)$ *and* $\Upsilon_{i+1} \circ \sigma_{i+.5} = \sigma_{i+1}|(l_{i+1}, r_i)$ *for all* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, *and*
(2) $(C_j, \sigma_j(t)) \in obj(\sigma(t))$ *for all* $j \in \{1, 1.5, 2, \ldots, n\}$ *and* $t \in N_j$.

证明. 对每个 $t \in \mathbb{I}$，选取某个 $(C_t, K_t) \in \mathrm{obj}(\sigma(t))$，其中 $C_t \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_t)$ 是一个道路连通分支。存在 t 的一个邻域 M_t，以及一个连续函数 $\rho_t : M_t \to C_t$，使得对于所有 $s \in M_t$，$(C_t, \rho_t(s)) \in \mathrm{obj}(\sigma(s))$。可以假设每个 M_t 都是一个区间。这些 M_t 构成 $\mathbb{I}$ 的一个开覆盖，因此存在一个有限子覆盖。还可以假设，具有最少元素的有限子覆盖 $\{M_1 = M_{t_1}, \ldots, M_n = M_{t_n}\}$。重新标记后，这给出一个划分 $a_1 = 0 < a_2 < b_1 < a_3 < b_2 < \ldots < a_n < b_{n-1} < b_n = 1$，其中$M_1 = [a_1, b_1)$、$M_2 = (a_2, b_2)$、...、$M_n = (a_n, b_n]$。对于 $1 \leq i \leq n-1$，选取 $t_{i+.5} \in M_i \cap M_{i+1}$ 并设$t_{.5} = 0, t_{n+.5} = 1$。令 $\rho_i = \rho_{t_i}$ 和 $C_i = C_{t_i}$。我们有 $\rho_i|[t_{i-.5}, t_{i+.5}]$ 是一条连接 $\rho_i(t_{i-.5})$ 与$\rho_i(t_{i+.5})$ 的路径。此外，对于所有 $t \in M_i \cap M_{i+1}$，$(C_i, \rho_i(t))$ 和 $(C_{i+1}, \rho_{i+1}(t))$ 属于 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的同一个连通分支。对于 $t = t_{i+.5}$，令 $\mathsf{V}_{t_{i+.5}}$ 表示这个连通分支。

由于 $(C_i, \rho_i(t_{i+.5}))$、$(C_{i+1}, \rho_{i+1}(t_{i+.5})) \in \mathrm{obj}(\mathsf{V}_{t_{i+.5}})$，它们之间存在一条态射路径。沿着这条路径中形如 $\rightarrow \bullet \leftarrow$ 的每个子图表反复拉回，可得

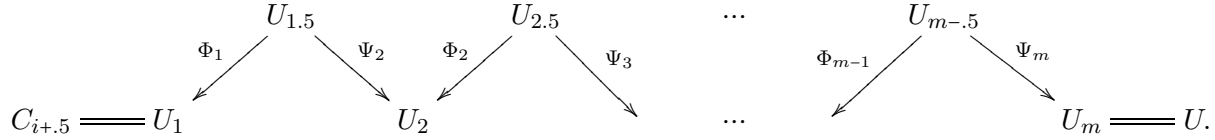
存在一条态射路径 $(C_i, \rho_i(t_{i+.5}))$ $(C_{i+.5}, K_{i+.5}) \xleftarrow{\Delta_i}$ $\xrightarrow{\Upsilon_{i+1}} (C_{i+1}, \rho_{i+1}(t_{i+.5}))$，其具有 $C_{i+.5}$ a$^-$ 道路连通分支。现在，由于 Δ_i, Υ_{i+1} 是开集，存在 $t_{i+.5}$ 的邻域 J_i, J_i，使得$\rho_i(J_i) \subseteq \Delta_i(C_{i+.5})$ 且 $\rho_{i+1}(J_i) \subseteq \Upsilon_{i+1}(C_{i+.5})$。对于每个 $1 \leq i \leq n-1$，选取 l_{i+1}, r_i，使得$t_{i+.5} \in (l_{i+1}, r_i) \subseteq J_i \cap J_{i+1}$，并令 $l_1 = 0, r_n = 1$。于是，由于 Δ_i, Υ_{i+1} 是单射，$\rho_i|(l_{i+1}, r_i)$ 和$\rho_{i+1}|(l_{i+1}, r_i)$ 分别唯一地通过 Δ_i 和 Υ_{i+1} 分解。因此，可以分段定义 $\sigma_{i+.5} : (l_{i+1}, r_i) \to C_{i+.5}$，使得当 $l_{i+1} < t \leq t_{i+.5}$ 时，$\rho_i(t) = \Delta_i \bigcirc \sigma_{i+.5}(t)$；当 $t_{i+.5} \leq t < r_i$ 时，$\rho_{i+1}(t) = \Upsilon_{i+1} \bigcirc \sigma_{i+.5}(t)$。对于 $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$，定义 $\sigma_i : (l_i, r_i) \to C_i$ 为 $\sigma_i|(l_i, r_{i-1}) = \Upsilon_i \bigcirc \sigma_{i-.5}, \sigma_i|[r_{i-1}, l_{i+1}] = \rho_i|[r_{i-1}, l_{i+1}]$，并令 $\sigma_i|(l_{i+1}, r_i) = \Delta_i \bigcirc \sigma_{i+.5}$。定义 $\sigma_1 : [l_1, r_1) \to C_1$ 为 $\sigma_1|[l_1, l_2] = \rho_1|[l_1, l_2]$，并令 $\sigma_1|(l_2, r_1) = \Delta_1 \bigcirc \sigma_{1.5}$。最后，定义 $\sigma_n : (l_n, r_n] \to C_n$ 为 $\sigma_n|(l_n, r_{n-1}) = \Upsilon_n \bigcirc \sigma_{n-.5}$ 和 $\sigma_n|[r_{n-1}, r_n] = \rho_n|[r_{n-1}, r_n]$。那么 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 满足 (1) 和 (2)。□

利用这个引理，我们现在可以证明，由变空间同痕生成的等价关系所得到的等价类，与虚结理论的图示模型所得到的等价类相同。

定理 5.1.3. 设 $(\Sigma_0, D_0), (\Sigma_1, D_1) \in \mathfrak{D}^{(CKS^*)}$ 为纽结图，且 $K_0 \in \mathbb{K}(\Sigma_0)$，$K_1 \in \mathbb{K}(\Sigma_1)$ 为纽结，其图分别为 D_0, D_1。令 $\mathrm{V}_0 = \mathrm{V}^{K_0}, \mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_{K_1} \in \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$。那么，$(\Sigma_0, D_0), (\Sigma_1, D_0)$ 具有相同的虚纽结类型，当且仅当 V_0,V_1 是同痕的变量空间结。

证明. 若 $\mathrm{V}_0, \mathrm{V}_1$ 为变量空间同痕，则由引理 5.1.2 和 3.1.3，$(\Sigma_0, D_0), (\Sigma_1, D_1)$ 表示相同的虚纽结类型。反之，假设 $((\Sigma_0, D_0), (\Sigma_1, D_1)) \in \mathfrak{R}^{(CKS^*)}$，因此这两个图具有相同的虚纽结类型。根据引理 3.1.3，存在道路连通分支$C_1, C_{1.5}, C_2, \ldots, C_{n-.5}, C_n$，以及对于 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ 的态射 $\Upsilon_i : C_i \to C_{i+.5}$，$\Delta_{i+1} : C_{i+1} \to C_{i+.5}$，使得 $K_0 \in C_1 \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_0)$ 和 $K_1 \in C_n \subseteq \mathbb{K}(\Sigma_1)$。对于每个 $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$，任选一个纽结 $K_{C_i} \in C_i$，并令 $K_{C_1} = K_0, K_{C_n} = K_1$。对于 $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$，令 $\sigma_{i+.5} : [\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}] \to C_{i+.5}$为一条从$\Upsilon_i(K_{C_i})$ 到 $\Delta_{i+1}(K_{C_{i+1}})$ 的路径。对于 $t \in [\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1}]$，令 $\mathrm{V}_t \in \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$ 为包含 $(C_{i+.5}, \sigma_{i+.5}(t))$ 的变量空间结。由于 $(C_{i-.5}, \Delta_i(K_{C_i}))$ 和 $(C_{i+.5}, \Upsilon_i(K_{C_i}))$ 属于 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的同一个连通分支，这对所有 $t \in \mathbb{I}$ 都有定义。定义 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$ 为 $\sigma(t) = \mathrm{V}_t$。

还需证明 σ 满足性质（$\star$）。假设 $t \in \mathbb{I}$ 且（U, L） $\in$ obj（σ（t））。首先，假设存在一个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $t \in (\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1})$。那么（$U, L$）和（$C_{i+.5}, \sigma_{i+.5}$（$t$））属于 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的同一个连通分支。这意味着在 VK 中存在如下图表：



由于 $\sigma_{i+.5}$是连续的，因此存在一个开集 $M \subseteq (\frac{i-1}{n-1}, \frac{i}{n-1})$，使得 $t \in M$和 $\sigma_{i+.5}$（M） $\subseteq \Phi_1$（$U_{1.5}$）。于是，$\sigma_{i+.5}$ 经由 Φ_1 分解，从而得到一个连续函数 $\rho_{1.5} : M \to U_{1.5}$，满足$\Phi_1 \bigcirc \rho_{1.5} = \sigma_{i+.5}|M$。因此，对于所有 $s \in M$，（$U_{1.5}, \rho_{1.5}$（s））$\in$obj（σ（s））。此外，对于所有 $s \in M$，$\rho_2 \coloneqq \Psi_2 \bigcirc \rho_{1.5} : M \to U_2$满足（$U_2, \rho_2$（$s$））$\in$ obj（σ（s））。以此类推，最终得到一个连续函数 $\sigma_U^N = \rho_m : N \to U_m = U$，使得 $t \in N$，并且对于所有 $s \in N$，（U, σ_U^N（s））$\in$obj（σ（s））。

对 $t = 0$和 $t = 1$同样的论证也成立，因此假设对于某个 $i \in \{1, \ldots, n-2\}$，有 $t = \frac{i}{n-1}$。由于$\sigma_{i+.5}, \sigma_{i+1.5}$ 连续，存在一个 $r_i < \frac{i+1}{n-1}$和一个 $l_i > \frac{i-1}{n-1}$，使得 $\sigma_{i+1.5}([t, r_i)) \subseteq \Upsilon_{i+1}(C_{i+1})$ 且 $\sigma_{i+.5}((l_i, t]) \subseteq \Delta_{i+1}(C_{i+1})$。然后分段定义 $\sigma_{i+1} : (l_i, r_i) \to C_{i+1}$，使得 $\sigma_{i+1.5}|[t, r_i) = \Upsilon_{i+1} \bigcirc \sigma_{i+1}|[t, r_i)$ 且 $\sigma_{i+.5}|(l_i, t] = \Delta_{i+1} \bigcirc \sigma_{i+1}|(l_i, t]$。这是连续的，因为 $\sigma_{i+1.5}(t) = \Upsilon_{i+1}(K_{C_{i+1}})$，$\sigma_{i+.5}(t) = \Delta_{i+1}(K_{C_{i+1}})$，所以 $\sigma_{i+1}(t) = K_{C_{i+1}}$。于是，$(U, L)$ 和 $(C_{i+1}, K_{C_{i+1}})$ 属于 $\int_{\mathbf{VK}} F$的同一个连通分支。因此，我们可以采用前一段中的同样论证，以 (C_{i+1}, K_{i+1}) 替代 $(C_{i+.5}, \sigma_{i+.5}(t))$，并以 σ_{i+1} 替代 $\sigma_{i+.5}$。这意味着 σ满足性质 ($\star$)，由此可得 V_0 和 V_1 是变量空间同伦的。□

5.2. 虚同痕与变量空间同伦。这里我们证明变量空间同痕与虚同痕之间的一一对应（定理 5.2.4），以及虚纽结类型与虚同痕等价类之间的一一对应（定理 5.2.5）。定理 5.2.4 的证明遵循第 4.2 节的策略。几何态射范畴 Sh(I) →Sh(VK) 等价于连续滤过函子$A : \mathrm{VK} \to \mathrm{Sh(I)}$ 的范畴（见 [27], 第七章，第 9 节）。每个这样的 A 对应于一个变量空间同伦 $\sigma_A : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$，而任意变量空间同伦 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$ 都对应于一个连续滤子函子 A_σ :VK → Sh(I)。此外，$\sigma_{A_\sigma} = \sigma$ 和 $A_{\sigma_A} \cong A$。

设 A :VK → Sh(I) 是一个连续滤子函子。关于下文将用到的连续滤子函子的等价条件列表，请参阅 [27], 定理 VII.10.1。定义 $\sigma_A : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$ 如下。对于每个 $t \in \mathbb{I}$，由 $\tau_t(0) = t$ 给出的连续函数 $\tau_t : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ 对应于一个几何态射 $t = \Im(\tau_t) : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Sh(I)}$。将其与左伴随 t^* 复合，得到连续滤子函子 $t^* \bigcirc A : \mathrm{VK} \to \mathrm{Sh(I)} \to \mathrm{Sets}$，如第 4.2 节所述。根据定理 4.2.6，这确定了一个变空间结 $\mathrm{V}_t \in \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$。定义 $\sigma_A(t) = \mathrm{V}_t$。

引理 5.2.1. 对于上述 $A : \mathrm{VK} \to \mathrm{Sh(I)}$， $\sigma_A : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\boldsymbol{VK}} F)$ 是一个变空间同伦。

证明。设 $t \in \mathbb{I}$ 和 $(U, K) \in \mathrm{obj}(\sigma_A(t))$。需要证明存在 t 的一个邻域 N 和一个连续函数 $\sigma_U^N : N \to U$，使得 $\sigma_U^N(t) = K$，并且对所有 $s \in N$，都有 $(U, \sigma_U^N(s)) \in \mathrm{obj}(\sigma_A(s))$。由于 $(U, K) \in \mathrm{obj}(\sigma_A(t))$， K 是由某个 $u_t \in t^* \bigcirc A(U)$ 确定的结。现在， $A(U)$ 是 $\mathbb{I}$上的一个层。拓扑空间上的每个层都可以视为其芽层。此外，对于$P \in \mathrm{Sh(I)}$，应用左伴随 $t^* : \mathrm{Sh(I)} \to \mathrm{Sets}$ 可得 P 在 t处的茎。这意味着存在 t的一个邻域 N，使得对于某个 $u \in A(U)(N)$，有 $u_t = \mathrm{germ}_t u$。对于任意 $s \in N$，定义$u_s \in s^* \bigcirc A(U)$ 为 $u_s = \mathrm{germ}_s u$，并令 $\sigma_U^N(s)$ 为 U 中由 u_s 确定的结（见定义 4.2.2）。

根据构造，$(U, \sigma_U^N(s)) \in \sigma_A(s)$。现在证明 $\sigma_U^N : N \to U$ 是连续的。设$V \subseteq U, V \neq U$是一个开集，满足对于某个 $s \in N$， $\sigma_U^N(s) \in V$。我们将证明存在 s 的一个邻域 $M \subseteq N$，使得 $\sigma_U^N(M) \subseteq V$。首先，取 U的一个开覆盖$\{U_i\}$，使得 $U_1 = V$是唯一包含 $\sigma_U^N(s)$的开集。令 S 为由$\{U_i\}$生成的 U 上的覆盖筛。将 A的连续性用于 $u \in A(U)(N)$，意味着 N被 I 中形如 $j : M \to N$的态射覆盖，其中存在一个 S的 $\Psi : W \to U$以及一个 $w \in A(W)(M)$，满足$A(\Psi)_M(w) = A(U)(j)(u)$。于是我们可以选取这样的 j、Ψ和 w，使得 $s \in M$。对等式 $A(\Psi)_M(w) = A(U)(j)(u)$取 s 上的茎，得到$(s^* \bigcirc A)(\Psi)(\mathrm{germ}_s w) = u_s$。于是由引理 4.2.1， u_s 所确定的结 $\sigma_U^N(s)$必属于 $\Psi(W)$。因此，根据 S 的选取可知， Ψ 经由包含映射 $I : V \subseteq U$分解。令 $\Psi = I \bigcirc \Phi$，其中 $\Phi : W \to V$为某个对象，并设 $v = A(\Phi)_M(w) \in A(V)(M)$。因此，对所有 $r \in M$，都有 $\mathrm{germ}_r v \in r^* \bigcirc A(V)$。另请注意， $A(I)_M(v) = A(U)(j)(u)$。因此，$(r^* \bigcirc A)(I)(\mathrm{germ}_r v) = u_r$。由引理 4.3.2，$\mathrm{germ}_r v$ 所确定的V 中的结经 I 映射后，成为 u_r所确定的 U 中的结，即$\sigma_U^N(r)$。然而， I只是子集映射 $V \subseteq U$，因此对于所有 $r \in M$，都有$\sigma_U^N(r) \in V$，由此可知σ_U^N是连续的。□

引理 5.2.2. 如果 A_1、A_2 : VK → Sh(I) 是连续滤子函子，且 $\beta : A_1 \to A_2$ 是自然变换，那么 $\sigma_{A_1} = \sigma_{A_2}$。

证明。对于 VK 的每个对象 U，都有一个层的自然变换 $\beta_U : A_1(U) \to A_2(U)$，定义在 $\mathbb{I}$ 上。于是，对于每个 $N \subseteq \mathbb{I}$，都有一个函数 $\beta_{U,\ N} : A_1(U)(N) \to A_2(U)(N)$，它对 U 和 N 都是自然的。这些函数将用于定义自然变换 $\beta^t : t^* \bigcirc A_1 \to t^* \bigcirc A_2$。回忆一下， $t^* \bigcirc A_1(U)$ 的每个元素都可以表示为某个 $u \in A_1(U)(N)$ 的芽 $\mathrm{germ}_t u$。定义 $\beta_U^t(\mathrm{germ}_t u) = \mathrm{germ}_t \beta_{U,\ N}(u)$。必须证明 β_U^t 对 U 是自然的。设 $\Psi : U \to V$ 为

VK 中的一个态射。首先注意，由于 β 对 U 是自然的，因此 $A_2(\Psi)_N \bigcirc \beta_{U,\ N} = \beta_{V,\ N} \bigcirc\ A_1(\Psi)_N$。然后 ：

$$\begin{aligned}\beta_V^t\left(t^* \circ A_1(\Psi)\left(\mathrm{germ}_t u\right)\right) &= \beta_V^t\left(\mathrm{germ}_t A_1(\Psi)_N(u)\right)\\ &= \mathrm{germ}_t \beta_{V,N} \circ A_1(\Psi)_N(u)\\ &= \mathrm{germ}_t A_2(\Psi)_N \circ \beta_{U,N}(u)\\ &= t^* \circ A_2(\Psi)\left(\mathrm{germ}_t \beta_{U,N}(u)\right)\\ &= (t^* \circ A_2)(\Psi) \circ \beta_U^t\left(\mathrm{germ}_t u\right)\end{aligned}$$

因此， β^t 是一个自然变换。由引理 4.2.4， $t^* \bigcirc A_1$ 和 $t^* \bigcirc A_2$ 确定同一个变空间结。因此，对于所有 $t \in \mathbb{I}$， $\sigma_{A_1}(t) = \sigma_{A_2}(t)$，证明完毕。□

引理 5.2.3. 设 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\boldsymbol{VK}} F)$ 是一个变空间同痕。

(1) 存在一个连续滤子函子 A_σ :VK → Sh(I)，使得 $\sigma_{A_\sigma} = \sigma$。(2) 如果 A : VK → Sh(I) 是一个连续滤子函子且 $\sigma_A = \sigma$，那么 $A \cong A_\sigma$。

证明。证明推迟到下文第 5.3 节。 □

定理 5.2.4. 变空间同痕与虚同痕一一对应。

证明。由于 Hom(Sh(I), Sh(VK)) 等价于连续滤过函子的范畴A ： VK → Sh(I)（[27], 推论 VII.10.2），因此只需证明该定理对连续滤过函子成立。根据引理 5.2.2，同构的连续滤子函子确定相同的变量空间同痕。引理 5.2.3(1)表明该对应是满射。根据引理 5.2.3(2)，它是单射：若 A, B : VK → Sh(I) 满足 $\sigma_A = \sigma_B$，则 $A \cong A_{\sigma_A} = A_{\sigma_B} \cong B$。□

曲面上的每个纽结图 Σ 都是某个纽结 $K \in \mathbb{K}(\Sigma)$ 的像的投影。根据定理 4.2.6，存在一个虚结 pt(K) ： 集合 →Sh(VK)，它对应于变量空间纽结 V$_K$。与最小亏格模型不同，所有曲面上的纽结图因此都能在我们的几何模型 VG中得到表示。结合定理 5.1.3 和 5.2.4，我们还可得：由虚同痕生成的虚结关系的等价类，与虚结类型一一对应。从这个意义上说，虚纽结理论的几何模型 VG 完整地复原了任意一种图示模型。我们将这些观察记录如下，以供日后参考。

定理 5.2.5. 设 (Σ_0, D_0)、$(\Sigma_1, D_1) \in \mathfrak{D}^{(CKS^*)}$ 为纽结图。设 $K_0 \in \mathbb{K}(\Sigma_0)$、 $K_1 \in \mathbb{K}(\Sigma_1)$ 为图表分别是 D_0、 D_1 的结，并设 pt(K_0)、pt(K_1) :Sets →Sh(VK) 表示与变空间结 V$_{K_0}$、V$_{K_1}$ 相对应的虚结。那么，(Σ_0, D_0)、(Σ_1, D_1) 具有相同的虚纽结类型，当且仅当存在一个虚同痕 σ :Sh(I) → Sh(VK)，将 pt(K_0) 变为 pt(K_1)。

5.3. 引理 5.2.3 的证明。设 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$ 是一个变空间同伦。根据引理 5.2.1 的证明， A_σ : VK → Sh(I) 应定义为：对所有 $t \in \mathbb{I}$, $t^* \bigcirc A_\sigma \cong A_{K_t}$，其中 $(O, K_t) \in$ obj($\sigma(t)$)，且 A_{K_t} : VK → Sets 是第 4.4 节中的连续滤子函子。因此，对每个对象 U，我们将定义一个 ´etale 空间 $p^U : \Lambda^U \to \mathbb{I}$，使其在 t 上方的纤维与集合 $A_{K_t}(U)$ 一一对应。然后，我们令 $A_\sigma(U)$ 为 p^U 的截面层。 Λ^U 的拓扑由 σ 的局部连续性得到。根据 ($\star$)，存在一个连续函数 $\sigma_U^N : N \to O$，使得对所有 $s \in N$， $\sigma_O^N(t) = K_t$，且 $\sigma_O^N(s) \in$ obj($\sigma(s)$)。设 $[\Psi] \in A_{K_t}(U)$，其中 $\Psi : O' \to U$，且 O' 是一个 (O, K_t)-邻域。由于 σ_U^N 连续，存在一个 $M \subseteq N$，使得对所有 $s \in M$， O' 都是一个 $(O, \sigma_U^N(s))$-邻域。因此，Ψ 对所有 $s \in M$ 都表示等价类 $[\Psi]_s \in A_{\sigma_U^N(s)}(U)$。集合 $\Psi = \{[\Psi]_s | s \in M\}$ 构成 Λ^U 上拓扑的一个基，因此投影 $p^U : \Lambda^U \to \mathbb{I}$, $p([\Psi]_s) = s$ 是 ´etale。

为使其更加精确，首先对每个 $t \in \mathbb{I}$ 固定对象 $(C_t, K_t) \in$ obj($\sigma(t)$)。这通过引理

5.1.2 完成。于是存在连续函数 $\sigma_1 : N_1 \to C_1$, $\sigma_{1.5} : N_{1.5} \to C_{1.5}$, . . ., $\sigma_n : N_n \to C_n$ ，它们在重叠部分上相匹配，并且具有如下性质：对于所有 $t \in N_j$，$(C_j, \sigma_j(t)) \in \mathrm{obj}(\sigma(t))$。对于 $t \in N_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$，固定 $(C_i, \sigma_i(t))$。为 $t \in N_{i+.5}$ 固定的两个纽结将通过中间纽结 $(C_{i+.5}, \sigma_{i+.5}(t))$ 来处理。

接下来，按照第 4.4 节，我们在从 $t \in \mathbb{I}$ 到 U 的固定代表元出发的态射上定义一个等价关系 $\overset{t}{\sim}$ 。令 H_t^U 为 VK 中所有从集合 $\mathcal{O}_{\sigma_i}(t)$ 内的对象到 U 的态射所构成的集合（该集合可能为空），其中 $t \in N_i$。特别地，若对于某个 i 有 $t \in N_i \cap N_{i+1}$，那么 H_t^U 就是从 $\mathcal{O}_{\sigma_i}(t) \cup \mathcal{O}_{\sigma_{i+1}}(t)$ 中的对象出发的态射集合。设 $\Psi : O_i' \to U$，且对于 $O_i' \in \mathcal{O}_{\sigma_i}(t)$ 和 $O_j' \in \mathcal{O}_{\sigma_j}(t)$，有 $\Phi : O_j' \to U$。若 $i = j$，则在存在某个 $O' \in \mathcal{O}_{\sigma_i}(t)$ 及包含映射 $I_i : O' \to O_i'$、$I_j : O' \to O_j'$，使得 $\Psi \bigcirc I_i = \Phi \bigcirc I_j$ 时，记作 $\Phi \overset{t}{\sim} \Psi$。换言之，若它们表示 $A_{\sigma_i}(t)(U)$ 中的同一元素，则记作 $\Phi \overset{t}{\sim} \Psi$。对于 $j = i + 1$，若存在某个 $O' \in \mathcal{O}_{\sigma_{i+.5}}(t)$ 及态射 $\Xi_i : O' \to O_i'$、$\Xi_{i+1} : O' \to O_{i+1}'$，使得 $\Psi \bigcirc \Xi_i = \Phi \bigcirc \Xi_{i+1}$，且下图交换（其中所有竖直箭头均为包含映射），则记作 $\Phi \overset{t}{\sim} \Psi$。

$$\begin{array}{ccccc} O_i' & \xleftarrow[\Xi_i]{} & O' & \xrightarrow[\Xi_{i+1}]{} & O_{i+1}' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_i & \xleftarrow{\Delta_i} & C_{i+.5} & \xrightarrow{\Upsilon_{i+1}} & C_{i+1} \end{array}$$

可以很快验证，$\overset{t}{\sim}$ 具有自反性、对称性和传递性。用F_t^U表示H_t^U的 $\overset{t}{\sim}$-等价类集合。这些集合将作为丛 $p^U : \Lambda^U \to \mathbb{I}$的纤维。若$[\Psi] \in F_t^U$，我们用 $[\Psi]_t$表示它所在的纤维。令$\Lambda^U = \bigsqcup_{t\in\mathbb{I}} F_t^U$，并令 $p^U : \Lambda^U \to \mathbb{I}$为投影 $p^U([\Psi]_t) = t$。如上所述，Λ^U 的基本开集具有$\dot{\Psi} = \{[\Psi]_t \in F_t^U | t \in M\}$的形式，其中 $M \subseteq \mathbb{I}$是开集，$\Psi : O' \to U$，且对所有 $t \in M$，$O' \in \mathcal{O}_{\sigma_i\,(t)}$ 对于某个 i成立。验证 $p^U : \Lambda^U \to \mathbb{I}$ 是 ´étale 的过程留作练习。

令 $A_\sigma(U) \in \mathrm{Sh(I)}$ 为 p^U 的截面层。若 $\Phi : U \to V$ 是 VK 中的一个态射，则存在一个 ´etale 空间映射 $\Lambda(\Phi) : \Lambda^U \to \Lambda^V$，定义为 $\Lambda(\Phi)([\Psi]_t) = [\Phi \bigcirc \Psi]_t$。截面函子 Γ 将 $\Lambda(\Phi)$ 映为 Sh(I) 中的一个态射 $\Gamma(\Lambda(\Phi))$，它是从 $A_\sigma(U)$ 到 $A_\sigma(V)$ 的自然变换。定义 $A_\sigma(\Phi) : A_\sigma(U) \to A_\sigma(V)$ 为 $A_\sigma(\Phi) = \Gamma(\Lambda(\Phi))$。这定义了一个函子 $A_\sigma : \mathrm{VK} \to \mathrm{Sh(I)}$。

引理 5.3.1. 对于 一个变空间同伦 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$ 和 $(U, K) \in \mathrm{obj}(\sigma(t))$，$t^* \bigcirc A_\sigma \cong A_K$.

证明。对于 VK 的任意对象 V，$A_\sigma(V)$ 是 ´etale 空间 Λ^V 的截面层。应用逆像函子 $t^* : \mathrm{Sh(I)} \to \mathrm{Sets}$，可得到 Λ^V 在 t 上的茎。但是，t 上的茎是一个等价类，其中的态射从 $\mathcal{O}_{\sigma_i}(t)$ 中满足 $t \in N_i$ 的对象指向 V。因此，$t^* \bigcirc A_\sigma(V)$ 可识别为 $A_{\sigma_i}(t)(V)$。这关于 V 是自然的，所以 $t^* \bigcirc A_\sigma$ 与 $A_{\sigma_i}(t)$ 自然同构。由于 K 和 $\sigma_i(t)$ 属于 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的同一个连通分支，根据引理 4.4.5 可知，A_K 与 $A_{\sigma_i}(t)$ 自然同构。因此，A_K 与 $t^* \bigcirc A_\sigma$ 自然同构。□

现在我们可以证明引理 5.2.3 了。下面分别证明这两部分。

引理 5.2.3(1) 的证明。若 A_σ 是连续且滤过的，则 $\sigma_{A_\sigma}(t)$ 是 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的连通分支 V_t，对应于连续滤子函子 $t^* \bigcirc A_\sigma : \mathrm{VK} \to$ 集合。根据引理 5.3.1，对于任意 $(U, K) \in \mathrm{obj}(\sigma(t))$，它自然同构于 $A_K : \mathrm{VK} \to$ 集合。由于 $\mathrm{V}_K = \mathrm{V}_t$，可得对于所有 $t \in \mathbb{I}$，$\sigma_{A_\sigma}(t) = \sigma(t)$。因此，引理的第二部分由第一部分推出。

为证明第一个断言，只需证明 A_σ 满足 [27], 定理 VII.10.1 的性质（i）–（iv）。简言之，它们是：（i） A_σ 非空；（ii）VK 中的对象对适当地

连通；（iii）平行箭头有等化子；（iv） A_σ 将覆盖筛映为满射族。根据引理 5.3.1，由于 $t^* \bigcirc A_\sigma$: VK $\to$ Sets 连续且滤过，这是一项常规工作。作为说明，我们验证（iii）。设 $\Phi_1, \Phi_2 : U \to V$，$N \subseteq \mathbb{I}, u \in A_\sigma(U)(N)$，且 $A_\sigma(\Phi_1)_N(u) = A_\sigma(\Phi_2)_N(u)$。我们必须证明，存在 N 的一个开覆盖，由箭头 $j : M \to N$ （在 I 中）构成，使得存在一个箭头 $\Upsilon : W \to U$ （在 VK 中）以及一个 $w \in A_\sigma(W)(M)$，满足 $\Phi_1 \bigcirc \Upsilon = \Phi_2 \bigcirc \Upsilon$ 且 $A_\sigma(\Upsilon)_M(w) = A_\sigma(U)(j)(u)$。令 $t \in N$。那么 $(t^* \bigcirc A_\sigma)(\Phi_1)(\mathrm{germ}_t u) = (t^* \bigcirc A_\sigma)(\Phi_2)(\mathrm{germ}_t u)$。由于 $t^* \bigcirc A_\sigma$ 是滤过的，因而平行箭头有等化子，所以存在箭头 $\Upsilon : W \to U$ 和一个 $w_t \in (t^* \bigcirc A_\sigma)(W)$，使得 $\Phi_1 \bigcirc \Upsilon = \Phi_2 \bigcirc \Upsilon$ 且 $(t^* \bigcirc A_\sigma)(\Upsilon)(w_t) = \mathrm{germ}_t u$。通过选取 t 的一个足够小的邻域 $M \subseteq N$，可知存在 $w \in A_\sigma(W)(M)$，使得 $w_t = \mathrm{germ}_t w$，并且 $A_\sigma(\Upsilon)_M(w)$ 是 M 上 p^U 的一个截面，它与 u 在 M 上的限制相一致。因此， $A_\sigma(\Upsilon)_M(w) = A_\sigma(U)(j)(u)$，其中 $j : M \to N$ 是包含映射。□

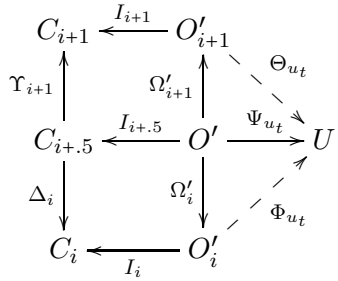
引理 5.2.3(2) 的证明。由于 $\sigma = \sigma_A$, $A_\sigma = A_{\sigma_A}$，只需证明 $A \cong A_{\sigma_A}$。对于 U 这个 VK 的对象，令 $q^U : E^U \to \mathbb{I}$ 为层 $A(U)$ 在 $\mathbb{I}$ 上的芽的 ´etale 空间。将证明，作为一个 ´etale 空间，$q^U : E^U \to \mathbb{I}$ 等价于由上述变空间同痕 σ_A 构造的丛 $p^U : \Lambda^U \to \mathbb{I}$。

回顾一下， $\sigma_A(t)$ 是由 $t^* \bigcirc A$: VK $\to$ 集合所确定的变空间结。根据引理 5.2.1，若对某个 $N \subseteq \mathbb{I}$, $u \in A(U)(N)$，则由芽 ${}_t u \in t^* \bigcirc A(U)$ 确定的 U 中的纽结构成一条路径 $\sigma_U^N : N \to U$。´etale 空间 Λ^U 由一组固定路径 $\sigma_1 : N_1 \to C_1, \sigma_{1.5} : N_{1.5} \to C_{1.5}, \ldots, \sigma_n : N_n \to C_n$ 构成，这些路径是将引理 5.1.2 应用于 σ_A 后得到的。结合这两个结果，可以假设对每个 $j = 1$, 1.5, 2, $\ldots, n$，都存在一个 $c_j \in A(C_j)(N_j)$，使得对所有 $t \in N_j$, $\sigma_j(t)$ 都是由芽 ${}_t c_j \in t^* \bigcirc A(C_j)$ 确定的结。此外，还可以假设对于 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ 以及 $t \in N_i \cap N_{i+1}$， $\Upsilon_{i+1} \cdot$ 芽 ${}_t c_{i+.5} =$ 芽 ${}_t c_{i+1}$，且 $\Delta_i \cdot$ 芽 ${}_t c_{i+.5} =$ 芽 ${}_t c_i$。这是因为 $t^* \bigcirc A$ 是滤过的，因此道路连通分支 $C_{i+.5}$ 可以选取得使其适合于图表 $C_i \xleftarrow{\Delta_i} C_{i+.5} \xrightarrow{\Upsilon_{i+1}} C_{i+1}$；存在一个 $c_t \in t^* \bigcirc A(C_{i+.5})$，使得 $\Upsilon_{i+1} \cdot c_t =$ 芽 ${}_t c_{i+1}$ 且 $\Delta_i \cdot c_t =$ 芽 ${}_t c_i$。于是，对某个 $c_{i+.5} \in A(C_{i+.5})(M)$，有 $c_t =$ 芽 ${}_t c_{i+.5}$，因此可以将 $\sigma_{i+.5}$ 定义为由固定元素 $c_{i+.5}$ 以此方式确定的路径。

根据引理 4.4.5，对于每个 $i = 1$、2、. . .、 n 和 $t \in N_i$，都存在一个自然同构 $\alpha^{\mathrm{germ}_t c_i} : t^* \bigcirc A \to A_{\sigma_i}(t)$，由我们固定选取的元素芽 ${}_t c_i \in t^* \bigcirc A(C_i)$ 给出。对于 VK 中的每个对象 U 以及 $u_t \in t^* \bigcirc A(U)$，$\alpha^{\mathrm{germ}_t c_i}(u_t) = [\Psi_{u_t}]$，其中 $\Psi_{u_t} : O'_t \to U$ 和 $O'_t \in \mathcal{O}_{\sigma_i}(t)$。由于 $t^* \bigcirc A(U)$ 是层 $A(U)$ 在 t 处的茎，映射 $\alpha^{\mathrm{germ}_t c_i}$ 合起来给出一个 ´etale 空间的保纤维双射 $\eta^U : E^U \to \Lambda^U$。暂且假设 η^U 定义良好，我们注意到 η^U 连续且其逆映射也连续。当 $A(U)$ 被识别为一个 ´etale 空间时，基本开集的形式为 $\{\mathrm{germ}_t u | t \in N\}$，其中 $N \subseteq \mathbb{I}$ 且 $u \in A(U)(N)$。而 Λ^U 的基本开集形式为 $\{[\Psi]_t | t \in N\}$。对于 t 的一个足够小的邻域 N， $\eta^U([\mathrm{germ}_s u]) = [\Psi_{\mathrm{germ}_t u}]_s$ 对所有 $s \in N$ 都成立。因此， η^U 将基本开集从 E^U 双射映射到 Λ^U，由此得出 η^U 连续且其逆映射也连续。同样， η^U 关于 U 自然，因为对于所有 t， $\alpha^{\mathrm{germ}_t c_i}$ 关于 U 都是自然的。

现在必须证明 η^U 定义良好。可以假设 $t \in N_i \cap N_{i+1} = N_{i+.5}$，其中某个 i，因为其他情况都显然成立。设 $\alpha^{\mathrm{germ}_t c_{i+.5}}(u_t) = [\Psi_{u_t}]$，其中某个 $u_t \in t^* \bigcirc A(U)$，且 $\Psi : O' \to U$ 满足 $O' \in \mathcal{O}_{\sigma_{i+.5}(t)}$。回忆一下，$[\Psi_{u_t}]$ 由图表 $U \xleftarrow{\Psi_{u_t}} O' \xrightarrow{I_{i+.5}} C_{i+.5}$ 定义，使得存在一个 $o'_t \in t^* \bigcirc A(O')$，满足 $\Psi_{u_t} \cdot o'_t = u_t$ 和 $I_{i+.5} \cdot o'_t =$ 胚芽 ${}_t c_{i+.5}$。令 $\Omega_i = \Delta_i \bigcirc I_{i+.5}$，$\Omega_{i+1} = \Upsilon_{i+1} \bigcirc I_{i+.5}$。根据引理 3.2.1，$\Omega_j$ 可分解为 $O' \xrightarrow{\Omega'_j} O'_j \xrightarrow{I_j} C_j$，其中 $j = i, i+1$，且 Ω'_j 是一个

同构，而 I_j 是包含映射。因此，Ψ_{u_t} 可经由 Ω'_j 分解，其中 $j = i, i+1$。对某些态射 Θ_{u_t}, Φ_{u_t}，记 $\Psi_{u_t} = \Theta_{u_t} \bigcirc \Omega'_{i+1}$ 和 $\Psi_{u_t} = \Phi_{u_t} \bigcirc \Omega'_i$。这给出了下面的交换图：



于是，对于 $j = i, i+1$，$(I_j \bigcirc \Omega'_j) \cdot o'_t = \mathrm{germ}_t c_j$。因此，$\alpha^{\mathrm{germ}_t c_i}(u_t) = [\Phi_{u_t}]$ 且 $\alpha^{\mathrm{germ}_t c_{i+1}}(u_t) = [\Theta_{u_t}]$。但上图恰好表示 $\Phi_{u_t} \overset{t}{\sim} \Theta_{u_t}$。因此，$\eta^U$ 是étale 空间之间定义良好的等价。这意味着 A 和 A_{σ_A} 自然同构。□

6. Virtual knot invariants

6.1. 变空间结不变量。设 $\mathbb{G}$ 为一个具有离散拓扑的非空集合。取值于 $\mathbb{G}$ 的结不变量是一个连续函数 $\nu : \mathbb{K} \to \mathbb{G}$，使得 ν 在 $\mathbb{K}$的道路连通分支上为常值。这个要求可以转化为 $\pi_0(\int_{\mathbf{K}} F)$。若函数 $\nu : \pi_0(\int_{\mathbf{K}} F) \to \mathbb{G}$满足：对于每个满足局部连续性条件（$\star$）的函数 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{K}} F)$，都有 $\nu(\sigma(0)) = \nu(\sigma(1))$，则它是一个结不变量。这引出了以下内容。

定义 **6.1.1**（变量空间纽结不变量）。取值于 $\mathbb{G}$ 的变量空间结不变量是一个函数 $\nu : \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F) \to \mathbb{G}$，满足对于每个变量空间同伦 $\sigma : \mathbb{I} \to \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$，都有 $\nu(\sigma(0)) = \nu(\sigma(1)$。

虚结的不变量概念与层上同调密切相关。回顾一下，常值预层 $\Delta_{\mathbb{G}} : \mathbf{VK}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$ 定义为：对所有对象 U，$\Delta_{\mathbb{G}}(U) = \mathbb{G}$；对态射 $\Psi : U \to V$，$\Delta_{\mathbb{G}}(\Psi) = 1_{\mathbb{G}}$。将伴随层函子 $\mathsf{a} : \mathbf{Sets}^{\mathbf{VK}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sh(VK)}$（见第 III.5 节）应用于 $\Delta_{\mathbb{G}}$，可得到一个层 $\Gamma_{\mathbb{G}}$，其具体描述如下。对于每个曲面Σ，考虑由 $\zeta_\Sigma^{\mathbb{G}\times\Sigma}(g, z) = z$ 定义的覆盖空间 $\zeta_\Sigma^{\mathbb{G}\times\Sigma} : \mathbb{G} \times \Sigma \to \Sigma$。这诱导出一个覆盖空间 $Z_{\mathbb{K}\ \Sigma}^{\mathbb{G}\times\mathbb{K}(\Sigma)}(\,) : \mathbb{G} \times \mathbb{K}(\Sigma) \to \mathbb{K}(\Sigma)$。对于 $U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$，令 $\Gamma_{\mathbb{G}}(U)$ 为 $Z_{\mathbb{K}\ \Sigma}^{\mathbb{G}\times\mathbb{K}(\Sigma)}(\,)$ 的截面 $s : U \to \mathbb{G} \times \mathbb{K}(\Sigma)$ 的集合。对于态射 $\Psi : \overline{U} \to U$，其中 $U \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ $\overline{U} \subseteq \mathbb{K}(\overline{\Sigma})$，以及任意的 $s \in \Gamma_{\mathbb{G}}(U)$，注意存在唯一的截面 $\overline{s} \in \Gamma_{\mathbb{G}}(U)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G} \times \mathbb{K}(\overline{\Sigma}) & \xrightarrow{1_{\mathbb{G}} \times \Psi} & \mathbb{G} \times \mathbb{K}(\Sigma) \\ {\scriptstyle \overline{s}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ \overline{U} & \xrightarrow{\Psi} & U \end{array}.$$

通过设定 $\Gamma_{\mathbb{G}}(\Psi)(s) = \overline{s}$，可以得到一个预层 $\Gamma_{\mathbb{G}} : \mathbf{VK}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Sets}$。此外，$\Gamma_{\mathbb{G}}$ 是一个层。为说明这一点，设 $\{s_\Psi : \overline{U} \to \mathbb{G} \times \mathbb{K}(\Sigma) | \Psi \in S\}$ 是 U 上覆盖筛 $S = \{\Psi : U \to \underline{U}\}$ 的一个匹配族。对于每个 s_Ψ，都有一个截面 $(s|\Psi(U)) : \Psi(U) \to \mathbb{G} \times \mathbb{K}(\Sigma)$，其定义为 $(s|\Psi(U))(\Psi(x)) = (p_1(s_\Psi(x)))\ \Psi(x))$，其中 $p_1 : \mathbb{G} \times \mathbb{K}(\Sigma) \to \mathbb{G}$ 是到第一因子的投影。由于 $\{s_\Psi\}$ 是一个匹配族，如果 $\Psi, \Phi \in S$ 的像有重叠，则当 $\Psi(x) = \Phi(y)$ 时，$(s|\Psi(\mathrm{dom}(\Psi)))(\Psi(x)) = (s|\Phi(\mathrm{dom}(\Phi))(\Phi(y))$。由于 $\bigcup_{\Psi\in S} \Psi(\mathrm{dom}(\Psi)) = U$，这意味着这些限制可以拼接成一个截面 $s : U \to \mathbb{G} \times \mathbb{K}(\Sigma)$，使得对于所有 $\Psi \in S$，$\Gamma_{\mathbb{G}}(\Psi)(s) = s_\Psi$。因此，$\Gamma_{\mathbb{G}}$ 是一个层。我们遵循通常的约定，将 $\Gamma_{\mathbb{G}} \cong \mathsf{a}(\Delta_{\mathbb{G}})$ 记作 $\Delta_{\mathbb{G}}$。

引理 6.1.2。取值于 $\mathbb{G}$ 的变量空间纽结不变量与 $\mathrm{Hom}^{Sh(\mathbf{VK})}(1,\Delta_{\mathbb{G}})$ 一一对应，其中 1 是 Sh(VK) 的终对象。

证明。取将每个对象映到单点集 $\mathbb{I}^{=}\{0\}$、将每个态射映到恒等映射的层作为终对象。一个自然变换 $\eta:1\to\Delta_{\mathbb{G}}$ 为每一对对象 U,V 以及每个态射 $\Psi:U\to V$ 给出一个交换三角形：

$$\begin{array}{ccc} & & \Delta_{\mathbb{G}}(V) \\ & \overset{\eta_V}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle \Delta_{\mathbb{G}}(\Psi)} \\ 1 & \xrightarrow[\eta_U]{} & \Delta_{\mathbb{G}}(U) \end{array}$$

对每个对象 U, η选取 $Z^{\mathbb{G}\times\mathbb{K}(\Sigma)}_{\mathbb{K}\ \Sigma}()$的一个截面 $\eta_U(0):U\to\mathbb{G}\times\mathbb{K}(\Sigma)$。那么，如果 $C\subseteq\mathbb{K}(\Sigma)$ 是一个道路连通分支，则存在一个 $g_C\in\mathbb{G}$，使得对所有 $K\in C$，都有 $\eta_C(0)(K)=(g_C,K)$。假设两个道路连通分支 $C,\overline{C}$ 在 VK 中由一条箭头路径连接：

$$C=C_1\longleftarrow C_{1.5}\longrightarrow C_2\longleftarrow\cdots\longrightarrow C_{n-1}\longleftarrow C_{n-.5}\longrightarrow C_n=\overline{C},$$

其中每个 $C_j\subseteq\mathbb{K}(\Sigma_j)$ 都是一个道路连通分支。将 $\Delta_{\mathbb{G}}$ 和 η 应用于这条箭头路径。于是，交换三角形意味着对所有 i,j，都有 $g_{C_i}=g_{C_j}$。因此，存在一个良定义函数 $\nu:\pi_0(\int_{\mathbf{VK}}F)\to\mathbb{G}$，由以下方式给出：若存在一个道路连通分支 $C\subseteq\mathbb{K}(\Sigma)$，使得对某个 $K\in C$，有 $(C,K)\in\mathrm{obj}(\mathbf{V})$，则 $\nu(\mathbf{V})=g_C$。现在，设 $\sigma:\mathbb{I}\to\pi_0(\int_{\mathbf{VK}}F)$ 是一个变空间同痕。由引理 5.1.2，存在如上所述的道路连通分支 $C_1,C_{1.5},\ldots,C_n$，以及一列连续函数 $\sigma_1:N_1\to C_1,\sigma_{1.5}\to C_{1.5},\ldots,\sigma_n:N_n\to C_n$，使得当 $s\in N_j$ 时，$\sigma_j(s)\in\mathrm{obj}(\sigma(s))$。因此，$\nu(\sigma(0))=g_{C_1}=g_{C_n}=\nu(\sigma(1))$，而 η 唯一确定一个变空间结不变量。

反过来，假设 $\nu:\pi_0(\int_{\mathbf{VK}}F)\to\mathbb{G}$ 是一个变量空间纽结不变量。对于 $U\subseteq\mathbb{K}(\Sigma)$，定义 $s_U:U\to\mathbb{G}\times\mathbb{K}(\Sigma)$ 为 $s_U(K)=(\nu(\mathbf{V}_K)\ K)$。那么 $Z^{\Sigma}_{\mathbb{G}}\bigcirc\ s_U=1_U$。但是 s_U 也是连续的：如果 K_1,K_2 属于 U 的同一道路连通分支，那么 $\mathbf{V}_{K_1}$ 和 $\mathbf{V}_{K_2}$ 变量空间同痕，因此 $\nu(\mathbf{V}_{K_1})=\nu(\mathbf{V}_{K_2})$。令 $\eta:1\to\Delta_{\mathbb{G}}$ 在各连通分支上定义为 $\eta_U(0)=s_U$。现在，如果 $\Psi:U\to U$ 是一个态射且 $K\in\overline{U}$，则 $\mathbf{V}_K=\mathbf{V}^{\Psi(K)}$，因此 $\nu(\mathbf{V}_K)=\nu(\mathbf{V}^{\Psi(K)})$。于是，$(1_{\mathbb{G}}\times\Psi)\bigcirc^{S}\overline{U}(K)=(\nu(\mathbf{V}_K)\ \Psi(K))=(\nu(\mathbf{V}^{\Psi(K)})\ \Psi(K))=s_U(\Psi(K))$。这意味着 $s_{\overline{U}}=\Delta_{\mathbb{G}}(\Psi)(s_U)$，由此我们得出 $\eta:1\to\Delta_{\mathbb{G}}$ 是一个自然变换。□

现在令 $\mathbb{G}$ 为一个带离散拓扑的阿贝尔群。那么 $H^0(\mathbb{K},\mathbb{G})$ 是取值于 $\mathbb{G}$ 的结不变量群。这里 H^0 表示通常的奇异上同调群。将其转化为层上同调，这意味着，在 $\mathbb{G}$ 中的经典结不变量可与群 $H^0(\mathrm{Sh(K)}\ \Delta_{\mathbb{G}})$ 等同，其中 $\Delta_{\mathbb{G}}$ 是 Sh(K) 中的常值层（[18], 例 8.15.(i)）。现在我们证明，变空间结不变量也有相同的结论。

定理 6.1.3. $H^0(\mathrm{Sh(VK)}\ \Delta_{\mathbb{G}})$ 是取值于 $\mathbb{G}$ 的变空间结不变量群。

证明。由于 $\mathbb{G}$ 是一个阿贝尔群，$\Delta_{\mathbb{G}}$ 是一个阿贝尔层。根据定义，$H^j(\mathrm{Sh(VK)}\ \Delta_{\mathbb{G}})$ 是 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Sh}(\mathbf{VK})}(1,\Delta_{\mathbb{G}})$ 的第 j 个右导出函子（见 [18], 定义 8.14）。于是引理 6.1.2 表明，$H^0(\mathrm{Sh(VK)}\ \Delta_{\mathbb{G}})$ 是取值于 $\mathbb{G}$ 的变空间结不变量群。□

6.2. 虚结与变空间结不变量。这里我们证明，变空间结不变量（定义 6.1.1）与虚结不变量一一对应。论证过程与第 4.2 节和第 5.2 节相同。首先证明，每个连续滤子函子$A:\mathsf{G}\to\mathrm{Sh(VK)}$都确定一个变空间结不变量 $\nu_A:\pi_0(\int_{\mathbf{VK}}F)\to\mathbb{G}$，且该不变量在同构意义下唯一。然后证明，每个变空间结不变量 $\nu:\pi_0(\int_{\mathbf{VK}}F)\to\mathbb{G}$都确定一个连续滤子函子 $A_\nu:\mathsf{G}\to\mathrm{Sh(VK)}$，使得 $\nu_{A_\nu}=\nu$。我们先计算 $A(H)$，其中 $H\subseteq\mathbb{G}$ 且 $A:\mathsf{G}\to\mathrm{Sh(VK)}$ 连续且滤过。

引理 6.2.1. 对于 $H \subseteq \mathbb{G}$ 和 $C_1, C_2 \ldots, C_n \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ 两两不相交的道路连通分支 s,

$$A(H)\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} C_j\right) \cong \begin{cases} \varnothing & if\ (\exists j)(\forall h \in H) A(\{h\})(C_j) = \varnothing \\ \mathbb{I} & else \end{cases}$$

此外，对于 VK 中的每个道路连通分支 C，都存在唯一的 $h \in \mathbb{G}$，使得 $A(\{h\})(C) \neq \varnothing$。

证明。证明推迟到第 6.3 节。 □

于是， $\nu_A : \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F) \to \mathbb{G}$ 可定义如下。令 $\mathbf{V} \in \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F)$，并设 $(C, K) \in \mathrm{obj}(\mathbf{V})$，其中 $C \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ 是一个道路连通分支。由命题 6.2.1，存在唯一的 $h \in \mathbb{G}$，使得 $A(\{h\})(C) \neq \varnothing$。定义 $\nu_A(\mathbf{V}) = h$。为说明这一定义良好，设 $\Psi : U \to C$ 是 VK 中的一个态射。若 $A(\{h\})(C) \neq \varnothing$，那么必有 $A(\{h\})(U) \neq \varnothing$。此外，若 (C, K)、$(\overline{C}, \overline{K}) \in \mathrm{obj}(\mathbf{V})$，则它们由一条箭头路径连接。反复应用前述观察可得， $A(\{h\})(\overline{C}) \neq \varnothing$。 ν_A 是一个变空间结，这一点可如引理 6.1.2 的证明所示得出。唯一性由下面这对引理得出。

引理 6.2.2. 若 $A_1, A_2 : \mathsf{G} \to \mathsf{Sh(VK)}$ 是连续滤子函子，且 $\eta : A_1 \to A_2$ 是自然同构，则 $\nu_{A_1} = \nu_{A_2}$。

证明. 对每个 $H \subseteq \mathbb{G}$，存在自然变换 $\eta_H : A_1(H) \to A_2(H)$，使得对于 VK 的每个对象 U，都有一个同构 $\eta_{H,U} : A_1(H)(U) \to A_2(H)(U)$。根据引理 6.2.1，若 $C \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ 是道路连通分支，则 $A_i(H)(C)$ 或者为空，或者是单点集。这意味着 $A_1(H)(C)$ 和 $A_2(H)(C)$ 要么同时为空，要么同时非空。因此， $\nu_{A_1} = \nu_{A_2}$。 □

引理 6.2.3. 若 $A_1, A_2 : \mathsf{G} \to \mathsf{Sh(VK)}$ 是连续滤子函子，且 $\nu_{A_1} = \nu_{A_2}$，则 A_1, A_2 自然同构。

证明。令 $C \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ 为一个道路连通分支， $K \in C$ 而 V 为包含 (C, K) 的 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的连通分支。由于 $\nu_{A_1} = \nu_{A_2}$，我们有 $A_1(\{\nu_{A_1}(\mathbf{V})\})(C) \neq \varnothing$ 当且仅当 $A_2(\{\nu_{A_2}(\mathbf{V})\})(C) \neq \varnothing$。将 VK 中任意对象 U 分解为其道路连通分支，引理 6.2.1 表明，对任意 $H \subseteq \mathbb{G}$， $A_1(H)(U) \neq \varnothing$ 当且仅当 $A_2(H)(U) \neq \varnothing$。由于 $A_i(H)(U)$ 要么是单点集合，要么是空集，因此存在唯一的映射选择 $\eta_{H,U} : A_1(H)(U) \to A_2(H)(U)$，且它们关于 H 和 U 都是自然的。因此， A_1 和 A_2 自然同构。□

反过来，若 $\nu : \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F) \to \mathbb{G}$ 是一个虚结不变量，则定义连续滤子函子 $A_\nu : \mathsf{G} \to \mathsf{Sh(VK)}$ 如下。对于 VK 的一个 U 对象，记作：

$$\nu(U) = \{g \in \mathbb{G} | \exists \mathbf{V} \in \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F) \text{ and } K \in U \text{ s.t. } (U, K) \in \mathrm{obj}(\mathbf{V}) \text{ and } \nu(\mathbf{V}) = g\}.$$

换言之， $\nu(U)$ 是该不变量在所有具有代表元属于 U 的变空间结上所取值的集合。于是， $A_\nu : \mathsf{G} \to \mathsf{Sh(VK)}$ 在 VK 的对象 U 上定义为 $H \subseteq \mathbb{G}$：

$$A_\nu(H)(U) = \begin{cases} \varnothing & \text{if } \nu(U) \not\subseteq H \\ \mathbb{I} & \text{else} \end{cases}$$

对于 VK 的一个态射 $\Psi : U \to V$，注意到 $\nu(V) \subseteq H$ 蕴含 $\nu(U) \subseteq H$。因此， $A_\nu(H)(U) = \varnothing$ 蕴含 $A_\nu(H)(V) = \varnothing$。于是存在唯一的函数 $A_\nu(H)(\Psi) : A_\nu(H)(V) \to A_\nu(H)(U)$，它要么是 $1_{\mathbb{I}} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$、 $1_\varnothing : \varnothing \to \varnothing$，要么是 $! : \varnothing \to \mathbb{I}$。同样，若 $i : \overline{H} \to H$ 是 G 中的一个态射，则在各分量上定义自然变换 $A_\nu(i) : A_\nu(H) \to A_\nu(\underline{H})$：若 $\nu(U) \subseteq H \subseteq H$，则令 $A_\nu(i)_U = \mathrm{id}$；否则， $A_\nu(i)_U$ 是唯一的映射 $! : \varnothing \to A_\nu(H)(U)$。

引理 6.2.4. $A_\nu : \mathsf{G} \to \mathsf{Sh(VK)}$ 是一个连续滤子函子，使得 $\nu_{A_\nu} = \nu$。

证明。注意，对于所有 $H \subseteq \mathbb{G}$， $A_\nu(H)$ 确实是一个层。如果 $\{\Psi_i : U_i \to U\}$ 是一个覆盖筛，那么匹配族就是对所有 i，从单点集合 $A_\nu(H)(U_i)$ 中选取唯一元素。由于 $\bigcup_i \Psi_i(U_i) = U$，这意味着 $\nu(U) \subseteq H$。于是 $A_\nu(H)(U) \neq \varnothing$，因此每个

匹配族都有唯一的粘合。通过简单的图表追踪可知， A_ν 是一个函子。对于第二个结论，注意若 $C \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ 是一个道路连通分支，则对于某个 $g \in \mathbb{G}$，有 $\nu(C) = \{g\}$，并且 $A_\nu(\nu(C))(C) \neq \varnothing$。因此，对于某个 $K \in C$，只要 $(C, K) \in \mathrm{obj}(\mathbf{V})$，就有 $\nu_{A_\nu}(\mathbf{V}) = g = \nu(\mathbf{V})$。

为证明 A_ν 是连续且满足滤过性，我们再次使用 [27], 定理 VII.10.1。第一个滤过性质可由以下事实得出： $A_\nu(\nu(U))(U) \neq \varnothing$。对于第二个性质，假设 $A_\nu(H)(U) \neq \varnothing$ 且 $A_\nu(H)(U) \neq \varnothing$。那么 $\nu(U) \subseteq H \cap H$ 且 $A_\nu(H \cap H)(U) \neq \varnothing$。因此，
恒等箭头 $I : U \to U$ 满足如下性质：存在一个图表 $H \xleftarrow{i} H \cap \overline{H} \xrightarrow{\bar{i}} \overline{H}$ 和一个元素 $0 \in A_\nu(H \cap H)(U)$，使得 $A_\nu(i)_{\overline{U}}(0) = A_\nu(H)(I)(0)$，并且 $A_\nu(i)_U(0) = A_\nu(H)(I)(0)$。 因此，极大筛是 U 的一个覆盖，并具有所需性质。第三个滤过条件显然成立，因为 G 中的平行箭头是相同的。

对于连续性，假设 S 是 $H \subseteq \mathbb{G}$ 的覆盖筛，且 $A_\nu(H)(U) \neq \varnothing$。由于 S 是一个筛，它包含 H的所有单点子集。由于 $A_\nu(H)(U) \neq \varnothing$，对于每个道路连通分支$\overline{U} \subseteq U$，都存在一个 $h \in H$，使得 $A_\nu(\{h\})(\overline{U}) \neq \varnothing$。于是，由道路连通分支的包含映射 $j : U \to U$生成的筛是 U的一个覆盖，且 $A_\nu(i)_{\overline{U}}(0) = A_\nu(H)(j)(0)$，其中$i : \{h\} \to H$ 也是包含映射。因此， A_ν 是连续的，证明完成。□

引理 6.2.5。对于任意连续滤子函子 $A : \mathsf{G} \to \mathbf{Sh}(\mathbf{VK})$， $A_{\nu_A} \cong A$。

证明。将引理 6.2.4 应用于 ν_A，得到$\nu_{A_{\nu_A}} = \nu_A$。然后使用引理 6.2.3 . □

定理 6.2.6. 变量空间不变量与虚结不变量一一对应。

证明。由推论 VII.10.2，同样可知，几何态射范畴 Hom(Sh(VK), Sh(G)) 等价于从 $A : \mathsf{G} \to$ 到 Sh(VK) 的连续滤子函子范畴。因此，结论由引理 6.2.2、6.2.3、6.2.4 和 6.2.5 得出。□

6.3. 引理 6.2.1 的证明。设 $A : \mathsf{G} \to$Sh(VK) 是连续滤过的。首先注意到 $A(\mathbb{G})$ 和 $A(\varnothing)$ 分别是 Sh(VK) 的终对象和始对象。这是因为连续滤子函子范畴等价于从 Sh(VK) 到 Sh(G) 的几何态射范畴，因此 A 可以视为 $N^* \bigcirc \mathsf{a} \bigcirc \mathsf{y}$，其中某个几何态射为 N，y 表示 Yoneda 嵌入，而 $\mathsf{a} : \mathbf{Sets}^{\mathbf{G}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Sh}(\mathbf{G})$ 是层化函子（例如参见第 VII.7 节）。结论随即由 N^* 和 a 保持有限极限与任意余极限这一事实得出，因为它们既是左正合的，也是左伴随。

Lemma 6.3.1. 对于 UVK 中的一个对象和 $H \subseteq \mathbb{G}$，若 $u_1, u_2 \in A(H)(U)$，则 $u_1 = u_2$

证明。由于 A 是滤过的， [27] 的定理 VII.10.1.(ii)表明， U 被一个筛 S覆盖，该筛由形如 $\Psi : V \to U$ 的态射组成，并且存在一个图表 $H \xleftarrow{i} M \xrightarrow{i} H$以及一个 $m \in A(M)(V)$，使得 $A(i)_V(m) = A(H)(\Psi)(u_1)$ 且 $A(i)_V(m) = A(H)(\Psi)(u_2)$。于是$A(H)(\Psi)(u_1) = A(H)(\Psi)(u_2)$。将 u_1 和 u_2 限制到 $A(H)(V)$，便为 S定义了相同的匹配族。由于 $A(H)$是一个层，因此可得 $u_1 = u_2$。□

引理 6.3.2. 如果 $U \neq \varnothing$是 VK 的一个对象，并且存在 h_1、$h_2 \in \mathbb{G}$，使得 $A(\{h_1\})(U) \neq \varnothing$且 $A(\{h_2\})(U) \neq \varnothing$，那么 $h_1 = h_2$。

证明。如同前一个引理，这里同样使用了 A 的第二滤过性质。假设 $h_1 \neq h_2$。第二滤过性质意味着， U 被形如 $\Psi : V \to U$ 的态射所覆盖，其中存在 G 中的图表 $\{h_1\} \longleftarrow M \longrightarrow \{h_2\}$，使得 $A(M)(V) \neq \varnothing$。由于 $h_1 \neq h_2$，我们必有 $M = \varnothing$。但是，只要 $V \neq \varnothing$， $A(\varnothing)(V) = \varnothing$ 。因此，除非 $U = \varnothing$，否则不可能存在对 U 的这种覆盖。这一矛盾意味着 $h_1 = h_2$。□

引理 6.3.3. Fo r $C \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$ 一个道路连通分支，存在唯一的 $h \in \mathbb{G}$，使得 $A(\{h\})(C) \neq \varnothing$.

证明。令 S 为对象 $\mathbb{G}$ 在 G 中由其单点集合和空集组成的覆盖筛。由于 $A(\mathbb{G})(C) \neq \varnothing$，根据 A 的连续性（[27], 定理 VII.10.1.(iv)），对于每个 $c \in A(\mathbb{G})(C)$，存在由态射 $\Psi : U \to C$ 构成的 C 的一个覆盖，使得对于某个 $i : \{h\} \to \mathbb{G}$ 属于 S 且 $u \in A(\{h\})(U)$，有 $A(i)_U(u) = A(\mathbb{G})(\Psi)(c)$。特别地，对于某个 $h \in \mathbb{G}$，有 $A(\{h\})(U) \neq \varnothing$。首先假设对于该 C 的覆盖中的某些态射 $\Psi_1 : U_1 \to C$、$\Psi_2 : U_2 \to C$，有 $A(\{h_1\})(U_1) \neq \varnothing$ 且 $A(\{h_2\})(U_2) \neq \varnothing$，并且 $\Psi_1(U_1) \cap \Psi_2(U_2) \neq \varnothing$。那么 Ψ_1 在 Ψ_2 上的拉回 U 非空。将其限制到 U，便可推出 $A(\{h_1\})(U) \neq \varnothing$ 且 $A(\{h_2\})(U) \neq \varnothing$。根据引理 6.3.2，$h_1 = h_2$。

现在考虑覆盖中的任意两个态射 $\Psi : U \to C, \overline{\Psi} : \overline{U} \to C$。那么对于某些 $h, \overline{h} \in \mathbb{G}$,$A(\{h\})(U) \neq \varnothing$ 和 $A(\{\overline{h}\})(\overline{U}) \neq \varnothing$。 $\Psi(U)$ 中的任意一点都可以通过路径 $\sigma : \mathbb{I} \to C$ 与 $\overline{\Psi}(\overline{U})$ 中的任意一点相连。由紧致性可知，σ 的像可由给定的 C 覆盖中的有限多个态射$\Psi_1 : U_1 \to C, \ldots,$ $\Psi_n : U_n \to C$ 覆盖，其中 $\Psi_1 = \Psi$ 和 $\Psi_n = \overline{\Psi}$。这些态射的像都必须与列表中的至少另一个态射有非空交集。根据假设，对于每个 $i = 1, \ldots n$，存在一个 $h_i \in \mathbb{G}$，使得 $A(\{h_i\})(U_i) \neq \varnothing$。由这两个观察可知，按照上一段中的论证，对于所有 i, j，都有 $h_i = h_j$。特别地，$h = \overline{h}$。

结合引理 6.3.2，这意味着存在唯一的 $h \in \mathbb{G}$，使得对于给定的 C 的覆盖中的所有态射 $\Psi : U \to C$， $A(\{h\})(U) \neq \varnothing$。由于 $A(\{h\})(U)$ 是一个单点集合，选取每个 $A(\{h\})(U)$ 中唯一的元素，便定义了给定覆盖筛上的一个匹配族。由于 $A(\{h\})$ 是一个层，这个匹配族有唯一的粘合，因此 $A(\{h\})(C) \neq \varnothing$。□

现在用以下引理完成引理 6.2.1 的证明。

引理 6.3.4. 对于 $H \subseteq \mathbb{G}$， $A(H)(\bigsqcup_{j=1}^{n} C_j) \neq \varnothing$ 当且仅当对所有 $j = 1, \ldots, n$，都存在一个 $h \in H$，使得 $A(\{h\})(C_j) \neq \varnothing$。

证明。正向结论由 A 的连续性可得。令 S 为 H 的覆盖筛，它由其单点集和 $\varnothing$ 构成。若 $A(H)(\bigsqcup_{j=1}^{n} C_j) \neq \varnothing$，则存在一个由态射 $\Psi : U \to \bigsqcup_{j=1}^{n} C_j$ 构成的 $\bigsqcup_{j=1}^{n} C_j$ 的覆盖，使得对于某个 $h \in H$，有 $A(\{h\})(U) \neq \varnothing$。特别地，每个道路连通分支 C_j 都必须有一个由态射 $V \to C_j$ 构成的覆盖，使得对于某个 $h \in H$，有 $A(\{h\})(V) \neq \varnothing$。仿照引理 6.3.3 的证明可得，对于某个 $h \in H$，有 $A(\{h\})(C_j) \neq \varnothing$。反过来，假设对每个 j，都存在一个 $h \in H$，使得 $A(\{h\})(C_j) \neq \varnothing$。包含映射 $i : \{h\} \to H$ 给出了一个自然变换 $A(i) : A(\{h\}) \to A(H)$。因此，若 $A(\{h\})(C_j) \neq \varnothing$，则必有 $A(H)(C_j) \neq \varnothing$。由于 $A(H)$ 是一个层，由单点集 $A(H)(C_j)$ 给出的匹配族，对由包含映射 $C_j \to \bigsqcup_{j=1}^{n} C_j$ 生成的覆盖，存在唯一的粘合。因此 $A(H)(\bigsqcup_{j=1}^{n} C_j) \neq \varnothing$。□

7. Geometric morphisms between sheaf-theoretic knot spaces

7.1. 结到虚结的投影。对于结空间 $\mathbb{K}(\Sigma)$，令 $J_{\mathbf{K}(\Sigma)}$ 表示开集 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 的开集范畴 K(Σ) 上的开覆盖拓扑。令 Sh(K(Σ)) = Sh(K(Σ) $J_{\mathbf{K}(\Sigma)}$) 表示位点 (K(Σ) $J_{\mathbf{K}(\Sigma)}$) 上的层范畴。这里我们将“ $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中的结到虚结的投影”实现为一个几何态射 $I_\Sigma : \mathsf{Sh}(\mathsf{K}(\Sigma)) \to \mathsf{Sh}(\mathsf{VK})$。左伴随$I_\Sigma^* : \mathsf{Sh}(\mathsf{VK}) \to \mathsf{Sh}(\mathsf{K}(\Sigma))$ 可描述如下。对于一个位点 (VK $J_{\mathbf{VK}}$) 上的层 P，以及一个开集 $O \subseteq \mathbb{K}(\Sigma)$，定义 $I_\Sigma^*(P)(O) = P(O)$。对于位点 (VK $J_{\mathbf{VK}}$) 上的层 P、Q 之间的任意自然变换 $\eta : P \to Q$，令 $I_\Sigma^*(\eta)$ 表示将 η 限制到 K(Σ) 的对象上。

引理 7.1.1. 若 P 是 Sh(VK) 中的一个层，则 $I_\Sigma^*(P)$ 是 Sh(K(Σ)) 中的一个层。 .

证明。设 $S = \{f : \overline{O} \to O\} \in J_{\mathbf{K}(\Sigma)}(O)$ 是 O 的一个覆盖筛，并设 $\{x_f \in P(\overline{O}) | (f : \overline{O} \to O) \in S\}$ 是一个匹配族。记 (S) 为 VK 中由 S 生成的 O 上的筛。那么 (S) 覆盖 O

在 VK 中，因为 S 在 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 中覆盖 O。匹配族也可以类似地扩展到 (S)。若 $g = f \bigcirc \Psi \in (S)$，其中 $f \in S$ 和 $\Psi : U \to \overline{O}$ 是 VK 中的一个态射，则定义 $x_g = P(\Psi)(x_f)$。由于 S 中的所有态射都是包含映射，因此这与 g 的分解无关，故 x_g 定义良好。由以下计算可知，x_g 是 (S) 的一个匹配族:

$$P(\Phi)(x_g) = P(\Phi)(P(\Psi)(x_f)) = P(\Psi \circ \Phi)(x_f) = x_{f\circ\Psi\circ\Phi} = x_{g\circ\Phi}.$$

由于 P是 (VK $J_{\mathbf{VK}}$) 的层，这个匹配族必须有唯一的粘合 $x \in P(O)$。因此， S 的匹配族 $\{x_f\}$ 也有唯一的粘合。□

为了证明 I_Σ^* 是几何态射 I_Σ的逆像，我们将再次利用几何态射范畴 Sh(K(Σ)) →Sh(VK) 与连续滤子函子范畴 VK →Sh(K(Σ)) 之间的等价。首先注意，包含函子 Sh(VK) ↣$\mathbf{Sets}^{\mathbf{VK}^{\mathrm{op}}}$ 的左伴随是层化函子 a :$\mathbf{Sets}^{\mathbf{VK}^{\mathrm{op}}}$ → Sh(VK)。由于层化保持有限极限，这一伴随关系是一个几何态射。将它与 I_Σ 复合，得到一个几何态射 Sh(K(Σ)) → $\mathbf{Sets}^{\mathbf{VK}^{\mathrm{op}}}$。与连续滤子函子范畴的等价，是通过将这个几何态射的左伴随与 Yoneda 嵌入 y : VK →$\mathbf{Sets}^{\mathbf{VK}^{\mathrm{op}}}$ 复合而得到的（参见引理 VII.7.3、推论 VII.7.4 和推论 VII.10.2）。因此，要证明上文定义的函子 I_Σ^* 确实是某个几何态射 I_Σ的左伴随，只需证明 $I_\Sigma^* \bigcirc$ a $\bigcirc$ y 是连续且滤过的。

引理 7.1.2. $I_\Sigma^* \bigcirc$ a $\bigcirc$ y : VK → Sh(K(Σ)) 连续且滤过。

证明. 复合 a $\bigcirc$ y : VK → Sh(VK) 连续且滤过，因为包含映射 Sh(VK) →$\mathbf{Sets}^{\mathbf{VK}^{\mathrm{op}}}$ 是一个几何态射。需证明连续性和滤过性（[27], 定理 VII.10.1）在限制到 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 的开集范畴时仍然成立。“连通”性质（即 [27], 定理 VII.10.1.ii）将予以明确证明；其余三项性质可由类似论证得出。令 $U, \overline{U} \in$ obj(VK)，$O \in$ obj(VK)，且$u \in I_\Sigma^* \bigcirc$ a $\bigcirc$ y$(U)(O)$ $\overline{u} \in I_\Sigma^* \bigcirc$ a $\bigcirc$ y$(\overline{U})(O)$。由于 a $\bigcirc$ y 是滤过的，O可由 VK 中的态射 $\Psi : W \to O$覆盖，并且存在如下图表:

$$U \xleftarrow{\Phi} V \xrightarrow{\bar{\Phi}} \overline{U},$$

以及一个 $v \in$ a$\bigcirc$y$(V)(W)$，使得 a$\bigcirc$y$(\Phi)_W(v)$ = a$\bigcirc$y$(U)(\Psi)(u)$，并且 a$\bigcirc$y$(\overline{\Phi})_W(v)$ = a$\bigcirc$y$(U)(\Psi)(\overline{u})$。根据引理 3.2.1，每个 $\Psi : W \to O$ 都可分解为 $W \xrightarrow{\Psi'} O' \xrightarrow{I} O$，其中 $O' \subseteq \mathbb{K}(\Sigma')$， $\Sigma' \subseteq \Sigma$ 是一个子曲面，Ψ' 是一个同构，而 I 由包含映射诱导。令 $\overline{O} = I(O')$，并令 $g : \overline{O} \to O$ 为 K(Σ) 中的包含态射。令 $\bar{I} : O' \to \overline{O}$ 为 VK 中的包含态射，它将背景曲面从 Σ' 改为 Σ。因此， $I = g \bigcirc \bar{I}$ 属于 VK。由于映射 Ψ 覆盖 VK 中的 O，映射 g 也覆盖 K(Σ) 中的对象。接下来只需证明，对于某个 $\overline{o} \in I_\Sigma^* \bigcirc$ a $\bigcirc$ y$(V)(\overline{O})$:

$$I_\Sigma^* \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{y}(\Phi)_{\overline{O}}(\overline{o}) = I_\Sigma^* \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{y}(U)(g)(u), \text{ and } I_\Sigma^* \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{y}(\overline{\Phi})_{\overline{O}}(\overline{o}) = I_\Sigma^* \circ \mathbf{a} \circ \mathbf{y}(U)(g)(\overline{u}).$$

回顾一下，a $\bigcirc$ y(V) = $(\mathbf{Hom}_{\mathbf{VK}}(-, V)^+)^+$，其中“+”表示格罗滕迪克加构造（见 [27], 第 III.5 节）。注意，$\mathbf{Hom}_{\mathbf{VK}}(-, V)$ 已经是一个分离预层，因为在 VK 中，逐点一致的态射$X \to V$在 X 上会被视为同一个态射（见第 3.2 节）。因此，只需应用一次“+”即可将 $\mathbf{Hom}_{\mathbf{VK}}(-, V)$ 层化。于是， $v \in$ a $\bigcirc$ y$(V)(W)$ 可由匹配族 $v = \{\Upsilon_\Xi : X \to V | (\Xi : X \to W) \in Q\}$ 表示，其中 $Q = \{\Xi : X \to W\}$ 是 W 的一个覆盖筛。现在， $I \bigcirc \Psi'(Q) = \{I \bigcirc \Psi' \bigcirc \bar{\Xi} : X \to \overline{O} | \Xi \in Q\}$ 是 $J_{\mathbf{VK}}(\overline{O})$ 中的一个覆盖筛。令$\overline{o} \in I_\Sigma^* \bigcirc$a$\bigcirc$y$(V)(\overline{O})$ 为由匹配族 $\{\Upsilon_\Xi | \bar{I} \bigcirc \Psi' \bigcirc \Xi \in I \bigcirc \Psi'(Q)\}$ 表示的元素。它是匹配族这一点可直接由 v 是匹配族这一事实得出。

令 $u \in$ a $\bigcirc$ y$(U)(O)$ 由匹配族 $\{\Gamma_\Delta : Y \to U | (\Delta : Y \to O) \in R\}$ 表示，其中$R \in J_{\mathbf{VK}}(O)$。考虑方程 a $\bigcirc$ y$(\Phi)_W(v)$ = a $\bigcirc$ y$(U)(\Psi)(u)$。左侧的计算结果

为 $\{\Phi \bigcirc \Upsilon_{\Xi} : \Xi \in Q\}$。右侧的计算结果是沿 Ψ 的限制：$\{\Gamma_{\Psi\circ\Omega} | \Omega \in \Psi^*(R)\}$，其中 $\Psi^*(R) = \{\Omega : Z \to W | \Psi \bigcirc \Omega \in R\}$。这个等式表示这两个匹配族有一个公共细化，即存在一个覆盖 $T \subseteq Q \cap \Psi^*(R)$，使得对于所有 $\Lambda \in T$，都有 $\Phi \bigcirc \Upsilon_{\Lambda} = \Gamma_{\Psi\circ\Lambda}$。

最后，需要证明 $I_{\Sigma}^* \bigcirc \mathrm{a} \bigcirc \mathrm{y}(\Phi)\overline{\sigma}(\overline{\sigma}) = I_{\Sigma}^* \bigcirc \mathrm{a} \bigcirc \mathrm{y}(U)(g)(u)$。首先注意，$I \bigcirc \Psi'(T) \subseteq g^*(R) \cap \overline{I} \bigcirc \Psi'(Q)$。事实上，如果 $\Theta \in \Psi^*(R)$，那么 $I \bigcirc \Psi' \bigcirc \Theta = \Psi \bigcirc \Theta \in R$。因此，$g \bigcirc \bar{I} \bigcirc \Psi' \bigcirc \Theta \in R$ 且 $I \bigcirc \Psi' \bigcirc \overline{\Theta} \in g^*(R)$。然后，由于 $T \subseteq \Psi^*(R)$，$I \bigcirc \Psi'(T) \subseteq g^*(R)$，并且 $I \bigcirc \Psi'(T) \subseteq g^*(R) \cap I \bigcirc \Psi'(Q)$，如所声称。现在，对任意 $\Theta \in T$，$\Gamma_{g\circ\bar{I}\circ\Psi'} \bigcirc_{\Theta} = \Gamma_{\Psi\circ\Theta} = \Phi \bigcirc \Upsilon_{\Theta}$。由于 $I \bigcirc \Psi'(T) \subseteq g^*(R) \cap I \bigcirc \Psi'(Q)$，这意味着匹配族 $\{\Phi \bigcirc \Upsilon_{\Xi} | \bar{I} \bigcirc \Psi' \bigcirc \Xi \in \bar{I} \bigcirc \Psi'(Q)\}$ 和 $\{\Gamma_{g\circ\Omega} | \Omega \in g^*(R)\}$ 存在一个到覆盖 $\bar{I} \bigcirc \Psi'(T)$ 的公共细化。换句话说，$I_{\Sigma}^* \bigcirc \mathrm{a} \bigcirc \mathrm{y}(\Phi)\overline{\sigma}(\overline{\sigma}) = I_{\Sigma}^* \bigcirc \mathrm{a} \bigcirc \mathrm{y}(U)(g)(u)$。类似地，$I_{\Sigma}^* \bigcirc \mathrm{a} \bigcirc \mathrm{y}(\overline{\Phi})\overline{\sigma}(\overline{\sigma}) = I_{\Sigma}^* \bigcirc \mathrm{a} \bigcirc \mathrm{y}(U)(g)(\overline{u})$，因此第二个滤过性质成立。□

定理 7.1.3. 对每个 Σ，都有一个几何态射 $I_{\Sigma} : \mathrm{Sh(K}(\Sigma)) \to \mathrm{Sh(VK)}$，其左伴随为限制函子 $I_{\Sigma}^* : \mathrm{Sh(VK)} \to \mathrm{Sh(K}(\Sigma))$。

7.2. 将经典结嵌入虚拟结。Goussarov-Polyak-Viro [15]证明，如果两个经典纽结图通过扩展 Reidemeister 变换相关联，那么它们仅通过 Reidemeister变换就相关联。利用第 7.1 节的结果，这一结论可以提升到 2-范畴 $\mathfrak{Top}$ 中。首先注意，通过将 $\mathbb{R}^3$ 与 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$等同，我们得到一个几何态射 $I_{\mathbb{R}^2} : \mathrm{Sh(K)} \to \mathrm{Sh(VK)}$。接下来，我们将虚结群及其周边系统描述为几何态射。

对于结 $K \in \mathbb{K}(\Sigma)$，令 $\Sigma \subseteq \overline{\Sigma}$ 为 Σ 中 K 所在的连通分支。定义 $\pi_1(K) = \pi_1((\Sigma \times \mathbb{R} \setminus K)/(\overline{\Sigma} \times [N, \infty)) \; x_0)$，其中 $N \in \mathbb{R}$ 取足够大，使得 K 的像位于 $\Sigma \times N$ 和 $x_0 \in \Sigma \times N$ 之下。群 $\pi_1(K)$ 是一个亏格为 0 或 1 的 Wirtinger 群（例如参见 [23]）。用离散拓扑赋予此类群的同构类集合，并记为 $\mathbb{WG}$。定义函数 $\pi_1 : \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F) \to \mathbb{WG}$，使得当 (U, K) 属于 V 时，$\pi_1(\mathrm{V}) = \pi_1(K)$。这是良定义的，因为曲面的嵌入 $\psi : \Sigma \to \Xi$ 在基本群上诱导同构 $\pi_1(K) \cong \pi_1(\Psi(K))$。因此，$\pi_1$ 在 $\int_{\mathbf{VK}} F$ 的每个连通分支中的每个对象上都是一个常值同构类。此外，π_1 是一个变空间结同痕不变量。为此，注意到 $\pi_1(K)$ 是固定 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中纽结的同痕不变量。又由于 $\pi_1 : \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F) \to \mathbb{WG}$ 是良定义的，引理 5.1.2 表明，$\pi_1 : \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F) \to \mathbb{WG}$ 保持同痕变空间结的同构类。根据定理 6.2.6，存在一个几何态射 $\pi_1 : \mathrm{Sh(VK)} \to \mathrm{Sh(WG)}$。

对于 $K \in \mathbb{K}(\Sigma)$，选取一对子午线-经线对 (m, ℓ)，其中 $m, \ell \in \pi_1(K)$。三元组 $(\pi_1(K)\; m, \ell)$ 是 K 的周边系统（参见 [8], 第 3.C 章）。元素 m 和 ℓ 可交换，且在共轭意义下唯一确定。设 (G, a, b) 是一个三元组，其中 G 是一个 Wirtinger 群，$a, b \in G$, $a \neq 1$，并且 $ab = ba$。三元组 (G_1, a_1, b_1) 和 (G_2, a_2, b_2) 的同构是一个群同构 $f : G_1 \to G_2$，满足 $f(a_1) = a_2$ 且 $f(b_1) = b_2$。令 $\mathbb{PS}$ 为这些三元组的同构类集合，并赋予离散拓扑。该同构类是 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中纽结的同痕不变量。如果 $\psi : \Sigma \to \Xi$ 是一个映射，那么 $(\pi_1(\Psi(K))\; \Psi_*(m)\; \Psi_*(\ell))$ 是 $\Psi(K)$ 上的一个周边系统，它与 $(\pi_1(K)\; m, \ell)$ 同构。因此，该周边系统也定义了一个变空间结不变量 $\varpi_1 : \pi_0(\int_{\mathbf{VK}} F) \to \mathbb{WG}$，其对应的几何态射为 $\varpi_1 : \mathrm{Sh(VK)} \to \mathrm{Sh(PS)}$。

定理 7.2.1. 若 $K, K : \overline{\text{集合}} \to \mathrm{Sh(K)}$ 是纽结，且 $I_{\mathbb{R}^2} \bigcirc K$, $I_{\mathbb{R}^2} \bigcirc K : \text{集合} \to \overline{\mathrm{Sh(VK)}}$ 虚拟同痕，则 K,K 同痕。

证明。由于 $\mathbb{PS}$ 是豪斯多夫的，$\varpi_1 \bigcirc I_{\mathbb{R}^2} \bigcirc K$、$\varpi_1 \bigcirc I_{\mathbb{R}^2} \bigcirc \overline{K} : \text{集合} \to \mathrm{Sh(PS)}$ 给出相同的连续函数 $\mathbb{I} \to \mathbb{PS}$（见命题 2.1.1）。那么，相应的结 $K_{\mathbb{R}}$、$K_{\mathbb{K}}$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中具有同构的周边系统。在 $\overline{\mathbb{R}^3}$ 中具有同构周边系统的结是同痕的（[8],定理 3.15）。因此，存在一个几何态射 $\sigma : \mathrm{Sh(I)} \to \mathrm{Sh(K)}$，从 K 映射到 $\overline{K}$。□

8. Further discussion

8.1. 虚纽结理论的扩展语言。此处所考虑的几何结理论语言 $\mathfrak{L}_g$ 仅包含“结”、“同痕”和“结不变量”。Sh(VK) 的构造足够一般，因此也可应用于其他类似结的对象，例如链环、带框架结、Seifert 曲面、生成曲面等。下面概述其中的一些细节。

对于虚拟链环的情形，令 $\mathbb{L}_n(\Sigma)$ 表示 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中的 n 分量链环空间，并定义范畴 VL_n，其对象为开集 $U \subseteq \mathbb{L}_n(\Sigma)$，态射为大写映射 $\Psi : U \to V$，满足 $\Psi(U) \subseteq V$。Grothendieck 拓扑 $J_{\mathbf{VL}_n}$ 的定义方式与结的情形相同。$\mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_n, J_{\mathbf{VL}_n})$ 的点是虚拟链环，而虚同痕仍然是几何态射 $\mathrm{Sh}(\mathrm{I}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_n, J_{\mathbf{VL}_n})$。类似地，带框架结也有一个位点 $(\mathrm{VK}^{fr}, J_{\mathbf{VK}^{fr}})$。它不是利用 $\mathbb{S}^1 \to \Sigma \times \mathbb{R}$ 的嵌入空间构造的，而是利用带状结 $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I} \to \Sigma \times \mathbb{R}$ 的嵌入空间构造的。同样，$\mathrm{Sh}(\mathrm{VK}^{fr}) = \mathrm{Sh}(\mathrm{VK}^{fr}, J_{\mathbf{VK}^{fr}})$ 的点是带框架虚结，带框架虚拟同痕是几何态射 $\mathrm{Sh}(\mathrm{I}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VK}^{fr})$，而带框架虚结不变量是几何态射 $\mathrm{Sh}(\mathrm{VK}^{fr}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{G})$。同调平凡结在 $\Sigma \times \mathbb{R}$中的 Seifert 曲面位点，以及 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中 $\mathbb{Z}_2$-同调平凡结的生成曲面位点，也可以用类似方式构造。

此外，若 $\mathbb{L}_n(\Sigma)$ 是 $\Sigma \times \mathbb{R}$ 中 n 分量链环的空间，则可修改第 7.1 节的结果，得到一个几何态射 $\mathrm{Sh}(\mathrm{L}_n(\Sigma)) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_n)$。对于 $1 \le k \le n$，还有一个几何态射 $C_k : \mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_n) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VK})$，它取一个 n 分量虚链环的第 k 个分量。其左伴随 C_k^* 可描述如下。VL_n 的一个对象 U，是某个 Σ 的链环开集 $L : \bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}^1 \to \Sigma \times \mathbb{R}$。令 $\kappa_k : \mathbb{S}^1 \to \bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ 为到 k 个 $\mathbb{S}^1$ 副本中的包含映射。令 U_k 表示对 $L \in U$ 而言，$L \bigcirc \kappa_k$ 的复合所构成的集合。那么 U_k 在 $\mathbb{K}(\Sigma)$ 中是开集。对于 $\mathrm{Sh}(\mathrm{VK})$ 中的 $P \in$，在对象 U 上定义 $C_k^*(P) \in \mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_n)$，使得 $C_k^*(P)(U) = P(U_k)$。对于一个态射 $\eta : P \to Q$，$C_k^*(\eta)$ 在各分量上的定义为 $C_k^*(\eta)_U = \eta_{U_k}$。类似于引理 7.1.2 证明的论证表明，$C_k^* \bigcirc \mathrm{a} \bigcirc \mathrm{y} : \mathrm{VK} \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_n)$ 是连续且滤过的。因此，C_k^* 是一个几何态射 $C_k : \mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_n) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VK})$ 的左伴随。

此类的另一个例子是几何态射 $\partial : \mathrm{Sh}(\mathrm{VK}^{fr}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_2)$，它取带状结的边界。将其与 $C_1 : \mathrm{Sh}(\mathrm{VL}_2) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VK})$ 复合，可得到几何态-射 $C_1 \bigcirc \partial : \mathrm{Sh}(\mathrm{VK}^{fr}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VK})$。如果 $K : \mathrm{Sets} \to \mathrm{Sh}(\mathrm{VK}^{fr})$ 是某个带框虚结，那么几何态射 $C_1 \bigcirc \partial \bigcirc K$ 就是通过去掉 K 的框架而得到的虚结。

8.2. 长虚结、焊接纽结等。纽结图表理论有很多种。例如长虚结、焊接纽结、自由纽结和平坦虚拟纽结。我们希望这些理论也能有相应的位点。焊接纽结和长虚结的情形尤其值得关注，因为它们在低维拓扑的其他领域有应用。

在焊接纽结的情形中，Satoh [31] 证明存在一个映射 Tube，它将焊接纽结图的集合映射到 $\mathbb{R}^4$ 中带状环面纽结的破面图。映射 Tube 是满射，并且焊接等价的图表会映射为同痕的带状环面纽结。因此，如果 $\mathbb{RTK}$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中带状环面纽结的空间，那么就存在一个 Grothendieck 拓扑斯 Sh(RTK)，其点 $\mathrm{Sets} \to \mathrm{Sh}(\mathrm{RTK})$ 是带状环面纽结，而其路径 $\mathrm{Sh}(\mathrm{I}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{RTK})$ 生成带状环面纽结的同痕关系。因此，可以合理地期待 Tube 本身能够在 $\mathfrak{Top}$ 中实现为一个几何态射 $\mathrm{Sh}(\mathrm{VK}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{RTK})$。这是一个未解决问题。

长虚拟纽结出现在经典结有限型不变量的研究中 [15]。对于

长虚拟结图 D，还存在一个定义良好的虚结图 Cl(D)，称为其闭合。如众所周知，存在闭合等价但彼此不等价的长虚拟结（参见例如 [7, 32]）。在这种情况下，问题在于为长虚拟结找到一个位点 (VLK $J_{\mathbf{LVK}}$)，使得闭合映射能够实现为几何态射 Cl : Sh(LVK) → Sh(VK)。

8.3. 虚结空间的层上同调。Vassiliev 在 [34]，中通过结空间上同调的一个谱序列定义了有限型结不变量。能否同样通过对层上同调群 H^i(Sh(VK) $\Delta_{\mathbb{G}}$) 应用类似的谱序列论证，得到取值于阿贝尔群 G 的虚结有限型不变量 [15, 22]？该构造的某些部分可以毫无困难地沿用。例如，带有 n 个奇异交叉的奇异结空间 $\mathbb{K}^\bullet_n(\Sigma)$ 可用于构造一个位点 ($\mathrm{VK}^\bullet_n$,$J_{\mathbf{VK}^\bullet_n}$)，与第 3.2 节中的做法完全相同。于是，该位点上的层的 Grothendieck 拓扑斯 Sh($\mathrm{VK}^\bullet_n$) 可作为奇异虚拟结的空间。同样，几何态射 Sets → Sh($\mathrm{VK}^\bullet_n$) 对应于奇异虚拟结，几何态射 Sh(I) → Sh($\mathrm{VK}^\bullet_n$) 生成奇异虚拟结的同痕关系，而几何态射 Sh($\mathrm{VK}^\bullet_n$) →Sh(G) 则是奇异虚拟结的不变量。

主要问题是在谱序列计算中识别这些层论的奇异虚拟结。需要指出的是，在 [34] 中，计算使用的是长结而非闭结。在经典情形下，长结与闭结一一对应。如第8.2节所述，对于非经典长虚拟结，这通常并不成立。因此，猜想中的闭合箭头 Cl : Sh(LVK) →Sh(VK) 将在从 Sh(VK) 的层上同调中恢复虚结的有限型不变量时发挥核心作用。

8.4. 独立性定理。是否存在一些关于经典结的定理，只有借助虚纽结理论才能证明？有些关于经典结的结果，目前已知的唯一证明使用了虚拟结。Abel [1]使用虚拟链图证明，经典链环的 HOMFLY-PT 同调在非辫式同痕下并非不变量。因此，HOMFLY-PT 同调只能定义在表示为辫闭合的图表上。然而，尚未排除存在纯粹经典的证明。要确立独立性，还需要一种单独的方法。

这里，我们从广义空间的视角运用了托普斯理论。另一种看法是，拓扑斯可视为广义集合论。因此，它们为探讨独立性问题提供了自然的背景。例如，托普斯理论足以证明选择公理和连续统假设独立于集合论的策梅洛–弗兰克尔公理（见 [27], 第六章）。由于虚拟结空间 Sh(VK) 是一个 Grothendieck 拓扑斯，这些技巧也可用于解决结理论中的独立性问题。

致谢。作者谨向以下人士表达谢意：M. Abel、C. Caprau、J. S. Carter、D. Freund、M. Harper、J. Joseph、S. Marshall、S. Mukherjee、D. Penneys、N. Petit、P. Pongtanapaisan、A. Poudel、R. Todd 和 P. Ulrickson。俄亥俄州立大学马里恩校区为本文提供了经费和脱产研究时间。

References

[1] M. Abel. 一般链环图与类辫同痕的 HOMFLY-PT 同调。 *Algebr. Geom. Topol.*，17 5 3021 3056，2017 ( ): –。[2] C. Adams、O. Eisenberg、J. Greenberg、K. Kapoor、Z. Liang、K. O'Connor、N. Pacheco-Tallaj 和 Y. Wang。虚拟链环的 Tg-双曲性。 *J. Knot Theory Ramifications*，28(12):1950080，26，2019。[3] M. Atiyah。 *The geometry and physics of knots*。林琴学院讲义。 [林琴学院讲座]。剑桥大学出版社，剑桥，1990。[4] J. Baez 和 J. P. Muniain。 *Gauge fields, knots and gravity*，第 4 卷，属于 *Series on Knots and Everything*。世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，1994。

[5] D. Bar-Natan。论 Vassiliev 结不变量。 *Topology*，34(2):423–472，1995。[6] D. Bar-Natan 和 Z. Dancso。w-打结对象的有限型不变量 II：辫结、泡沫与 Kashiwara-Vergne 问题。 *Math. Ann.*，367(3-4):1517–1586，2017。[7] A. Bartholomew、R. Fenn、N. Kamada 和 S. Kamada。长虚结的新不变量。 *Kobe J. Math.*，27 1 2 21 33，2010 (-): –。[8] G. Burde 和 H. Zieschang。 *Knots*，第 5 卷，属于 *de Gruyter Studies in Mathematics*。Walter de Gruyter & Co.，柏林，第二版，2003。[9] J. S. Carter、S. Kamada 和 M. Saito。幺群胚同调的几何诠释。

J. Knot Theory Rami- , ( ): –。

fications 10 3 345 386, 2001

[10] J. S. Carter、S. Kamada 和 M. Saito。曲面上的结与虚结协边的稳定等价。

J. , ( ): –。

Knot Theory Ramifications 11 3 311 322, 2002 2000 1

韩国结理论会议，卷。（龙平）。[11] J. S. Carter、D. S. Silver 和 S. G. Williams。加厚曲面中链环的不变量。 *Algebr. Geom. Topol.*，14 3 1377 1394，2014 ( ): –。[12] R. Fenn、C. Rourke 和 B. Sanderson。架空间。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，359(2):701–740，2007。[13] S. Garoufalidis。量子结不变量。 *Res. Math. Sci.*，5(1):论文编号 11，17，2018。[14] R. Gelca。 *Theta functions and knots*。World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.，哈肯萨克，新泽西州，2014。[15] M. Goussarov、M. Polyak 和 O. Viro。经典结与虚结的有限型不变量。 *Topology*，39(5):1045–1068，2000。[16] M. W. Hirsch。 *Differential topology*，第 33 卷，属于 *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，1994。1976 年原版的校订重印版。[17] Y. H. Im、K. Lee 和 S. Y. Lee。棋盘可着色虚链环的签名、零度与行列式。

J. , ( ): –。

Knot Theory Ramifications 19 8 1093 1114, 2010

[18] P. T. Johnstone。 *Topos theory*。伦敦数学会专著，第 10 卷。学术出版社 [Harcourt Brace Jovanovich，出版社], 伦敦-纽约，1977。[19] A. Juh´asz、L. H. Kauffman 和 E. Ogasa。通过生成曲面构造虚结的新不变量，2022。[20] N. Kamada 和 S. Kamada。抽象链环图与虚结。 *Journal of Knot Theory and its Ramifi-*

cations 9 93 106, 2000 , : –。

[21] C. Kassel。 *Quantum groups*，第 155 卷，属于 *Graduate Texts in Mathematics*。施普林格出版社，纽约，1995。[22] L. H. Kauffman。虚纽结理论。 *European J. Combin.*，20(7):663–690，1999。[23] S.-G. Kim。虚结群及其外围结构。 *J. Knot Theory Ramifications*，9 812，2000 6 797( ): –。[24] D. Kreimer。 *Knots and Feynman diagrams*，第 13 卷，属于 *Cambridge Lecture Notes in Physics*。剑桥大学出版社，剑桥，2000。[25] A. Kriegl 和 P. W. Michor。

The convenient setting of global analysis 53 *Mathematical Surveys and* , 第 卷，

Monographs 1997

属于 。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[26] G. Kuperberg。什么是虚链环？ *Algebraic and Geometric Topology*，3:587–591，2003。[27] S. Mac Lane 和 I. Moerdijk。 *Sheaves in geometry and logic*。Universitext。施普林格出版社，纽约，1994。托普斯理论入门，1992 年版的校订重印版。[28] D. Marker。 *Model theory*，第 217 卷，属于 *Graduate Texts in Mathematics*。导论。[29] S. V. Matveev。三维拓扑对象的根与分解。 *Uspekhi Mat. Nauk*，67 3 405 63 114，2012 (( )): –。[30] M. Polyak。Reidemeister变换的最小生成集。 *Quantum Topol.*，1(4):399–411，2010。[31] S. Satoh。带状环面结的虚结表示。 *J. Knot Theory Ramifications*，9(4):531–542，2000。[32] D. S. Silver 和 S. G. Williams。长虚结的 Alexander群。 *J. Knot Theory Ramifications*，15(1):43–52，2006。[33] D. S. Silver 和 S. G. Williams。卫星链环的虚亏格。 *J. Knot Theory Ramifications*，22 1350008，4，2013 3( ): 。[34] V. A. Vassiliev。结空间的上同调。载于

Theory of singularities and its applications 1 *Adv.* , 第 卷，

Soviet Math. 23 69 1990

属于 , 第 – 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，。[35] E. Witten。量子场论与 Jones 多项式。 *Comm. Math. Phys.*，121(3):351–399，1989。

Department of Mathematics, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 43210
Email address: chrisman.76@osu.edu*URL*: https://micah46.wixsite.com/micahknots