常系数线性 q-差分微分方程形式解的可求和性与收敛性

KUNIO ICHINOBE 和 S LAWOMIR MICHALIK

Abstract. 我们研究常系数齐次线性 q-差分微分方程的柯西问题。我们根据柯西数据的解析延拓性质和增长估计，刻画收敛、 k-可求和及多重可求和的形式幂级数解。我们还引入并刻画保持可求和性的序列；这是一种非常有用的工具，尤其适用于矩微分方程。

arXiv:2301.10331v2 [math.AP] 7 Jul 2023

1. 引言

本文的主要目的是在 Gevrey 渐近性与 k-可求和理论的框架下，刻画一般齐次常系数线性 q-差分微分方程的可求和形式幂级数解。更具体地说，我们考虑柯西问题

$$\begin{cases} P(D_{q,t},\partial_z)u=0, \\ D_{q,t}^j u(0,z)=\varphi_j(z) \text{ for } j=0,\dots,p-1, \end{cases} \tag{1}$$

其中，t、 $z\in\mathbb{C}^2$、 $\varphi_j(z)$、 $j=0$、.....、 $p-1$ 均为原点复邻域内的全纯函数，而 $P(D_{q,t},\partial_z)$ 是关于 $D_{q,t}$ 的 p 阶常系数一般线性 q-差分微分算子。给定 $q\neq 1$ 后， q-差分算子 $D_{q,t}$ 定义为

$$D_{q,t}u(t,z):=\frac{u(qt,z)-u(t,z)}{qt-t}.$$

q-差分微分方程的形式解曾在诸如[7, 10, 16, 17], 等论文中得到研究，但仅从 q-渐近性和 q-Borel 可求和性的角度进行研究，且假设条件为 $|q|>1$。在这种情况下，形式解的系数用 q的幂进行估计。

我们采用不同的方法，假设 $q\in[0,1)$，并研究 Gevrey 渐近性和k-可求和性，其中形式解的系数用伽马函数进行估计。此前，只有 Ichinobe 和 Adachi [6] 在一个非常特殊的情形下研究过这种方法，即柯西问题形式解的情形

$$(D_{q,t}^{\kappa}-\partial_z^{\nu})u=0,\quad u(0,z)=\varphi(z),\quad D_{q,t}^j u(0,z)=0\quad (j=1,\dots,\kappa-1), \tag{2}$$

其中 $(t,z)\in\mathbb{C}^2$, $\varphi(z)$ 在原点的一个复邻域内全纯，且 $\kappa,\nu\in\mathbb{N}$。他们根据柯西初值数据 $\varphi(z)$ 的解析延拓性质和增长估计，刻画了方程 (2) 的形式解 $\hat{u}$ 的 k- 可求和性。

我们将 [6] 的结果推广到方程 (1) 的形式解。本文的主要思想是证明，序列 $m=(m(n))_{n\geq 0}=([n]_q!)_{n\geq 0}$ 在如下意义下保持可求和性：若 $\hat{u}(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m(z)(n)}t^n$ 在方向 d 上是 k-可求和的，当且仅当 $\hat{v}(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)t^n$ 在同一方向上也为 k-可求和。该等价关系的证明基于 Ichinobe 和 Adachi [6] 关于方程 (2) 且 $\kappa=\nu=1$ 的结果的矩版本。利用这一

2020年数学主题分类。35C10、35E15、39A13、40G10。关键词和短语。 q-差分微分方程、矩微分方程、形式幂级数、k-可求和性、多重可求和性。

等价关系，并注意到对于序列 $m = ([n]_q!)_{n\geq 0}$ ， q-差分算子 $D_{q,t}$ 与 m-矩微分算子 $\partial_{m,t}$ 相同，后者定义为

$$\partial_{m,t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(z)}{m(n)}t^n\Big) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}(z)}{m(n)}t^n,$$

我们得出结论：方程 (1) 的解 $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n(z)}{m(n)}t^n$ 在给定方向上是 k-可求和的，当且仅当初值问题的解 $\hat{v}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)t^n$

$$\begin{cases} P(\partial_{\mathbf{1},t},\partial_z)v = 0, \\ \partial_{\mathbf{1},t}^j v(0,z) = \varphi_j(z) \text{ for } j = 0,\dots,p-1, \end{cases} \tag{3}$$

在相同方向上是 k-可求和的。这里，$\partial_{\mathbf{1},t}$ 表示关于序列 $\tilde{m} = \mathbf{1} := (1)_{n\geq 0}$ 的 $\tilde{m}$-矩微分算子，因此算子 $\partial_{\mathbf{1},t}$ 满足

$$\partial_{\mathbf{1},t}\hat{v}(t,z) = D_{0,t}\hat{v}(t,z) = \frac{\hat{v}(t,z)-\hat{v}(0,z)}{t}.$$

此外，由于 $\mathbf{1} = (1)_{n\geq 0}$ 是矩函数 $\mathbf{1}(u)\equiv 1$ 关于 $u \geq 0$ 的矩序列，我们可以利用 [12] 和 [13], 中发展的矩微分方程形式解理论，刻画方程 (3) 的可求和解和多重可求和解 $\hat{v}(t,z)$；因此，也可以通过柯西数据 $\varphi_j(z)$, $j = 0,\dots,p-1$ 的解析延拓性质和增长估计，刻画方程 (1) 的可求和解和多重可求和解 $\hat{u}(t,z)$。

我们想强调，正如本文所引入的，保持可求和性的序列这一思想本身就颇有意义。本文开始发展这一理论。特别地，我们证明，保持可求和性的序列族包含 Balser 的矩可和性理论 [2] 意义下的 0 阶矩序列。另一方面，这个序列族严格包含于零阶正数序列族中。此外，保持可求和性的序列关于乘法构成一个群。我们还找到了这类序列的刻画。

本文将辅助柯西问题这一新思路应用于简单矩方程 $(\partial_{m_1,\,t} - \partial_{m_2,\,z})u(t,z) = 0$，并研究初始数据 $u(0,z)$ 与边界数据 $u(t,0)$ 之间的关系。辅助柯西问题及其解为我们提供了有力工具，可将幂级数 $z \mapsto u(0,z)$ 转化为幂级数 $t \mapsto u(t,0)$。这些工具在定理 1 和定理 2 的证明中得到了广泛应用。

本文的结构安排如下。在第 2–5 节的预备部分中，我们汇总记号，并回顾 q-微积分、Gevrey 阶、可求和性、多重可求和性和矩函数的概念。在第 6 节和第 7 节中，我们引入能够保持 Gevrey 阶或可求和性的序列这一新概念，并刻画了这类序列。我们还定义了 m-矩微分和零阶算子。在第 9 节中，我们证明本文的主要结果，即序列 $([n]_q!)_{n\geq 0}$ 保持可求和性。证明基于若干引理，这些引理涉及某些辅助矩微分方程解的初始数据和边界数据的解析延拓性质。在最后的第 10 节中，我们刻画方程 $P(\partial_{m,\,t},\partial_z)u = 0$的可求和解和多重可求和解，其中$m$ 是一个保持可求和性的序列。特别地，这给出了方程 $P(D_{q,\,t},\partial_z)u = 0$的形式幂级数解的相应刻画；该方程是 q-差分微分方程。

2. 记号

在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的万有覆盖空间 $\widetilde{\mathbb{C}}$ 中，方向为 $d\in\mathbb{R}$、开口为 $\alpha>0$ 的无界扇形 S 定义如下：

$$S = S_d(\alpha) := \{z\in\widetilde{\mathbb{C}}\colon\ z = re^{i\phi},\ r>0,\ \phi\in(d-\alpha/2, d+\alpha/2)\}.$$

如果开口 α 并不重要，则扇形 $S_d(\alpha)$ 简记为 S_d。

复圆盘 D_r 在 $\mathbb{C}$ 中、半径为 $r>0$ ，是如下形式的集合

$$D_r = \{z\in\mathbb{C} : |z| < r\}.$$

若半径 r 无关紧要，则集合 D_r 将简记为 D。我们也将圆盘扇形 $S_d(\alpha)\cup D_r$（分别地， $S_d(\alpha)\cup D$, $S_d\cup D$）简记为 $S_d(\alpha,r)$（分别地， $S_d(\alpha)$, S_d）。

若函数 f 在定义域 $U\subseteq\mathbb{C}^n$上全纯，则记为 $f\in\mathcal{O}(U)$。

类似地，定义在 G 上的变量 z_1^{1/κ_1}、...、 z_n^{1/κ_n}（$(\kappa_1$、...、 $\kappa_n)\in\mathbb{N}^n$）的全纯函数空间记为 $\mathcal{O}_{1/\kappa_1,\ldots,1/\kappa_n}(G)$。

更一般地，若 $\mathbb{E}$ 表示一个范数为 $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$的巴拿赫空间，则用 $\mathcal{O}(G,\mathbb{E})$（分别地，$\mathcal{O}_{1/\kappa_1,\ldots,1/\kappa_n}(G,\mathbb{E})$）表示定义在定义域 $G\subseteq\mathbb{C}^n$上的所有取值于 $\mathbb{E}$的全纯函数（分别地，关于变量 z_1^{1/κ_1}、...、z_n^{1/κ_n}的全纯函数）的集合。关于取值于巴拿赫空间的函数，更多信息请参见 [2, 附录 B]。在本文中，作为巴拿赫空间 $\mathbb{E}$，我们将取复数空间 $\mathbb{C}$（我们将$\mathcal{O}(G,\mathbb{C})$简记为 $\mathcal{O}(G)$，将 $\mathcal{O}_{1/\kappa_1,\ldots,1/\kappa_n}(G,\mathbb{C})$简记为$\mathcal{O}_{1/\kappa_1,\ldots,1/\kappa_n}(G)$），或者取空间 $\mathcal{O}_{1/\kappa}(D_r)\cap C(\overline{D}_r)$，即定义在圆盘 D_r 上且在其闭包 $\overline{D}_r$ 上连续的$1/\kappa$- 全纯函数空间，并赋予范数 $\|\varphi\|_r:=\sup_{z\in D_r}|\varphi(z)|$。

形式幂级数 $\hat{u}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}u_jt^j$ with $u_j\in\mathbb{E}$ 的空间记作 $\mathbb{E}[[t]]$。

我们使用“帽子”记号 ($\hat{u}$, $\hat{v}$, f, $\hat{\varphi}$) 表示形式幂级数。如果形式幂级数 $\hat{u}$（分别为 $\hat{v}$, f, $\hat{\varphi}$）收敛，我们将其和记作 u（分别为 v, f, φ）。

本文中，我们始终假设 $m=(m(n))_{n\geq0}$（分别为 $m_1=(m_1(n))_{n\geq0}$, $m_2=(m_2(n))_{n\geq0}$）是一个实正数序列，且 $m(0)=1$（分别为 $m_1(0)=1, m_2(0)=1$）。此外，对于固定的 $k>0$，我们将正数序列 $\Gamma_{1/k}=(\Gamma(1+n/k))_{n\geq0}$ 记作 $\Gamma_{1/k}$，其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数。

3. q-CALCULUS

本节遵循 [5]，介绍 q-微积分的基本概念。全文中，我们假设 $q\in[0,1)$。若 $u\in\mathbb{E}[[t]]$ 或 $u\in\mathcal{O}(D,\mathbb{E})$，则定义 q-差分算子 $D_{q,t}$如下:

$$D_{q,t}u(t):=\frac{u(qt)-u(t)}{qt-t}.$$

对每个 $n\in\mathbb{N}_0$，我们定义 n 的 q-类比:

$$[n]_q:=1+q+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

我们还引入阶乘 $n!$ 的 q-类比。

$$[n]_q!:=\begin{cases}1 & \text{for } n=0\\ [1]_q\cdots[n]_q & \text{for } n\geq1\end{cases}.$$

对每个 $n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ 和 $a\in\mathbb{C}$，我们定义 q-移位阶乘如下:

$$(a;q)_n:=\begin{cases}1 & \text{for } n=0\\ \prod_{j=0}^{n-1}(1-aq^j) & \text{for } n\in\mathbb{N}\\ \prod_{j=0}^{\infty}(1-aq^j) & \text{for } n=\infty\end{cases}.$$

注意，对于 $|q|<1$ 以及任意 $a\in\mathbb{C}$，无穷乘积 $(a;q)_\infty$ 收敛。我们还设

$$(a_1,\ldots,a_r;q)_n:=\prod_{j=1}^{r}(a_j;q)_n\quad\text{for}\quad a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{C}\quad\text{and}\quad n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}.$$

基本超几何级数定义为

$$ {}_{k+1}\phi_k\left(\begin{matrix}a_1,\ldots,a_{k+1}\\ b_1,\ldots,b_k\end{matrix};q,x\right):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_{k+1};q)_n}{(b_1,\ldots,b_k;q)_n(q;q)_n}x^n. \tag{4}$$

本文将使用基本超几何级数的以下两个基本公式

命题 1（q 二项式定理，[5, 第 1.3] 节）。

$$ {}_1\phi_0\left(\begin{array}{c} a \\ - \end{array};q,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a;q)_n}{(q;q)_n}z^n=\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\quad for\quad |z|<1\quad and\quad |q|<1. $$

命题 2（海涅变换公式，[5, 第 1 节4]）。

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array};q,z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n}z^n=\frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}{}_2\phi_1\left(\begin{array}{c} c/b,z \\ az \end{array};q,b\right),\ |z|<1,\ |q|<1,\ |b|<1. $$

4. Gevrey order, summability and multisummability

本节将介绍一些与 Gevrey 阶、 k-可求和性和多重可求和性相关的定义和基本事实。更多详情请参阅 [2] 和 [9]。

ˆ 定义 1. 若函数 $u\in\mathcal{O}_{1/\kappa}(S_d(\varepsilon,r)\ \mathbb{E})$ 满足：对于任意 $\tilde{\varepsilon}\in(0,\varepsilon)$ 和 $\tilde{r}\in(0,r)$，均存在 A, $B>0$，使得.....则称其在 $S_d(\varepsilon,r)$ 中关于 $x\to\infty$ 的指数增长阶不超过 $k\in\mathbb{R}$ˆ

$$ \|u(x)\|_{\mathbb{E}}<Ae^{B|x|^k}\quad \text{for every}\quad x\in\hat{S}_d(\tilde{\varepsilon},\tilde{r}). $$

该 sp 此类函数的集合记为 $\mathcal{O}^k_{1/\kappa}(\ \hat{}S_d(\varepsilon,r)\ \mathbb{E})$，若 $\kappa=$，则记为 $\mathcal{O}^k(\ \hat{}S_d(\varepsilon,r)\ \mathbb{E})$ 1.

定义 2. 设 $s\in\mathbb{R}$。若序列 $m=(m(n))_{n\geq 0}$ 满足条件 :

(5) 存在 $a,A>0$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}_0$，都有 $a^n(n!)^s\leq m(n)\leq A^n(n!)^s$，

则称 m为阶为 s 的序列。

例 1. 设 $k>0$。序列 $\Gamma_{1/k}=(\Gamma(1+n/k))_{n\geq 0}$ 是阶为 $1/k$ 的序列。

定义 3（见 [2, 第 5 节。2]）。对于一个固定的正数序列 $m=(m(n))_{n\geq 0}$，其中 $m(0)=1$，线性算子 $\mathcal{B}_{m,\ t}\colon\ \mathbb{E}[[t]]\to\mathbb{E}[[t]]$ 定义为

$$ (\mathcal{B}_{m,t}\hat{u})(t):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{m(n)}t^n\quad \text{for}\quad \hat{u}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\in\mathbb{E}[[t]] $$

称为关于 t 的 m-Borel 算子。

注 1. 注意，对于给定的正数序列 $m=(m(n))_{n\geq 0}$，满足 $m(0)=1$，其逆 m-Borel 算子 $\mathcal{B}^{-1}_{m,\ t}\colon\ \mathbb{E}[[t]]\to\mathbb{E}[[t]]$，有时称为 m-Laplace 算子，由 $\mathcal{B}^{-1}_{m,\ t}=\mathcal{B}_{m^{-1},\ t}$ 在 $\mathbb{E}[[t]]$ 上给出，其中 $m^{-1}=(m(n)^{-1})_{n\geq 0}$。因此， m-Borel 算子 $\mathcal{B}_{m,\ t}$ 是形式幂级数空间 $\mathbb{E}[[t]]$ 上的线性自同构。

定义 4. 设 $s\in\mathbb{R}$。级数 $\hat{}u(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\in\mathbb{E}[[t]]$ 称为 Gevrey 阶为 s 的形式幂级数，如果存在常数 $B,C<\infty$ 使得

(6) $$ \|a_n\|_{\mathbb{E}}\leq BC^n(n!)^s\quad \text{for every}\quad n\in\mathbb{N}_0. $$

Gevrey 阶为 s 的形式幂级数空间记为 $\mathbb{E}[[t]]_s$。

注 2. 设 $s\in\mathbb{R}$ 和 m 是一个 s 阶序列。根据上述定义，$\hat{}u\in\mathbb{E}[[t]]_s$ 当且仅当存在一个以原点为中心的圆盘 $D\subseteq\mathbb{C}$，使得 $\mathcal{B}_{m,\ t}\hat{}u\in\mathcal{O}(D,\mathbb{E})$。

定义 5. 设 $k>0$ 和 $d\in\mathbb{R}$。那么，$\hat{}u\in\mathbb{E}[[t]]$ 称为在方向 d 上 k-可求和，如果存在一个沿方向 d 的圆盘扇形 $\hat{}\ S_d$，使得 $\mathcal{B}_{\Gamma_{1/k},\ t}\hat{}u\in\mathcal{O}^k(\ \hat{}S_d,\mathbb{E})$。

The 在方向 d 上 k-可求和形式幂级数的空间记作 $\mathbb{E}\{t\}_k$ $_d$.

我们还将考虑比 k-可求和级数更大的可求和级数类，称为多重可求和级数；对于这类级数，我们同样可以像在 k-可求和情形下一样，在适当的扇区上得到唯一的和（参见 [2, 节 10]和 [9, 节 7]）。

定义 6. 设 $k_1 > \cdots > k_N > 0$。如果实向量 $(d_1, \ldots, d_N) \in \mathbb{R}^N$ 是一个可容许多方向，则称其满足

$$|d_j - d_{j-1}| \le \pi(1/k_j - 1/k_{j-1})/2 \quad \text{for} \quad j = 2, \ldots, N.$$

设 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N) \in \mathbb{R}_+^N$，且 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_N) \in \mathbb{R}^N$ 是一个可容许多方向。若形式幂级数 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$ 在多方向 $\mathbf{d}$ 上是 $\mathbf{k}$-多重可求和的，则称之为 $\mathbf{k}$-多重可求和，其中 $\hat{u} = \hat{u}_1 + \cdots + \hat{u}_N$，而 $\hat{u}_j \in \mathbb{E}[[t]]$ 对于 $j = 1, \ldots, N$ 是沿方向 d_j 的 k_j- 可求和的。

.....的空间 在多方向 $\mathbf{d}$ 上 $\mathbf{k}$-多重可求和的形式幂级数记为 $\mathbb{E}\{t\}_{\mathbf{k}, \mathbf{d}}$.

5. Moment functions

本节介绍矩序列的集合

$$\mathfrak{M} := \{(\mathfrak{m}(n))_{n\ge 0} \colon \mathfrak{m}(u) \text{ is a moment function}\} \tag{7}$$

并证明它是集合

$$\mathcal{M} := \{(m(n))_{n\ge 0} \colon m(0) = 1,\ m(n) > 0 \text{ for } n \in \mathbb{N}\} \tag{8}$$

所有满足 $m(0) = 1$ 的正序列 $m = (m(n))_{n\ge 0}$ 的集合。

为引入矩函数，我们回顾 Balser 提出的矩方法概念 [2]（另见 [1]）。

定义 7（见 [2, 第 5.5] 节）。如果一对函数 $e_{\mathfrak{m}}$ 和 $E_{\mathfrak{m}}$ 满足以下性质，则称它们为 k $(k > 1/2)$ 阶的核函数:

1. $e_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{O}(S_0(\pi/k))$、$e_{\mathfrak{m}}(z)/z$ 在原点处可积，$e_{\mathfrak{m}}(x) \in \mathbb{R}_+$ 对于 $x \in \mathbb{R}_+$，且 $e_{\mathfrak{m}}$ 在 $S_0(\pi/k)$ 中是 k 阶指数平坦的（即对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 A、$B > 0$，使得对于 $z \in S_0(\pi/k - \varepsilon)$，$|e_{\mathfrak{m}}(z)| \le Ae^{-(|z|/B)^k}$）。2. $E_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{O}^k(\mathbb{C})$ 和 $E_{\mathfrak{m}}(1/z)/z$ 在 $S_\pi(2\pi - \pi/k)$ 中于原点处可积。3. $e_{\mathfrak{m}}$ 与 $E_{\mathfrak{m}}$ 之间的联系由相应的 $1/k$ 阶矩函数 $\mathfrak{m}$ 给出，如下所示。函数 $\mathfrak{m}$ 由 $e_{\mathfrak{m}}$ 定义为

$$\mathfrak{m}(u) := \int_0^\infty x^{u-1} e_{\mathfrak{m}}(x)dx \quad \text{for} \quad \operatorname{Re} u \ge 0 \tag{9}$$

且核函数 $E_{\mathfrak{m}}$ 有幂级数展开

$$E_{\mathfrak{m}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\mathfrak{m}(n)} \quad \text{for} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

在这种情况下，倒数矩函数的积分表示为

$$\frac{1}{\mathfrak{m}(u)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma E_{\mathfrak{m}}(w) w^{-u-1} dw \tag{11}$$

其中 γ 如倒数伽马函数的汉克尔公式 [2, 第 228] 页所示 .

4. 此外，我们假设 $\mathfrak{m}(u)$ 满足归一化条件 $\mathfrak{m}(0) = 1$。

注意，在 $k \le 1/2$ 的情况下，集合 $S_\pi(2\pi - \pi/k)$ 未定义，因此无法满足定义 7 中的第二个性质。这意味着我们必须以另一种方式定义阶为 $k \le 1/2$ 的核函数及相应的矩函数。

定义 8（参见 [2, 第 5.6] 节）。若能找到一对阶为 $pk > 1/2$（某个 $p \in \mathbb{N}$）的核函数 $e_{\tilde{\mathfrak{m}}}$ 和 $E_{\tilde{\mathfrak{m}}}$，使得函数 $e_{\mathfrak{m}}$ 是阶为 $k > 0$ 的核函数，则称函数 $e_{\mathfrak{m}}$ 为阶为 $k > 0$ 的核函数。

$$e_{\mathfrak{m}}(z) = e_{\tilde{\mathfrak{m}}}(z^{1/p})/p \quad \text{for} \quad z \in S_0(\pi/k).$$

对于给定的 $k > 0$ 阶核函数 $e_{\mathfrak{m}}$，我们通过公式（9）定义相应的 $1/k > 0$ 阶矩函数 $\mathfrak{m}$，并通过公式（10）定义 $k > 0$ 阶核函数 $E_{\mathfrak{m}}$。

注 3. 注意，根据定义 7 和定义 8，我们有

$$\mathfrak{m}(u)=\widetilde{\mathfrak{m}}(pu) \quad \text{and} \quad E_{\mathfrak{m}}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\mathfrak{m}(j)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\widetilde{\mathfrak{m}}(jp)}.$$

注 4. 根据可求和性的一般方法（参见 [2, 第 6.5 节和定理 38]），在 k-可求和性的定义（定义 5）中，可以用任意序列 $\mathfrak{m}=(\mathfrak{m}(n))_{n\geq 0}$ 替换序列 $\Gamma_{1/k}=(\Gamma(1+n/k))_{n\geq 0}$，其中 $\mathfrak{m}(u)$ 是阶为 $1/k$ 的矩函数。

注 5. 根据 [2, 定理 31 和 32], ，如果 $\mathfrak{m}_1(u)$ 和 $\mathfrak{m}_2(u)$ 分别是正阶 $1/k_1$ 和 $1/k_2$ 的矩函数，那么

(1) $\mathfrak{m}(u)=\mathfrak{m}_1(u)\mathfrak{m}_2(u)$ 是阶为 $1/k_1+1/k_2$ 的矩函数；(2) $\mathfrak{m}(u)=\mathfrak{m}_1(u)/\mathfrak{m}_2(u)$ 在满足条件 $1/k_1>1/k_2$ 时是阶为 $1/k_1-1/k_2$ 的矩函数。

利用上述备注，我们可以将矩函数的定义扩展到实数阶。

定义9（见 [13, 定义 4]）。如果 $\mathfrak{m}(u)$ 是 $1/k<0$阶的矩函数，当且仅当 $1/\mathfrak{m}(u)$ 是 $-1/k>0$阶的矩函数。

此外，如果存在同为 $1/k>0$ 阶的矩函数 $\mathfrak{m}_1(u)$ 和 $\mathfrak{m}_2(u)$，使得 $\mathfrak{m}(u)=\mathfrak{m}_1(u)/\mathfrak{m}_2(u)$，则称 $\mathfrak{m}(u)$ 为 0 阶矩函数。

备注6。注意，根据定义7、8和9，任何 $s\in\mathbb{R}$ 阶的矩函数 $\mathfrak{m}(u)$ 都满足以下条件

对于每个 $u\geq 0$，• $\mathfrak{m}(u)>0$,

• $\mathfrak{m}(0)=1$。

因此，由 (7) 给出的集合 $\mathfrak{M}$ 是由 (8) 定义的集合 $\mathcal{M}$ 的子集。若 $\mathfrak{m}(u)$ 是矩函数，我们称 $(\mathfrak{m}(n))_{n\geq 0}$ 为继承自 $\mathfrak{m}(u)$ 的矩序列。

注7. 根据注5和定义9，矩函数的集合构成一个群，其群运算为乘法。

注8. 根据 [2, 第 5 节5] 和定义9，若 $\mathfrak{m}(u)$ 是阶为 $s\in\mathbb{R}$ 的矩函数，那么由 (9) 和 (11) 可知，$(\mathfrak{m}(n))_{n\geq 0}$ 是具有相同阶 s 的序列。

6. Sequences preserving Gevrey order and summability

本节将引入并讨论能够保持 Gevrey 阶或可求和性的新型序列概念。特别地，我们将给出这类序列的刻画。

定义 10. 若对任意 $s\in\mathbb{R}$ 和任意 $\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]$ ，下列等价关系均成立，则称序列 $m=(m(n))_{n\geq 0}$ 保持 Gevrey 阶：

$$\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]_s \quad \text{if and only if} \quad \mathcal{B}_{m,t}\hat{u}\in\mathbb{E}[[t]]_s. \tag{12}$$

在下一个命题中，我们给出保持 Gevrey 阶的序列的一个简单刻画。

命题3. 序列 $m=(m(n))_{n\geq 0}$ 保持 Gevrey 阶，当且仅当 m 是一个零阶序列。

证明. ($\Rightarrow$) 对 $s=0$ 和 $\hat{u}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}m(n)t^n$ 应用定义 10，并注意到$\mathcal{B}_{m,\,t}\hat{u}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\in\mathbb{C}[[t]]_0$，我们得出 $\hat{u}(t)\in\mathbb{C}[[t]]_0$ 也成立。根据定义 4，这意味着存在 $B,C<\infty$ 使得

$$|m(n)|\leq BC^n \quad \text{for} \quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{13}$$

由于 $m(0)=1$，对于充分大的 $C<\infty$，我们可以在 (13) 中取 $B=1$。这样便得到 (5) 中右侧的估计，其中 $A=C$。

类似地，对 $s = 0$ 和 $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ 应用定义 10，并注意到 $\hat{u}(t) \in \mathbb{C}[[t]]_0$，我们得出 $\mathcal{B}_{m,\,t}\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m^{-1}_{(n)}\, t^n \in \mathbb{C}[[t]]_0$ 也成立。根据定义 4，这意味着存在 B、$C < \infty$，使得

$$\left|\frac{1}{m(n)}\right| \le BC^n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

由于 $m(0) = 1$ 且 $m(n) > 0$，当 $C < \infty$ 足够大时，我们可以取 $B = 1$，因此得到

$$m(n) \ge C^{-n} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

这给出了 (5) 中 $a = C^{-1}$ 对应的左端估计。

($\Leftarrow$) 任取 $s \in \mathbb{R}$ 及任意 $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$。若 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]_s$ 且 m 是零阶数列，则由 (5) 和 (6) 可知，存在常数 $a > 0$ 和 $B, C < \infty$，使得

$$\left\|\frac{a_n}{m(n)}\right\|_{\mathbb{E}} = m(n)^{-1}\|a_n\|_{\mathbb{E}} \le B(C/a)^n (n!)^s \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

因此也有 $\mathcal{B}_{m,\,t}\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{m_{(n)}} t^n \in \mathbb{E}[[t]]_s$。

为证明 (12) 中的第二个蕴含，我们假设 $\mathcal{B}_{m,\,t}\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m^{a_n}_{(n)} t^n \in \mathbb{E}[[t]]_s$。由 (5) 和 (6) 可知，存在常数 $A, B, C < \infty$，使得

$$\|a_n\|_{\mathbb{E}} = m(n)\left\|\frac{a_n}{m(n)}\right\|_{\mathbb{E}} \le B(AC)^n (n!)^s \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

这意味着 $\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{E}[[t]]_s$ 也成立。 □

类似地，我们定义保持可求和性的序列。

定义 11. 若序列 $m = (m(n))_{n\ge 0}$ 对任意 $k > 0$、$d \in \mathbb{R}$ 以及任意 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$ 都满足以下等价关系，则称其保持可求和性：

$$\hat{u} \in \mathbb{E}\{t\}_{k,d} \quad \text{if and only if} \quad \mathcal{B}_{m,t}\hat{u} \in \mathbb{E}\{t\}_{k,d}.$$

注 9. 由于对每个 $k > 0$ 和 $d \in \mathbb{R}$，都有 $\mathbb{E}\{t\}_{k,\,d} \subset \mathbb{E}[[t]]_{1/k}$，因此我们看到，如果序列 $m = (m(n))_{n\ge 0}$ 保持可求和性，那么该序列 m 也保持 Gevrey 阶（即 m 是一个 0 阶序列）。

注 10. 直接根据多重可求和性的定义（定义 6），我们得出：如果序列 $m = (m(n))_{n\ge 0}$ 保持可求和性，那么它也保持多重可求和性。这意味着，对于每个满足 $k_1 > \cdots > k_N > 0$ 的 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_N)$，对于每个可容许多方向 $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_N) \in \mathbb{R}^N$，以及对于任意 $\hat{u} \in \mathbb{E}[[t]]$，以下等价关系成立：

$$\hat{u} \in \mathbb{E}\{t\}_{\mathbf{k},\mathbf{d}} \quad \text{if and only if} \quad \mathcal{B}_{m,t}\hat{u} \in \mathbb{E}\{t\}_{\mathbf{k},\mathbf{d}}.$$

例 2. 保持可求和性的序列示例：

(1) 如果 $a > 0$ 且 $\mathbf{a} := (a^n)_{n\ge 0}$，那么序列 $\mathbf{a}$ 保持可求和性。特别地，序列 $\mathbf{1} = (1)_{n\ge 0}$ 以平凡的方式保持可求和性。(2) 根据 Balser 的广义可求和性理论 [2, 第 6.5 节和定理 38]，对于任意 0 阶矩函数 $\mathfrak{m}(u)$，序列 $(\mathfrak{m}(n))_{n\ge 0}$ 保持可求和性（另见注 4）。

例 3. 并非每个 0 阶序列都保持可求和性。令

$$m(n) := \begin{cases} 1 & n \text{ is even} \\ 2^{-1} & n \text{ is odd} \end{cases}. \tag{14}$$

级数 $\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n! t^n$ 在任意方向 $d \neq 0 \bmod 2\pi$ 上都是1-可求和的，因为对于 $m_1(n) = n!$，且对于任意 $d \neq 0 \bmod 2\pi$

$$\mathcal{B}_{m_1,t}\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \in \mathcal{O}^1(\hat{S}_d).$$

另一方面，级数

$$\hat{y}(t)=\mathcal{B}_{m,t}\hat{x}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{m(n)}t^n=\sum_{k=0}^{\infty}(2k)!t^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}2(2k+1)!t^{2k+1}$$

仅在方向 $d\neq 0 \bmod \pi$ 上是 1-可求和的，因为函数

$$\mathcal{B}_{m_1,t}\hat{y}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}t^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}2t^{2k+1}=\frac{1}{1-t^2}+\frac{2t}{1-t^2}=\frac{1+2t}{1-t^2}\in\mathcal{O}^1(\hat{S}_d),\ d\neq 0 \mod \pi$$

不仅在 $t=1$ 处有一个简单极点，在 $t=-1$ 处也有一个。

因此 $\hat{x}(t)\in\mathbb{C}\{t\}_{1,\pi}$，但 $\hat{y}(t)=\mathcal{B}_{m,t}\hat{x}(t)\notin\mathbb{C}\{t\}_{1,\pi}$。

注11. 注意，根据例 3，由 (14) 定义的零阶数列 $(m(n))_{n\geq 0}$ 满足 $m(n)>0$ 对于 $n\geq 0$ 以及 $m(0)=1$，但它不保持可求和性。另一方面，根据例 2，从某个零阶矩函数 $\mathfrak{m}(u)$ 继承的每个矩序列都保持可求和性。因此，由 (14) 定义的数列 $(m(n))_{n\geq 0}$ 并非从任何零阶矩函数 $\mathfrak{m}(u)$ 继承而来的矩序列。

注 12. 保持 Gevrey 阶（分别地，可求和性）的序列构成一个群，其群运算为乘法。若 $m_1=(m_1(n))_{n\geq 0}$ 和 $m_2=(m_2(n))_{n\geq 0}$ 保持 Gevrey 阶（分别地，可求和性），则它们的乘积 $m=m_1\cdot m_2$（即 $m=(m(n))_{n\geq 0}$，其中对于任意 $n\in\mathbb{N}_0$，都有 $m(n)=m_1(n)\cdot m_2(n)$）也保持 Gevrey 阶（分别地，可求和性）。还要注意，单位元 $\mathbf{1}=(1)_{n\geq 0}$ 和 $m=(m(n))_{n\geq 0}$ 的逆元 $m^{-1}=(m(n)^{-1})_{n\geq 0}$ 也保持 Gevrey 阶（分别地，可求和性）。

注意，根据注 9 和例 3，保持可求和性的序列群是保持 Gevrey 阶的序列群的真子群。

此外，根据注7，集合

$$\mathfrak{M}_0=\Big\{(\mathfrak{m}(n))_{n\geq 0}\colon \mathfrak{m}(u)\text{ is a moment function of order zero}\Big\} \tag{15}$$

w与乘法构成上述两个群之一的子群。

7. Moment differentiations and moment operators of order 0

在本节中，我们将 Balser 和 Yoshino [4] 引入的 m-矩微分概念推广到任意满足 $m(0)=1$ 的正数序列 $m=(m(n))_{n\geq 0}$。我们引入阶为 r ($r\in\mathbb{R}$) 的 m-矩微分，并特别关注情形$r=0$。

定义12. 给定满足 $m(0)=1$ 的正数序列 $m=(m(n))_{n\geq 0}$，由下式定义的算子 $\partial_{m,t}$: $\mathbb{E}[[t]]\to\mathbb{E}[[t]]$

$$\partial_{m,t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n}{m(n)}t^n\Big):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_{n+1}}{m(n)}t^n$$

称为 m-矩微分。

若此外，m 是一个阶为 r 的序列，其中 $r\in\mathbb{R}$ 固定，则 $\partial_{m,t}$ 称为阶为 r 的 m阶矩微分，或简称为阶为 r 的算子。

注 13. 注意，对于任意形式幂级数 $\hat{u}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\in\mathbb{E}[[t]]$，算子$\partial_{m,t}$: $\mathbb{E}[[t]]\to\mathbb{E}[[t]]$ 也可以等价地定义为

$$\partial_{m,t}\hat{u}(t)=\partial_{m,t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(n+1)}{m(n)}a_{n+1}t^n.$$

注 14. 请注意，在最重要的情形 $m=(n!)_{n\geq 0}$下，算子 $\partial_{m,t}$ 是阶为 1 的m阶矩微分，这与通常的微分 ∂_t一致。

通过直接计算可得

命题 4. 设 $m_1 = (m_1(n))_{n\geq 0}$ 和 $m_2 = (m_2(n))_{n\geq 0}$ 是正数序列。那么，算子 $\mathcal{B}_{m_1,t}, \partial_{m_2,t}$: $\mathbb{E}[[t]] \to \mathbb{E}[[t]]$ 以如下方式彼此交换:

$$\mathcal{B}_{m_1,t}\partial_{m_2,t} = \partial_{m_1 m_2,t}\mathcal{B}_{m_1,t}.$$

命题 5（矩泰勒公式）。设 $\hat{\varphi} \in \mathbb{E}[[t]]$ and $m = (m(n))_{n\geq 0}$ 是一个正数序列，且 $m(0) = 1$。那么

$$\hat{\varphi}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m,t}^n \hat{\varphi}(0)}{m(n)} t^n. \tag{16}$$

证明。设 $\hat{\varphi}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \in \mathbb{E}[[t]]$。根据 m-矩微分的定义（另见注 13），我们得出对于任意 $n \in \mathbb{N}_0$

$$\partial_{m,t}^n \hat{\varphi}(t) = \partial_{m,t}^n \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m(k+n)}{m(k)} a_{k+n} t^k.$$

这意味着 $\partial_{m,\,t}^n \hat{\varphi}(0) = {}^{m(n)\,m(0)}a_n = m(n)a_n$。因此我们得到结论 (16)。 □

注 15。在本文中，我们还将对 $\hat{u}(t,z) \in \mathcal{O}(D,\mathbb{E})[[t]]$ 使用命题 5。在这种情况下，对于任意固定的 $z \in D$，$\hat{u}(\cdot,z) \in \mathbb{E}[[t]]$，且 (16) 的形式为

$$\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{m,t}^n \hat{u}(0,z)}{m(n)} t^n.$$

注 16. 由于（16）式左端不依赖于序列 m，根据命题 5，我们得出，对于任意序列 $m_1 = (m_1(n))_{n\geq 1}$ 和 $m_2 = (m_2(n))_{n\geq 1}$

$$\frac{\partial_{m_1,t}^n \hat{\varphi}(0)}{m_1(n)} = \frac{\partial_{m_2,t}^n \hat{\varphi}(0)}{m_2(n)} \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

特别地，当 $m_1 = m$ 和 $m_2(n) = n!$ 时，对每个 $n \in \mathbb{N}_0$，都有 $\partial_{m,\,t}^n \hat{\varphi}(0)\, m(n) = \partial_t^n \hat{\varphi}(0)\, n!$

命题 6. 设 $m_i(n)$ 是一个正数序列，满足对 $i = 1, 2$，有 $m_i(0) = 1$。那么柯西问题

$$\begin{cases} (\partial_{m_1,t} - \partial_{m_2,z})u = 0 \\ u(0,z) = \hat{\varphi}(z) \in \mathbb{E}[[z]] \end{cases}$$

有唯一的形式幂级数解

$$\hat{u}(t,z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial_{m_2,z}^n \hat{\varphi}(z)}{m_1(n)} t^n.$$

证明. 代入 $\hat{u}(t,z) = \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{m_1(z)\,(n)} t^n$，得到 $u_{n+1}(z) = \partial_{m_2,\,z} u_n(z)$ 和 $u_0(z) = \hat{\varphi}(z)$。因此有 $u_n(z) = \partial_{m_2,\,z}^n \hat{\varphi}(z)$。□

例 4. 0 阶算子的示例:

(1) 如果 $\mathbf{1} = (1)_{n\geq 0}$，那么

$$\partial_{\mathbf{1},t}\hat{u}(t) = \frac{\hat{u}(t) - \hat{u}(0)}{t} \quad \text{for} \quad \hat{u}(t) \in \mathbb{E}[[t]].$$

更一般地，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们得到

$$\partial_{\mathbf{1},t}^n \hat{u}(t) = \frac{\hat{u}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial_t^k \hat{u}(0)}{k!} t^k}{t^n} \quad \text{for} \quad \hat{u}(t) \in \mathbb{E}[[t]].$$

因此，我们可以将通常的泰勒定理写为

$$\hat{u}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial_t^k \hat{u}(0)}{k!} t^k + R_n(t),$$

其中，泰勒多项式的余项 $R_n(t)$ 由 $R_n(t) = t^n \partial_{\mathbf{1},t}^n \hat{u}(t)$ 给出。

(2) 若 $a > 0$ 且 $= (a^n)_{n\geq 0}$，则

$$\partial_{\mathbf{a},t}\hat{u}(t) = \frac{a(\hat{u}(t) - \hat{u}(0))}{t} = a\partial_{\mathbf{1},t}\hat{u}(t) \quad \text{for} \quad \hat{u}(t) \in \mathbb{E}[[t]].$$

(3) 根据注8，若 $\mathfrak{m}(u)$ 是一个 0 阶矩函数，则 $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}(n))_{n\geq 0}$ 是一个 0 阶序列。因此，$\partial_{\mathfrak{m},\,t}$ 是一个 0 阶算子。

(4) 设 $m = ([n]_q!)_{n\geq 0}$，其中 $q \in [0, 1)$。注意到 $D_{q,\,t}t^n = [n]_q t^{n-1}$，因此在这种情况下，$\partial_{m,\,t}$ 与 q-差分算子$D_{q,\,t}$ 重合，即

$$\partial_{m,t}\hat{u}(t) = D_{q,t}\hat{u}(t) = \frac{\hat{u}(qt) - \hat{u}(t)}{qt - t} \quad \text{for} \quad \hat{u}(t) \in \mathbb{E}[[t]].$$

由于 $q \in [0, 1)$，我们得到对每个 $n \in \mathbb{N}_0$ 都有 $1 \leq [n]_q \leq \frac{1}{1-q}$，并且可得

$$1 \leq [n]_q! \leq \big(\frac{1}{1-q}\big)^n \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}_0. \tag{17}$$

因此，q-差分算子$D_{q,\,t}$ 是 0 阶 m-矩微分。

另请注意，在特殊情形 $q = 0$ 下，我们得到

$$D_{0,t}\hat{u}(t) = \partial_{\mathbf{1},t}\hat{u}(t) = \frac{\hat{u}(t) - \hat{u}(0)}{t}.$$

8. The characterisation of sequences preserving summability

命题3完整刻画了保持 Gevrey 阶的序列。我们给出保持可求和性的序列的类似刻画。

定理 1. 序列 $m = (m(n))_{n\geq 0}$ 保持可求和性，当且仅当对每个 $k > 0$ˆ 以及每个 $\theta \neq 0$ 模 2π，都存在一个圆盘扇形 S_θ，使得

$$\mathcal{B}_{m,t}\big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\big) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_\theta) \quad \textit{and} \quad \mathcal{B}_{m^{-1},t}\big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\big) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_\theta).$$

证明。(⇒) 任取 $k > 0$ 和 $\theta \neq 0$ 模 2π。令 ˆ$u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(1 + n/k)t^n$。由于

$$\mathcal{B}_{\Gamma_{1/k},t}\hat{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t} \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_\theta),$$

我们看到，ˆu 在方向 θ上是 k-可求和的。这意味着，对于任意保持可求和性的序列 m，$\mathcal{B}_{m,\,t}$ˆ$u(t)$和$\mathcal{B}_{m^{-1},\,t}$ˆ$u(t)$也都是在方向 θ 上k-可求和的。因此我们得出结论:

$$\mathcal{B}_{\Gamma_{1/k},t}\big(\mathcal{B}_{m,t}\hat{u}\big) = \mathcal{B}_{m,t}\big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\big) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_\theta) \quad \text{and} \quad \mathcal{B}_{\Gamma_{1/k},t}\big(\mathcal{B}_{m^{-1},t}\hat{u}\big) = \mathcal{B}_{m^{-1},t}\big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\big) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_\theta).$$

(⇐) 任取 $k > 0$ 和 $d \in \mathbb{R}$。假设ˆ$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \in \mathbb{E}[[t]]$ 在方向 d上是 k-可求和的。只需证明$\mathcal{B}_{m,\,t}$ˆ$x(t)$和$\mathcal{B}_{m^{-1},\,t}$ˆ$x(t)$也在同一方向 d上 k可求和。

由于ˆ$x(t) \in \mathbb{E}\{t\}_{k,\,d}$，我们看到函数 $\varphi(t) := \mathcal{B}_{\Gamma_{1/k},\,t}$ˆ$x(t)$属于空间$\mathcal{O}^k($ˆ$S_d, \mathbb{E})$。设ˆ$u(t, z)$是柯西问题的一个解

$$\begin{cases} (\partial_{\tilde{m},t} - \partial_z)u = 0 \\ u(0, z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}), \end{cases} \tag{18}$$

其中 $\tilde{m} = (m(n)n!)_{n\geq 0}$. 然后，由于根据命题 6，ˆ$u(t, z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\partial_z^n \varphi}{\tilde{m}}(z)\,(n)\, t^n$，我们有

$$\hat{u}(t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{m(n)n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\Gamma(1 + n/k)m(n)} t^n = \mathcal{B}_{\Gamma_{1/k},t}\big(\mathcal{B}_{m,t}\hat{x}(t)\big),$$

它在 $t = 0$ 处收敛。要证明 $\mathcal{B}_{m,t}\hat{x}(t)$ 在方向 d 上是 k-可和的，只需证明 $u(t,0) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E})$。为此，注意到利用 u 的积分表示，我们得到

$$u(t,0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\rho} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t/\zeta)^n}{m(n)}\Big)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\psi(t/\zeta)\,d\zeta \tag{19}$$

当 $\rho > 0$ 足够小时，其中核 ψ 定义为

$$\psi(t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{m(n)} = \mathcal{B}_{m,t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\Big). \tag{20}$$

注意，根据假设，对每个 $\theta \neq 0$，模 2π 有 $\psi \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_\theta)$。特别地，幂级数 ψ 的收敛半径 $r > 0$ 为正，即 $\psi \in \mathcal{O}(D_r)$。由于对每个 $\theta \neq 0$，模 2π 有 $\varphi \in \mathcal{O}(S_d, \mathbb{E})\hat{}$ 和 $\psi \in \mathcal{O}(S_\theta)$，我们可以将式 (19) 中的积分路径从 $\hat{\zeta} \in \partial D_\rho$ 变形为 $\zeta \in \Gamma(R) := \partial(S_d \cap D_R)$。具体而言，只要 $d \neq 0$ 模 2π，就可以对这样的积分路径进行变形。当 $d = 0$ 模 2π 时，我们可以将积分路径变形，使得当 $|t| \to \infty$ 在 S_d 中时，$|\frac{t}{\zeta}|$ 保持有界。取 $R \to \infty$，我们看到对某个圆盘扇形 $\hat{S}_d$，有 $u(t,0) \in \mathcal{O}(S_d, \mathbb{E})$。

$\hat{}$ 为了估计 $\|u(t,0)\|_{\mathbb{E}}$，对 $t \in S_d$, $|t| \to \infty$，我们将轮廓 $\Gamma(R)$ 分成两段弧 $\Gamma_1(R) := \Gamma(R) \cap (\partial D_R)$，以及 $\Gamma_2(R) := \Gamma(R) \cap D_R$。于是得到

$$u(t,0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(R)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\psi(t/\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1(R)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\psi(t/\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2(R)}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\psi(t/\zeta)\,d\zeta. \tag{21}$$

$\hat{}$ 对于 $t \in S_d$，我们可以利用 $|t| \to \infty$，如同在 [12, 引理 5] 或 [13, 引理 4]中那样，来估计 $u(t,0)$。

也就是说，如果 $\zeta \in \Gamma(R)$，其中常数 $r > 0$ 是 ψ 的收敛半径，我们看到 R 和 t 同时趋于无穷，并且函数 $t \mapsto \psi(t/\zeta)$ 有界。此外，由于 $\varphi \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E})$，我们得出，(21) 右端的第一个 $\hat{}$ 积分关于 k 具有 $|t| \to \infty$ 在 S_d 中的指数增长。

为估计第二个积分，注意到若 $\zeta \in \Gamma_2(R)$，则 $\arg\zeta \neq d \bmod 2\pi$。这意味着函数 $t \mapsto \psi(t/\zeta)$ 在 S_d 中当 $|t| \to \infty$ 时具有 k 阶指数增长。此外，由于 $\varphi \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E})$，我们也可得出结论：在此情形下，(21) 右端的第二个积分在 S_d 中当 $|t| \to \infty$ 时也具有 k 阶指数增长。

因此，函数 $t \mapsto u(t,0)$ 在 S_d 中当 $|t| \to \infty$ 时也具有 k 阶指数增长，并且，$\hat{x}(t)$ 在方向 d 上是 k-可和的。

将 m 替换为 m^{-1}，并重复上述证明，我们可得出结论：$\mathcal{B}_{m^{-1},t}\hat{x}(t)$ 在相同方向 d 上也是 k-可和的。□

注17. 在特殊情形下，若对于某个 0 阶矩函数 $\mathfrak{m}(u)$，有 $m = (m(n))_{n\geq 0} = (\mathfrak{m}(n))_{n\geq 0}$，根据 Balser 矩方法 [2]，我们可以将由 (20) 给出的核 ψ 表示为

$$\psi(t) = \tilde{\mathcal{B}}_{m,t}\Big(\frac{1}{1-t}\Big) \quad \text{for some integral operator} \quad \tilde{\mathcal{B}}_{m,t}.$$

此外，由于根据定义9，我们可以将 $\mathfrak{m}(u) = \mathfrak{m}_1(u)/\mathfrak{m}_2(u)$ 写成同阶 $1/k < 2$ 的某些固定矩函数 $\mathfrak{m}_1(u)$ 和 $\mathfrak{m}_2(u)$，由 [2, 第5节5]可得 $\mathcal{B}_{m,t} = T^-_{\mathfrak{m}_1} \circ T^+_{\mathfrak{m}_2}$，其中 $T^-_{\mathfrak{m}_1}$ 和 $T^+_{\mathfrak{m}_2}$ 是两个积分算子，它们是 Borel 算子和 Laplace 算子的推广，并分别通过核函数 $E_{\mathfrak{m}_1}$ 和 $e_{\mathfrak{m}_2}$，按照 [2, 公式 (5.14)] 和 [2, 公式 (5.13)] 定义。

注记19。注意，我们可以用与定理 1 类似的方式表述命题3：序列 $m = (m(n))_{n\geq 0}$ 保持 Gevrey 阶，当且仅当存在一个圆盘 D 使得

$$\mathcal{B}_{m,t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\Big) \in \mathcal{O}(D) \quad \textit{and} \quad \mathcal{B}_{m^{-1},t}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\Big) \in \mathcal{O}(D).$$

注记19。定理 1 中给出的保持可求和性的序列刻画，与 [1, 引理 6]在思想上相似。

注记20。在定理 1 的证明中，我们采用了一种新思路：对简单矩方程 (18) 使用辅助柯西问题，研究初始数据 $\varphi(z) = u(0,z)$ 与边界数据 $t \mapsto u(t,0)$ 之间的关系。这个辅助柯西问题及其解为我们提供了一种新工具，可将幂级数 $z \mapsto u(0,z)$ 转化为幂级数 $t \mapsto u(t,0)$。下一节中，我们将对其他简单矩方程使用同一工具（见下文引理1、2和3），以证明定理 2。

9. 主要结果

根据 (17)，序列 $([n]_q!)_{n\geq 0}$ 保持 Gevrey 阶。本节将证明本文的主要结果，即该序列也保持可求和性。

为此，我们需要几个引理。第一个引理表明，矩方程 (22) 的解具有相同的边界条件和初始条件。

引理 1. 设 $k > 0$、$d \in \mathbb{R}$ 和 $\mathfrak{m}(u)$ 是一个 $1/k$ 阶矩函数。设 $\hat{v}(t,z) \in \mathcal{O}(D,\mathbb{E})[[t]]$ 是柯西问题的一个形式解

$$\begin{cases} (\partial_{\mathfrak{m},t} - \partial_{\mathfrak{m},z})v = 0 \\ v(0,z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D,\mathbb{E}). \end{cases} \tag{22}$$

则 $v(t,z) \in \mathcal{O}(D^2,\mathbb{E})$，且 $\psi(t) = \varphi(t)$，其中 $\psi(t) := v(t,0)$。

证明. 根据命题 6，(22) 的形式幂级数解为

$$\hat{v}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^n \varphi(z)}{\mathfrak{m}(n)} t^n. \tag{23}$$

根据 [12, 引理 1]，存在 $r > 0$ 和 A、$B < \infty$，使得

$$\sup_{|z|<r} \|\partial_{\mathfrak{m},z}^n \varphi(z)\|_{\mathbb{E}} \leq AB^n \mathfrak{m}(n) \quad \text{for every} \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{24}$$

因此，由 (23) 给出的形式幂级数解 $\hat{v}(t,z)$ 对于 $|z| < r$ 和$|t| < B^{-1}$ 是收敛的，所以 $v(t,z) \in \mathcal{O}(D^2, \mathbb{E})$。

在（23）中计算 $v(t,0)$，并对 $\varphi(z)$ 使用矩泰勒公式（命题 5 和注 15），我们得出

$$\psi(t) = v(t,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^n \varphi(0)}{\mathfrak{m}(n)} t^n = \varphi(z)|_{z=t} = \varphi(t).$$

□

类似地，接下来的两个引理表明，矩方程（25）的解的初始数据和边界数据具有相同的解析延拓性质。这些结果的精神与 [6, 定理 3.1]类似。

首先，按照 [6, 定理 3.1] 中充分性证明的思路，我们将证明

引理 2. 设 $k > 0, d \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{m}(u)$ 是阶为 $1/k$ 的矩函数，且 $\tilde{m} := (\mathfrak{m}(n)[n]_q!)_{n\geq 0}$ 对于 $q \in (0,1)$。设 $\hat{u}(t,z) \in \mathcal{O}(D,\mathbb{E})[[t]]$ 是初值问题的形式解

$$\begin{cases} (\partial_{\tilde{m},t} - \partial_{\mathfrak{m},z})u = 0 \\ u(0,z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D,\mathbb{E}) \end{cases} \tag{25}$$

则 $u(t,z) \in \mathcal{O}(D^2,\mathbb{E})$。此外，若 $\varphi(z) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d,\mathbb{E})$，则还有 $\tilde{\psi}(t) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d,\mathbb{E})$，其中 $\tilde{\psi}(t) := u(t,0)$。

证明。根据命题 6，(25) 的形式幂级数解为

$$\hat{u}(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^{n}\varphi(z)}{\tilde{m}(n)}t^{n}. \tag{26}$$

由 (24) 和 (17)，由 (26) 给出的形式幂级数解 $\hat{u}(t,z)$ 在 $|z|<r$ 和 $|t|<B^{-1}$ 时收敛，因此 $u(t,z)\in\mathcal{O}(D^{2},\mathbb{E})$。

利用矩泰勒公式（命题 5）以及关于 $\varphi(z)\in\mathcal{O}(D,\mathbb{E})$ 的泰勒公式（另见注 16），我们得出

$$\frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^{n}\varphi(0)}{\mathfrak{m}(n)}=\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}\quad\text{for every}\quad n\in\mathbb{N}_{0}.$$

因此，由 (26) 可得

$$u(t,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^{n}\varphi(0)}{\tilde{m}(n)}t^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^{n}\varphi(0)}{\mathfrak{m}(n)[n]_{q}!}t^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n![n]_{q}!}t^{n}.$$

我们将遵循 [6, 定理 3.1] 中充分性的证明，其中 $\kappa=\nu=1$ 和 $x=0$。由于$[n]_{q}!=(q;q)_{n}\,(1-q)^{n}$，根据柯西积分公式可得

$$\tilde{\psi}(t)=u(t,0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=\rho}\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_{n}}\Big(\frac{(1-q)t}{\zeta}\Big)^{n}d\zeta$$

当 $|t|$ 充分小时。此外，由 (4) 和 q-二项式定理（命题 1）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q;q)_{n}}\Big(\frac{(1-q)t}{\zeta}\Big)^{n}={}_{1}\phi_{0}\left(\begin{matrix}0\\-\end{matrix};q,\frac{(1-q)t}{\zeta}\right)=\frac{1}{\Big(\frac{(1-q)t}{\zeta};q\Big)_{\infty}}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta}{\zeta-(1-q)tq^{n}}.$$

注意，对于固定的 $t\neq0$，函数

$$\zeta\longmapsto\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta}{\zeta-(1-q)tq^{n}}$$

在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯函数，其简单极点位于

$$\zeta=\zeta_{n}(t):=(1-q)tq^{n}\quad\text{for}\quad n\in\mathbb{N}_{0}.$$

因此，由留数定理可得

$$\tilde{\psi}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi((1-q)tq^{n})\operatorname*{Res}_{\zeta=\zeta_{n}(t)}\frac{1}{\big(\frac{(1-q)t}{\zeta};q\big)_{\infty}}\frac{1}{\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi((1-q)tq^{n})\frac{(-1)^{n}q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_{n}(q;q)_{\infty}}.$$

由于 $\varphi(z)\in\mathcal{O}^{k}(\mathbb{E},\hat{}S_{d})$，存在 $A,B<\infty$，使得对于每个 $z\in\hat{}S_{d}$，都有 $\|\varphi(z)\|_{\mathbb{E}}\leq Ae^{B|z|^{k}}$。因此

$$\|\tilde{\psi}(t)\|_{\mathbb{E}}\leq\frac{A}{(q;q)_{\infty}}e^{B(1-q)^{k}|t|^{k}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q;q)_{n}}\leq\frac{A}{(q;q)_{\infty}}e^{\tilde{B}|t|^{k}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{q^{\frac{n+1}{2}}}{1-q}\Big)^{n}\leq\tilde{A}e^{\tilde{B}|t|^{k}}$$

对于某些正常数 $\tilde{A},\tilde{B}<\infty$，且对于每个 $t\in\hat{}S_{d}$。这意味着 $\tilde{\psi}(t)\in\mathcal{O}^{k}(\hat{}S_{d},\mathbb{E})$. □

接下来，我们将仿照 [6, 定理 3.1]中必要性部分的证明，证明

引理 3. 设 $k>0$, $d\in\mathbb{R}$, $\mathfrak{m}(u)$是阶为 $1/k$ 的矩函数，且 $\tilde{m}:=(\mathfrak{m}(n)[n]_{q}!)_{n\geq0}$对 $q\in(0,1)$成立。设 $\hat{}u(t,z)\in\mathcal{O}(D,\mathbb{E})[[z]]$ 是边值问题的形式解

$$\begin{cases}(\partial_{\tilde{m},t}-\partial_{\mathfrak{m},z})u=0\\ u(t,0)=\tilde{\psi}(t)\in\mathcal{O}(D,\mathbb{E})\end{cases} \tag{27}$$

那么 $u(t,z)\in\mathcal{O}(D^{2},\mathbb{E})$。若另外 $\tilde{\psi}(t)\in\mathcal{O}^{k}(\hat{}S_{d},\mathbb{E})$，则还有 $\varphi(z)\in\mathcal{O}^{k}(\hat{}S_{d},\mathbb{E})$，其中$\varphi(z):=u(0,z)$。

证明。根据变量替换后的命题 6，属于 $\mathcal{O}(D,\mathbb{E})[[z]]$ 的方程 (27) 的形式幂级数解为

$$\hat{u}(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial_{\tilde{m},t}^{n}\tilde{\psi}(t)}{\mathfrak{m}(n)}z^{n}. \tag{28}$$

由 [8, 命题 1] 和 (17)，存在 $r>0$ 和 $A,B<\infty$，使得

$$\sup_{|t|<r}\|\partial_{\tilde{m},t}^{n}\tilde{\psi}(t)\|_{\mathbb{E}}\leq AB^{n}\tilde{m}(n)\quad\text{for every}\quad n\in\mathbb{N}_{0}.$$

因此，由 (17) 可知，由 (28) 给出的形式幂级数解 $\hat{u}(t,z)$ 在 $|t|<r$ 且 $|z|<(1-q)B^{-1}$ 时收敛，因此 $\hat{u}(t,z)\in\mathcal{O}(D^{2},\mathbb{E})$。

与引理 2 的证明类似，由 $\psi(t)$ 的矩泰勒公式（命题 5 和注 16），我们得到

$$\frac{\partial_{\tilde{m},t}^{n}\tilde{\psi}(0)}{\mathfrak{m}(n)[n]_{q}!}=\frac{\partial_{\tilde{m},t}^{n}\tilde{\psi}(0)}{\tilde{m}(n)}=\frac{\tilde{\psi}^{(n)}(0)}{n!}\quad\text{for every}\quad n\in\mathbb{N}_{0}.$$

因此，利用 (28) 可得

$$u(0,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial_{\tilde{m},t}^{n}\tilde{\psi}(0)}{\mathfrak{m}(n)}z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[n]_{q}!\tilde{\psi}^{(n)}(0)}{n!}z^{n}.$$

我们将沿用 [6, 定理 3.1] 中必要性的证明，其中 $\kappa=\nu=1$ 和 $x_{0}=0$。由柯西积分公式可知

$$\varphi(z)=u(0,z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\eta|=\rho}\frac{\tilde{\psi}(\eta)}{\eta}\sum_{n=0}^{\infty}(q;q)_{n}\Big(\frac{z}{(1-q)\eta}\Big)^{n}d\eta$$

充分小的 $|z|$。由 (4) 和海涅变换公式（命题 2），我们得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(q;q)_{n}\Big(\frac{z}{(1-q)\eta}\Big)^{n}={}_{2}\phi_{1}\left(\begin{matrix}q,q\\0\end{matrix};q,\frac{z}{(1-q)\eta}\right)=\frac{\big(q,q\frac{z}{(1-q)\eta};q\big)_{\infty}}{\big(\frac{z}{(1-q)\eta};q\big)_{\infty}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\big(\frac{z}{(1-q)\eta};q\big)_{j}}{\big(q\frac{z}{(1-q)\eta},q;q\big)_{j}}q^{j}.$$

对于固定的 $z\neq 0$，函数

$$\eta\longmapsto\frac{1}{\big(\frac{z}{(1-q)\eta};q\big)_{\infty}}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\eta}{\eta-(1-q)^{-1}zq^{n}}$$

在 $\mathbb{C}$ 上是亚纯函数，在以下各点有简单极点：

$$\eta=\eta_{n}(z):=(1-q)^{-1}zq^{n}\quad\text{for}\quad n\in\mathbb{N}_{0}.$$

利用留数定理可知

$$\varphi(z)=(q;q)_{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\psi}\big(\frac{zq^{n}}{1-q}\big)\operatorname*{Res}_{\eta=\eta_{n}(z)}\frac{1}{\big(\frac{z}{(1-q)\eta};q\big)_{\infty}}\frac{1}{\eta}(q^{1-n};q)_{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^{-n};q)_{j}}{(q^{1-n},q;q)_{j}}q^{j}.$$

由于当 $j>n$ 时，$(q^{-n},q)_{j}=0$，且当 $j<n$ 时，$\frac{(q^{1-n};\,q)_{\infty}}{(q^{1-n};\,q)_{j}}=0$，我们得到

$$(q^{1-n};q)_{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(q^{-n};q)_{j}}{(q^{1-n},q;q)_{j}}q^{j}=(q^{1-n};q)_{\infty}\frac{(q^{-n};q)_{n}}{(q^{1-n},q;q)_{n}}q^{n}=(q;q)_{\infty}\frac{(q^{-n};q)_{n}}{(q;q)_{n}}q^{n}.$$

此外

$$\operatorname*{Res}_{\eta=\eta_{n}(z)}\frac{1}{\big(\frac{z}{(1-q)\eta};q\big)_{\infty}}\frac{1}{\eta}=\frac{1}{(q^{-n};q)_{n}(q;q)_{\infty}}.$$

因此

$$\varphi(z)=(q;q)_{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\psi}\big(\frac{zq^{n}}{1-q}\big)\frac{q^{n}}{(q;q)_{n}}.$$

由于存在 $A, B < \infty$，使得对于每个 $t \in \hat{}S_d$，都有 $\|\tilde{\psi}(t)\|_{\mathbb{E}} \le Ae^{B|t|^k}$，因此我们得出结论：

$$\|\varphi(z)\|_{\mathbb{E}} \le Ae^{B(1-q)^{-k}|z|^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q;q)_\infty}{(q;q)_n} q^n \le Ae^{\tilde{B}|z|^k} \sum_{n=0}^{\infty} q^n \le \tilde{A}e^{\tilde{B}|z|^k}$$

对于某些正常数 $\tilde{A}$、$\tilde{B} < \infty$，以及任意 $z \in \hat{}S_d$。这意味着 $\varphi(z) \in \mathcal{O}^k(\hat{}S_d, \mathbb{E})$. □

现在我们可以证明本文的主要结果了

定理 2（主定理）。序列 $([n]_q!)_{n\ge 0}$（对于 $q \in [0,1)$）保持可求和性。证明。若 $q = 0$，则 $([n]_q!)_{n\ge 0} = (1)_{n\ge 0}$ 以显然的方式保持可求和性。因此，我们可以假设 $q \in (0,1)$。

Fi首先，我们将证明，若 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \in \mathbb{E}\{t\}_{k,d}$ 则同样有 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{[n]_q!} t^n \in \mathbb{E}\{t\}_{k,d}$.

固定 $k > 0$ 和 $d \in \mathbb{R}$。我们假设 $\hat{}x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \in \mathbb{E}\{t\}_{k,d}$。设 $\mathfrak{m} = (\mathfrak{m}(n))_{n\ge 0}$，其中 $\mathfrak{m}(u)$ 是阶为 $1/k$ 的矩函数。则 $\psi(t) := \mathcal{B}_{\mathfrak{m},t} \hat{}x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\mathfrak{m}(n)} t^n \in \mathcal{O}^k(\hat{}S_d, \mathbb{E})$。

设 $v = v(t,z) \in \mathcal{O}(D^2, \mathbb{E})$ 是方程的一个解

$$\begin{cases} (\partial_{\mathfrak{m},t} - \partial_{\mathfrak{m},z})v = 0 \\ v(t,0) = \psi(t) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}). \end{cases}, \tag{29}$$

将变量替换后应用引理 1，我们得出 $\varphi(z) := v(0,z) = \psi(z)$，因此 $\varphi(z) \in \mathcal{O}^k(\hat{}S_d, \mathbb{E})$。

现在，设 $u(t,z) \in \mathcal{O}(D^2, \mathbb{E})$ 是初值问题的一个解

$$\begin{cases} (\partial_{\tilde{m},t} - \partial_{\mathfrak{m},z})u = 0 \\ u(0,z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}) \end{cases}, \tag{30}$$

其中 $\tilde{m}(n) := \mathfrak{m}(n)[n]_q!$。由引理 2 $u(t,0) \in \mathcal{O}^k(\hat{}S_d, \mathbb{E})$。

回顾一下，$v(t,0) = \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\mathfrak{m}(n)} t^n$。

另一方面，由于 v 是方程 (29) 的解，我们有 $\partial_{\mathfrak{m},t} v(t,z) = \partial_{\mathfrak{m},z} v(t,z)$；根据 t 中 v 的矩泰勒公式（见命题 5 和注 15），我们有

$$v(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathfrak{m},t}^n v(0,z)}{\mathfrak{m}(n)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^n v(0,z)}{\mathfrak{m}(n)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^n \varphi(z)}{\mathfrak{m}(n)} t^n.$$

因此我们有

$$\partial_{\mathfrak{m},z}^n \varphi(0) = x_n \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

注意到，根据命题 6，$u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^n \varphi(z)\,(n)}{[n]_q!} t^n$。因此

$$u(t,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{\mathfrak{m},z}^n \varphi(0)}{\mathfrak{m}(n)[n]_q!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\mathfrak{m}(n)[n]_q!} t^n \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}).$$

这意味着，根据注 4，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{[n]_q!} t^n$ 在方向 d 上是 k-可求和的。

为完成证明，我们将证明：若 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{[n]_q!} t^n \in \mathbb{E}\{t\}_{k,d}$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \in \mathbb{E}\{t\}_{k,d}$ 也成立。

若 $\hat{}y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{[n]_q!} t^n \in \mathbb{E}\{t\}_{k,d}$，则

$$\tilde{\psi}(t) := \mathcal{B}_{\mathfrak{m},t} \hat{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\mathfrak{m}(n)[n]_q!} t^n \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}).$$

设 $u(t,z) \in \mathcal{O}(D^2, \mathbb{E})$ 是边值问题的一个解

$$\begin{cases} (\partial_{\tilde{m},t} - \partial_{\mathfrak{m},z})u = 0 \\ u(t,0) = \tilde{\psi}(t) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}) \end{cases}.$$

由引理 3 可知 $\varphi(z) := u(0,z) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E})$。

现在，设 $v(t,z) \in \mathcal{O}(D^2, \mathbb{E})$ 是方程的一个解

$$\begin{cases} (\partial_{\mathfrak{m},t} - \partial_{\mathfrak{m},z})v = 0 \\ v(0,z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}) \end{cases}.$$

由引理 1 可得

$$v(t,0) = \varphi(t) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}).$$

由于 u 是 (30) 的一个解，根据 t 中关于 u 的矩泰勒公式（参见命题 5 和注 15），我们推得

$$u(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n_{\tilde{m},t} u(0,z)}{\tilde{m}(n)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n_{\mathfrak{m},z} u(0,z)}{\tilde{m}(n)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n_{\mathfrak{m},z} \varphi(z)}{\tilde{m}(n)} t^n,$$

˜因此由 $u(t,0) = \psi(t)$，可得 $\partial^n_{\mathfrak{m},\,z}\varphi(0) = x_n$ 对 $n \in \mathbb{N}_0$成立。最后我们得出

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{\mathfrak{m}(n)} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n_{\mathfrak{m},z}\varphi(0)}{\mathfrak{m}(n)} t^n = v(t,0) \in \mathcal{O}^k(\hat{S}_d, \mathbb{E}).$$

这意味着 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n \in \mathbb{E}\{t\}_{k,\,d}$。 □

注 21. 我们也可以用类似的方法证明，序列 $([\kappa n]_q!)_{n\geq 0}$ 对 $\kappa \in \mathbb{N}$ 和 $q \in [0,1)$ 保持可求和性，这可借助海涅变换公式的一种推广形式得到（见 [6, 命题3.2]）。

注 22. 请注意，定理 2 表明，序列 $m = (m(n))_{n\geq 0} = ([n]_q!)_{n\geq 0}$属于保持可求和性的序列群（见注 12），但我们不知道该序列是否源自定义9意义下的 0 阶矩函数 $\mathfrak{m}(u)$，也就是说，$([n]_q!)_{n\geq 0}$ 是否属于子群 (15)。

10. The Cauchy problem for moment operators of order zero

本节考虑常系数线性方程 $P(\partial_{m,t}, \partial_z)u = 0$ 的柯西问题，其中 $\partial_{m,t}$ 是一个 0 阶算子。我们将证明，若序列 m 还保持可求和性，那么可求和解的刻画方式与方程 $P(\partial_{\mathbf{1},t}, \partial_z)u = 0$的解相同。该方程是方程 $P(\partial_{\mathfrak{m}_1,t}, \partial_{\mathfrak{m}_2,z})u = 0$的特例；在 [13] 中，已在 $\mathfrak{m}_1(u)$ 和 $\mathfrak{m}_2(u)$ 为实数阶矩函数的条件下研究了该方程。根据本文的主要结果，我们可以刻画一般常系数线性 q-差分微分方程 $P(D_{q,t}, \partial_z)u = 0$ 的可求和解。这比 [6]中的结果推广得更为广泛。

我们假设 $P(\lambda, \zeta)$ 是关于 λ 和 $\varphi_j(z) \in \mathcal{O}(D)$ 的一般 p 阶二元多项式，其中 $j = 0, \ldots, p-1$。

我们研究柯西问题的解 $\hat{u}(t,z) \in \mathcal{O}(D)[[t]]$

$$\begin{cases} P(\partial_{m,t}, \partial_z)u = 0 \\ \partial^j_{m,t} u(0,z) = \varphi_j(z), \ j = 0, \ldots, p-1, \end{cases} \tag{31}$$

以及类似初值问题的解 $\hat{v}(t,z) \in \mathcal{O}(D)[[t]]$ 之间的关系

$$\begin{cases} P(\partial_{\mathbf{1},t}, \partial_z)v = 0 \\ \partial^j_{\mathbf{1},t} v(0,z) = \varphi_j(z), \ j = 0, \ldots, p-1. \end{cases} \tag{32}$$

首先，我们注意到

命题 7. 形式幂级数 $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{m(z)\,(n)} t^n$ 是方程 (31) 的解，当且仅当 $\hat{v}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) t^n$ 是方程 (32) 的形式幂级数解。

证明. ($\Rightarrow$) 设 $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{m(z)(n)} t^n$ 是方程 (31) 的形式解。利用交换公式（命题 4）$\mathcal{B}_{m^{-1},\, t}\partial_{m,\, t} = \partial_{1,\, t}\mathcal{B}_{m^{-1},\, t}$，其中 $m^{-1} = (m(n)^{-1})_{n\geq 0}$，并对柯西问题 (31) 应用博雷尔变换 $\mathcal{B}_{m^{-1},\, t}$，可得 $\hat{v}(t,z) = \mathcal{B}_{m^{-1},\, t}\hat{u}(t,z)$ 是方程 (32) 的形式解。

($\Leftarrow$) 证明类似。只需对柯西问题 (32) 应用博雷尔变换 $\mathcal{B}_{m,\, t}$ 并注意到 $\hat{u}(t,z) = \mathcal{B}_{m,\, t}\hat{v}(t,z)$。
□

利用上述命题以及保持 Gevrey 阶和可求和性的序列的性质，我们得出

推论 1. 设 $P(\lambda,\zeta)$ 是关于 λ 和 $s \in \mathbb{R}$ 的 p 阶二元多项式。另设序列 $m = (m(n))_{n\geq 0}$ 保持 Gevrey 阶。

那么，柯西问题 (31) 的形式幂级数解 $\hat{u}(t,z) \in \mathcal{O}(D)[[t]]$ 是 Gevrey 阶 s，当且仅当柯西问题 (32) 的幂级数解 $\hat{v}(t,z) = \mathcal{B}_{m^{-1},\, t}\hat{u}(t,z)$ 也是相同的 Gevrey 阶。

推论 2. 设 $P(\lambda,\zeta)$ 是关于 λ, $k > 0$ 和 $d \in \mathbb{R}$ 的 p 阶二元多项式。我们还假设序列 $m = (m(n))_{n\geq 0}$ 保持可求和性。

那么，柯西问题 (31) 的形式幂级数解 $\hat{u}(t,z) \in \mathcal{O}(D)[[t]]$ 在方向 d 上是 k-可求和的，当且仅当柯西问题 (32) 的幂级数解 $\hat{v}(t,z) = \mathcal{B}_{m^{-1},\, t}\hat{u}(t,z)$ 在同一方向上是 k-可求和的。

推论 3. 设 $P(\lambda,\zeta)$ 是关于 λ 的 p 阶二元多项式，$\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_N)$ 满足 $k_1 > \cdots > k_N > 0$，且 $\mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_N) \in \mathbb{R}^N$ 是可容许多方向。我们还假设序列 $m = (m(n))_{n\geq 0}$ 保持可求和性。

那么，柯西问题 (31) 的形式幂级数解 $\hat{u}(t,z) \in \mathcal{O}(D)[[t]]$ 在多方向 $\mathbf{d}$ 上是 $\mathbf{k}$-多重可求和的，当且仅当柯西问题 (32) 的幂级数解 $\hat{v}(t,z) = \mathcal{B}_{m^{-1},t}\hat{u}(t,z)$ 在同一多方向上是 $\mathbf{k}$-多重可求和的。

在 $m = ([n]_q!)_{n\geq 0}$ for $q \in [0,1)$ 的情况下，我们可以将 (31) 改写为具有常系数的一般齐次线性 q-差分微分方程的柯西问题

$$\begin{cases} P(D_{q,t},\partial_z)u = 0 \\ D_{q,t}^j u(0,z) = \varphi_j(z) \in \mathcal{O}(D),\ j = 0,\ldots,p-1, \end{cases} \tag{33}$$

在这一特殊情形下，根据定理 2，我们可以将命题 7 及推论 1、2 和 3 表述如下:

推论 4. 设 $P(\lambda,\zeta)$ 是关于 λ and $q \in [0,1)$ 的阶为 p 的二元多项式。另设 $\hat{u}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(z)}{[n]_q!} t^n$ 和 $\hat{v}(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)t^n$ 是属于空间 $\mathcal{O}(D)[[t]]$ ~~的~~形式幂级数。那么，以下等价关系成立:

(1) $\hat{u}(t,z)$ 是 (33) 的形式幂级数解，当且仅当 $\hat{v}(t,z)$ 是 (32) 的形式幂级数解。(2) 固定 $s \in \mathbb{R}$。$\hat{u}(t,z)$ 是 (33) 的 Gevrey 阶为 s 的形式幂级数解，当且仅当 $\hat{v}(t,z)$ 是 (32) 的形式幂级数解，且其 Gevrey 阶同为 s。(3) 固定 $k > 0$ 和 $d \in \mathbb{R}$。$\hat{u}(t,z)$ 是 (33) 的形式幂级数解，且在方向 d 上 k-可求和，当且仅当 $\hat{v}(t,z)$ 是 (32) 的形式幂级数解，且在同一方向上 k-可求和。(4) 固定 $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_N)$，其中 $k_1 > \cdots > k_N > 0$，以及可容许多方向 $\mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_N) \in \mathbb{R}^N$。$\hat{u}(t,z)$ 是 (33) 的形式幂级数解，且在多方向 $\mathbf{d}$ 上 $\mathbf{k}$-多重可求和，当且仅当 $\hat{v}(t,z)$ 是 (32) 的形式幂级数解，且在同一多方向上 $\mathbf{k}$-多重可求和。

设 $\lambda(\zeta)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的代数函数。这意味着存在一个关于两个复变量的多项式 $P(\lambda,\zeta)$，使得函数 $\lambda(\zeta)$ 满足方程 $P(\lambda(\zeta)\ \zeta) = 0$。根据

隐函数定理，函数 $\lambda(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}$ 上全纯，但有限个奇点或分支点除外。此外，该函数在无穷远处具有中等增长。更确切地说，存在无穷远处的极点阶数 $\tilde{q} \in \mathbb{Q}$ 和首项 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，使得

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{\lambda(\zeta)}{\zeta^{\tilde{q}}} = \lambda.$$

我们简记为 $\lambda(\zeta) \sim \lambda\zeta^{\tilde{q}}$。

因此，存在 $r_0 < \infty$ 和 $\kappa \in \mathbb{N}$，使得 $\lambda(\zeta)$ 是变量$\xi = \zeta^{1/\kappa}$的全纯函数，在 $|\zeta| > r_0$时于无穷远处有极点。这意味着函数 $\xi \mapsto \lambda(\xi^\kappa)$ 在无穷远处具有洛朗级数展开 $\lambda(\xi^\kappa) = \sum_{j=-n}^{\infty} \frac{a_j}{\xi^j}$，其系数为 $a_j \in \mathbb{C}$，满足 $a_{-n} = \lambda$和 $n = \tilde{q}\kappa \in \mathbb{Z}$。当 $|\xi| > r_0^{1/\kappa}$ 时，该展开收敛，且在无穷远处有 n 阶极点。

对于此类函数，我们可以定义如下伪微分算子

定义 13（参见 [13, 定义 13]）。设 $\lambda(\zeta)$ 是变量$\xi = \zeta^{1/\kappa}$的全纯函数，在 $|\zeta| \geq r_0$时（其中 $\kappa \in \mathbb{N}$ 和 $r_0 > 0$），且在无穷远处具有中等增长。矩伪微分算子 $\lambda(\partial_z) : \mathcal{O}_{1/\kappa}(D) \to \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)$ 定义为

$$\lambda(\partial_z)\varphi(z) := \frac{1}{2\kappa\pi i} \oint_{|w|=\varepsilon}^{\kappa} \varphi(w) \int_{e^{i\theta}r_0}^{e^{i\theta}\infty} \lambda(\zeta)\mathbf{E}_{1/\kappa}(z^{1/\kappa}\zeta^{1/\kappa})e^{-(\zeta w)}\, d\zeta dw \tag{34}$$

对于任意 $\varphi(z) \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D_r)$ 和 $|z| < \varepsilon < r$，其中 $\theta \in (-\arg w - \frac{\pi}{2}, -\arg\, w + \frac{\pi}{p})$，$\mathrm{E}^{1/\kappa}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n/\kappa)}$ 是指标为 $1/\kappa$ 的米塔-莱夫勒函数，而 $\oint_{|w|=\varepsilon}^{\kappa}$ 表示沿半径为 ε的正向圆周积分 κ 次。

注23。(34) 的右端与数值 r_0 的选取无关，只要 $\lambda(\zeta)$ 在 $|\zeta| \geq r_0$ 上全纯即可（见 [15, 命题 2]）。$\lambda(\partial_z)\varphi(z)$ 的值仅取决于 $\varphi(z)$ 以及代数函数 $\lambda(\zeta)$ 在无穷远邻域处的行为。

如果 $P(\lambda, \zeta)$ 是关于 λ的阶为 p的一般二元多项式，如 (31) 和 (32) 中所述，那么我们可以将其写成

$$P(\lambda, \zeta) = P_0(\zeta)\lambda^p - \sum_{j=1}^{p} P_j(\zeta)\lambda^{p-j}$$

对于某些一元多项式 $P_0(\zeta) \ldots, P_p(\zeta)$。

如果 $P_0(\zeta) \neq$ 为常数，那么方程 (31)（以及方程 (32)）的形式解并不唯一。为避免这一不便，我们选取一个特殊解，称为规范化形式解（见 [3] 和 [11]）。为此，我们将多项式 $P(\lambda, \zeta)$ 分解为

$$P(\lambda, \zeta) = P_0(\zeta) \prod_{j=1}^{n} \prod_{l=1}^{p_j} (\lambda - \lambda_{jl}(\zeta))^{p_{jl}} =: P_0(\zeta)\tilde{P}(\lambda, \zeta),$$

其中 $P_0(\zeta) \sim a_0\zeta^{q_0}$ 对于某些 $a_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 $q_0 \in \mathbb{N}_0$，$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p_j} p_{jl} = p$ 和 $\lambda_{jl}(\zeta)$ 是特征方程 $P(\lambda, \zeta) = 0$的根，满足 $\lambda_{jl}(\zeta) \sim \lambda_{jl}\zeta^{q_j}$对于某些 $\lambda_{jl} \in \mathbb{C}^*$和$q_j \in \mathbb{Q}$，即 $q_j = \mu_j/\nu_j$ 对于某些互素的 $\mu_j \in \mathbb{Z}$ 和 $\nu_j \in \mathbb{N}$。

由于 $\lambda_{jl}(\partial_z)$ 由 (34) 定义，矩伪微分算子

$$\tilde{P}(\partial_{m,t}, \partial_z) = \prod_{j=1}^{n} \prod_{l=1}^{p_j} (\partial_{m,t} - \lambda_{jl}(\partial_z))^{p_{jl}}$$

因此定义良好。

现在我们可以定义 (31)（分别为 (32)）的唯一规范化解。

定义 14. 若形式解 $\hat{u}$ 满足方程 (31)（分别地，形式解 $\hat{v}$ 满足方程 (32)），且 $\hat{u}$（分别地，$\hat{v}$）也是拟微分方程 $P(\partial_{m,t}, \partial_z)u = 0\tilde{}$（分别地，$P(\partial_{1,t}, \partial_z)v = 0$）的解，则称其为正规化形式解~。

定理 3. 设 $\hat{u}$ 是 (31) 的正规化形式解，且 $m = (m(n))_{n\geq 0}$ 是一个保持 Gevrey 阶的序列。

Then

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p_j} \sum_{\alpha=1}^{p_{jl}} \hat{u}_{jl\alpha} \tag{35}$$

其中 $\hat{u}_{jl\alpha}$ 是简单拟微分方程的形式解

$$\begin{cases} (\partial_{m,t} - \lambda_{jl}(\partial_z))^{\alpha} u_{jl\alpha} = 0 \\ \partial_{m,t}^{\beta} u_{jl\alpha}(0,z) = 0 \quad (\beta = 0, \ldots, \alpha - 2) \\ \partial_{m,t}^{\alpha-1} u_{jl\alpha}(0,z) = \lambda_{jl}^{\alpha-1}(\partial_z)\varphi_{jl\alpha}(z) \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D), \end{cases} \tag{36}$$

其中 $\varphi_{jl\alpha}(z) := \sum_{\beta=0}^{p-1} d_{jl\alpha\beta}(\partial_z)\varphi_{\beta}(z)$ 和 $d_{jl\alpha\beta}(\zeta)$ 是关于变量 $\xi = \zeta^{1/\kappa}$ 的某些中等增长全纯函数。

此外，形式解 $\hat{u}_{jl\alpha} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)[[t]]$ 是关于 t 的阶为 $\max\{q_j, 0\}$ 的 Gevrey 级数。

若进一步地，初始数据 $\varphi_{\beta}(z) \in \mathcal{O}^k(\mathbb{C})$ 满足 $\beta = 0, \ldots, p-1$，则形式解 $\hat{u}_{jl\alpha} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)[[t]]$ 是关于 t 的阶为 $\max\{q_j, 0\}(1 - 1/k)$ 的 Gevrey 级数。

证明。由于 m是一个保持 Gevrey 阶的序列，根据推论 1，只需对序列 $m = \mathbf{1} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$证明该结论；该序列继承自矩函数 $1(u) \equiv 1$，其中 $u \geq 0$。应用满足 $\mathfrak{m}_1(u) \equiv 1$、$\mathfrak{m}_2(u) = \Gamma(1+u)$、$s_1 = 0$、$s_2 = 1$和 $s = 0$ 的定理 1]，我们得到分解 (35)，其中 $\hat{u}_{jl\alpha}$ 满足 (36)，且是阶为 $\max\{q_j, 0\}$ 的 Gevrey 级数。若进一步有 $\varphi_{\beta}(z) \in \mathcal{O}^k(\mathbb{C})$，则对 $\beta = 0$、.....、$p-1$，有 $\hat{\varphi}_{\beta}(z) \in \mathbb{C}[[z]]_{-1/k}$。在这种情况下，我们也应用定理 1]，但取 $s = -1/k$，从而得出 $\hat{u}_{jl\alpha}$ 是阶为 $\max\{q_j, 0\}(1 - 1/k)$ 的 Gevrey 级数。□

为了证明可求和解和多重可求和解的结果，此外我们可以假设 $q_1 > q_2 > \cdots > q_n$ and

$$\tilde{n} := \begin{cases} 0 & \text{for} \quad q_1 \leq 0 \\ \max\{i \colon q_i > 0\} & \text{for} \quad q_1 > 0. \end{cases} \tag{37}$$

首先注意，若 $\tilde{n} = 0$ and 序列 $m = (m(n))_{n\geq 0}$ 保持 Gevrey 阶，则根据定理 3，式 (31) 的规范化形式解 $\hat{u}$ 收敛。

现在，假设 $\tilde{n} = 1$。在这种情况下，我们将研究式 (31) 的可求和解。具体而言，我们有

定理 4. 在上述条件下，假设 $\tilde{n} = 1$, $d \in \mathbb{R}$ and 序列$m = (m(n))_{n\geq 0}$ 保持可求和性。

若 $\varphi_j(z) \in \mathcal{O}^1(\hat{S}_{(d+\arg\lambda_{1l}+2n\pi)/q_1})$ 对于 $j = 0, \ldots, p-1$, $l = 1, \ldots, p_1$ and $n = 0, \ldots, \mu_1 - 1$，则式 (31) 的规范化形式解 $\hat{u}$ 在方向 d 上是 $1/q_1$-可求和的。

反过来，另外假设 (31) 中的初始数据满足 $\varphi_0(z) = \cdots = \varphi_{p-2}(z) = 0$ 且 $\varphi_{p-1}(z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D)$。若 (31) 的规范化形式解 $\hat{u}$ 在方向 d 上是 $1/q_1$-可求和的，则对于 $l = 1, \ldots, p_1$ 和 $n = 0, \ldots, \mu_1 - 1$，有 $\varphi(z) \in \mathcal{O}^1(\hat{S}_{(d+\text{辐角}\,\lambda_{1l}+2n\pi)/q_1)})$。

证明。由于 m 是保持可求和性的序列，根据推论 2，只需证明该结论对序列 $m = \mathbf{1} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ 成立，该序列由矩函数 $1(u) \equiv 1$ 在 $u \geq 0$ 时得到。由定理 3 可得 $\hat{u}$ 的分解，如 (35) 所示。此外，由于对于 $j = 2, \ldots, n$ 有 $q_j \leq 0$，根据同一定理，我们得到

$$\hat{u}_2 := \sum_{j=2}^{n} \sum_{l=1}^{p_j} \sum_{\alpha=1}^{p_{jl}} \hat{u}_{jl\alpha} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)[[t]]_0.$$

这意味着其和 u_2 是收敛的，因此 $\hat{u}_2 \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)\{t\}_{1/q_1,\, d}$。

固定 $l \in \{1,\dots,p_1\}$和 $\alpha \in \{1,\dots,p_{1l}\}$。由于对于 n =0, . . . , $\mu_1 - 1$, 有 $\varphi_{1l\alpha} \in \mathcal{O}^1_{1/\kappa}$ ($\hat{}S_{(d+\arg\lambda_{1l}+2n\pi)/q_1}$), 其中 $\alpha = 1,\dots,p_{1l}$和 $l = 1,\dots,p_1$, 根据 [13, 定理 3], 取 $\mathfrak{m}_1(u) \equiv 1$, $\mathfrak{m}_2(u) = \Gamma(1+u)$, $s_1 = 0, s_2 = 1$ 和 $s = 0$, 我们得到 $\hat{}u_{1l\alpha} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)\{t\}_{1/q_1,\ d}$。因此我们看到

$$\hat{u}_1 := \sum_{l=1}^{p_1}\sum_{\alpha=1}^{p_{1l}} \hat{u}_{1l\alpha} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)\{t\}_{1/q_1,d}.$$

这意味着 $\hat{}u = \hat{}u_1 + \hat{}u_2 \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)\{t\}_{1/q_1,d}$ 也成立。此外, $\hat{}u \in \mathcal{O}(D)[[t]]$, 因此最终 $\hat{}u \in \mathcal{O}(D)\{t\}_{1/q_1,\ d}$。

反方向定理的证明沿用与证明 [12, 定理 6] 相同的思路。固定 $l \in \{1,\dots,p_1\}$, 并定义 $\hat{}u_{1l} := P_{1l}(\partial_{1,\ t}, \partial_z)\hat{}u$, 其中

$$\tilde{P}_{1l}(\lambda,\zeta) := \tilde{P}(\lambda,\zeta)/(\lambda - \lambda_{1l}(\zeta)).$$

由于 $\hat{}u \in \mathcal{O}(D)\{t\}_{1/q_1,d}$ 且 $\hat{}u_{1l} = P_{1l}(\partial_{\mathbf{1},t}, \partial_z)\hat{}u$, 我们得出 $\hat{}u_{1l} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)\{t\}_{1/q_1,d}$ 也成立。另一方面, 由于

$$(\partial_{\mathbf{1},t} - \lambda_{1l}(\partial_z))\tilde{P}_{1l}(\partial_{\mathbf{1},t},\partial_z) = \tilde{P}(\partial_{\mathbf{1},t},\partial_z)$$

并且 $\hat{}u_{1l}(0,z) = \partial_{\mathbf{1}\,t}^{p-1}\hat{}u(0,z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D)$, 我们得到 $\hat{}u_{1l}$ 是柯西问题的一个形式解

$$\begin{cases} (\partial_{\mathbf{1},t} - \lambda_{1l}(\partial_z))u_{1l} = 0 \\ u_{1l}(0,z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D). \end{cases}$$

因此, 由 [13, 定理 4], 结合 $\mathfrak{m}_1(u) \equiv 1$、$\mathfrak{m}_2(u) = \Gamma(1+u)$、$s_1 = 0$、$s_2 = 1$ 和 $s = 0$, 我们得出, 对于 $n = 0$、.....、$\mu_1 - 1$, $\varphi(z) \in \mathcal{O}^1(\hat{}S_{(d+\arg\lambda_{1l}+2n\pi)/q_1})$, 从而完成证明。□

在这种情况下, 当 $\tilde{n} \geq 2$ 时, 自然要研究方程 (31) 的解 $\hat{}u$ 的多重可求和性。一般而言, 根据初始数据的解析性质给出的 $\hat{}u$ 多重可求和性的充分条件并非必要条件, 因为满足 (35) 的 $\hat{}u$ 具有多重可求和性, 并不意味着 $\hat{}u_{jl\alpha}$ 具有可求和性（见 [12, 例 2]）。因此, 与 [12,定义 11], 一样, 我们定义一种特殊的多重可求和性, 使得这一蕴含关系成立。

定义 15. 设 $(d_{\tilde{n}},\dots,d_1) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ 是相对于 $(1/q_{\tilde{n}},\dots,1/q_1)$ 的可容许多方向。若对于分解 (35), $\hat{}u$ 在多方向 $(d_{\tilde{n}},\dots,d_1)$ 上相对于 $(1/q_{\tilde{n}},\dots,1/q_1)$ 多重可求和, 则称$\hat{}u_{jl\alpha}$对于 $j = 1,\dots,\tilde{n}$在方向 d_j 上 $1/q_j$ 可求和, 或对于 $j = \tilde{n}+1,\dots,n$ 收敛, 其中 $l = 1,\dots,p_j$, $\alpha = 1,\dots,p_{jl}$。

我们有

定理 5. 在上述条件下, 假设 $\tilde{n} > 1$, $(d_{\tilde{n}},\dots,d_1) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ 是相对于 $(1/q_{\tilde{n}},\dots,1/q_1)$ 的可容许多方向, 且序列 $m = (m(n))_{n\geq 0}$保持可求和性。

若 $S_{(d_j+\arg\lambda_{jl}+2n\pi)/q_j})$ 对于 $\alpha = 0,\dots,p-1$, $l = 1,\dots,p_j$, $n = 0,\dots,\mu_j - 1$和$j = 1,\dots,\tilde{n}$, 则方程 (31) 的正规化形式解 $\hat{}u$ 在多方向 $(d_{\tilde{n}},\dots,d_1)$ 上是 $(1/q_{\tilde{n}},\dots,1/q_1)$-多重可求和的。

另一方面, 我们进一步假设 (31) 中的初始数据满足 $\varphi_0(z) = \cdots = \varphi_{p-2}(z) = 0$和 $\varphi_{p-1}(z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D)$。如果方程 (31) 的规范化形式解 $\hat{}u$ 关于分解 (35) 在多方向 $(d_{\tilde{n}},\dots,d_1)$ 上是 $(1/q_{\tilde{n}},\dots,1/q_1)$-多重可求和的, 那么对于 $l = 1,\dots,p_j$, $n = 0,\dots,\mu_j - 1$和$j = 1,\dots,\tilde{n}$, 有 $\varphi(z) \in \mathcal{O}^1(\hat{}S_{(d_j+\arg\lambda_{jl}+2n\pi)/q_j})$。

证明。由于 m 是保持可求和性的序列, 根据推论 3, 只需对序列 $m = \mathbf{1} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ 证明该命题; 该序列继承自矩函数 $\mathbf{1}(u) \equiv 1$。

如果 $\varphi(z) \in \mathcal{O}^1(\hat{}S_{(d_j+\text{参数}\lambda_{jl}+2n\pi)/q_j})$ 对于 $\alpha = 0,\dots,p-1$, $l = 1,\dots,p_j$, $n = 0,\dots,\mu_j - 1$和$j = 1,\dots,\tilde{n}$, 然后应用 [13, 定理 4], 其中 $\mathfrak{m}_1(u) \equiv 1, \mathfrak{m}_2(u) = \Gamma(1+u)$, $s_1 = 0, s_2 = 1$ 以及

$s = 0$ 我们得出结论，(31) 的正规化形式解 $\hat{u}$ 在多方向 $(d_{\tilde{n}}, \dots, d_1)$ 上是 $(1/q_{\tilde{n}}, \dots, 1/q_1)$-多重可求和的。

反过来，我们假设方程（31）的规范化形式解 $\hat{u}$ 关于分解（35），在多方向（$d_{\tilde{n}}, \dots, d_1$）上是（$1/q_{\tilde{n}}, \dots, 1/q_1$）-多重可求和的，并且方程（31）中的初始数据满足 $\varphi_0(z) = \cdots = \varphi_{p-2}(z) = 0$ 以及 $\varphi_{p-1}(z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D)$。那么，根据定理 5] 及 $\mathfrak{m}_1(u) \equiv 1, \mathfrak{m}_2(u) = \Gamma(1+u)$, $s_1 = 0, s_2 = 1$ 和 $s = 0$，我们得出 $\varphi(z) \in \mathcal{O}^1(\hat{S}_{(d_j + \arg \lambda_{jl} + 2n\pi)/q_j})$ 对于 $l = 1, \dots, p_j$, $n = 0, \dots, \mu_j - 1$ 和 $j = 1, \dots, \tilde{n}$ 成立。□

最后，我们还找到了形式解 $\hat{u}$ 收敛的充要条件，其中 $\hat{u}$ 是方程 (31) 的形式解。

定理 6. 若序列 $m = (m(n))_{n \geq 0}$ 保持 Gevrey 阶，且初始数据 $\varphi_j(z)$ 是关于 $j = 0, \dots, p-1$ 的 1 阶指数增长整函数，则方程 (31) 的形式解 $\hat{u}$ 收敛。

反过来，我们假设序列 $m = (m(n))_{n \geq 0}$ 保持可求和性，方程 (31) 的初始数据满足条件 $\varphi_0(z) = \cdots = \varphi_{p-2}(z) = 0$ 以及 $\varphi_{p-1}(z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D)$，并且由 (37) 定义的数 $\tilde{n}$ 为正。在这些假设下，若方程 (31) 的形式解 $\hat{u}$ 收敛，则 $\varphi(z)$ 是 1 阶指数增长整函数。

证明。应用定理 3 并取 $k = 1$，我们得出 $\hat{u}$ 满足分解 (35)，其中 $\hat{u}_{jl\alpha} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)[[t]]_0$。于是 $\hat{u} \in \mathcal{O}(D)[[t]]_0$ 也成立。这意味着 $\hat{u}$ 是收敛的。

为证明定理的第二部分，注意到条件 $\tilde{n} > 0$ 意味着 $q_1 > 0$。与定理 4 的证明类似（另见 [12, 定理 6]的证明），我们取 $\hat{u}_{11} := P_{11}(\partial_{m,t}, \partial_z)\hat{u}$，其中

$$\tilde{P}_{11}(\lambda, \zeta) := \tilde{P}(\lambda, \zeta)/(\lambda - \lambda_{11}(\zeta)).$$

由于 $\hat{u}$ 是收敛的，且 $\hat{u}_{11} = P_{11}(\partial_{m,t}, \partial_z)\hat{u}$，我们得到 $\hat{u}_{11} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)[[t]]$ 也是收敛的。这意味着对于每个 $d \in \mathbb{R}$，都有 $\hat{u}_{11} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)\{t\}_{1/q_1, d}$。另一方面，由于

$$(\partial_{m,t} - \lambda_{11}(\partial_z))\tilde{P}_{11}(\partial_{m,t}, \partial_z) = \tilde{P}(\partial_{m,t}\partial_z)$$

且 $\hat{u}_{11}(0, z) = \partial_{m,t}^{p-1}\hat{u}(0, z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D)$，我们得到 $\hat{u}_{11}$ 是柯西问题的形式解

$$\begin{cases} (\partial_{m,t} - \lambda_{11}(\partial_z))u_{11} = 0 \\ u_{11}(0, z) = \varphi(z) \in \mathcal{O}(D). \end{cases} \tag{38}$$

由于序列 m 保持可求和性，由推论 2 可知，对于每个 $d \in \mathbb{R}$，$\hat{v}_{11} := \mathcal{B}_{m^{-1},t}\hat{u}_{11} \in \mathcal{O}_{1/\kappa}(D)\{t\}_{1/q_1, d}$，且 $\hat{v}_{11}$ 是方程 (38) 的形式解，其中 $\partial_{m,t}$ 替换为 ∂_t。因此，将 [13, 定理 4] 与 $\mathfrak{m}_1(u) \equiv 1, \mathfrak{m}_2(u) = \Gamma(1+u)$, $s_1 = 0, s_2 = 1$ 和 $s = 0$ 应用于这个新方程，我们得到 $\varphi(z) \in \mathcal{O}^1(\hat{S}_{(d + \arg \lambda_{1l} + 2n\pi)/q_1})$ 对于 $n = 0, \dots, \mu_1 - 1$ 以及每个 $d \in \mathbb{R}$ 均成立，因此 $\varphi \in \mathcal{O}^1(\mathbb{C})$，证毕。□

注24. 注意到，根据定理 2，定理3–6的断言在方程 (1) 的一种特殊 q-差分微分情形下成立。

注25. 类似地，用 [14] 代替 [13]，我们可以得到非齐次柯西问题的可求和或多重可求和形式解 $\hat{u}$ 的刻画

$$\begin{cases} P(D_{q,t}, \partial_z)u = \hat{f}(t, z), \\ D_{q,t}^j u(0, z) = \varphi_j(z) \text{ for } j = 0, \dots, p-1, \end{cases} \tag{39}$$

$\hat{u}$ 可通过非齐次项 $f(t, z) \in \mathcal{O}(D)[[t]]$ 以及柯西数据 $\varphi_j(z) \in \mathcal{O}(D)$，$j = 0, \dots, p-1$ 的性质来描述。

等价地，我们可以找出相应条件，使得 q-积分微分算子 $P(D_{q,t}, \partial_z)D_{q,t}^{-p}$ 在 Gevrey 级数、可求和级数或多重可求和级数空间上是线性自同构。

本文不讨论非齐次 q-差分微分方程 (39) 的可求和解，但未来这或许可以作为一个很好的起点，

从可和性理论和多重可求和性的角度，进一步研究一些非线性 q-差分微分方程。

References

[1] W. Balser，矩方法与形式幂级数，J. Math. Pures Appl. 76 (1997), 289–305.[2] W. Balser，形式幂级数与亚纯常微分方程线性系统，Springer- Verlag，纽约，2000.[3] W. Balser，常系数偏微分方程形式幂级数解的多重可求和性，J. Differential Equations 201 (2004), 63–74.[4] W. Balser，M. Yoshino，常系数非齐次偏微分方程形式幂级数解的 Gevrey 阶，Funkcial. Ekvac. 53 (2010), 411–434.[5] G. Gasper，M. Rahman，《基本超几何级数》，剑桥大学出版社，剑桥，2004.[6] K. Ichinobe，S. Adachi，关于某些线性 k可求和差分微分方程柯西问题形式解的 q可求和性，《复微分方程与差分方程》，De Gruyter 数学会议论文集（2020），447–462.[7] A. Lastra，S. Malek，J. Sanz，关于具有 Fuchsian 奇点和不规则奇点的 q差分微分方程的 q渐近性，J. Differential Equations 252 (2012), 5185–5216.[8] A. Lastra，S. Michalik，M. Suwi´nska，某些广义矩偏微分方程形式解的估计，J. Math. Anal. Appl. 500:125094 (2021).[9] M. Loday-Richaud，《发散级数、可求和性与复苏 II：简单可和性与多重可和性》，数学讲义，第2154卷，Springer，2016.[10] S. Malek，关于线性 q差分微分方程的复奇点分析，J. Dyn. Control Syst. 15 (2009), 83–98.[11] S. Michalik，常系数线性偏微分方程发散解的多重可求和性，J. Differential Equations 249 (2010), 551–570.[12] S. Michalik，常系数矩偏微分方程的解析解，Funkcial. Ekvac. 56 (2013), 19–50.[13] S. Michalik，具有发散初始数据的线性偏微分方程形式解的可求和性，J. Math. Anal. Appl. 406 (2013), 243–260.[14] S. Michalik，非齐次矩偏微分方程的解析解与可求和解，Funkcial. Ekvac. 60 (2017), 325–351.[15] S. Michalik，某些常系数偏微分方程古尔萨问题的可求和解，J. Differential Equations 304 (2021), 435–466.[16] H. Tahara，关于某些线性 q差分微分方程形式解的可求和性，Funk- cial. Ekvac. 63 (2020), 259–291.[17]H. Tahara，H. Yamazawa，某些线性 q差分微分方程形式解可求和性的 q类比，Opuscula Math. 35 (2015), 713–738.

Department of Mathematics Education, Aichi University of Education, 1 Hirosawa, Igaya,Kariya City, Aichi Prefecture 448-8542, Japan电子邮箱：ichinobe@auecc.aichi-edu.ac.jp

Faculty of Mathematics and Natural Sciences, College of Science, Cardinal Stefan WyszyńskiUniversity, Wóycickiego 1/3, 01-938 Warszawa, Poland, ORCiD: 0000-0003-4045-9548电子邮箱：s.michalik@uksw.edu.pl 网址：http://www.impan.pl/~slawek