arXiv:2301.10396v2 [math.AT] 3 Jan 2024

McDuff–Segal 群完备化定理的等变推广

Kaif Hilman*

11月 22 日， 2023†

在这篇简短的说明中，我们证明了一个针对有限群 G 的 G–等变版 McDuff–Segal 群完备化定理。关于真正的等变局部化出现了新的复杂性，我们通过对 G–谱中 $\mathbb{E}_\infty$–环的同伦群提出一个简单条件来解决这一问题。我们借助乘法范数结构的存在，验证了当输入为 G–空间中的 $\mathbb{E}_\infty$–幺半群的适当变体时，该条件成立，从而为其相关的 G–球面群环给出一个局部化公式。

目录

1. 引言 1
2. 一些预备知识 3
3. 主定理 7
4. 最后说明 10
A. 等变笛卡尔对称幺半结构中的代数 13

1. 引言

群完备化至少在两个方面是高阶代数中的重要步骤：（1）它是构造对称幺半范畴（∞–）的K理论的主要组成部分；（2）它使我们能够运用谱方法研究有关模空间的问题。然而，这些群完备化的同伦类型通常仍难以捉摸，而 McDuff–Segal 的群完备化定理 [MS76；Ran13] 则是一个经典工具，为这些对象给出了同调公式。如今，该定理已成为标准工具，例如，在 Madsen–Weiss定理之后蓬勃发展的研究领域中（参见 [GR14，§7.4] 以及[GR17，§7]），该领域将微分同胚群的同调与某种适用于稳定同伦论方法的对象联系起来。粗略地说，其策略首先是证明，与这些微分同胚群相关的、由几何方式定义的协边范畴的群完备化等价于某个特定的 Thom 谱。然后将这一

*马克斯·普朗克数学研究所，波恩
kaif@mpim-bonn.mpg.de
†在IMRN上发表的日期。

识别与群完备化定理结合起来，便可通过 Thom 谱的同调计算上述微分同胚群的同调，精确到稳定化。

本文研究了有限群的这一 G–等变推广 G。这一问题并不像乍看之下那么牵强，因为上述“Madsen–Weiss 纲领”的等变推广中的一个主要步骤，已经在 [GS21，定理 1 中1] 得到探索：他们将某个等变配边范畴的群完备化与一个等变 Madsen–Tillmann 谱对应起来。我们希望本文给出的结果能够成为未来等变理论中的标准组成部分之一，并为对等变群完备化进行 Bredon 同调分析提供有用工具。

约定 1.1。本文中，范畴一词始终指 ∞–范畴，含义见[Lur17]。为强调某对象是经典意义下的范畴，我们称其为1-范畴。

记号 1.2。我们将简要介绍一些概念，以便陈述主定理。关于这些概念的更多细节可见第2节。我们用 $\mathcal{O}_G$ 表示有限群 G 的轨道范畴，并用 $\mathcal{S}_G \coloneqq \mathrm{Fun}(\mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$ 表示真正的 G–空间范畴；此外，用 $\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G) \simeq \mathrm{Fun}(\mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}, \mathrm{CMon}(\mathcal{S}))$ 表示其中的 $\mathbb{E}_\infty$–幺半群对象范畴。对象 $M \in \mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)$ 由以下数据构成：对每个子群 $H \leq G$，都有一个 $\mathbb{E}_\infty$–幺半群空间 M^H；对于子共轭 $K \leq H$ 所对应的限制映射 $M^H \to M^K$，它是 $\mathbb{E}_\infty$–幺半群之间的映射。

还有一种具有更多等变结构的变体，即真正的 G–空间中的 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群范畴 $\mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$。对象 $M \in \mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$ 由上述数据以及“等变加法”映射 $\oplus_{H/K}\colon M^K \to M^H$ 构成；对每个 $K \leq H$，这些映射都满足双陪集公式和高阶相干性。正如我们将在构造 2.6 末尾回顾的，这实际上等价于范畴 $\mathrm{Mack}_G(\mathcal{S}) \coloneqq \mathrm{Fun}^\times(A^{\mathrm{eff}}(G)\ \mathcal{S})$。该范畴由取值于空间的 G–Mackey 函子构成，并定义为 Barwick 的有效 Burnside 范畴上的保积预层（参见 [CMN+20，注 2.3]）。存在一个遗忘函子 $\mathrm{fgt}\colon \mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{S}}_G) \to \mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)$，它遗忘等变加法映射。

虽然我们在论文正文中保留了主要结果定理 3.3 更一般但符号也更繁复的表述，不过我们仍可在此推出关于 Bredon 同调的以下简单推论（其证明将在 §3 节定理 3.3的证明之后给出）：

定理 1.3. 设 $M \in \mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$，且 $\underline{N}$ a G–Mackey 函子取值于阿贝尔群。对于任意 $K \leq G$，我们有一个自然同构的 $RO(K)$–分次 Bredon 同调，其系数为 $\underline{N}$

$$H_\star^K(\Omega BM; \underline{N}) \cong H_\star^K(M; \underline{N})[(\pi_0 M^K)^{-1}]$$

读者此时或许会合理地想知道，G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–空间究竟有多常见。为对此稍作探讨，我们将在例 4.5中回顾一种标准方法，以构造大量有趣的例子。

现在我们稍作展望，简要谈谈定理 3.3 实际证明了什么，以及所采用的方法。一般表述是关于球面幺半群环的高阶代数局部化（沿用 Nikolaus [Nik17] 的表述），结果分为两部分：在第 (i) 部分中，我们通过直接改编 [Nik17, Thm. 1] 中的证明，表明对于 $M \in \mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)$，其群完备化的 G–悬挂谱可由满足泛性质的抽象局部化计算得出。这里的关键在于，与非等变情形不同——在非等变情形中，可以证明抽象局部化总能与望远镜局部化等同，正如定理 1.3 所示（例如参见 [Nik17, App. A]，其中证明了这一结论适用于满足 Ore 条件的 $\mathbb{E}_1$–环的一般情形）——在等变情形中则并非如此。不过，我们确实在定理 3.3 的第 (ii) 部分证明，当 M 具有额外的 G–$\mathbb{E}_\infty$– 幺半群 G– 空间结构时，相应的 G– 球面幺半群环会获得乘法范数的结构（其含义见 [GM97; HHR16]）

这进而确保抽象局部化与望远镜局部化一致。事实上，我们将给出一个关于 M 的等变同伦群的简单条件，称为挠扩张（参见条件3.4）；即使缺少范数，该条件也能确保抽象局部化与望远镜局部化一致。在某些特定的 M情形下，这一条件或许可以应用，也会有所助益。

据我们所知，这一定理无法直接从经典的群完备化定理推出，因为 G–悬挂谱 G–空间的并非只需对 G–空间的每个真正不动点取悬挂谱即可得到。定理的第一部分只需要标准的 ∞–范畴论（证明本质上与[Nik17，定理 1] 相同，正如上文所指出的），而在定理3.3 结构更丰富的第二部分中，我们需要使用 G–范畴这一语言，它由 [BDG+16] 引入，以便简洁地讨论 G–$\mathbb{E}_\infty$ 结构。以我们尚浅的学识，乘法范数的重要性着实令人有些意外；但事后看来，这一结果很可能早已为专家所知，至少也是他们所预期的。尽管我们未能在文献中找到这一结果，但若有人能提供它此前发表出处的参考文献，我们将不胜感激，并会给予适当致谢。

最后，简要介绍一下本文的组织结构：第2节将简要记录一些基础材料，以帮助可能不熟悉 G–范畴形式体系的读者；第3节给出主定理 3.3 的证明；第4节则以一些评述结束正文，讨论范数与局部化如何在我们的情形下良好地相互作用，以及这一结果与非等变群完备化定理的关系。在此过程中，我们将说明几何不动点如何将神秘的局部化 $L_{\underline{S}^{-1}}R$ 变成熟悉的事物。我们还将记录一个该定理可能派上用场的一般情形，并给出丰富的 G–E∞–幺半群 G–空间示例。最后，在附录 A 中，我们将证明一个用于证明主定理的技术性公认结果，即 G–E∞代数在 G–笛卡尔对称幺半范畴 G中，与该范畴中的 G–E∞–幺半群相同。遗憾的是，我们未能在文献中找到这一结果，希望本附录能够填补这一空缺。

致谢

感谢 J.D. Quigley 和 Eva Belmont 提出“等变群完备化定理”应当是什么样的问题，这一问题直接促使我们撰写了本文。我们还感谢 Maxime Ramzi 审阅了本文草稿并提出了有益的建议。最后，我们也感谢匿名审稿人；其耐心的评论促成了一处小的修正、许多阐述上的改进，以及附录的撰写。

2. 一些预备知识

设 G 为一个有限群。

记号 2.1. 设 $\mathcal{O}_G$ 为有限群 G的轨道范畴：这是一个 1-范畴，其对象是传递的 G–集合，态射是 G–等变映射。我们将 $\mathcal{S}_G$ 记作真 G–空间的范畴，其定义为 $\mathcal{S}_G \coloneqq \mathrm{Fun}(\mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}, \mathcal{S})$，其中 $\mathcal{S}$ 是空间的范畴；我们将 Sp_G 记作真 G–谱的范畴，其一个模型由取值于谱的 G–Mackey 函子给出（参见 [Bar17；BGS20]）。我们也将 $\mathbb{S}_G[-]$记作函子 $\Sigma^\infty_{+G}\colon \mathcal{S}_G \to \mathrm{Sp}_G$，它将 G–悬挂谱作为值。

记号 2.2。 对于一个 $\mathcal{C}$ 具有有限积的范畴，我们用 $\mathrm{CMon}(\mathcal{C})$ 表示其中 $\mathbb{E}_\infty$–幺半群的范畴；对于对称幺半范畴 $\mathcal{D}^\otimes$，我们用 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{D}^\otimes)$ 表示 $\mathbb{E}_\infty$–代数对象的范畴，其结构由给定的张量积结构诱导。记 $\mathcal{C}^\times$ 为笛卡尔对称幺半结构，则根据 [Lur17，命题 2.4.2，5]有 $\mathrm{CAlg}(\mathcal{C}^\times) \simeq$

CMon($\mathcal{C}$)。请注意，这意味着 CAlg($\mathrm{Sp}_G^{\otimes}$) 表示 genuine G–谱中的 $\mathbb{E}_\infty$–环，且不带乘法范数。

我们先给出下面这个观察，它不需要任何关于 G–范畴的理论：

观察2.3. 伴随中的左伴随是一个标准事实

$$\mathcal{S}_G \underset{\Omega_G^\infty}{\overset{\mathbb{S}_G[-]}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sp}_G$$

在$\mathcal{S}_G$ 上配备笛卡尔对称幺半结构，并在 G的 Sp_G 上配备 [MNN17，§52]给出的带基点 G–空间的张量积后（例如参见该文关于带基点–的+：$\mathcal{S}_G \to \mathcal{S}_{G*}$），可精化为对称幺半函子。根据 [Lur17，推论7.3.2，7] 右伴随 Ω_G^∞ 自动精化为松对称幺半函子，因此根据[Lur17，备注 7.3.2，13],应用函子 CAlg(–) 可得到一个伴随

$$\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathcal{S}_G^{\times}) \underset{\Omega_G^\infty}{\overset{\mathbb{S}_G[-]}{\rightleftarrows}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G^{\otimes}) \tag{1}$$

现在，为了给我们关于乘法范数的讨论作铺垫，我们在此汇集一些关于 G–范畴的基础知识。对这一精化不感兴趣的读者可以直接跳到下一节中定理3.3 第一部分的证明。

设定2.4（ G–范畴理论）。遵循群完备化相关论文的惯例，我们力求使本文尽可能简洁。因此，我们选择在本文中轻装上阵，不对所需的 G–范畴理论作自成一体的阐述。关于这些材料的原始来源，请读者参阅 [BDG+16；Nar16；Sha23], ，而关于 G–范畴的一站式综述，例如可见 [Hil22，第 1] 章。简言之，一个 G–范畴（分别地，一个 G–函子）是 $\mathrm{Cat}_{\infty,G} := \mathrm{Fun}(\mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}_\infty)$ 中的一个对象（分别地，态射），我们将使用下划线记号 $\underline{\mathcal{D}}$ 表示一个G–范畴，并用 $\mathcal{D}_H$ 表示其在 $G/H \in \mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}$ 处的取值。对于 G 的子群 $K \leq H$，我们应将 $\mathcal{D}_H \to \mathcal{D}_K$ 中打包在 G–范畴 $\underline{\mathcal{D}}$ 内的数据视为一个“限制”函子 Res_K^H。特别地，根据函子范畴中态射的定义，一个 G–函子总是与这些“限制”映射相容。 G–范畴的重要例子包括真 G–空间$\{\underline{\mathcal{S}}_G\colon G/H \mapsto \mathcal{S}_H\}$，以及真 G–谱 $\{\mathrm{SpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSp}_G\colon G/H \mapsto \mathrm{Sp}_H\}$。此外，函子$\mathcal{O}_H \simeq (\mathcal{O}_G)_{/(G/H)} \xrightarrow{\cdot} (\mathcal{O}_G)_{/(G/G)} \simeq \mathcal{O}_G$ 通过限制诱导出一个函子 $\mathrm{Cat}_{\infty,G} \to \mathrm{Cat}_{\infty,H}$，我们将其记为 Res_H^G。利用 Lurie 关于相对伴随的概念 [Lur17, §7.3.2], ，可以定义 G–伴随的概念（参见 [Sha23，定义 8.3]）：粗略地说，这意味着一对 G–函子 $L\colon \underline{\mathcal{C}} \rightleftharpoons \underline{\mathcal{D}}\colon R$，并附有在每个$G/H \in \mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}$ 处取值时的伴随数据。

这一理论的核心是 G–（余）极限的概念，其中指标化（余）积这一特殊情形占有重要地位。本文只需要这些特殊情形，因此在此简要说明。直观地说，它们可以理解为相对于有限 G–集取（余）积；例如，对于 $\underline{\mathcal{C}} \in \mathrm{Cat}_{\infty,G}$, $H \leq G$ 以及一个 H–等变对象 $X \in \mathcal{C}_H$, $\prod_{G/H} X$ 现在是一个 G–等变对象。关于这一点的更多细节，请参阅 [Sha23, §5]。当 $\underline{\mathcal{C}}$ 带基点时（也就是说，对于每个 $K \leq G$， $\mathcal{C}_K$ 都带基点，且所有限制映射都保持零对象），可以构造一个典范比较映射 $\coprod_{G/H} \to \prod_{G/H}$ （参见 [Nar16, Cons. 5.2]）。如果此映射是等价，则称 $\underline{\mathcal{C}}$ 为 G–半可加的。与非等变情形一样，对于具有有限指标积的 G–范畴 $\underline{\mathcal{C}}$，我们可以构造（例如参见 [Nar16, Def. 5.9]） G–半可加的 G–范畴 $\mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{C}})$，其对象大致可以理解为 $\underline{\mathcal{C}}$ 中配备了“等变加法映射”$\prod_{G/H}\mathrm{Res}_H^G M \to \underline{M}$ 的对象 $M \in \underline{\mathcal{C}}$；这些映射针对所有 $H \leq G$，并且是在通常的加法映射 $M \times M \to M$之上的。注意

，这种版本的等变加法映射在应用（1.2）后，恰好恢复了记号 $-)^G$ 中提到的映射，因为 $M^H \simeq (\prod_{G/H} \text{限制}_H^G M)^G \to M^G$。

现在，将有限~~带基~~点 G–集的 G–范畴记作 Fin_*。也就是说，它是 G–范畴 $\{G/H \mapsto \mathrm{Fin}_{*H} := \mathrm{Fun}(BH, \mathrm{Fin}_*)\}$，其中 BH 是一个只有一个对象、态射集由群 H 给出的群胚。Nardin 在 [Nar17, §3] 中用此给出了 G–对称幺半范畴的定义，这与 [Lur17]中的非等变情形颇为相似。另可参见 [NS22, §2]，其中有更全面、较新的论述；以及[QS22, §5.1]，其中对此作了总结。简单来说，在这种情形下，一个 G–对称幺半范畴是一个 G–范畴 $\underline{\mathcal{D}}^{\otimes}$，配备一个到 Fin_* 的映射，并满足适当~~的余~~笛卡尔性和 G–运算条件；而G–$\mathbb{E}_\infty$–环对象 $\mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{D}}^{\otimes}) := \mathrm{Fun}^{\mathrm{int}}_{G/\underline{\mathrm{Fin}}_*}(\underline{\mathrm{Fin}}_*, \underline{\mathcal{D}}^{\otimes})$ 则是此映射的 G–惯性截面（更详细~~的说~~明也见回顾 A.21）。对象 $R \in \mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{D}}^{\otimes})$ 应理解为一个对象 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathcal{D}_G^{\otimes})$，并配备 $\mathbb{E}_\infty$–代数映射 $\bigotimes_H^G \mathrm{Res}_H^G R \to R$，以编码“等变乘法”。按此记法，$\mathrm{CAlg}_G(\mathrm{SpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSp}_G^{\otimes})$表示真正的 G–谱中的 $\mathbb{E}_\infty$–环，并配备乘法范数；与之相对，$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G^{\otimes})$中的对象则不带范数。此外，沿用 [HHR16], 的记法，在 Sp_G这一特殊情形下，我们使用 N_H^G 而非 $\bigotimes_H^G$。

与记法 2.2类似，记 $\underline{\mathcal{C}}^{\times}$ 为 G-范畴 G上的笛卡尔对称幺半结构 $\underline{\mathcal{C}}$，该范畴具有有限指标积，我们也有 $\mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{C}}^{\times}) \simeq$ 交换幺半群$_G(\underline{\mathcal{C}})$。这主要是因为，对于 $M \in \mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{C}}^{\times})$，结构 $\prod_{G/H}$ 限制$_H^G M = \bigotimes_H^G$ 限制$_H^G M \to M$ 恰好提供了成为 CMon 对象所需的“等变加法”结构$_G(\underline{\mathcal{C}})$。虽然这是一个公认结果，但我们未能在文献中找到相关证明，因此在附录中给出了证明，见命题A.23；此外，我们也对上文讨论的某些事项作了更为精确的说明并提供了参考文献。

引理 2.5。该 G-伴随 $\mathbb{S}_G[-]$: $\underline{\mathcal{S}}_G \rightleftharpoons$ ___ $\mathrm{Sp}_G : \Omega_G^\infty$ 诱导出一个伴随$\mathbb{S}_G[-]$: 交换幺半群$_G(\underline{\mathcal{S}}_G) \rightleftarrows \mathrm{CAlg}_G($ $\mathrm{Sp}_G^{\otimes}) : \Omega_G^\infty$。

证明。由 [Nar17, §3] 可知，映射 $\mathrm{S}_G[-]$ 可精化为一个 G–对称幺半函子 $\mathrm{S}_G[-]$: $\underline{\mathcal{S}}_G^{\times} \longrightarrow \mathrm{SpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSp}_G^{\otimes}$。这意味着 Ω_G^∞可典范地精化为一个 G–松对称幺半函子。因此，利用命题 A.23 和 [Hil22, Lem. 1.3.11] 中的 $\mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{S}}_G^{\times}) \simeq \mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$，应用 CAlg_G 会得到另一个伴随，这与 [Lur17, Rmk. 7.3.2.13],类似。于是我们得到了所需的伴随。 □

构造 2.6 (等变群完备化)。例如，正如 [GGN15,§1], 所解释的那样，在任意半加性范畴（或该论文所称的 预加性范畴）中，可以讨论具有如下性质的对象：要求某个典范构造的剪切映射为等价，从而使这些对象成为 群完备 对象。对于半加性范畴 $\mathrm{CMon}(\mathcal{S})$，我们将群完备对象构成的全子范畴记为 $\mathrm{CGrp}(\mathcal{S})$。判定某个 $M \in \mathrm{CMon}(\mathcal{S})$ 属于 $\mathrm{CGrp}(\mathcal{S})$ 的一种方式，是要求交换幺半群$\pi_0 M$ 具有群的性质。

如果我们将 B 记作范畴 $\mathrm{CMon}(\mathcal{S})$ 中的悬挂（这与底空间上的悬挂截然不同！），那么我们知道存在伴随 ΩB: $\mathrm{CMon}(\mathcal{S}) \rightleftharpoons \mathrm{CGrp}(\mathcal{S})$: incl，使得 ΩB 在 $\mathrm{CMon}(\mathcal{S})$ 上实现群完备化函子。事实上，正如 [CDH+20，命题 3.3 中简洁地阐释的那样，5], ΩB 总是在任意具有拉回和推出的半加性范畴中实现群完备化。接下来，我们可以余自由地将其构造成一个 G–伴随的 G–范畴

$$\underline{\mathrm{Cofree}}_G\big(\mathrm{CMon}(\mathcal{S})\big) \underset{\longleftarrow}{\overset{\Omega B}{\longrightarrow}} \underline{\mathrm{Cofree}}_G\big(\mathrm{CGrp}(\mathcal{S})\big) \tag{2}$$

对于一个非等变范畴 $\mathcal{C}$，$\mathrm{Cofree}_G(\mathcal{C}) \in \underline{\mathrm{Cat}}_{\infty,\, G}$ 是由以下给出的 G–范畴$\{G/H \mapsto \mathrm{Fun}(\mathcal{O}_H^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})\}_{H \le G}$（参见 [Nar16，定义 2。7] 例如，此处的记号仅仅是

用下划线代替了“cofree”一词）。用这种记号， G–空间的 G–范畴因此由 $\underline{\mathcal{S}}_G = \mathsf{Cofree}_G(\mathcal{S})$ 给出。伴随中的两个 G–~~范畴~~都是 G–半加性的，因此特别地，ΩB 保持 G–双积。现在，若 $\mathcal{C}$ 有限积，那么记 $\mathsf{Mack}_G(-) \coloneqq \mathsf{Fun}^{\times}(A^{\mathrm{eff}}(G)\ -)$ 表示 G–Mackey 函子，则有

$$\mathrm{CMon}_G(\underline{\mathrm{Cofree}}_G(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{Mack}_G(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Mack}_G(\mathrm{CMon}(\mathcal{C}))$$

其中第一个等价来自 [Nar16，定理 6。5] 第二个等价是众所周知的，例如可由 [HW21，定理 II。19], 推出，利用 $A^{\mathrm{eff}}(G$ 根据 [Bar17，命题 4.3，例 B，具有半加性。3]。利用这一点，我们接着可以将 $\mathsf{CMon}_G(-)$ 作用于伴随 (2)，得到一个伴随

$$\mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{S}}_G) \underset{\longleftarrow}{\overset{\Omega B}{\longrightarrow}} \mathrm{CGrp}_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$$

具体而言，这逐点实现了群完备化，这就是我们所说的等变群完备化。

构造 2.7（遗忘范数）。我们在此说明遗忘乘法范数与 G–松对称幺半函子的相容性。首先注意，我们有一个伴随$i\colon\ * \rightleftharpoons \mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}\colon\ p$，其中 i 是 G/G的包含，而后者是 $\mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}$ 中的始对象。因此，应用 $\mathsf{Fun}(-, \mathsf{Cat}_\infty)$，我们得到一个（$\infty$, 2）-范畴的伴随 $p^*\colon \mathsf{Cat}_\infty \rightleftharpoons \mathsf{Cat}_{\infty,\ G}\colon\ i^*$。因此，由于 $p^*(\mathcal{C}) = \mathsf{const}_G(\mathcal{C}) \coloneqq \underline{\mathcal{C} \times \mathcal{O}_G^{\mathrm{op}}}$ 且 $i^*(\underline{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}_G = \mathsf{ev}_{G/G}\underline{\mathcal{D}}$，我们看到

$$\mathrm{Fun}_G\big(\underline{\mathrm{const}}_G(\mathcal{C}), \underline{\mathcal{D}}\big) \simeq \mathrm{Fun}\big(\mathcal{C}, \mathcal{D}_G\big) \tag{3}$$

特别地，由$n \mapsto \coprod^n G/G$ 给出的 1–范畴的全忠实函子 $\mathsf{Fin}_* \to \mathsf{Fin}_{*G} \coloneqq \mathsf{Fun}(BG, \mathsf{Fin}_*)$ 诱导出一个 G–函子 $q\colon \mathsf{const}_G(\mathsf{Fin}_*) \longrightarrow \mathsf{Fin}_*$，其定义为$\underline{(n, G/H)} \mapsto \coprod^n H/\underline{H}_\circ$ 因此，对于一个 G–对称幺半范畴 $\underline{\mathcal{D}^{\otimes}} \in \mathsf{CMon}_G(\mathsf{Cat}_{\infty,\ G})$，我们得到映射

$$\mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{D}^{\otimes}}) \coloneqq \mathrm{Fun}^{\mathrm{int}}_{G/\underline{\mathrm{Fin}}_*}(\underline{\mathrm{Fin}}_*, \underline{\mathcal{D}^{\otimes}}) \xrightarrow{q^*} \mathrm{Fun}^{\mathrm{int}}_{/\mathrm{Fin}_*}(\mathrm{Fin}_*, \mathcal{D}_G^{\otimes}) =: \mathrm{CAlg}(\mathcal{D}_G^{\otimes})$$

在此，为了分析目标，我们用到了

$$\begin{aligned}\mathrm{Fun}_{G/\underline{\mathrm{Fin}}_*}(\underline{\mathrm{const}}_G(\mathrm{Fin}_*), \underline{\mathcal{D}^{\otimes}}) &\coloneqq \mathrm{Fun}_G(\underline{\mathrm{const}}_G(\mathrm{Fin}_*), \underline{\mathcal{D}^{\otimes}}) \times_{\mathrm{Fun}_G(\underline{\mathrm{const}}_G(\mathrm{Fin}_*), \underline{\mathrm{Fin}}_*)} \{q\} \\ &\simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*, \mathcal{D}_G^{\otimes}) \times_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*, \mathrm{Fin}_{*G})} \{q\} \\ &\simeq \mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*, \mathcal{D}_G^{\otimes}) \times_{\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*, \mathrm{Fin}_*)} \{q\} =: \mathrm{Fun}_{/\mathrm{Fin}_*}(\mathrm{Fin}_*, \mathcal{D}_G^{\otimes})\end{aligned}$$

其中，第二个等价由（3）给出，第三个等价则是因为 $q \in \mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*, \mathrm{Fin}_{*G})$ 通过全忠实函子 $q\colon \mathrm{Fin}_* \subseteq \mathrm{Fin}_{*G}$ 落在全子范畴 $\mathsf{Fun}(\mathsf{Fin}_*, \mathsf{Fin}_*)$ 中。直观地说，函子 q^* 会遗忘 G–$\mathbb{E}_\infty$–环对象上的范数结构，因此下文也将其记作 fgt。

总而言之，因此对于一个 G–松对称幺半函子 $F\colon\ \underline{\mathcal{C}^{\otimes}} \to \underline{\mathcal{D}^{\otimes}}$，由于$F\colon \mathsf{CAlg}_G(\underline{\mathcal{C}^{\otimes}}) \to \mathsf{CAlg}_G(\underline{\mathcal{D}^{\otimes}})$ 由后复合给出，而遗忘函子由沿 $q\colon \mathsf{const}_G(\mathsf{Fin}_*) \to \mathsf{Fin}_*$ 的前复合给出，我们得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{C}^{\otimes}}) & \xrightarrow{F} & \mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{D}^{\otimes}}) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{fgt}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{fgt}} \\ \mathrm{CAlg}(\mathcal{C}_G^{\otimes}) & \xrightarrow{F} & \mathrm{CAlg}(\mathcal{D}_G^{\otimes}) \end{array}$$

3. 主定理

为了陈述并证明该定理，我们还需要一些术语和观察结果。

记号 3.1. 本文将涉及两种环的局部化，我们在此定义它们并说明它们之间的关系。设 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$ 和 $\underline{S} = \{S_H\}_{H\leq G}$ 是零阶等变同伦 Mackey 函子 $\underline{\pi}_0 R$ of R 的一个 G–子集。也就是说，对于任意 $H \leq G$， $\underline{S}$ 满足 $\mathrm{Res}^G_H S_G \subseteq S_H \subseteq \pi_0^H R := \pi_0 R^H$。现在，对于任意 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$，我们定义

$$\mathrm{Map}^{\underline{S}^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, A) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Map}^{S_G^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, A)$$

作为 Map 的子分支$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)(R, A)$ 的 $\mathbb{E}_\infty$–代数映射 $R \to A$，它们分别将 $\underline{S}$ 中的元素映为 $\underline{\pi}_0 A$ 中的单位，并将 S_G 中的元素映为 $\pi_0^G A$中的单位。根据一般理论（例如参见 [Nik17，附录 A]），我们知道，后一个映射空间由一个望远镜局部化 $S_G^{-1}R$ 所共表示；该局部化是将 R 关于 $S_G \subseteq \pi_0^G R$ 中的元素局部化得到的（即 $\mathrm{Map}^{S_G^{-1}}{}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, A) \simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(S_G^{-1}R, A)$）。特别地，我们有 $\underline{\pi}_\star S_G^{-1} R \cong S_G^{-1}\underline{\pi}_\star R$。

另一方面，如果前一个映射空间是余可表的，那么我们将把表示它的对象记为 $L_{\underline{S}^{-1}}R$。一般而言，这未必能用望远镜局部化来给出一个简洁的公式，因为我们需要在不同子群处求逆不同的元素集合$H \leq G$，而这些元素并非全都来自对 S_G 中元素施加限制（即，包含 $\mathrm{Res}^G_H S_G \subseteq S_H$可能是严格包含），因此 $\underline{\pi}_* L_{\underline{S}^{-1}} R$ 未必能描述为一个将 $\underline{S}$ 中元素求逆的 Mackey 函子。然而，由于映射 $R \to A$ 若将 $\underline{S}$ 求逆，就必然也会将S_G求逆，因此我们确实有一个包含

$$\mathrm{Map}^{\underline{S}^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, -) \hookrightarrow \mathrm{Map}^{S_G^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, -)$$

因此，当 $L_{\underline{S}^{-1}}R$ 存在时，这个包含由 CAlg(Sp$_G$) 中的典范比较映射诱导

$$S_G^{-1}R \longrightarrow L_{\underline{S}^{-1}}R. \tag{4}$$

记号 3.2. 令 $M \in \mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)$。我们将 $\underline{\pi}_M \subseteq \underline{\pi}_0 \mathbb{S}_G[M]$ 记为 Hurewicz 映射在由伴随单位 $\mathrm{id} \Rightarrow \Omega^\infty_G \mathbb{S}_G$ 诱导的等变同伦群 $\underline{\pi}_0 M \to \underline{\pi}_0 \Omega^\infty_G \mathbb{S}_G[M] = \underline{\pi}_0 \mathbb{S}_G[M]$ 上的像。这显然是上述定义意义下的一个 G–子集。

现在我们可以陈述本文的主定理:

定理 3.3。设 $M \in$CMon($\mathcal{S}_G$) 是一个 $\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–空间。

(i) 对象 $L_{(\underline{\pi}_M)^{-1}}\mathbb{S}_G[M]$ 存在，且群完备化映射 $M \to \Omega BM$ 在 CAlg(Sp$_G$) 中诱导一个等价

$$L_{(\underline{\pi}_M)^{-1}}\mathbb{S}_G[M] \xrightarrow{\simeq} \mathbb{S}_G[\Omega BM]$$

(ii) 此外，若 M 还具有 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–空间的结构，即 $M \in$交换幺半群$_G(\mathcal{S}_G)$，那么 $\mathbb{S}_G[\Omega^{BM}] \simeq L_{(\underline{\pi}_M)^{-1}}\mathbb{S}_G[M]$ 可进一步成为一个 G–$\mathbb{E}_\infty$– 环对象。换言之，它提升为 $\mathrm{CAlg}_G(\mathrm{Sp}_G)$ 中的一个对象。此外，在此情形下，来自 (*4*)

$$(\pi_M^G)^{-1}\mathbb{S}_G[M] \longrightarrow L_{(\underline{\pi}_M)^{-1}}\mathbb{S}_G[M] \simeq \mathbb{S}_G[\Omega BM]$$

是一个等价，因此我们在同伦群上得到预期的局部化效果，即$\underline{\pi}_\star \mathbb{S}_G[\Omega BM] \cong (\pi_M^G)^{-1}\underline{\pi}_\star \mathbb{S}_G[M]$。

现在我们转而证明定理的第一部分。我们再次强调，这一部分不需要用到 G–范畴理论。

定理 3.3 (i) 的证明。 证明与 [Nik17，定理 1] 中的证明完全相同。具体来说，我们首先断言，$\Omega BM \in$ 交换幺半群($\mathcal{S}_G$) 满足以下泛性质：对于每个$X \in$交换幺半群($\mathcal{S}_G$，映射

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}(\Omega BM, X) \to \mathrm{Map}^{(\underline{\pi}_0 M)^{-1}}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}(M, X)$$

由 η诱导的映射： $M \to \Omega BM$ 是一个等价，其中 $\mathrm{Map}^{(\underline{\pi}_0 M)^{-1}}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)} \subseteq \mathrm{Map}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}$ 表示这样的映射所构成的子分支： $\underline{\pi}_0 M$ 被映射到在 $\underline{\pi}_0 X$中具有加法逆元的元素。由于 ΩBM 是群完备的，该映射的像落在这个子分支中。为证明这一断言，将 $X^\times$ 定义为 $\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)$ 中的拉回

$$\begin{array}{ccc} X^\times & \xrightarrow{i} & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ (\underline{\pi}_0 X)^\times & \hookrightarrow & \underline{\pi}_0 X \end{array}$$

从而 $X^\times \in \mathrm{CGrp}(\mathcal{S}_G)$。现在考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}(\Omega BM, X) & \xrightarrow{\eta^*} & \mathrm{Map}^{(\underline{\pi}_0 M)^{-1}}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}(M, X) \\ {\scriptstyle i_*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_*} \\ \mathrm{Map}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}(\Omega BM, X^\times) & \xrightarrow[\eta^*]{} & \mathrm{Map}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}(M, X^\times) \end{array}$$

左侧竖直映射 i_* 是一个等价，因为 ΩBM 是群完备的，并且 $(-)^\times$ 是包含 $\mathrm{CGrp}(\mathcal{S}_G) \subseteq \mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)$ 的右伴随；底部 η^* 是一个等价，因为 $X^\times$是群完备的，并且 ΩBM 根据构造 M 是 2.6 的群完备化；右侧竖直映射 i_* 是一个等价，因为根据定义，$\mathrm{Map}^{(\underline{\pi}_0 M)^{-1}}$ 中的映射恰好是那些落在 $X^\times$ 中的映射。因此，总而言之，顶部水平映射 η^* 也是一个等价，正如所要证明的。

现在，根据伴随（1），对于任意 $A \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(\mathbb{S}_G[\Omega BM], A) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}(\Omega BM, \Omega^\infty_G A) \\ &\simeq \mathrm{Map}^{(\underline{\pi}_0 M)^{-1}}_{\mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G)}(M, \Omega^\infty_G A) \\ &\simeq \mathrm{Map}^{(\underline{\pi}_M)^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(\mathbb{S}_G[M], A) \end{aligned} \tag{5}$$

其中第二个等价由上面的断言得出。根据记号 3.1，因此 $\mathbb{S}_G[\Omega BM]$ 计算 $L_{(\underline{\pi}_M)^{-1}}\mathbb{S}_G[M]$，如所期望。 □

现在我们转而处理这样一个问题：当输入具有更丰富的结构时，即当 $M \in \mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$ 时，如何将其细化为范结构。在此之前，先给出下面这个中间概念及其若干简单推论会很有帮助，它们有助于我们识别迄今为止所得到的抽象局部化的同伦群。

条件 3.4（挠扩张）。设 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$，且 $\underline{S} \subseteq \underline{\pi}_0 R$ 是 R 的零次等变同伦群的一个 G–子集。若对于任意 $H \leq G$，包含 $\mathrm{Res}^G_H S_G \subseteq S_H$ 是一个挠扩张，即对于任意 $a \in S_H$，存在一个 $r \in \pi^H_0 R$，使得 $r \cdot a \in \mathrm{Res}^G_H S_G$，则称 $\underline{S}$ 满足挠扩张条件。

注 3.5. 选择这一术语的原因在于它与模的情形存在类比：如果 $I \subseteq J \subseteq R$ 是满足类似条件的 R–子模，那么 J/I 就是一个挠 R–模。无论如何，接下来的三个引理应该能阐明我们为何关注这一条件。

引理 3.6. 若 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$ 且 $\underline{S} \subseteq \underline{\pi}_0 R$ 是一个乘法封闭的 G–子集，满足条件 3.4，则 $L_{\underline{S}^{-1}}R$ 存在，且典范映射 $S_G^{-1}R \longrightarrow L_{\underline{S}^{-1}}R$ 从 (4) 出发是一个等价。此外，在这种情况下，对于任意 $K \leq G$，都有 限制$_K^G S_G^{-1}R \simeq S_K^{-1}$ 限制$_K^G R$。

证明。如记号 3.1 中所述，陈述中的典范映射诱导出子分支的包含 $\mathrm{Map}^{\underline{S}^{-1}}{}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, A) \hookrightarrow \mathrm{Map}^{S_G^{-1}}{}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, A)$。因此，我们只需证明目标中的所有分支都在像中。设 $\varphi\colon R \to A$ 将 S_G 中的元素变为可逆元。我们需要证明，对于所有 $H \leq G$, $\varphi|_H\colon \mathrm{Res}_H^G R \to \mathrm{Res}_H^G A$ 都将 $S_H \subseteq \pi_0^H R$ 中的元素映为 $\pi_0^H A$中的单位。

因此，固定 $H \leq G$ 并令 $a \in S_H$。根据假设，存在一个 $r \in \pi_0^H R$ 使得 $r\cdot a \in$Res$_H^G S_G$。由于 $\varphi|_H$ 将 $r\cdot a$ 变为可逆元，取 $x \in \pi_0^H A$ 使得 $1 = x\cdot\varphi|_H(r\cdot a) = x\cdot\varphi|_H(r)\cdot\varphi|_H(a)$。特别地，由于一切都是交换的，$x\cdot\varphi|_H(r)$ 是 $\varphi|_H(a)$ 的逆元，因此 $\varphi|_H$ 也将 a 变为可逆元。因此，由于 a 是任意的，我们看到 $\varphi|_H$ 必定已将 S_H 中的所有元素变为可逆元，正如所需。

对于最后一个结论，首先注意到 $\mathrm{Res}_K^G S_G^{-1}R \simeq (\mathrm{Res}_K^G S_G)^{-1}\mathrm{Res}_K^G R$。因此，由于 Res$_K^G S_G \subseteq S_K \subseteq \pi_0^K R$，我们看到，先验地，$\mathrm{Res}_K^G S_G^{-1}R$ 可能反转的元素比 S_K^{-1} $\mathrm{Res}_K^G R$反转的元素少。不过，与上一段相同的论证表明，在关于 R 的假设下，我们确实有 $\mathrm{Res}_K^G S_G^{-1}R \simeq S_K^{-1}\,\mathrm{Res}_K^G R$，正如所需。 □

引理 3.7. 令 $R \in \mathrm{CAlg}_G($ $\mathrm{Sp}_G)$ 为一个 G–$\mathbb{E}_\infty$–环对象，并且 $\underline{S} \subseteq \underline{\pi}_0 R$ 是一个 G在范数下封闭的 –子集。那么， $\underline{S}$ 满足条件 3.4。

证明。固定 $H \leq G$，并令 $a \in S_H$。我们要证明存在一个 $r \in \pi_0^H R$，使得 $r\cdot a \in \mathrm{Res}_H^G S_G$。为此，考虑 $\mathrm{N}_H^G a \in \pi_0^G R$，它实际上属于 $S_G \subseteq \pi_0^G R$，这是由范数闭合假设得出的。于是，根据范数双陪集公式，我们得到

$$\mathrm{Res}_H^G \mathrm{N}_H^G a = \prod_{g\in H\backslash G/H} \mathrm{N}_{H^g\cap H}^H g_* \mathrm{Res}_{H\cap H^g}^H a \in \mathrm{Res}_H^G S_G$$

其中 a 是右因子（即当 $g = e$时），由此得证。 □

引理 3.8. 若 $M \in$ 交换幺半群$_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$，则 $\underline{\pi}_M \subseteq \underline{\pi}_0 \mathbb{S}_G[M]$ 在范数下封闭。

证明。 首先，根据引理 2.5 我们知道 $\mathbb{S}_G[M]$ 细化为一个 G–$\mathbb{E}_\infty$–环对象。现在固定$H \leq G$ 并假设我们有 $n \in \pi_0^H M$ 及其关联元素 $\overline{n} \in \pi_0^H \mathbb{S}_G[M]$。因此，根据定义，范数化元素 $\mathrm{N}_H^G \overline{n} \in \pi_0^G \mathbb{S}_G[M]$ 由下式给出

$$\mathbb{S}_G = \mathrm{N}_H^G \mathbb{S}_H \xrightarrow{\mathrm{N}_H^G \overline{n}} \mathrm{N}_H^G \mathrm{Res}_H^G \mathbb{S}_G[M] \simeq \mathbb{S}_G[\prod_{G/H} \mathrm{Res}_H^G M] \xrightarrow{\mathbb{S}[\oplus_{G/H}]} \mathbb{S}_G[M]$$

这里 $\oplus_{G/H}\colon$ $\prod_{G/H}$限制$_H^G M \to M$是对象 G的 –半可加性伴随余单位$M \in$ 交换幺半群$_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$。中间等价成立，是因为根据引理 $\mathbb{S}_G[\prod_{G/H} -] \simeq \mathrm{N}_H^G \mathbb{S}_H[-]$ 来自函子 G的 –对称幺半性 $\mathbb{S}_G[-]$ 根据引理 2.5

现在，引理 – 中的自然变换 $\Rightarrow \Omega_G^\infty \mathbb{S}_G(-)$ 2.5 与伴随的余单位 $\prod_H^G$ 限制$_H^G M \xrightarrow{\oplus_{G/H}} M$ 给出了交换图

$$\begin{array}{ccc}
* & \longrightarrow & \Omega_G^\infty \mathbb{S}_G \\
{\scriptstyle n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_G^\infty \mathrm{N}_H^G \overline{n}} \\
\prod_H^G \mathrm{Res}_H^G M & \longrightarrow & \Omega_G^\infty \mathbb{S}_G[\prod_H^G \mathrm{Res}_H^G M] \simeq \Omega_G^\infty \mathrm{N}_H^G \mathrm{Res}_H^G \mathbb{S}_G[M] \\
{\scriptstyle \oplus_{G/H}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_G^\infty \mathbb{S}_G[\oplus_{G/H}]} \\
M & \longrightarrow & \Omega_G^\infty \mathbb{S}_G[M]
\end{array}$$

这意味着，范数化元素 $\mathrm{N}_H^G\overline{n} \in \pi_0^G\mathbb{S}_G[M]$ 已经来自元素$\oplus_{G/H}n \in \pi_0^G M$，因此 $\underline{\pi}_M \subseteq \underline{\pi}_0\mathbb{S}_G[M]$ 在范数运算下封闭。 □

现在，我们可以运用此前完成的所有工作，完成定理的证明。

定理 *3.3* （ii）的证明。 关键在于我们有如下交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{S}}_G) & \underset{\Omega_G^\infty}{\overset{\mathbb{S}_G[-]}{\rightleftarrows}} & \mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathrm{Sp}}_G^{\otimes}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{fgt}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{fgt}} \\ \mathrm{CMon}(\mathcal{S}_G) & \underset{\Omega_G^\infty}{\overset{\mathbb{S}_G[-]}{\rightleftarrows}} & \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G^{\otimes}) \end{array}$$

它们由伴随 $\mathbb{S}_G[-] \dashv \Omega_G^\infty$ 的 G–弱对称幺半性与构造 2.7 中的交换方块共同得到，其中伴随来自引理 2.5。实际上，对于这个证明，我们只需要 ($\mathbb{S}_G[-]$,fgt) 方块交换。因此，若 $M \in$ 交换幺半群$_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$，使得根据构造 2.6，$\Omega BM$ 也属于交换幺半群$_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$，那么 $\mathbb{S}_G[\Omega BM]$ —— 根据定理的 (i) 部分，它等价于$L_{(\underline{\pi}_M)}{}^{-1}\mathbb{S}_G[M]$——自然地细化为 CAlg$_G$ ($\mathrm{SpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSpSp}_G^{\otimes}$) 中对象的结构，也就是说，它自然地具有乘法范数。随后，(ii) 部分的最后一个陈述可由引理 3.6 至 3.8 直接得出。 □

注记 3.9。 引理 $\underline{\pi}_M \subseteq \underline{\pi}_0\mathbb{S}_G[M]$ 中的范数闭包本应说明局部化 $(\underline{\pi}_M)^{-1}\mathbb{S}_G[M]$ 为何甚至有可能具有乘法范数。一般而言，对 G–$\mathbb{E}_\infty$–环进行局部化后，未必能进一步细化为 G–$\mathbb{E}_\infty$–环，这一点已有充分记载，例如见 [HH13]。尽管如此，乘法子集的范数闭包是局部化能否细化为G–$\mathbb{E}_\infty$–环结构的充要条件。例如，这可由[QS22，引理 5.27]推出。

最后，我们利用定理3.3 迅速推出定理 1.3。

定理 1.3 的证明。令 $K \leq G$ 和 $\underline{N}$ 为一个 G–Mackey 函子，将其视为 Eilenberg–Mac Lane 真正的 G–谱（例如参见 [Sch22, Ex. 4.41]）。那么，根据 $RO(G)$–分次 Bredon 同调的定义（同上），有 $H_\star^K(\Omega BM;\underline{N}) = \pi_\star^K\left(\underline{N}\otimes\mathbb{S}_G[\Omega BM]\right)$。此外，由引理 3.6 的第二部分可知，$\mathrm{Res}_K^G(\pi_M^G)^{-1}\mathbb{S}_G[M] \simeq (\pi_M^K)^{-1}\mathrm{Res}_K^G\mathbb{S}_G[M]$，因此我们得到

$$H_\star^K(M;\underline{N})[(\pi_0^K M)^{-1}] = (\pi_M^K)^{-1}\pi_\star^K\left(\underline{N}\otimes\mathbb{S}_G[M]\right) \cong \pi_\star^K\left(\underline{N}\otimes(\pi_M^G)^{-1}\mathbb{S}_G[M]\right)$$

由此根据定理3.3得出结果。 □

4. 最后说明

在最后这一节中，我们将讨论三点：

- 我们分析记号3.1 an中的抽象局部化的几何不动点 d
  并说明它有一种简单的描述，
- 我们解释一个可能适用该定理的一般情形，
- 并且我们给出了大量 G–E∞–幺半群 G–空间的例子。

关于第一点，正如我们在记号 3.1 中所述，抽象局部化 $L_{\underline{S}^{-1}}R$（若存在）通常并没有理由具有简洁的描述。尽管如此，它与几何不动点的相容性良好，下面我们将对此加以说明。

观察 4.1. 设 $\underline{S} \subseteq \underline{\pi}_0 R$ 是某个 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$ 中的乘法 G–子集。回想一下，例如由 [MNN17 的推论 6.10、定理 6.11] 可知，我们有一个松弛对称幺半布斯菲尔德局部化 $\Phi^G\colon \mathrm{Sp}_G \rightleftharpoons \mathrm{Sp} : \Xi^G$，它进而诱导出一个布斯菲尔德局部化 $\Phi^G\colon \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G) \rightleftharpoons \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}) : \Xi^G$。这里，对于 $X \in \mathrm{Sp}$，$\Xi^G X$ 是满足 $(\Xi^G X)^G \simeq X$ 且 $(\Xi^G X)^H \simeq 0$ 的 G–谱，其中 $H \lneq G$。经典地，这也写作 $\widetilde{E\mathcal{P}} \otimes X$，其中 $\mathcal{P}$ 是 G 的真子群族。我们断言，由此得到的等价 $\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, \Xi^G A) \simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp})}(\Phi^G R, A)$ 限制后仍是一个等价

$$\mathrm{Map}^{\underline{S}^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, \Xi^G A) \simeq \mathrm{Map}^{(\Phi^G S_G)^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp})}(\Phi^G R, A)$$

为此，既然 $\Phi^G \Xi^G \simeq \mathrm{id}$，我们知道 Φ^G 诱导了一个包含

$$\mathrm{Map}^{\underline{S}^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, \Xi^G A) \hookrightarrow \mathrm{Map}^{(\Phi^G S_G)^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp})}(\Phi^G R, A)$$

要证明这甚至是一个等价，假设我们有 $\varphi\colon \Phi^G R \to A$，它将 $\Phi^G S_G \subseteq \pi_0 \Phi^G R$ 变为可逆。其伴随映射 $\overline{\varphi}\colon R \to \Xi^G A$ 由以下复合映射给出

$$\overline{\varphi}\colon R \xrightarrow{\eta} \Xi^G \Phi^G R \xrightarrow{\Xi^G \varphi} \Xi^G A$$

其中，伴随单位 η 是一个 $\mathbb{E}_\infty$–环映射，并将 S_G 中的元素映至 $\Phi^G S_G$ 中的元素。因此，$\overline{\varphi}$ 必定将 S_G 中的所有元素变为可逆。此外，由于对于 $H \lneq G$，$(\Xi^G A)^H$ 等价于零环，映射 $\mathrm{Res}^G_H \overline{\varphi}\colon \mathrm{Res}^G_H R \to \mathrm{Res}^G_H \Xi^G A \simeq 0$ 显然会将所有元素映至单位，因此总而言之，$\overline{\varphi}$ 确实将 $\underline{S}$ 中的元素变为可逆，证毕。

命题 4.2. 设 $R \in \mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)$，$\underline{S} \subseteq \underline{\pi}_0 R$ 为一个乘法子集，并假设 $L_{\underline{S}^{-1}} R$ 存在。那么典范映射 $\Phi^G R \to \Phi^G L_{\underline{S}^{-1}} R$ 诱导一个等价 $(\Phi^G S_G)^{-1} \Phi^G R \simeq \Phi^G L_{\underline{S}^{-1}} R$。

证明。令 $A \in$ 谱上的交换代数范畴。于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp})}(\Phi^G L_{\underline{S}^{-1}} R, A) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(L_{\underline{S}^{-1}} R, \Xi^G A) \\
&\simeq \mathrm{Map}^{\underline{S}^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp}_G)}(R, \Xi^G A) \\
&\simeq \mathrm{Map}^{(\Phi^G S_G)^{-1}}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp})}(\Phi^G R, A) \\
&\simeq \mathrm{Map}_{\mathrm{CAlg}(\mathrm{Sp})}((\Phi^G S_G)^{-1} \Phi^G R, A)
\end{aligned}$$

其中第三个等价来自观察4.1。 □

注 4.3。 令 $M \in$ 交换幺半群$(\mathcal{S}_G)$。我们断言 $\Phi^G \pi^G_M = \pi_{M^G} \subseteq \pi_0 \mathbb{S}[M^G]$ 其中 π_{M^G} 是非等变赫维茨映射 $\pi_0 M^G \to \pi_0 \mathbb{S}[M^G]$ 的像。由此，根据命题4.2 可知

$$\Phi^G(\underline{\pi}_M^{-1} \mathbb{S}_G[M]) \simeq (\pi_{M^G})^{-1} \mathbb{S}[M^G]$$

因此，应用 Φ^G 便可将定理 3.3 (i) 化为经典群完备化定理的形式，例如见 [Nik17，定理 1]。为证明这一断言，我们要证明包含 $\Phi^G \pi^G_M \subseteq \pi_{M^G}$ 是满射。根据 Φ^G 的定义性质之一，我们知道存在一个交换方块

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S}_G & \xrightarrow{\mathbb{S}_G[-]} & \mathrm{Sp}_G \\
{\scriptstyle (-)^G}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi^G} \\
\mathcal{S} & \xrightarrow{\mathbb{S}} & \mathrm{Sp}
\end{array}$$

由此得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \pi_0^G M = \pi_0 \mathrm{Map}_{\mathcal{S}_G}(*, M) & \xrightarrow{\mathbb{S}_G[-]} & \pi_0^G \mathbb{S}_G[M] = \pi_0 \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}_G}(\mathbb{S}_G, \mathbb{S}_G[M]) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \Phi^G \\ \pi_0(M^G) = \pi_0 \mathrm{Map}_{\mathcal{S}}(*, M^G) & \xrightarrow{\mathbb{S}[-]} & \pi_0 \mathbb{S}[M^G] = \pi_0 \mathrm{Map}_{\mathrm{Sp}}(\mathbb{S}, \mathbb{S}[M^G]) \end{array}$$

这意味着 $\Phi^G \pi_M^G \subseteq \pi_{M^G}$ 是满射，正如所需。

接下来，我们来说明一个一般玩具情形，以展示定理可能的用途。这一做法是其（标准）非等变类比的直接推广。

命题 4.4（等变单连通同调怀特海德定理）。设有一个 G–空间之间的映射 $f\colon X \to Y$，它诱导出一个等价 $\mathsf{S}_G f\colon \mathsf{S}_G[X] \to \mathsf{S}_G[Y]$。再假设 X、Y都是 G–单连通的（即，对所有 $H \leq G$，X^H和 Y^H 都是单连通的）。那么映射 $f\colon X \to Y$原本就是一个 G–等价。

证明。要证明这一点，我们需要证明对所有不动点都有等价。因此，设 $H \leq G$。对等价 $\mathsf{S}_G f$ 应用 H–几何不动点 Φ^H，得到一个等价 $\Phi^H \mathsf{S}_G f \simeq \mathsf{S}[f^H]\colon \mathsf{S}[X^H] \xrightarrow{\simeq} \mathsf{S}[Y^H]$。于是，根据普通单连通同调怀特海德定理，空间之间的映射 $f^H\colon X^H \to Y^H$ 是一个等价，证毕。

□

于是，我们的定理 3.3 有望与此结合，按如下方式使用。假设我们有一个 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群之间的映射 $N \to \Omega BM$，其中我们已经了解 $\mathsf{S}_G[N]$，且 ΩBM 和 N 是 G–单连通的。由于该定理给出了 $\mathsf{S}_G[\Omega BM]$的公式，我们或许可以借此证明 $\mathsf{S}_G[N] \to \mathsf{S}_G[\Omega BM]$ 是一个等价。若此结论成立，那么根据上述等变怀特海德命题，我们可以推得$N \to \Omega BM$ 是一个等价，从而用 N计算 ΩBM。

当然，这个玩具情形或许不太适用，因为一般而言，要求 G–单连通并不合理。我们提出这一情形，只是想展示一个模板，在特定情况下，其他变体或许能从中受益。

最后，我们以记录一个庞大的、标准的潜在有趣例子来源，作为本文正文的结束：可供考察的 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–空间。

例 4.5. 满足定理 3.3 (ii) 的局部化公式的 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–空间十分常见。一个丰富的来源是配备了 G–作用的小型半加性 ∞–范畴（包括稳定的 ∞–范畴），即 $\mathrm{Fun}(BG, \mathrm{Cat}_\infty^\oplus)$ 中的对象。若 $\mathcal{C}$ 是这样一个实例，那么 $\{\mathcal{C}^{hH}\}_{H \leq G}$ 就构成一个 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–范畴。换言之，它是 $\mathrm{Mack}_G(\mathrm{Cat}_\infty^\oplus)$ 中的一个对象（关于这一点的解释，参见 [BGS20 §8] ）。接着取其群胚核，便得到一个 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–空间 $\{(\mathcal{C}^{hH})^\simeq\}_{H \leq G} \in \mathrm{Mack}_G(\mathcal{S}) \simeq$ 交换幺半群$_G(\underline{\mathcal{S}}_G)$。事实上，对于任意 G–半加性 G–范畴，通过取群胚核来构造 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–空间的这一过程都适用。

属于这一模板的具体例子包括：在诸如有限生成投射 R–模的范畴 Proj_R for $R \in$ 交换环范畴上赋予平凡的 G–作用，以及在诸如完美 A–模的范畴 Perf_A for $A \in$ 谱上的交换代数范畴上赋予平凡作用。这些给出交换幺半群中的对象 $\{\mathrm{Map}(BH, \mathrm{Proj}_R^\simeq)\}_{H \leq G}$ 和$\{\mathrm{Map}(BH, \mathrm{Perf}_A^\simeq)\}_{H \leq G}$，对它们作群完备化便得到所谓的 Swan 等变 K-理论。以这种方式得到的熟知的 G–谱例子包括 ku_G 和 ko_G。另一个有趣的、带有 G–作用的半加性范畴来源是域的有限伽罗瓦扩张 $K \subseteq L$。在此情形下，$\mathrm{Vect}_L^{\mathrm{fd}}$上的 G–伽罗瓦作用给出 G–$\mathbb{E}_\infty$–幺半群 G–空间 $\{(\mathrm{Vect}_{L^H}^{\mathrm{fd}})^\simeq\}_{H \leq G}$。

A. 等变笛卡尔对称幺半结构中的代数

我们将在本附录中证明这一公认结果：$\mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{C}}^{\amalg})$；我们在设定2.4末尾解释了对此结果的直观理解。该证明将直接——尽管略显繁琐——改编自 Lurie 在 [Lur17, Prop. 2.4.2.5] 中的证明，其组织方式则依照 Chu 和 Haugseng [CH22] 以所谓笛卡尔模式的语言所作的整理。Lurie 证明的核心思想是，笛卡尔对称幺半结构有一个良好的模型，它嵌入一个更大的范畴中，而后者又具有一个便于映入其中的泛性质。鉴于篇幅所限，且这是一项必然涉及技术细节的结果，我们假设读者对参数化同伦论的形式体系及其基础已有一定了解（参见 [Sha23; Nar16]），并熟悉相关的分解系统和运算子理论，后者见 [Sha22, 第3节、第4] 节以及 [NS22, §2.1-§2.3]。不过，为便于理解，我们仍会回顾一些基础内容并给出精确的参考文献。最后还需指出，本文的论述极为简略、力求精简，仅满足我们的需要；沿着 [CH22]中所考虑的更一般层次研究参数化笛卡尔模式的概念，或许会很有意思。

我们首先要建立 G–笛卡尔模式及其相应幺半群的基础理论。

记号 A.1. 为简化记号，采用以下约定将十分方便：对于一个 $\underline{\mathcal{C}}$ a G–范畴 $H \leq G$ 和一个 H–对象 $X \in \mathcal{C}_H$ （它也可以等价地视为一个 H–函子 $\underline{*} \to \mathrm{Res}^G_H \underline{\mathcal{C}}$），

- 我们记作 $\underline{\mathcal{C}}_H$ 表示 H–范畴 $\mathrm{Res}^G_H \underline{\mathcal{C}}$。请注意，这与不符号约定$\mathcal{C}_H$ （设定 2.4）并不冲突。因此，我们也将 –对象记作 $X \in \underline{\mathcal{C}}_H$,
- 我们将 $\underline{\mathcal{C}}_{X/}$ 记作 H–范畴 $(\underline{\mathcal{C}}_H)^{X/}$,
- 对于一个 G–函子 $\underline{\mathcal{D}} \to \underline{\mathcal{C}}$，我们将 $\underline{\mathcal{D}}_X$ 记作 H–范畴 $\underline{*} \times_{\underline{\mathcal{C}}_H} \underline{\mathcal{D}}_H$，其中 $\underline{*} \to \underline{\mathcal{C}}_H$是选取 X的 H–函子。

对于映射 $f\colon V \to W$中的 $\mathcal{O}_G$，记 $f^*\colon \mathcal{C}_W \to \mathcal{C}_V$为限制函子。若它们存在，记 $f_!, f_*\colon \mathcal{C}_V \to \mathcal{C}_W$为与 f分别对应的指标余积和指标积（注意，在 [Nar16] 中， $f_!, f_*$的记号分别为 $\coprod_f, \prod_f$）。在此情形下，有 $f_! \dashv f^* \dashv f_*$。

定义 A.2 (“[CH22，定义 2.1]”)。 设 $\underline{\mathcal{O}} \in \mathrm{Cat}_G$。一个 G–代数模式结构 $\underline{\mathcal{O}}$ 是 G–分解系统（即一个在限制函子下封闭的纤维逐点分解系统，参见 [Sha22，定义 3.1]） $\underline{\mathcal{O}}$ 连同一组称为初等对象的对象。我们将左类（分别为右类）称为纤维逐点惰性（分别为纤维逐点活性）态射。代数模式之间的一个态射是一个 G–函子 G，它保持纤维逐点惰性态射、纤维逐点活性态射以及初等对象。记 $\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{int}}$ 为仅包含纤维逐点惰性态射的 $\underline{\mathcal{O}}$ 子范畴，并记 $\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{el}} \subseteq \underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{int}}$ 为由初等对象和纤维逐点惰性态射构成的全子范畴。

记号 A.3. 固定 $H \leq G$ 和 $O \in \underline{\mathcal{O}}_H$ 一个 H–对象。记 $\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{el}}_{O/} \coloneqq \underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{el}} \times_{\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{int}}} \underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{int}}_{O/}$ 为从 O 到初等对象的纤维逐点惰态映射范畴，其态射为这些对象之间的纤维惰性映射。

记号 A.4. 我们沿用 Chu 和 Haugseng 在 [CH21中的记号；CH22] 并用 $\rightarrowtail$表示惰态映射，用$\rightsquigarrow$表示活跃映射。

例 A.5. 回顾 [NS22，定义 2.1。2] 有限带基点的 G–集合的范畴 $G\mathrm{Fin}_*$。它在层级 H 处由 $\underline{\quad}$ $\mathrm{Fun}(BH, \mathrm{Fin}_*)$ 给出。也可以将其明确描述如下：

层级 H 中的对象（对于某个 $H \leq G$ ）形式为 $[U \to G/H]$ ，其中 U 是一个有限 G–集合，而从 $[U \to G/H]$ 到 $[W \to G/K]$ 的态射形式为

$$\begin{array}{ccccc} U & \longleftarrow & Z & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \longleftarrow & G/K & = & G/K \end{array}$$

其中所有涉及的映射都是 G–等变的，且诱导映射 $Z \to U \times_{G/H} G/K$ 是直和项包含。

这是 G–代数模式的典型例子，因为代数模式在 Cat 中对极限封闭$_\infty$ ，见 [CH21，推论 5。5]具体而言，当 $K = H$ 时，纤维惰性映射是指 $Z \to W$ 为等价的映射，而纤维主动映射是指诱导映射 $Z \to U \times_{G/H} G/K$ 为等价的映射（参见[NS22，定义 2.1。3]）；初等对象是每个 $[G/H \xrightarrow{=} G/H]$ 在层级 H 处的对象。 $H \leq G$

根据 [CH21，定义 6。1]，我们可以给出如下：

定义 A.6. 若态射 $f\colon \underline{\mathcal{O}} \to \underline{\mathcal{P}}$ 是 G–代数模式的态射，并且对于每个 $H \leq G$ 以及 $\mathcal{P}_H$ 中的纤维逐点主动态射 $\phi\colon P \to f(O)$，从 ϕ 到 $\mathcal{O}_H$ 中纤维逐点主动态射 $O' \to O$ 的提升空间都是可缩的，则称该态射具有纤维主动态射的唯一提升。

由于 G–余始性是一个纤维逐点命题，这是[Sha23，定理 6.7]且定义 A.6 也具有纤维逐点性质，因此我们可立即由 [CH21，引理 6.2] 推出以下结论：

引理 A.7. G–代数模式之间的态射 $f\colon \underline{\mathcal{O}} \to \underline{\mathcal{P}}$ 具有纤维主动态射的唯一提升，当且仅当对每个 $H \leq G$ 以及所有 $P \in \mathcal{P}_H$，函子 $\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{int}}_{P/} \to \underline{\mathcal{O}}_{P/}$ 都是G–余始的。

定义 A.8（“[CH22，定义 2.6]”）。 G–笛卡尔模式是一个 G–代数模式 $\underline{\mathcal{O}}$，配备一个 G–代数模式的态射 $|-|\colon \underline{\mathcal{O}} \to \mathbf{Fin}_*$，使得对每个 $H \leq G$和 $O \in \underline{\mathcal{O}}_H$，诱导映射 $\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{el}}_{O/} \to \mathbf{Fin}^{\mathrm{el}}_{*,\,|O|/}$ 都是等价。 G–笛卡尔模式之间的态射是一个位于 $\mathbf{Fin}_*$ 上的 G–代数模式态射。

构造 A.9。 回顾 特征态射 ，它们来自 [NS22，定义 2.1。6],即 Fin 中形如以下形式的映射$_*$ ：

$$\begin{array}{ccccc} U & \longleftarrow & W & = & W \\ \downarrow & & \| & & \| \\ G/H & \xleftarrow{w} & W & = & W \end{array}$$

其中 $W = G/K$是 G中的一个轨道。 U我们将此类映射记作 $\chi_{[W \subseteq U]}$。应将它们视为参数化情形中 Segal 映射的类比 ρ^i(参见 [Lur17，注 2.0.0。2])。对于任意 G–函子 $F\colon \mathbf{Fin}_* \to \underline{\mathcal{C}}$，其中 $\underline{\mathcal{C}}$ 具有有限指标积，映射 $\chi_{[W \subseteq U]}$ 会诱导出一个 H中对象之间的典范映射 $\underline{\mathcal{C}}$

$$F([U \to G/H]) \longrightarrow w_* F([W \xrightarrow{=} W])$$

因为我们有

$$\begin{aligned} F(\chi_{[W \subseteq U]}) \in \mathrm{Map}_{\underline{\mathcal{C}}}\Big(F([U \to G/H]), F([W \xrightarrow{=} W])\Big) &\simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_K}\Big(w^* F([U \to G/H]), F([W \xrightarrow{=} W])\Big) \\ &\simeq \mathrm{Map}_{\mathcal{C}_H}\Big(F([U \to G/H]), w_* F([W \xrightarrow{=} W])\Big) \end{aligned}$$

因为 $\underline{\mathcal{C}}$ 具有指标积。

定义 A.10 （“[CH22，定义 2.9]”）。设 $\underline{\mathcal{O}}$ 为一个 G–笛卡尔模式，并假设 $\underline{\mathcal{C}}$ 具有有限指标积。若对于每个$[U \to G/H] \in \mathrm{Fin}_{*H}$ 以及位于 $[U \to G/H]$之上的 $O \in \underline{\mathcal{O}}_H$，记 $U = \coprod_{j=1}^{n} U_j$ 为~~G~~–轨道分解，$u_j \colon U_j \to G/H$ 为结构映射，并记由等价 $\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{el}}_{O/} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Fin}^{\mathrm{el}}_{*,\,|O|/}$ 所赋予的、满足O_j 位于 $[U_j = U_j]$ 之上的 $\chi_{[U_j \subseteq U]} \colon O \to O_j$，则称一个 G–函子 $F \colon \underline{\mathcal{O}} \to \underline{\mathcal{C}}$ 为一个 $\underline{\mathcal{O}}$–幺半群；其中，H–对象在 $\underline{\mathcal{C}}$中的典范映射

$$F(O) \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} u_{j*} F(O_j)$$

是一个等价。根据 G–笛卡尔模式条件，这等价于以下说法：记 $j \colon \underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{el}} \hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{int}}$ 为包含映射，则 F 是一个 $\underline{\mathcal{O}}$–幺半群，当且仅当典范映射$F|_{\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{int}}} \to j_* j^*(F|_{\underline{\mathcal{O}}^{\mathrm{int}}})$是一个等价。我们将 $\underline{\mathcal{C}}$ 中 $\underline{\mathcal{O}}$–幺半群构成的全子范畴记作 $\mathrm{Mon}_{\underline{\mathcal{O}}}(\underline{\mathcal{C}}) \subseteq \mathrm{Fun}_G(\underline{\mathcal{O}}, \underline{\mathcal{C}})$。

注记 A.11。 在 $\underline{\mathcal{O}} = \mathrm{Fin}_*$的情形下，通过将定义与 [Nar16，定义 5。9], 作简单比较可知，$\mathrm{Mon}^{\underline{\mathrm{Fin}}_*}(\underline{\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{C}})$，其中 $\mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{C}})$ 的含义与本文正文中的讨论一致。

与 [CH21，命题 6。3], 中完全相同的论证在此处同样适用，并可得出以下结论。该论证仅用到关于 Kan 延拓的一些形式性质，例如沿全忠实函子作 Kan 延拓时的全忠实性 [Sha23，命题 10。6]以及引理 A.7:

引理 A.12. 若 $f \colon \underline{\mathcal{O}} \to \underline{\mathcal{P}}$ 是一个 G–代数模式的态射，且具有唯一的纤维逐点主动提升，则右 Kan 延拓 $f_* \colon \mathrm{Fun}_G(\underline{\mathcal{O}}, \underline{\mathcal{C}}) \to \mathrm{Fun}_G(\underline{\mathcal{P}}, \underline{\mathcal{C}})$ 限制为 $f_* \colon \mathrm{Mon}_{\underline{\mathcal{O}}}(\underline{\mathcal{C}}) \to \mathrm{Mon}_{\underline{\mathcal{P}}}(\underline{\mathcal{C}})$。

接下来，我们着手构造 Lurie 模型的等变推广 [Lur17，命题 2.4.1。5] ，适用于具有有限指标积的 G–范畴。

构造 A.13. 令 $\underline{\Gamma^{\times}}$ 表示 $\mathrm{Fin}_*^{\Delta^1}$ 中由纤维逐点惰性态射张成的全子范畴。为方便起见，将 $[U \rightarrowtail V]_{G/H} \in \underline{\Gamma^{\times}}_H$ 记作这个 H–对象

$$\begin{array}{ccccc} U & \longleftarrow & Z & \xrightarrow{\simeq} & V \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G/H & = & G/H & = & G/H \end{array}$$

由 [Sha22，命题 3.5 (1)], 可知，$\mathrm{ev}_0 \colon \underline{\Gamma^{\times}} \longrightarrow \mathrm{Fin}_*$ 是一个 G–笛卡尔纤维化。根据该结果的证明可知，对于 Fin_* 中的一个 H–映射 $f \colon U \to V$，与该 G–笛卡尔纤维化相关联的 H–函子 $f^! \colon \underline{\Gamma^{\times}}_{[V \to G/H]} \to \underline{\Gamma^{\times}}_{[U \to G/H]}$ 具体定义如下：对于 $K \leq H$，以及 $\underline{\Gamma^{\times}}_{[V \to G/H]}$ 中的一个 K–对象 $[V \rightarrowtail W]_{G/K}$，$K$–对象 $f^!([V \rightarrowtail W]_{G/K}) \in \underline{\Gamma^{\times}}_{[U \to G/H]}$ 由下图中唯一的虚线纤维逐点惰性映射给出

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \rightarrowtail \downarrow & & \rightarrowtail \downarrow \\ W' & \rightsquigarrow & W \end{array} \tag{6}$$

借助唯一的纤维逐点惰性-主动分解得到。

另请注意，对于 $[U \to G/H] \in \mathrm{Fin}_{*H}$，$\underline{\Gamma^{\times}}_{[U \to G/H]}$ 是一个 H–范畴，并且对于任意 $K \leq H$，在 H/K 上的纤维由 K–集合的 H–子集所成偏序集的对偶给出U （参见 [Lur17，构造 2.4.1。4]）：这是因为纤维惰性映射选出了 U中的轨道。

构造 A.14（“[Lur17，构造 2.4.1。4]”）。将 [Sha23，定理 9.3 (2)]或 [Sha22，推论 4.3] 应用于 G–笛卡尔纤维化 $\mathrm{ev}_0\colon \underline{\Gamma^{\times}} \longrightarrow \mathrm{Fin}_*$ 以及 G–余笛卡尔纤维化$\underline{\mathcal{C}} \times \mathrm{Fin}_* \to \mathrm{Fin}_*$，我们得到一个 G–余笛卡尔纤维化 $\underline{\overline{\mathcal{C}}^{\times}} \to \mathrm{Fin}_*$。根据 [Sha22，定理 4.9], ，这一构造满足泛性质，尤其可推出

$$\underline{\mathrm{Fun}}_{/\underline{\mathrm{Fin}}_*}(\underline{\mathrm{Fin}}_*, \underline{\overline{\mathcal{C}}^{\times}}) \simeq \underline{\mathrm{Fun}}(\underline{\Gamma^{\times}}, \underline{\mathcal{C}}) \tag{7}$$

此外，根据[Sha23，命题 9，7],我们有

$$\underline{\overline{\mathcal{C}}^{\times}}_{[U\to G/H]} \simeq \underline{\mathrm{Fun}}_{[U\to G/H]}\big(\underline{\Gamma^{\times}}_{[U\to G/H]}, (\underline{\mathcal{C}} \times \underline{\mathrm{Fin}}_*)_{[U\to G/H]}\big) \simeq \underline{\mathrm{Fun}}(\underline{\Gamma^{\times}}_{[U\to G/H]}, \underline{\mathcal{C}}_H)$$

若 $\underline{\mathcal{C}}$ 具有所有有限指标积，则我们将 $\underline{\mathcal{C}^{\times}}$ 定义为 $\underline{\overline{\mathcal{C}}^{\times}}$ 的全子范畴，其在 $[U \to G/H]$ 上的对象是满足以下条件的 H–函子 $F\colon \underline{\Gamma^{\times}}_{[U\to G/H]} \to \underline{\mathcal{C}}_H$：对于每个 $K \le H$以及带有 G–轨道分解 $V = \coprod_{j=1}^n V_j$ 和结构映射 $v_j\colon V_j \to G/K$的 K–对象 $[U \rightarrowtail V]_{G/K}$，映射

$$F([U \rightarrowtail V]_{G/K}) \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} v_{j*}F([U \rightarrowtail V \rightarrowtail V_j]_{V_j}) \tag{8}$$

由特征映射 $\chi_{[V_j\subseteq V]}\colon V \rightarrowtail V_j$ 诱导的映射是一个等价。

现在注意，记 $U = \coprod_j U_j$ 为带有结构映射$u_j\colon U_j \to G/H$的 G–轨道分解，则我们有由 U的单个G–轨道组成的全子范畴 $\coprod_j u_{j!}\underline{*} \subseteq \underline{\Gamma^{\times}}_{[U\to G/H]}$。直接展开定义可知，$\underline{\mathcal{C}^{\times}}_{[U\to G/H]} \subseteq \underline{\overline{\mathcal{C}}^{\times}}_{[U\to G/H]}$ 可识别为全子范畴

$$\prod_j u_{j*}u_j^*\underline{\mathcal{C}} \simeq \underline{\mathrm{Fun}}(\coprod_j u_{j!}\underline{*}, \underline{\mathcal{C}}) \subseteq \underline{\mathrm{Fun}}(\underline{\Gamma^{\times}}_{[U\to G/H]}, \underline{\mathcal{C}}_H)$$

其中该包含由右 Kan 延拓给出（参见[Lur17，命题 2.4.1.5 (4)]的证明）。这尤其意味着我们有一个识别$\underline{\mathcal{C}^{\times}}_{[U\to G/H]} \simeq \prod_j \mathcal{C}_{U_j}$。

注记 A.15。根据 [Sha22，推论 4。3] 并利用常值 G–余笛卡尔纤维化的余笛卡尔推前函子 $\underline{\mathcal{C}} \times \mathrm{Fin}_* \to \mathrm{Fin}_*$ 恰为恒等函子，我们看到，对于 H– 对象之间的一个态射 $f\colon U \to V$in Fin_{*H}，其在 G–余笛卡尔纤维化 $\underline{\overline{\mathcal{C}}^{\times}} \to \mathrm{Fin}_*$ 上的相应余笛卡尔推前函子如下所示

$$\underline{\mathrm{Fun}}_H(\underline{\Gamma^{\times}}_{[U\to G/H]}, \underline{\mathcal{C}}_H) \longrightarrow \underline{\mathrm{Fun}}_H(\underline{\Gamma^{\times}}_{[V\to G/H]}, \underline{\mathcal{C}}_H) \quad :: \quad F \mapsto F \circ f^!$$

其中 $f^!\colon \underline{\Gamma^{\times}}_{[V\to G/H]} \to \underline{\Gamma^{\times}}_{[U\to G/H]}$ 是构造 A.13中描述的 H–函子。

命题 A.16 (“[Lur17，命题 2.4.1.5]”)。设 $\underline{\mathcal{C}}$ 为一个具有有限指标积的 G–范畴。复合 $\underline{\mathcal{C}^{\times}} \subseteq \underline{\overline{\mathcal{C}}^{\times}} \to \mathrm{Fin}_*$ 是 G–范畴 G上的一个 $\underline{\mathcal{C}}$–对称幺半结构。

证明。根据 G–对称幺半范畴[NS22，定义 2.1.7 和定义 2.2。3],的定义，首先注意到，只需证明复合映射是一个 G–余笛卡尔纤维化，并且与任意轨道分解相关联的特征映射 $U = \coprod_{j=1}^n U_j$ 诱导等价 $\mathcal{C}^{\times}_{[U\to G/H]} \xrightarrow{\simeq} \prod_{j=1}^n \mathcal{C}_{U_j}$，因为这两个条件合在一起可确保 [NS22，定义 2.1.7（3）] 成立。第二点已在构造 A.14末尾处理，因此我们只需证明复合映射确实是一个 G–余笛卡尔纤维化。

更确切地说，我们需要证明条件（8）在备注 A.15中描述的推前函子作用下保持不变。为此，设 $F \in$ 函子$_H(\underline{\Gamma}^{\times}_{[U\to G/H]}, \underline{\mathcal{C}}_H)$ 满足条件（8）。我们需要证明，对任意 $K \leq H$ 以及任意 $[V \rightarrowtail W]_{G/K} \in \underline{\Gamma}^{\times}_{[V\to G/H]}$具有结构映射 $w_j\colon W_j \to G/K$时，映射

$$Ff^!([V \rightarrowtail W]_{G/K}) \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} w_{j*}Ff^!([V \rightarrowtail W \rightarrowtail W_j]_{W_j})$$

是一个等价。

为设定记号，记 $f^{-1}W_j \subseteq U$ 为原像（可能为空），记 $f^{-1}W_j = \sqcup_{i=1}^{n_j} W_{ji}$ 为其轨道分解。根据（6），$f_!$ 是由左侧方形中的左惰性映射计算得到的：

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sqcup_j f^{-1}W_j & \overset{\alpha}{\rightsquigarrow} & W \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} W_{ji} & \overset{\alpha_{ji}}{\rightsquigarrow} & W_j \\ & {\scriptstyle w_{ji}}\searrow & \downarrow{\scriptstyle w_j} \\ & & G/K \end{array}$$

再结合右侧三角形中标记出的相应结构映射。利用右 Kan 延拓的可复合性，$w_{ji*} \simeq w_{j*}\alpha_{ji*}$，现在只需考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} Ff^!([V \rightarrowtail W]_{G/K}) & \longrightarrow & \prod_{j=1}^{n} w_{j*}Ff^!([V \rightarrowtail W_j]_{W_j}) = \prod_{j=1}^{n} w_{j*}F([U \rightarrowtail \sqcup_{i=1}^{n_j} W_{ji}]_{W_j}) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\ & & \prod_{j=1}^{n} w_{j*} \prod_{i=1}^{n_j} \alpha_{ji*}F([U \rightarrowtail W_{ji}]_{W_{ji}}) \\ & & \| \\ F([U \rightarrowtail \sqcup_j \sqcup_{i=1}^{n_j} W_{ji}]_{G/K}) & \xrightarrow{\simeq} & \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n_j} w_{ji*}F([U \rightarrowtail W_{ji}]_{W_{ji}}) \end{array}$$

其中这些等价由我们关于 F 的假设得出。因此，顶部的水平映射也是一个等价，证毕。 □

我们的下一个目标是证明 $\underline{\Gamma}^{\times}$ 可以赋予 G–笛卡尔图式的结构，并在引理 A.20 中证明，其幺半群理论等价于与 $\mathbf{Fin}_*$相关联的幺半群理论。

引理 A.17。 $\underline{\Gamma}^{\times} \subseteq \mathbf{Fin}_*^{\Delta^1}$ 上存在一个自然的分解系统，其中纤维逐点惰性（分别为纤维逐点活性）的态射，正是逐点纤维惰性（分别为逐点纤维活性）的态射。

证明。 [CH22，引理 5 中完全相同的论证8] 在此同样适用，因为该论证只用到了惰性态射的可合成性以及纤维逐点惰性-主动分解的唯一性，而这两点在 $\mathbf{Fin}_*$中都成立。 □

构造 A.18 (“[CH22, 注 5.11]”)。 我们赋予 $\underline{\Gamma}^{\times}$ 一个 G–代数模式结构，使用上述分解系统，并取 $[G/H = G/H]_{G/H}$ 对所有 $H \leq G$ 作为初等对象。此外，不难看出，映射 $\mathbf{ev}_1$: $\underline{\Gamma}^{\times} \to \mathbf{Fin}_*$ 赋予 $\underline{\Gamma}^{\times}$ 一个 G–笛卡尔模式结构。具体来说，对于任意 H–对象 $[U \rightarrowtail V]_{G/H}$ 属于 $\underline{\Gamma}^{\times}$，到一个初等对象的任意惰性映射 $[W = W]_W$

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrowtail & W \\ \downarrow & & \| \\ V & \rightarrowtail & W \end{array}$$

完全由惰性映射 $V \rightarrowtail W$ 决定，因此，$\underline{\Gamma^{\times}}$ $(^{\mathrm{el}}_{[U\rightarrowtail V]_{G/H}} \xrightarrow{\mathrm{ev}^{1}} \mathrm{Fin}_*^{\mathrm{el}}$, $_{V}$/在 G–笛卡尔结构定义中的映射确实是一个等价。

构造 A.19。 设 $i{:}\mathrm{Fin}_* \hookrightarrow \underline{\Gamma^{\times}}$是如下函子：对于任意有限 H–集合 U，$H \leq G$将其映射为 $[U \xrightarrow{=} U]_{G/H}$。换言之，它是沿着包含 $\{1\} \hookrightarrow \Delta^1$ 的右 Kan 延拓，因此根据 [Sha23，命题 10，6]它是全忠实的。这立即可见它是 G–笛卡尔模式的态射。由 [CH22，注 513], 中的同一论证——该论证只使用了 $\underline{\Gamma^{\times}}$中纤维逐点惰性-主动分解的唯一性——可知， i 具有定义 A.6意义下纤维逐点主动态射的唯一提升。

现在注意，函子 $M{:}\,\underline{\Gamma^{\times}} \to \underline{\mathcal{C}}$ 是一个 $\underline{\Gamma^{\times}}$–幺半群（定义 A.10 ）当且仅当对于任意 H–对象 $[U \rightarrowtail W]_{G/H}$（属于 $\underline{\Gamma^{\times}}$），其具有轨道分解 $W = \coprod_{j=1}^{n} W_j$ 以及结构映射 $w_j{:}\ W_j \to G/H$， H–对象的典范映射

$$M([U \rightarrowtail W]_{G/H}) \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} w_{j*} M([W_j = W_j]_{W_j}) \tag{9}$$

是一个等价。将这一描述以及引理 A.12 作为相应的替换， [CH22，引理 514] 的证明稍作调整后，在我们的设定中 同样成立，从而得到：

引理 A.20. 设 $\underline{\mathcal{C}}$ 具有有限指标积。伴随 $i^*{:}\,\mathrm{Mon}_{\underline{\Gamma^{\times}}}(\underline{\mathcal{C}}) \rightleftharpoons \mathrm{Mon}^{\underline{\mathrm{Fin}_*}}(\underline{\mathcal{C}}) : i_*$ 是一个等价。

最后，我们将迄今讨论的幺半群概念与代数的概念联系起来，下面回顾后者。

回顾 A.21. 设 $\underline{\mathcal{C}^{\otimes}} \to \mathrm{Fin}_*$ 是一个 $\underline{G}$–对称幺半范畴（例如参见[NS22, 定义 2.2.3]）。 G–交换代数的范畴 $\mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{C}^{\otimes}})$ 定义为 $\mathrm{Fun}^{\mathrm{int}}_{/\underline{\mathrm{Fin}_*}}(\mathrm{Fin}_*, \underline{\mathcal{C}^{\otimes}})$，也就是说，它是由将惰性态射映为 Fin_*–余笛卡尔态射的 ~~Fin_*–~~截面组成的范畴（定义参见 [~~NS22~~, 定义 2.2.~~1~~3~~]~~ ）。现在注意， Fin_* 中的任一惰性态射 ~~(~~参见[NS22, 定义 2.1.3])

$$\begin{array}{ccccc} U & \longleftarrow & Z & \xrightarrow{\simeq} & W \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \longleftarrow & G/K & = & G/K \end{array}$$

可以分解为两个惰性态射的复合

$$\begin{array}{ccccc} U \times_{G/H} G/K & \longleftarrow & Z & \xrightarrow{\simeq} & W \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G/K & = & G/K & = & G/K \end{array} \quad \circ \quad \begin{array}{ccccc} U & \longleftarrow & U \times_{G/H} G/K & = & U \times_{G/H} G/K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G/H & \longleftarrow & G/K & = & G/K \end{array}$$

其中左边的态射是纤维逐点的，也就是说，它位于 G/K上的纤维中。根据定义，任何G–函子 $A{:}\ \mathrm{Fin}_* \to \underline{\mathcal{C}^{\otimes}}$ ~~都~~必须将右侧类型的惰性态射映为 Fin_*– 余笛卡尔态射，因此，要求 A ~~属~~于 $\mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{C}^{\otimes}})$，等价于要求它将纤维逐点惰性态射映为 Fin_*–余笛卡尔态射。

下面的引理是对 [CH22，引理 5。15],的直接改写，它将成为连接幺半群理论与代数理论的桥梁。

引理 A.22。 在自然等价 函子$_{/\underline{\mathrm{Fin}_*}}(\mathrm{Fin}_*, \overline{\mathcal{C}^{\times}}) \simeq$ 函子$(\underline{\Gamma^{\times}}, \underline{\mathcal{C}})$ 来自 (7) 下，右侧的全子范畴 $\mathrm{Mon}_{\underline{\Gamma^{\times}}}(\underline{\mathcal{C}})$ 与左侧的 函子$^{\mathrm{int}}_{/\underline{\mathrm{Fin}_*}}(\mathrm{Fin}_*, \underline{\mathcal{C}^{\times}})$ 相对应。

证明。 根据回顾 A.21，函子 $F\colon \mathrm{Fin}_* \to \underline{\mathcal{C}^{\times}}$ 在 $\mathbf{Fin}_*$ 中属于 函子$^{\mathrm{int}}_{/\underline{\mathrm{Fin}_*}}(\mathrm{Fin}_*, \underline{\mathcal{C}^{\times}})$ 当且仅当 F 经由全子范畴因子化$\underline{\mathcal{C}^{\times}}$，且 F 将纤维逐点惰性态射映为余笛卡尔态射。我们可以用相应函子 $F'\colon \underline{\Gamma^{\times}} \to \underline{\mathcal{C}}$ 将这些要求表述为以下一对条件：对于任意 $H \leq G$ 和 H–对象 $[U \rightarrowtail W]_{G/H}$ 属于 $\underline{\Gamma^{\times}}$，

1. 写出轨道分解 $W = \coprod_{j=1}^{n} W_j$ 及其结构映射 $w_j\colon W_j \to G/H$，典范映射

$$F'([U \rightarrowtail W]_{G/H}) \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} w_{j*}F'([U \rightarrowtail W \rightarrowtail W_j]_{W_j})$$

是一个等价。

2. 对于每个 H–惰性映射 $Y \rightarrowtail U$ in $\underline{\mathrm{Fin}_*}$，态射

$$F'([Y \rightarrowtail U \rightarrowtail W]_{G/H}) \to F'([U \rightarrowtail W]_{G/H})$$

是一个等价。将纤维上的惰性映射送到余笛卡尔态射的这种重新诠释，同样可由注 A.15 得出。

另一方面， F' 是一个幺半群，若对任意 $H \leq G$ 和 H–对象 $[U \rightarrowtail W]_{G/H}$ in Fin_* 并使用上述记号，映射 (9) 是一个等价。要看出这与第一对条件等价，请注意我们有如下交换三角形

$$\begin{array}{ccc} F'([U \rightarrowtail W]_{G/H}) & \longrightarrow & \prod_{j=1}^{n} w_{j*}F'([U \rightarrowtail W_j]_{W_j}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \prod_{j=1}^{n} w_{j*}F'([W_j = W_j]_{W_j}) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F'([Y \rightarrowtail U \rightarrowtail W]_{G/H}) & \longrightarrow & F'([U \rightarrowtail W]_{G/H}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \prod_{j=1}^{n} w_{j*}F'([W_j = W_j]_{W_j}) & \end{array}$$

准备好这些要素后， [CH22，引理 5 的15]其余证明便可逐字照搬。 □

现在我们可以推出所需的等价：

命题 A.23. 设 $\underline{\mathcal{C}}$ 是一个具有有限指标积的 G–范畴。存在一个典范等价 $\mathrm{CMon}_G(\underline{\mathcal{C}}) \simeq \mathrm{CAlg}_G(\underline{\mathcal{C}^{\times}})$。

证明。 由引理 A.20 和引理 A.22立即得出$_G(\underline{\mathcal{C}^{\times}}) = \mathrm{Fun}^{\mathrm{int}}_{/\underline{\mathrm{Fin}_*}}(\mathrm{Fin}_*, \underline{\mathcal{C}^{\times}})$，并根据定义使用 CAlg。 □

参考文献

[Bar17] C. Barwick.《谱 Mackey 函子与等变代数 K 理论（I）》。载于：《Adv. Math.》304（2017），第 646–727 页。[BDG+16] C. Barwick、E. Dotto、S. Glasman、D. Nardin 和 J. Shah。《参数化高阶范畴论与高阶代数：一般性导论》。预印本见 arXiv:1608.03654（2016）。[BGS20] C. Barwick、S. Glasman 和 J. Shah。《谱 Mackey 函子与等变代数 K 理论，II》。载于：《Tunis. J. Math.》2，第 1 期（2020），第 97–146 页。

[CDH+20] B. Calm`es、E. Dotto、Y. Harpaz、F. Hebestreit、M. Land、K. Moi、D. Nardin、T. Nikolaus 和 W. Steimle。《稳定 ∞ 范畴的厄米 K-理论 II：配边范畴与可加性》。预印本见 arXiv:2009.07224（2020）。[CH21] H. Chu 和 R. Haugseng。《通过 Segal 条件实现同伦相干代数》。载于：《Adv. Math.》385（2021），第 107733 页。[CH22] H. Chu 和 R. Haugseng。《通过 Day 卷积构造自由代数》。载于：Algebr. Geom. Topol. 22（7）（2022），第 3401–3458 页。[CMN+20]D. Clausen、A. Mathew、N. Naumann 和 J. Noel。《谱 Mackey 函子与等变代数 K 理论，II》。即将发表于《Ann. Sci. Éc. Norm. Sup´ér.》（4）。（2020）。[GGN15] D. Gepner、M. Groth 和 T. Nikolaus。《乘法无限环空间机器的泛性质》。载于：Algebr. Geom. Topol. 15（2015），第 3107–3153 页。[GM97] J.P.C. Greenlees 和 J.P. May。《MU 模谱的局部化与完备化定理》。载于：《Ann. of Math.》（2）146（1997），第 509–544 页。[GR14] S. Galatius 和 O. Randal–Williams。《高维流形的稳定模空间》。载于：《Acta Math.》212（2014），第 257–377 页。[GR17] S. Galatius 和 O. Randal–Williams。《高维流形模空间的同调稳定性 II》。载于：《Ann. of Math.》（2）186（2017），第 127–204 页。[GS21] S. Galatius 和 G. Sz˝ucs。《等变配边范畴》。载于：《J. Topol.》14（1）（2021），第 215–257 页。[HH13] M. Hill 和 M. Hopkins。《等变乘法闭包》。预印本见 arXiv:1303.4479（2013）。[HHR16] M. Hill、M. Hopkins 和 D. Ravenel。《关于 Kervaire 不变量一的元素不存在性》。载于：《Ann. of Math.》（2）184（2016），第 1–262 页。[Hil22] K. Hilman。《真正等变厄米 K-理论中的范数与周期性》。博士论文，哥本哈根大学，作者网页可查（2022）。[HW21] F. Hebestreit 和 F. Wagner。《代数 K 理论与厄米 K-理论讲义》。作者网页可查（2021）。[Lur17] J. Lurie。《高阶代数》。作者网页可查（2017）。[MNN17] A. Mathew、N. Naumann 和 J. Noel。《等变稳定同伦论中的幂零性与下降》。载于：《Adv. Math.》305（2017），第 994–1084 页。[MS76] D. McDuff 和 G. Segal。《同调纤维化与“群完备化”定理》。载于：《Invent. Math.》31（1976），第 279–284 页。[Nar16] D. Nardin。《参数化高阶范畴论与高阶代数：报告 IV——关于轨道范畴的稳定性》。预印本见 arXiv:1608.07704（2016）。[Nar17] D. Nardin。《轨道范畴上的稳定性与分配律》。博士论文，麻省理工学院（2017）。[Nik17] T. Nikolaus。《通过环谱局部化的群完备化定理》。作者网页可查（2017）。[NS22] D. Nardin 和 J. Shah。《参数化与等变高等代数》。预印本见 arXiv:2203.00072（2022）。[QS22] J.D. Quigley 和 J. Shah。《论参数化 Tate 构造》。预印本见 arXiv:2110.07707（2022）。

[Ran13] O. Randal–Williams. “‘群完备化’、局部系数系统与完美性”。载于：Q. J. Math.（Quillen 纪念专刊）64 (3) (2013)，第 795–803 页。[Sch22] S. Schwede.《等变稳定同伦论讲义》。载于：可见于 作者网页（2022）。[Sha22] J. Shah.《参数化高阶范畴论 II：万有构造》。载于：预印本，见 arXiv:2109.11954（2022）。[Sha23] J. Shah.《参数化高阶范畴论》。载于：Algebr. Geom. Topol. 23 (2) (2023)，第 509–644 页。