arXiv:2301.10446v1 [hep-th] 25 Jan 2023

量子理论的代数方法中的散射：约旦代数

A. Schwarz 加州大学戴维斯分校数学系，美国加利福尼亚州戴维斯市，邮编 95616，
schwarz
@math.ucdavis.edu

摘要

我们采用几何方法，以约旦代数的形式表述量子理论。我们在这一框架下分析（准）粒子（=平移不变平稳态的初等激发）这一概念，以及（准）粒子的散射。

1 引言

在代数方法中，物理可观测量对应于 $*$-代数 $\mathcal{A}$. 的自伴元。$\mathcal{B}$ 中自伴元构成的向量空间 $\mathcal{A}$ 对乘法运算不封闭，但对运算 $a\circ b=\frac{1}{2}(ab+ba)$ 封闭。早在很久以前就有人提出 [1]，更自然的代数方法应以运算 $a\circ b$. 的公理化为基础。这个想法催生了约旦代数的概念：它是定义在 $\mathbb{R}$ 上、乘法为 $a\circ b$ 且满足以下条件的交换代数

$$(x\circ y)(x\circ x)=x\circ(y\circ(x\circ x)). \tag{1}$$

（令 R_a 表示由 a 定义的乘法算子，我们可以通过说算子 R_a 和 $R_{a\circ a}$ 可交换来表达这个恒等式。）

空间 $\mathcal{B}$ 对于将$x\in\mathcal{B}$ 变换为 axa 的线性算子 Q_a 也封闭（此处 $a\in\mathcal{B}$）。约旦代数的另一种研究方法基于对该算子的公理化。算子 Q_a 相对于 a是二次的，因此可以扩展为算子$Q_{\tilde{a},\ a}$ 该算子是对称双线性的

关于 $\tilde{a}$， a. 对 Q_a 施加一些条件后，我们便得到二次约旦代数的概念。从约旦代数的原始定义出发，取 $Q_a = 2R(a)^2 - R(a \circ a)$，即可得到一个二次约旦代数。反过来，从二次约旦代数 $\mathcal{B}$ 出发，可通过以下公式得到一族满足（1）的乘积

$$a \circ_x b = Q_{a,b}(x).$$

下文中，我们讨论由乘积 $a \circ b$ 指定的含单位元拓扑约旦代数 $\mathcal{B}$ 。然而，二次约旦代数似乎更便于建立约旦代数与几何方法 [4]-[7]之间的联系。这种联系基于如下观察：可以将 $\mathcal{B}$ 中的锥 $\mathcal{B}_+$ 定义为包含单位元且在算子 Q_a 作用下保持不变的最小凸闭集。还可以考虑对偶锥 $\mathcal{B}_+^\vee$ ，它由 $\mathcal{B}$ 上在 $\mathcal{B}_+$.上取非负值的线性泛函组成（更多详情见第 2 节）。

当 $\mathcal{B}$ 由 C^*-代数 $\mathcal{A}$ 的自伴元组成时，$\mathcal{B}_+^\vee$ 中的元素可以与 $\mathcal{A}$ 上的正线性泛函（态）等同起来。这意味着，将几何方法应用于约旦代数时，我们推广了基于 $*$-代数的代数方法。请注意，约旦代数可视为代数方法的自然框架。这一说法可由以下定理佐证：两个 C^*-代数的态锥同构，当且仅当相应的约旦代数同构（Alfsen - Shultz）。

On据称，若配备满足以下条件的巴拿赫范数， $\mathcal{B}$ 就是一个JB代数。

$$||x \circ y|| \leq ||x|| \cdot ||y||, ||x^2|| = ||x||^2, ||x^2|| \leq ||x^2 + y^2||.$$

对于这样的代数，锥 $\mathcal{B}_+$ 由平方构成。（对于任意约旦代数，元素 $a \circ a = Q_a$ (1)都属于该锥；对于JB代数，该锥中的所有元素都具有这种形式。）由此可知，JB代数的锥是齐性的：锥的自同构群在锥的内部上传递作用。

在几何方法中使用齐性锥是很自然的，因此JB代数似乎能够构造出有趣的模型。

约旦代数理论中锥的出现，使我们能够将几何方法的一般构造应用于这些代数。在第3节中，我们将在约旦代数的框架下讨论（准）粒子。在第4节和第5节中，我们将讨论（准）粒子的散射。在第6节中，我们定义广义格林函数，并证明（包括性）散射矩阵可以用这些函数表示。第7节将介绍约旦代数及上述结果的一些推广。

这里不讨论大量将约旦代数理论与物理学联系起来的论文（特别参见 [9]-[23]）。关于约旦

代数和约当对理论的简要综述，以及约旦代数与物理学之间各种联系的综述，见配套论文 [24]。

2 约旦代数

考虑定义在 $\mathbb{R}$ 上的拓扑约旦代数，记作 $\mathcal{B}$. （回顾一下，约旦代数定义为满足恒等式$(x\circ y)(x\circ x) = x\circ(y\circ(x\circ x))$的交换代数。下文中我们考虑含幺约旦代数。如果 $\mathcal{B}$ 是完备的拓扑向量空间，且乘法连续，则称 $\mathcal{B}$ 为拓扑约旦代数。）最重要的一类拓扑约旦代数是约旦巴拿赫代数（JB-代数）。JB代数中的巴拿赫范数应满足

$$||x\circ y||\leq||x||\cdot||y||, ||x^2|| = ||x||^2, ||x^2||\leq||x^2+y^2||.$$

（关于算子约旦代数理论的综述，参见 [3] 。）

在有限维情形下，JB代数类与Jordan、冯·诺伊曼和维格纳在著名论文 [2]中分类的欧几里得约旦代数类一致。最自然的简单有限维JB代数 $\mathsf{h}_n(\mathbb{R})$、$\mathsf{h}_n(\mathbb{C})$、$\mathsf{h}_n(\mathbb{H})$ 由实数、复数或四元数元素构成的厄米矩阵组成。另一系列简单有限维JB代数是自旋因子系列（或克利福德型约旦代数）。这些代数由元素1、e_1、..、e_n 生成，并满足关系 $e_i\circ e_i = 1$、$e_i\circ e_j = 0$，其中 $i\neq j$。最后一种简单有限维JB代数是阿尔伯特代数 $\mathsf{h}_3(\mathbb{O})$，可实现为由八元数元素构成的 3×3 厄米矩阵代数。这个27维代数是例外的（它无法嵌入到运算为 $a\circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$的矩阵约旦代数中。）

结构半群 $Str(\mathcal{B})$ 定义为由 $\mathcal{B}$ 的自同构和算子 Q_a 生成的半群，这些算子可通过约当三重积 $\{a,x,b\}$ 表示为公式 $Q_a(x) = \{a,x,a\}$.（约当三重积由公式 $\{a,x,b\} = (a\circ x)\circ b + (x\circ b)\circ a - (a\circ b)\circ x$. 定义）。算子 Q_a 关于 a 是二次的；我们用记号 $Q_{\tilde{a},a}$ 表示相应的双线性算子：$Q_{\tilde{a},a} = \{\tilde{a},x,a\}$.

元素 $B\in Str(\mathcal{B})$（结构变换）满足

$$Q_{Ba} = BQ_aB^t \tag{2}$$

其中，$B\to B^t$ 表示结构半群中的一个对合，它将每个算子 Q_a 映射为其自身，并将每个自同构映射为其逆自同构。该

结构群 $Strg(\mathcal{B})$由 $\mathcal{B}$ 的自同构和可逆算子Q_a生成。

内结构半群 $iStr(\mathcal{B})$ 由算子 Q_a生成。内结构群 $iStrg(\mathcal{B})$由内结构半群中的可逆元素组成。

我们将约旦代数中的正锥定义为包含单位元且在算子 Q_a作用下不变的 $\mathcal{B}$ 最小闭凸子集。[1] 也可以说，正锥是包含单位元且在内结构半群作用下不变的 $\mathcal{B}$ 最小闭凸子集。正锥在自同构作用下不变，因此在结构半群作用下也不变。显然，锥包含所有平方；这由 $Q_a(1) = a \circ a.$ 可知。对于 JB代数，锥中的所有元素都可以表示为平方，并且结构群在锥的内部上传递作用。

正锥记作 $\mathcal{B}_+$ ，对偶锥记作 $\mathcal{B}_+^\vee$.

假设约旦代数 $\mathcal{B}$ 由结合代数$\mathcal{A}$ 导出，它是关于对合 *的自伴元集合；该集合配备运算$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$。那么 $Q_a(x) = axa, Q_{\tilde{a},\ a} = \frac{1}{2}(\tilde{a}xa + ax\tilde{a})$。由此可知，$\mathcal{B}$ 的结构半群包含所有映射 $x \to A^*xA$ ，其中 A 是 $\mathcal{A}$ 中的自伴元或酉元（自伴元对应映射 Q_A，酉元对应一个自同构）。

若 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*代数，那么所有形如 A^*A 的元素都可以表示为自伴元素的平方，因此， $\mathcal{B}$ 中的锥是包含所有形如 A^*A 的元素的最小闭凸集，其中 $A \in \mathcal{A}.$ 。对偶锥由 $\mathcal{B}$ 上的所有线性泛函组成，这些泛函在形如 A^*A 的元素上取非负值（这与带对合的结合代数上正线性泛函的标准定义一致）。

我们还考虑约旦代数的复化，将其视为带对合的复 Jordan 代数。（如果从 JB 代数出发，那么其复化称为 JB^* 代数。）与这些代数相关的锥可以定义为其实部的锥。约当三重积 $\{a, x^*, b\}$ 定义为一种运算：对中间变量反线性，对其他变量线性。我们引入记号 $Q_a(x) = \{a, x, a^*\}$，其中 x 为实数。容易验证， Q_a 属于结构半群（它等于 $Q_\alpha + Q_\beta$，其中 α 和 β 分别是 a 的实部和虚部）。由此可知，当 x 为实数且 $b = a^*$ 时，三重积属于正锥。注意，

[1]我们将拓扑向量空间中的锥定义为一个闭凸子集，即在伸缩变换 $x \to \lambda x$ 下保持不变，其中 $\lambda > 0.$ 。我们不施加任何其他限制，因此，按照我们的术语，向量空间是一个锥。

映射 Q_a 关于 $a.$是厄米的

在散射理论的几何方法中 [7] ，我们从一个态锥 $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$ 以及由该锥的自同构组成的群 $\mathcal{U}$ 出发。（这里 $\mathcal{L}$表示一个完备的拓扑向量空间。）

如果我们以约旦代数 $\mathcal{B}$ 为出发点，那么可以将 $\mathcal{C}$ 取为锥$\mathcal{B}_+$ 或对偶锥。群$\mathcal{U}$ 可以等同于结构群 $Strg$（$\mathcal{B}$）。有时，固定一个由锥的自同态组成的半环 $\mathcal{W}$ 会比较方便；如果我们以约旦代数 $\mathcal{B}$ 为出发点，半环 $\mathcal{W}$ 可以定义为包含结构半群 Str（$\mathcal{B}$）的最小半环。

3 （准）粒子

为了定义（准）粒子及其散射，我们应将时间平移T_τ 和空间平移 $T_{\mathbf{x}}$ 指定为结构群 $Strg$（$\mathcal{B}$）的元素。换言之，我们应固定从交换平移群 $\mathcal{T}$ 到$Strg$（$\mathcal{B}$）的一个同态。平移群也作用于这些锥。我们用相同的记号 T_τ、$T_{\mathbf{x}}$ 表示锥的时间平移和空间平移。照例，我们将$T_\tau T_{\mathbf{x}}\alpha$ 记作 α（$\tau, \mathbf{x}$）。如 [5], [7] 所述，我们将（准）粒子定义为平移不变平稳态的初等激发。

应用几何方法的一般定义，我们可以说，平移不变稳态 ω 的一个初等激发是从“初等空间” h 到态锥 $\mathcal{C}$的二次映射或厄米映射 σ 。该映射应与空间平移和时间平移对易。此外，还应确定一个从 h 到空间 $End(\mathcal{L})$ 的映射，其中 $End(\mathcal{L})$ 是 $\mathcal{L}$ 的自同态空间，并且 $\sigma(f) = L(f)\omega$ [7]。在约旦代数的框架中， ω 是正锥 $\mathcal{B}_+$ 或对偶锥 $\mathcal{B}_+^\vee.$ 的一个元素。为明确起见，我们假设 ω 是对偶锥的一个元素；那么，$\mathcal{L}$ 应与 $\mathcal{B}^\vee.$ 等同。（回想一下，初等空间 h 定义为一个预希尔伯特空间，其元素是依赖于 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$和离散变量 $i \in \mathcal{I}.$ 的光滑快速衰减函数。空间平移作用为平移一个 $\in \mathbb{R}^d$ ，时间平移与空间平移对易。我们可以考虑实值或复值函数；前者应考虑二次映射，后者应考虑厄米映射。）

我们从与平移交换的线性映射 $\rho : \mathsf{h} \to \mathcal{B}$ 开始。固定一个满足附加条件 $T^t\omega = \omega$（对所有 $T \in \mathcal{T}$ 均成立）的平移不变平稳态 $\omega \in \mathcal{B}_+^\vee$。（这里， $T \to T^t$ 表示公式 (2) 中出现的结构群里的对合。）那么，将 $x \in \mathsf{h}$ 变换为 $Q_{\rho(x)}$ 的映射 $L : \mathsf{h} \to End(\mathcal{B}^\vee)$，将 ω 指定为初等激发，其映射为 $\sigma :\ x \to L(x)\omega$。为验证这一说法，我们注意到映射 σ 是二次的或厄米的，因为 L 是二次的（如果 $\mathcal{B}$

是 $\mathbb{R}$ 上的约旦代数），或是厄米的（如果 $\mathcal{B}$ 是带对合的复约旦代数）；公式 (2) 意味着 σ 与平移交换。下文中，我们主要考虑以这种方式构造的初等激发。不过请注意，我们也可以从任意线性映射 $\rho : \mathrm{h} \to \mathcal{B}$ 开始，并施加一个较弱的条件，即映射 $\sigma : x \to L(x)\omega$ 与平移交换。此时， σ 可视为初等激发。（这里， L 同样将 $x \in \mathrm{h}$ 变换为 $Q_{\rho(x)}$。）

例如，我们来考虑一个约旦代数，它定义为韦尔代数的自伴元集合。我们将与实预希尔伯特空间 h 对应的韦尔代数定义为一个含幺 $*$-代数，它由元素 $a(f)$ $a^+(g)$ 生成，这些元素关于 $f, g \in \mathrm{h}$ 线性依赖，并满足正则对易关系

$$[a(f), a(g)] = [a^+(f), a^+(g)] = 0, [a(f), a^+(g)] = \langle f, g \rangle.$$

我们定义一个从 h 到该约旦代数的映射 ρ，它将 $f \in \mathrm{h}$ 映射为$a(f) + a^+(f)$。

假设 h 是一个初等空间。那么 h 中的平移会诱导出韦尔代数及相应约旦代数中的平移。映射 ρ 与平移可交换。取 ω 正锥或对偶锥中对应于福克真空的态作为态，我们便得到该态的一个初等激发的例子。

同样的构造也适用于由正则反对易关系确定的克利福德代数。

请注意，与克利福德代数对应的约旦代数可视为 JB-代数；而从韦尔代数出发，我们得到的是拓扑约旦代数，更准确地说，是一个 Fr´echet 约旦代数。（Fr´echet 向量空间是完备的拓扑向量空间，其拓扑由一个可数的半范数族确定。下文讨论的是 JB-代数，但我们的结果可以推广到这些代数的 Fr´echet 类比形式。）

我们来讨论上述构造与基于结合代数$\mathcal{A}$ （带对合的$*$代数）的方法中初等激发构造之间的关系。这类代数的自伴元集合可视为实数域 $\mathbb{R}$上的约旦代数 $\mathcal{B}$；该约旦代数的复化 $\mathbb{C}\mathcal{B}$ 可与 $\mathcal{A}$ 等同，后者被视为带对合的复约旦代数。这些约旦代数的对偶锥中的元素，可与 $\mathcal{A}$.的未必归一化的态等同。假设空间平移和时间平移在 $\mathcal{A}$ 上作为自同构作用；这一作用在约旦代数的锥上诱导出平移作用。固定代数 $\mathcal{A}$ 的一个平移不变平稳态 ω；约旦代数对偶锥中的相应元素也用同一符号表示。 ω 的激发可视为预希尔伯特空间中的元素

$\mathcal{H}$ 通过对 ω应用 GNS 构造得到，一个初等激发是将初等空间 h 等距嵌入 $\mathcal{H}$. 的映射 Φ(*f*)。按照 [7] ，我们将 Φ(*f*)表示为 $B(f)\theta$ 的形式，其中 B 是线性映射 h $\to \mathcal{A}$ ，而 $\theta \in \mathcal{H}$ 是与态 ω对应的向量。若元素 $B(f)$是自伴的，我们便可应用上述初等激发构造，将 ω 视为约旦代数 $\mathcal{B}$ （即 $\mathcal{A}$ 中自伴元构成的代数，取 $\rho = B$）的对偶锥中的一个元素。于是，态 $Q_{\rho(f)}\omega$ 对应于向量 $B(f)\theta$. 。若 $B^*(f) = 0$ ，则对于 $\mathbb{C}\mathcal{B}$ （由 $\mathcal{B}$复化得到的带对合约旦代数），也可证明类似的结论。

4 散射

为了在约旦代数框架下分析散射，我们从线性映射 $\rho : \mathrm{h} \to \mathcal{B}$ （不一定与平移对易）开始。我们固定平移不变的平稳态 $\omega \in \mathcal{B}_+^\vee$。映射 $L : \mathrm{h} \to End(\mathcal{B}^\vee)$ 将 $x \in$ h 变换为 $Q_{\rho(x)}$ ；若映射 $\sigma : x \to L(x)\omega$ 与平移对易，则它描述 ω 的一个初等激发。

我们定义（遵循 [7]的一般理论）算子

$$L(f,\tau) = T_\tau(L(T_{-\tau}f)) = T_\tau L(T_{-\tau}f)T_{-\tau}.$$

其中 $f \in \mathrm{h}$。该算子相对于 f是二次的或厄米的，因此我们

~ ~还可以考虑算子 $L(f,f,\tau)$，它相对于 f是线性的，并且相对于 f线性~或反线性；当 $f = f^*$.时，它与 $L(f,\tau)$ 重合。（请注意，在实向量空间的情形下 $f^* = f$.）使用记号 $Q_{\tilde{a},\ a}x = \{\tilde{a}, x, a^*\}$ 我们可以写成

$$L(\tilde{g},g,\tau) = T_\tau Q_{T_{-\tau}\rho(\tilde{g}),T_{-\tau}\rho(g)}T_{-\tau} = L(\tilde{g},g)T_{-\tau}^t$$

其中， $L(\tilde{g},g) = Q_{\rho(\tilde{g}),\rho(g)}$ 是对应于二次型（或厄米型） $L(g) = Q_{\rho(g)}$.的双线性（或半双线性）型

该态

$$\Lambda(f_1,\cdots,f_n|-\infty) = \lim_{\tau_1\to-\infty,\cdots,\tau_n\to-\infty} L(f_1,\tau_1),...L(f_n,\tau_n)\omega \tag{3}$$

描述了波函数为 f_1、...、 f_n.的（准）粒子之间的碰撞。我们称（3）为散射态（或者更准确地说，是一个 in-态）。

碰撞的结果可用以下数值来表征

$$\lim_{\tau'\to+\infty,\tau\to-\infty}\langle\alpha|L(g_1,\tau')...L(g_m,\tau')L(f_1,\tau)...L(f_n,\tau)|\omega\rangle \tag{4}$$

其中， α 是锥 $\mathcal{B}_+$ 或更大的锥 $\mathcal{B}_+^{\vee\vee}$上的平移不变驻点（我们使用狄拉克符号）。与 [7] 的公式比较后可知，这个数值可以理解为包容散射矩阵的一种推广。更一般地，我们可以考虑一个泛函

$$\sigma(\tilde{g}'_1, g'_1, ..., \tilde{g}'_{n'}, g'_{n'}, \tilde{g}_1, g_1, ..., \tilde{g}_n, g_n) =$$

$$\langle\alpha| \lim_{\tau'_i \to +\infty, \tau_j \to -\infty} L(\tilde{g}'_1, g'_1, \tau'_1)...L(\tilde{g}'_{n'}, g'_{n'}, \tau'_{n'})L(\tilde{g}_1, g_1, \tau_1)...L(\tilde{g}_n, g_n, \tau_n)|\omega\rangle \quad (5)$$

它对其所有自变量都是线性的或反线性的。它也可以视为包容散射矩阵。

文献 [7] 中证明了，当 $f_1, \cdots, f_n$ 属于 $\mathrm{h} \times \cdots \times \mathrm{h}$ 的一个稠密开子集时，极限 (3) 存在，条件是

$$||[T_\alpha(L(\phi)), L(\psi)]|| \leq \int d\mathbf{x}d\mathbf{x}' D^{ab}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')|\phi_a(\mathbf{x})| \cdot |\psi_b(\mathbf{x}')| \quad (6)$$

其中 $D^{ab}(\mathbf{x})$ 当 $\mathbf{x} \to \infty$ 时比任何幂次都更快地趋于零，而 α 在一个有限区间内变化。

不那么形式化地说，我们可以将这一条件表述为：当函数 ϕ 和 ψ 在坐标表示下的本质支集相距甚远时，对易子 $[T_\alpha(L(\phi))\ L(\psi)]$ 很小。

对于极限 (4)、(5) 的存在（即包容散射矩阵的存在），也可以表述类似的条件。稍后我们将给出上述极限存在的更具体条件。

注意，线性映射 $\rho : \mathrm{h} \to \mathcal{B}$ 可以视为坐标表示中的多分量广义函数 $\rho(\mathbf{x})$，或动量表示中的 $\rho(\mathbf{k})$。（这意味着我们形式上将 $\rho(\phi)$ 表示为 $\int d\mathbf{x}\phi(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})$，或表示为 $\int d\mathbf{k}\phi(\mathbf{k})\rho(\mathbf{k})$。这些公式及下文中均省略离散指标。）我们假设广义函数 $\rho(\mathbf{x})$ $\rho(\mathbf{k})$ 对应于以相同符号表示的连续函数。

表达式 (5) 关于其自变量是线性的，因此可以将其视为广义函数

$$\sigma(\tilde{\mathbf{x}}'_1, \mathbf{x}'_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}'_{n'}, \mathbf{x}'_{n'}, \tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n, \mathbf{x}_n) =$$

$$\lim_{\tau'_i \to +\infty, \tau_j \to -\infty} \langle\alpha|L(\tilde{\mathbf{x}}'_1, \mathbf{x}'_1, \tau'_1)...L(\tilde{\mathbf{x}}'_{n'}, \mathbf{x}'_{n'}, \tau'_{n'})L(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_1, \tau_1)...L(\tilde{\mathbf{x}}_n, \mathbf{x}_n, \tau_n)|\omega\rangle \quad (7)$$

或者，在动量表示中，

$$\sigma(\tilde{\mathbf{k}}'_1, \mathbf{k}'_1, ..., \tilde{\mathbf{k}}'_{n'}, \mathbf{k}'_{n'}, \tilde{\mathbf{k}}_1, \mathbf{k}_1, ..., \tilde{\mathbf{k}}_n, \mathbf{k}_n) =$$

$$\lim_{\tau_i'\to+\infty,\tau_j\to-\infty}\langle\alpha|L(\tilde{\mathbf{k}}_1',\mathbf{k}_1',\tau_1')...L(\tilde{\mathbf{k}}_{n'}',\mathbf{k}_{n'}',\tau_{n'}')L(\tilde{\mathbf{k}}_1,\mathbf{k}_1,\tau_1)...L(\tilde{\mathbf{k}}_n,\mathbf{k}_n,\tau_n)|\omega\rangle \qquad (8)$$

.

我们采用以下记号

$$L(\tilde{g},g,\tau)=\int d\tilde{\mathbf{x}}d\mathbf{x}\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}})g(\mathbf{x})L(\tilde{\mathbf{x}},\mathbf{x},\tau)=\int d\tilde{\mathbf{k}}d\mathbf{k}\tilde{g}(\tilde{\mathbf{k}})g(\mathbf{k})L(\tilde{\mathbf{k}},\mathbf{k},\tau)$$

如果 ρ 与平移交换，我们可以说

$$T_\tau\rho(\phi)=\rho(T_\tau\phi)=\int d\mathbf{k}e^{-i\tau E(\mathbf{k})}\rho(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k})$$

因此

$$L(\tilde{\mathbf{k}},\mathbf{k},\tau)=T_\tau(e^{-i\tau[E(\tilde{\mathbf{k}})+E(\mathbf{k})]}Q_{\rho(\tilde{\mathbf{k}}),\rho(\mathbf{k})})T_{-\tau}=$$
$$e^{-i\tau[E(\tilde{\mathbf{k}})+E(\mathbf{k})]}T_\tau Q_{\rho(\tilde{\mathbf{k}}),\rho(\mathbf{k})}T_{-\tau}$$

5 包含散射矩阵的存在性

首先考虑这种情形：约旦代数 $\mathcal{B}$ 是结合巴拿赫代数 $\mathcal{A}$ 中关于对合的自伴元所构成的集合

*. 我们对多分量函数 ρ(x)施加渐近交换性或反交换性的条件：

$$||[\rho(\mathbf{x}+\mathbf{a}),\rho(\mathbf{a})]_\mp||<\frac{C_n}{1+||\mathbf{x}||^n} \qquad (9)$$

对每个自然数 $n.$，由此条件可得

$$||[\rho(\phi),\rho(\psi)]_\mp||<\int d\mathbf{x}d\mathbf{x}'D^{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|\phi_a(\mathbf{x})|\cdot|\psi_b(\mathbf{x}')| \qquad (10)$$

其中，当 $\mathbf{x}\to\infty.$ 时， D^{ab}(x) 比任何幂函数都更快地趋于零

这些算子 $L_\phi=Q_{\rho(\phi)}$ 将 $b\in\mathcal{B}$ 变换为 $\rho(\phi)b\rho(\phi)$。容易验证，这些算子满足(6)，因此我们所关注的极限存在，可以考察粒子的散射。在渐近交换性（反交换性）的情况下，我们讨论的是玻色子（费米子）。

对于由带对合的结合代数 $\mathcal{A}$ 得到的约旦代数 $\mathcal{B}$，很容易给出算子 Q_a 和 Q_b 可交换的充分条件。显然，若 a 和 b 在 $\mathcal{A}$ 中可交换，或者 a 和 b 在 $\mathcal{A}$ 中反可交换（等价地， $a\circ b=0$ 在 $\mathcal{B}$ 中），则有 $Q_aQ_b=Q_bQ_a.$。类似的结论也

适用于任意 JB 代数 $\mathcal{B}$: 如果算子 R_a 和 R_b 可交换，或者 $a \circ b = 0$，那么算子 Q_a、Q_b 可交换 [27], [25], [26]。（这里， a、$b \in \mathcal{B}$、 R_a 表示由 a 在 $\mathcal{B}$ 中诱导的乘法算子。若 R_a 和 R_b 可交换，则称 a 与 b 算子可交换。）

自然可以推测，这些陈述能够以如下方式推广:

如果 $a \circ b$ 很小，那么算子 Q_a 和 Q_b 几乎可交换。
如果算子 R_a 和 R_b 几乎可交换，那么算子 Q_a 和 Q_b 几乎可交换。

这些猜想中的第一个已在 [8] 中得到证明。更确切地说，
如果 JB代数 $\mathcal{B}$ 中两个元素的约旦积 $a \circ b$ 的范数为 $\leq \epsilon$，那么

$$|||[Q_a, Q_b]||| \leq k(||a||, ||b||)\sqrt{\epsilon}. \tag{11}$$

这里 $\epsilon \geq 0$ 和 k 是一个多项式函数
该命题使我们能够给出极限 (3)、(5) 存在的条件。 (4),

我们施加如下条件

$$||\rho(\mathbf{x}+\mathbf{a}) \circ \rho(\mathbf{a})|| < \frac{C_n}{1+||\mathbf{x}||^n} \tag{12}$$

对每个自然数 $n.$，则

$$||\rho(\phi) \circ \rho(\psi)|| < \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' D^{ab}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')|\phi_a(\mathbf{x})| \cdot |\psi_b(\mathbf{x}')| \tag{13}$$

其中 D^{ab}(x) 趋于零的速度快于任意幂次，当 $\mathbf{x} \to \infty.$ 。应用 (11)，我们得到 (6)，这意味着对于这些表达式自变量的函数族稠密集，极限 (3)、(4)、(5) 存在。

第二个猜想是否成立尚不清楚。然而，恒等式$Q_a = 2R_a^2 - R_{a^2}$ 立即推出以下较弱的命题：如果 a 和 a^2与 b 和 b^2 几乎算子对易，那么 Q_a 和 Q_b 几乎对易:

$$|||[Q_a, Q_b]||| \leq 8||a||\cdot||b||\cdot|||[R_a, R_b]|||+4||a||\cdot|||[R_a, R_{b^2}||+4||b||\cdot|||[R_b, R_{a^2}]|||+|||[R_{a^2}, R_{b^2}]|||.$$

利用恒等式 $Q_{e^a} = e^{2R_a}$ 可以得出，如果 a 和 b 几乎算子对易，那么算子 Q_{e^a} 和 Q_{e^b} 几乎对易。
可以利用这些论述给出散射态和包容散射矩阵存在的条件。

6 格林函数

令平移不变元素 $\alpha \in \mathcal{B}_+, \omega \in \mathcal{B}_+^\vee$ 固定，其中 $\mathcal{B}_+$ 是约旦代数 $\mathcal{B}$ 中的正锥，$\mathcal{B}_+^\vee$ 表示对偶锥。二次算子Q_A 作用于两个锥中，双线性算子 $Q_{\tilde{A},\ A}$ 作用于 $\mathcal{B}$ 和对偶空间 $\mathcal{B}^\vee$.˜（这里 A, A 是 $\mathcal{B}$. 的元素）

˜ ˜令元素 A_1， A_1，.....， A_n， $A_n \in \mathcal{B}$.我们引入记号 $Q_i(\tilde{}\mathbf{x}\ \tilde{\tau}$，$\mathbf{x}\ \tau)$ 表示 $Q_{\tilde{A}_i(\tilde{}\mathbf{x}\ \tilde{\tau})\ A_i(\mathbf{x}\ \tau)}$.

我们通过以下公式定义（广义）格林函数

$$G_n(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\tau}_1, \mathbf{x}_1, \tau_1, ..., \tilde{\mathbf{x}}_n, \tilde{\tau}_n, \mathbf{x}_n, \tau_n) =$$

$$\langle \alpha | T(Q_1(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\tau}_1, \mathbf{x}_1, \tau_1)...Q_n(\tilde{\mathbf{x}}_n, \tilde{\tau}_n, \mathbf{x}_n, \tau_n) | \omega \rangle$$

其中， T表示关于 $\tau_i' = \frac{1}{2}(\tilde{\tau}_i + \tau_i)$ 的时间排序。

在此公式中省略时间排序，即可得到关联函数的定义。注意，当约旦代数 $\mathcal{B}$ 构造为 $*$-代数 $\mathcal{A}$ 的自伴元集合时，我们有

$$Q(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tau}, \mathbf{x}, \tau)a = \frac{1}{2}(A(\mathbf{x}, \tau)a\tilde{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tau}) + \tilde{A}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\tau})aA(\mathbf{x}, \tau)).$$

利用这一观察，我们可以用 $*$-代数 $\mathcal{A}$.的关联函数来表示约旦代数 $\mathcal{B}$ 的关联函数

我们在 $(\mathbf{x}\ \tau)$ 表象中定义了格林函数；一如既往，进行傅里叶变换后，我们得到 $(\mathbf{k}\ \tau)$ 和 $(\mathbf{k}\ \varepsilon)$ 表象中的格林函数。

可以证明（在某些条件下），包容散射矩阵可以根据 $(\mathbf{k}\ \tau)$ 表象中格林函数的渐近行为计算，也可以根据 $(\mathbf{k}\ \varepsilon)$ 表象中的极点和留数计算。证明与 [6] 中类似命题的证明相似。它基于公式 (8)。

7 推广

考虑一个 $\mathbb{Z}_2$分次代数 $\mathcal{A}$. 我们用 $\mathcal{A}_\Lambda$ 表示张量积 $\mathcal{A} \otimes \Lambda$ 中偶元素的集合，其中 Λ 是一个格拉斯曼代数。这个集合可以视为一个代数；如果对每个 Λ，代数 $\mathcal{A}_\Lambda$ 都是约旦代数，我们就称 $\mathcal{A}$ 为约旦超代数。（例如，参见 [28]，其中给出了约旦超代数更标准的定义以及约旦超代数理论的主要事实。）类似地，如果代数 $\mathcal{A}_\Lambda$ 是李代数，就称 $\mathcal{A}$ 为李超代数。可以说，约旦超代数 $\mathcal{A}$定义了一个函子，该函子定义在格拉斯曼代数范畴上

，并取值于约旦代数范畴。类似地，李超代数定义了一个取值于李代数范畴的函子，而超群可以视为一个取值于群范畴的函子（所有函子都定义在格拉斯曼代数上）。

从微分代数（带有一个满足 $d^2 = 0$ 的奇导子的 $= \mathbb{Z}_2$ 分次代数 d ）出发，可以定义微分约旦超代数。构造微分约旦超代数最简单的方法，是将约旦代数 $\mathcal{B}$ 与微分超交换代数 $\mathcal{E}$ 作张量积（例如，可以取自由格拉斯曼代数作为 $\mathcal{E}$ ，并配备一个计算李代数上同调的微分）。

利用这些定义，可以将上述结论推广到约旦超代数，并且（在 BRST形式主义框架下）推广到微分约旦超代数。

这些推广可用于分析一些有趣的例子。

特别是，从简单的例外约旦代数（阿尔伯特代数 $\mathrm{h}_3(\mathbb{O})$）出发，可以构造庞加莱 ′ 不变理论。具体而言，应当注意到，这个代数的结构群包含一个与 $SO(1, 9)$ 同构的子群（该子群曾用于 [9], [10]）。假设平移作用平凡，则可得到十维庞加莱 ′ 群在阿尔伯特代数上的作用。将阿尔伯特代数与一个（微分）超交换代数作张量积，其中庞加莱 ′ 群通过自同构作用，便得到一个带有庞加莱 ′ 群作用的（微分）约旦超代数（平移的作用通常并非平凡）。

参考文献

[1]Jordan, P.（1933年）量子力学量的乘法。Zeitschrift f¨ur Physik，80(5)，第285–291页。[2] Jordan, Pascual、J. von Neumann 和 Eugene P. Wigner。《量子力学形式体系的一种代数推广》。载于《Eugene Paul Wigner 文集》，第298–333页。施普林格，柏林、海德堡，1993年。[3] Hanche-Olsen, Harald 和 Erling Stormer。《约当算子代数》。第21卷。Pitman Advanced Publishing Program，1984年。[4] Schwarz, A.（2020）。量子理论的几何方法。《SIGMA：对称性、可积性与几何：方法与应用》，16，020。

[5] Schwarz, A.（2021）量子理论的几何与代数方法。《核物理B》，973, p.115601。量子物理 2102.09176, [6] Schwarz, A.，2021年。量子理论代数方法中的散射。结合代数。arXiv 预印本 arXiv:2107.08553。[7] Schwarz, A.，2021年。量子理论几何方法中的散射。arXiv 预印本 arXiv:2107[8] Schwarz, A. 约旦代数中的渐近交换性（准备中）。[9] Foot, R. 和 Joshi, G.C.，1988年。极小超对称规范理论的一个自然框架。《数学物理快报》，15(3)，第237–242页。[10] Foot, R. 和 Joshi, G.C.，1989年。超弦与约旦代数的时空对称性。《国际理论物理学杂志》，28(12)，第1449–1462页。[11] G¨unaydin, M.，1991年。N= 2超共形代数与约旦三系。《物理快报B》，255(1)，第46–50页。[12] G¨unaydin, M.、Sierra, G. 和 Townsend, P.K.，1984年。N= 2麦克斯韦-爱因斯坦超引力与约旦代数的几何。《核物理B》，242(1)，第244–268页。[13]G¨unaydin, M.、Sierra, G. 和 Townsend, P.K.，1985年。规范化 d= 5麦克斯韦/爱因斯坦超引力理论：进一步探讨约旦代数。《核物理B》，253，第573–608页。[14] G¨unaydin, M.，1993年。广义共形与超共形群作用及约旦代数。《现代物理快报A》，8(15)，第1407–1[15] Baez, J.，2002年。八元数。《美国数学会通报》，39(2)，第145–205页。[16] Baez, J.C.，2012年。除代数与量子理论。《物理学基础》，42(7)，第819–855页。[17] Todorov, I. 和 M. Dubois-Violette，2018年。从例外约旦代数的自同构群与结构群推导标准模型的对称性。《国际现代物理学杂志A》，33(20)，p.1850118。

[18] Todorov, Ivan.《标准模型粒子物理学的例外量子代数》。载于《国际李理论及其在物理学中的应用研讨会》，第29-52页。施普林格，新加坡，2019年。[19] M. Dubois-Violette 和 I. Todorov，2019年。《例外量子几何与粒子物理学 II》。《核物理B》，938卷，第751-761页。[20] M. Dubois-Violette 和 I. Todorov，2020年。《粒子物理学自旋因子方法中的超联络》。《核物理B》，957卷，115065页。[21] Todorov, Ivan 和 Svetla Drenska。《八元数、例外约旦代数与群在 F_4 粒子物理学中的作用》。《应用克利福德代数进展》28卷，第4期（2018年）：1-36。[22] Boyle, L.，2020年。《标准模型、例外约旦代数与三重性》。《arXiv》预印本 arXiv:2006.16265。[23]Iordanescu, R.，2011年。《数学与物理学中的约当结构》。《arXiv》预印本 arXiv:1106.4415。[24] Schwarz, A.,《约旦代数、约当对与物理学：综述、问题与猜想》（编写中）[25] Anquela, Jos´e、Teresa Cort´es 和 Holger Petersson。《约旦代数中的对易 U_a算子》。《美国数学会汇刊》366卷，第11期（2014年）：5877-5902。=[26]Shestakov, Ivan。《关于约旦代数中对易U算子的问题》。《非结合与非交换代数及算子理论》。施普林格，沙姆，2016年。105-109。[27] van de Wetering, John。《约当算子代数中的交换性》。《纯粹与应用代数杂志》（2020年）：106407。[28] Barbier, S. 和 Coulembier, K.，2018年。《约旦超代数的结构与TKK代数》。《代数通讯》46卷，第2期，第684-704页。