arXiv:2301.10464v1 [math.CT] 25 Jan 2023

三角范畴的中心支撑

HENNING KRAUSE

Abstract. 对于任一本质小三角范畴，我们引入其厚子范畴格的中心；它是一个空间帧，并由此得到中心支撑的概念。该中心的相对版本恢复了张量三角范畴的支撑理论，并提供了一种普适的上同调支撑概念。此外，我们还为一对可交换子范畴建立了 Mayer–Vietoris 序列。

1. Introduction

三角范畴是一种代数上的需求，因为引入它们的初衷是处理几何或拓扑背景中出现的上同调。但在过去几年里，得益于支撑这一概念，三角范畴已转变为几何对象[1, 7, 9, 17, 19]。在本文中，我们沿着这一方向继续[1]，研究本质小三角范畴的几何如何 $\mathcal{T}$ 由其厚子范畴格，更确切地说，由其中心所刻画。我们的第一个结果（推论3.8）旨在说明这一点，因为许多具有几何意味的应用都涉及 Mayer–Vietoris 序列 [4, 7, 21, 23]。

定理1. 对于一对厚子范畴 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$，以下条件等价。

(1) 这对 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ 是交换的，也就是说，$\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的对象之间的任意态射都可经由 $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ 的某个对象分解。(2) 对每一对对象 $X, Y \in \mathcal{T}$，都存在一个长正合列

$$\cdots \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{U}}(X,Y) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{V}}(X,Y) \to \\ \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\vee\mathcal{V})}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(X,\Sigma Y) \to \cdots .$$

三角范畴 $\mathcal{T}$ 中对象的支撑概念带来了额外的几何结构。它需要一个拓扑空间，并为 $\mathcal{T}$ 的每个对象指定该空间的一个子集。例如，如果 $\mathcal{T}$ 具有对称张量积 [1], ，该空间可以取为素张量理想的集合；也可以取为在 $\mathcal{T}$ [7] 上中心作用的分次交换环的素理想集合。

任何支撑概念的一个关键特征，都是通过拓扑空间的子集对厚子范畴进行参数化。我们以厚子范畴的格 T 作为输入。那么它的中心

$$Z(T) := \{\mathcal{U} \in T \mid \mathcal{U} \text{ and } \mathcal{V} \text{ commute for all } \mathcal{V} \in T\}$$

提供了这样一个空间，因为 $Z(T)$ 是一个空间帧；这意味着它与某个拓扑空间的开集格相同。这个空间可用于为任意对象定义支撑，使中心子范畴由开子集参数化。

Date:2023年1月25日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 18G80。
Key words and phrases. 中心、分配格、Mayer–Vietoris 序列、支撑、厚子范畴、三角范畴。[1]我们遵循“几何即代数，代数即几何”这一格言，它改编自 Ringel 在[22]中的“代数即几何，几何即代数”。

我们总结并陈述关于本质小三角范畴 $\mathcal{T}$ 的厚子范畴格 $\operatorname{Thick}\mathcal{T}$ 的主要结果（定理 5.2）。

定理 2。设 $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{Thick}\mathcal{T}$ 是一个对任意并封闭的子格。那么，其中心 $Z(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ 也是一个对任意并封闭的子格。此外，$Z(\mathcal{T})$ 是一个空间帧；对于 $\mathcal{T}$ 中任意一对 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$，只要 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中至少一个是中心的，就存在一个 Mayer–Vietoris 序列。

由此可知，$\mathcal{T}$ 当 $Z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ 时是一个分配格，但反过来不一定成立。例如，$Z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ 当 $\mathcal{T}$ 是厚张量理想格时，$\mathcal{T}$ 是一个刚性张量三角范畴（例 5.3）。因此，我们为三角几何奠定基础，秉承张量三角几何的理念 [3, 17, 19], ，并在 $\mathcal{T}$ 上引入由一个特定子格 $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{Thick}\mathcal{T}$ 给出的附加结构。

我们对中心厚子范畴的讨论受到 Gratz 和 Stevenson 最近工作的启发 [12], ，尤其是他们在 Å̊lesund 举行的 Abel 研讨会 2022 上的报告。[12] 中的一个关键观察是，分配性对于厚子范畴格具有重要意义。在本文中，我们为分配性与交换性之间存在紧密联系提供证据，尤其回应了 [12, §8] 中关于“$\operatorname{Thick}\mathcal{T}$ 的有趣分配子格”的探索。

本文结构安排如下。在§2 我们简要讨论主要工具：三角范畴的上同调函子范畴，它与该范畴的 ind-完备化相同。在§3 我们引入中心子范畴，并证明它们构成一个空间帧。在此过程中，我们为任意一对可交换子范畴建立了若干 Mayer–Vietoris 正合列。在§4 我们给出许多例子，包括带有张量积或中心环作用等附加结构的三角范畴。这促使我们考虑中心子范畴格的相对版本，并在最后的§5 中讨论。

致谢。谨向 Greg Stevenson 致谢，感谢他就本研究进行的启发性讨论。也非常感谢 Dave Benson 提供模表示论中的具体例子，并感谢 Kent Vashaw 协助处理本文中的非交换张量积。

本研究的部分工作是在波恩豪斯多夫研究所举办的“三学期项目”「代数、几何与拓扑中的谱方法」期间完成的。感谢主办方提供的款待，以及德国研究联合会（DFG）通过卓越战略 EXC-2047/1-390685813 提供的资助。

2. The category of cohomological functors

引入三角范畴是为了处理几何或拓扑背景中出现的上同调。若要将三角范畴视为其自身意义上的几何对象，那么通过上同调方法，利用上同调函子范畴来研究它们，似乎是很自然的。本节汇集一些基本且广为人知的事实。

上同调函子。设 $\mathcal{T}$ 是一个本质小三角范畴，其悬移为 $\Sigma\colon \mathcal{T} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{T}$。回顾一下，取值于阿贝尔群范畴的函子 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ 若将正合三角映为正合列，则称其为上同调函子。我们用 $\operatorname{Coh}\mathcal{T}$ 表示上同调函子范畴。$\operatorname{Coh}\mathcal{T}$ 中的态射是自然变换，而米田函子 $\mathcal{T} \to \operatorname{Coh}\mathcal{T}$ 将 $X \in \mathcal{T}$ 映为

$$H_X = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(-, X)$$

是全忠实的。悬移 Σ 可扩张为函子 $\operatorname{Coh}\mathcal{T} \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Coh}\mathcal{T}$：将 $\operatorname{Coh}\mathcal{T}$ 中的 F 映为 $F \circ \Sigma^{-1}$；我们仍将其记为 Σ。

将 $\operatorname{Coh}\mathcal{T}$ 视为由所有加性函子 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ 构成的范畴 $\operatorname{Mod}\mathcal{T}$ 的全子范畴会很方便。注意，$\operatorname{Mod}\mathcal{T}$ 中的（余）极限是逐点计算的。

对于 Mod $\mathcal{T}$中的 E和 F，我们用 Hom(E,F) 表示从 E到 F的态射集合。因此，根据米田引理，对于 X in $\mathcal{T}$，Hom$(H_X,F) \cong F(X)$。

任意加性函子 $F\colon \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Ab}$ 都可以规范地写成可表函子的余极限

$$\operatorname*{colim}_{H_X \to F} H_X \xrightarrow{\sim} F$$

其中，余极限取自切片范畴 $\mathcal{T}/F$；参见 [13, 命题 3。4]中的对象 $\mathcal{T}/F$ 是态射 $H_X \to F$，其中 X 遍历 $\mathcal{T}$中的对象。范畴 $\mathcal{T}/F$ 中从 $H_X \xrightarrow{\phi} F$ 到 $H_{X'} \xrightarrow{\phi'} F$ 的态射是一个态射 $\alpha\colon X \to X'$，在 $\mathcal{T}$中满足 $\phi' H_\alpha = \phi$。

Lazard 定理指出，模是平坦的，当且仅当它是有限生成自由模的滤过余极限；Oberst 和 R¨ohrl 将这一结果推广到了函子范畴。下面的引理表明，上同调函子与平坦函子是一致的；这是众所周知的，例如可由 [20, 引理 2.1] 得知。

引理 2.1。上同调函子 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to$Ab 恰好是可表函子的滤过余极限（在加性函子 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to$Ab 范畴中）。特别地，范畴 Coh$\mathcal{T}$ 存在滤过余极限。□

正合函子。我们称 Coh$\mathcal{T}$ 中的一列态射是正合的，如果对 $\mathcal{T}$ 中的每个对象取值后，都得到 Ab 中的一个正合列。这就在 Coh$\mathcal{T}$范畴上赋予了 Quillen 意义下的正合结构。

设 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{U}$ 是本质小的三角范畴。若函子 $P\colon$ Coh$\mathcal{T} \to$Coh$\mathcal{U}$ 将正合列映为正合列，且存在一个自然同构 $P \circ \Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma \circ P$，则称其为正合函子。

正合函子 $f\colon \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ 诱导出一对函子

$$f^*\colon \operatorname{Coh}\mathcal{T} \longrightarrow \operatorname{Coh}\mathcal{U} \qquad \text{and} \qquad f_*\colon \operatorname{Coh}\mathcal{U} \longrightarrow \operatorname{Coh}\mathcal{T}$$

其中 $f^*(F) = \operatorname{colim}_{H_X \to F} H_{f(X)}$，而 $f_*(G) = G \circ f$。我们回顾一些基本事实。

引理 2.2（[8, 引理 2.4]）。设 $f\colon \mathcal{T} \to \mathcal{U}$ 是本质小三角范畴之间的正合函子。

(1) 函子 f^* 是 f_*的左伴随。(2) 函子 f^* 和 f_* 是正合函子，并且保持滤过余极限。(3) 若 f是全忠实的，则 f^*是全忠实的，且 id $\xrightarrow{\sim} f_* \circ f^*$。(4) 若 f是商函子，则 f_*是全忠实的，且 $f^* \circ f_* \xrightarrow{\sim}$ id。□

令 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$为一个三角子范畴。记 $i\colon \mathcal{S} \to \mathcal{T}$和 $q\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$为典范函子，定义

$$\Gamma_{\mathcal{S}} = i^* \circ i_* \qquad \text{and} \qquad L_{\mathcal{S}} = q_* \circ q^*.$$

这些都是 Coh $\mathcal{T}$上的正合函子。我们可以将 Coh $\mathcal{S}$和 Coh$\mathcal{T}/\mathcal{S}$ 视为 Coh $\mathcal{T}$的全子范畴。于是，对每个 $F \in$Coh$\mathcal{T}$，有

$$F \in \operatorname{Coh}\mathcal{S} \iff \Gamma_{\mathcal{S}} F \xrightarrow{\sim} F \iff L_{\mathcal{S}} F = 0$$

and

$$F \in \operatorname{Coh}\mathcal{T}/\mathcal{S} \iff F \xrightarrow{\sim} L_{\mathcal{S}} F \iff \Gamma_{\mathcal{S}} F = 0.$$

函子 $\Gamma_{\mathcal{S}}$ 和 $L_{\mathcal{S}}$ 构成一个长正合列。为了解释这一点，我们注意到，对任意 $F \in$ Coh$\mathcal{T}$，都有

$$\Gamma_{\mathcal{S}} F = \operatorname*{colim}_{H_S \to F} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(-, S)$$

其中，余极限取遍切片范畴 $\mathcal{S}/F$，该范畴是滤过的，因为 $\mathcal{S}$是一个三角子范畴。另一方面，商范畴 $\mathcal{T}/\mathcal{S}$ 中态射的定义给出，对于任意 $X \in \mathcal{T}$

$$L_{\mathcal{S}} H_X = \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{S}}(-, X) = \operatorname*{colim}_{X \to Y} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(-, Y)$$

其中，$X \to Y$ 遍历所有锥属于 $\mathcal{S}$ 的态射。结合以上结果，我们得到如下结论。

命题 2.3 ([8, 命题 2.10])。对于三角子范畴 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$，存在如下函子的长正合序列 $\operatorname{Coh}\mathcal{T} \to \operatorname{Coh}\mathcal{T}$。

$$\cdots \longrightarrow \Sigma^{n-1}L_{\mathcal{S}} \longrightarrow \Sigma^n\Gamma_{\mathcal{S}} \longrightarrow \Sigma^n \longrightarrow \Sigma^n L_{\mathcal{S}} \longrightarrow \Sigma^{n+1}\Gamma_{\mathcal{S}} \longrightarrow \cdots \tag{2.1}$$

□

序列 (2.1) 关于 $\mathcal{S}$ 是函子性的。因此，$\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2$ 对 $\mathcal{T}$ 中三角子范畴的每个包含关系都会诱导相应长正合序列之间的一个态射。直接推论如下。

引理 2.4 ([8, 引理 2.16])。设 $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{T}$ 为三角子范畴，并设 (Γ_1, L_1) 和 (Γ_2, L_2) 为 Coh 上相应的（余）局部化函子对。$\operatorname{Coh}\mathcal{T}$。式 (2.1) 中的态射诱导出同构

$$\Gamma_1\Gamma_2 \cong \Gamma_1 \cong \Gamma_2\Gamma_1, \quad L_1L_2 \cong L_2 \cong L_2L_1, \quad \Gamma_1L_2 = 0 = L_2\Gamma_1, \quad \Gamma_2L_1 \cong L_1\Gamma_2.$$

□

本文其余部分大量使用函子范畴

$$\operatorname{Coh}\mathcal{T} \longrightarrow \operatorname{Coh}\mathcal{T}$$

这些函子是正合的，并保持滤过余极限。我们在同构意义下考察它们，也就是说，当存在自然同构$F \xrightarrow{\sim} G$时，我们将函子 F和 G 视为相同。记 $\mathsf{End}\,\mathcal{T}$ 为对象的同构类。于是我们有以下相关结构：

（1）带单位元的结合乘法 $\mathsf{End}\,\mathcal{T}\times\mathsf{End}\,\mathcal{T} \to \mathsf{End}\,\mathcal{T}$（由函子的复合给出），
（2）带单位元的结合和 $\mathsf{End}\,\mathcal{T} \times \mathsf{End}\,\mathcal{T} \to \mathsf{End}\,\mathcal{T}$（由函子的直和给出），
（3）一个悬移 Σ: $\mathsf{End}\,\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}\,\mathcal{T}$，以及（4）正合列 $F \to G \to H$ 的概念，带有连接态射 $H \to \Sigma F$，从而给出一个长正合列

$$\cdots \longrightarrow \Sigma^{n-1}H \longrightarrow \Sigma^nF \longrightarrow \Sigma^nG \longrightarrow \Sigma^nH \longrightarrow \Sigma^{n+1}F \longrightarrow \cdots.$$

3. The lattice of central subcategories

在全文中，我们固定一个本质小三角范畴 $\mathcal{T}$。令 $\mathsf{Thick}\,\mathcal{T}$表示 $\mathcal{T}$的厚子范畴格。对于 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V} \in \mathsf{Thick}\,\mathcal{T}$，我们将$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ 记作它们的交（即交集），将 $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ 记作它们的并（即包含 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$的最小厚子范畴）。对于一个对象类 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$，令 $\mathsf{thick}\,\mathcal{X}$表示包含 $\mathcal{X}$的最小厚子范畴。

中心子范畴。给定一对厚子范畴 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$，我们考虑如下性质：来自 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中的对象之间的态射可经由 $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$中的对象分解。该条件早已出现在 [26, II.2.3], 中，不过，下面引理中的等价条件（2）–（4）似乎是新的。

引理 3.1。对于一对 $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathsf{Thick}\,\mathcal{T}$，以下条件等价。

(1) 每个态射 $\mathcal{U} \ni U \to V \in \mathcal{V}$ 都经过 $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$中的某个对象分解。(2) 典范态射 $\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} \to \Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}$ 是一个同构。(3) 典范态射 $L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}} \to L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}$ 是一个同构。(4) 典范态射 $\Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} \to \Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}}$ 是一个同构。(5) 对所有 $V \in \mathcal{V}$，$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(-, V) \to \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{U}}(-, V)$ 都是一个同构。

证明。当 $\mathrm{Coh}\,\mathcal{U}$ 被视为 $\mathrm{Coh}\,\mathcal{T}$的全子范畴时，$\mathrm{Coh}\,\mathcal{U}$ 中的对象恰好是满足 $U \in \mathcal{U}$ 的对象 H_U 的滤过余极限。由此可知， $F \in \mathrm{Coh}\,\mathcal{T}$属于 $\mathrm{Coh}\ \mathcal{U}$，当且仅当每个满足 $X \in \mathcal{T}$ 的态射 $H_X \to F$都经过某个 $U \in \mathcal{U}$分解为 H_U。

(1) $\Leftrightarrow$ (2) 上述一般观察表明，前两个条件等价于这样的性质：每个形如 $\Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}F$ 的对象都属于 $\mathrm{Coh}\,\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 将 $\Gamma_{\mathcal{V}}$ 与由2.1给出的正合列 $\mathcal{U}$ 和$\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$复合，得到如下图表。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Sigma^{-1}L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Sigma\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^{-1}\beta} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\alpha} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Sigma^{-1}L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Sigma\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

五引理表明， α 是同构，当且仅当 β 是同构。

(2) $\Leftrightarrow$ (4) 将 $\Gamma_{\mathcal{U}}$ 与由2.1给出的正合列 $\mathcal{V}$ 和$\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$复合，得到如下图表。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Sigma^{-1}\Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Sigma\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^{-1}\beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\alpha} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Sigma^{-1}\Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Sigma\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

五引理表明， α 是同构，当且仅当 β' 是同构。

(3) $\Leftrightarrow$ (5) 对于 $V \in \mathcal{V}$，包含关系 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ 诱导出态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(-,V) \cong L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}H_V \longrightarrow L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}H_V \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{U}}(-,V).$$

由于任何形如 $\Gamma_{\mathcal{V}}F$ 的函子都是可表函子 H_V的滤过余极限，因此当且仅当 $L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}$时，这个态射对所有 V 都是同构。□

我们注意到，前述引理中的等价条件蕴含第二诺特同构，即典范函子

$$\mathcal{V}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}) \longrightarrow (\mathcal{U}\vee\mathcal{V})/\mathcal{U} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{U}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}) \longrightarrow (\mathcal{U}\vee\mathcal{V})/\mathcal{V}$$

在直和项意义下是等价的。第一个显然如此；对于另一个，将其转到对偶范畴 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$即可得出。

定义 3.2. 若一对元素 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 属于 $\mathrm{Thick}\,\mathcal{T}$，则称它们可交换，如果存在典范同构

$$\Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} \xleftarrow{\sim} \Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}}.$$

一个等价条件是： $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{V}$ 中的对象之间的态射（任一方向）可分解为经过 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$中的某个对象。

若元素 $\mathcal{U} \in \mathrm{Thick}\ \mathcal{T}$与所有 $\mathcal{V} \in \mathrm{Thick}\,\mathcal{T}$交换，则称其为中心的。

我们用 $Z(\mathrm{Thick}\,\mathcal{T})$ 表示 $\mathcal{T}$ 的中心厚子范畴集合；该集合按包含关系构成偏序。下面我们研究 $Z(\mathrm{Thick}\,\mathcal{T})$ 的基本性质。特别地，我们将看到它是 $\mathrm{Thick}\,\mathcal{T}$ 的子格。

我们继续给出一系列技术引理，以建立由一对厚子范畴给出的正合函子 $\mathrm{Coh}\,\mathcal{T} \to \mathrm{Coh}\,\mathcal{T}$ 的更多恒等式。下一个引理表明，交换性等价于切除性质。

引理 3.3. 对于 $\mathrm{Thick}\ \mathcal{T}$ 中的一对 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，以下条件等价。

(1) $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 这一对是交换的。(2)

典范态射

$$\psi\colon L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} \longrightarrow L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} \oplus L_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}$$

是一个同构。

(3) 典范态射

$$\psi_X\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(-,X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{U}}(-,X)\oplus\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{V}}(-,X)$$

对所有 $X\in\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$, 都是同构。

(4) 典范态射 $L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\to L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}$ 是同构。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 满足以下条件的对象 $X\in\mathcal{T}$

$$L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}H_X \longrightarrow L_{\mathcal{U}}H_X\oplus L_{\mathcal{V}}H_X$$

是同构的构成一个厚子范畴 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{T}$。由引理 3.1 可知 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{X}$。因此 ψ 是同构, 因为任何形如 $\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}F$ 的函子都是可表函子的一个滤过余极限 H_X, 其中 $X\in\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$。

(2) $\Rightarrow$ (3) 对每个 $X\in\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$, 我们有 $\psi H_X=\psi_X$。

(3) $\Rightarrow$ (1) 对于 $X\in\mathcal{V}$ 态射 ψ_X 特化为 $\operatorname{Hom}^{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(-,X)\to\operatorname{Hom}^{\mathcal{T}/\mathcal{U}}(-,X)$, 对于 $X\in\mathcal{U}$也类似。因此 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是交换的, 这同样由引理 3.1得出。

(1) $\Rightarrow$ (4) 对象 $X\in\mathcal{T}$ 满足 $L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}H_X\to L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}H_X$ 是同构的那些对象构成一个厚子范畴 $\mathcal{X}\subseteq\mathcal{T}$。由引理 3.1 可得$\mathcal{U}$, $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{X}$。因此复合

$$L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\xleftarrow{\sim} L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\to L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}$$

是一个同构, 因为任何形如 $\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}F$ 的函子都是可表函子 H_X 的滤过余极限, 其中 $X\in\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$。

(4) $\Rightarrow$ (1) 假设 $L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\xrightarrow{\sim}L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}$。与 $\Gamma_{\mathcal{V}}$ 复合得到 $L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\xrightarrow{\sim}L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}$, 因此 $\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\xrightarrow{\sim}\Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}$ 由引理 3.1得出。与 $\Gamma_{\mathcal{U}}$ 复合得到$L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}}=0$, 因此

$$\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\xleftarrow{\sim}\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}}\xrightarrow{\sim}\Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}}.$$

因此, $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$ 是交换的。 □

引理 3.4. 设 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}\in\operatorname{Thick}\mathcal{T}$ 是交换的。则有以下结论。

(1) 典范态射 $L_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}}\to L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}$ 是同构。(2) 典范态射 $L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}\to L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}$ 是同构。(3) 典范态射 $\Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}}\to\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}L_{\mathcal{V}}$ 是同构。

证明。 考虑由 2.1 给出的正合列（ $\mathcal{V}$和 $\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$。我们与$L_{\mathcal{U}}$ 复合, 得到以下图表。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Sigma^{-1}L_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Sigma L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma^{-1}\delta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\gamma} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Sigma^{-1}L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Sigma L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

现在考虑复合态射

$$L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\xrightarrow{\beta}L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}\xrightarrow{\gamma}L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}.$$

那么, β 由引理 3.1可知是同构, 而 $\gamma\beta$ 由引理 3.3可知是同构。因此, γ 是同构, 由五引理可知 δ 是同构。类似的论证可得最后一个同构。 □

引理 3.5. 设 $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\operatorname{Thick}\mathcal{T}$ 彼此交换。则我们有典范同构

$$L_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}}\xrightarrow{\sim}L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\xleftarrow{\sim}L_{\mathcal{V}}L_{\mathcal{U}}.$$

此外, 我们有典范同构

$$\Gamma_{\mathcal{V}}L_{\mathcal{U}}\xleftarrow{\sim}\Gamma_{\mathcal{V}}L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\cong L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}}\xrightarrow{\sim}L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}$$

and

$$\Gamma_{\mathcal{V}}L_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}L_{\mathcal{U}} \cong L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} \xleftarrow{\sim} L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}.$$

证明。 第一组和第三组同构序列由引理 3.4 得出，第二组序列则由引理 3.1。 □

下面的引理说明，交和并保持中心元。

引理 3.6. 设 $\mathcal{U},\mathcal{V}\in \mathsf{Thick}\mathcal{T}$，并假设 $\mathcal{U}$ 是中心的。

(1) 元素 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$ 在 $\mathsf{Thick}\mathcal{V}$ 中是中心的。(2) 元素 ($\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$)$/\mathcal{V}$ 在 $\mathsf{Thick}\mathcal{T}/\mathcal{V}$ 中是中心的。

证明. (1) 设 $\mathcal{X}\in\mathsf{Thick}\mathcal{V}$。那么， $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{X}$ 的对象之间的任意态射（两个方向皆可）都经过 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{X}=(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})\wedge\mathcal{X}$ 中的某个对象分解。

(2) 注意，对于任意 $\mathcal{X}\in\mathsf{Thick}\mathcal{T}$ 包含 $\mathcal{V}$ 函子 $\Gamma_{\mathcal{X}}$ 限制为函子 $\mathsf{Coh}\,\mathcal{T}/\mathcal{V}\to\mathsf{Coh}\,\mathcal{T}/\mathcal{V}$ 在此处与 $\Gamma_{\mathcal{X}/\mathcal{V}}$ 相同，因为 $\Gamma_{\mathcal{X}}L_{\mathcal{V}}\cong L_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{X}}$。利用引理 3.5

$$\Gamma_{\mathcal{X}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}L_{\mathcal{V}}\cong\Gamma_{\mathcal{X}}\Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}}\cong\Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{X}}L_{\mathcal{V}}\cong\Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{X}}\cong\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}L_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{X}}\cong\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{X}}L_{\mathcal{V}},$$

因此，当限制到 $\mathsf{Coh}\,\mathcal{T}/\mathcal{V}$时， $\Gamma_{\mathcal{X}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\cong\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{X}}$ □

Mayer–Vietoris 序列。一对可交换子范畴会产生一对长正合序列。事实证明，交换性实际上等价于存在这样的 Mayer–Vietoris 序列。

命题 3.7。设 $\mathcal{U},\mathcal{V}\in\mathsf{Thick}\mathcal{T}$ 可交换。那么存在典范正合序列

$$(\lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}})\quad \cdots\longrightarrow\Sigma^{-1}L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\longrightarrow L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\xrightarrow{(1)}L_{\mathcal{U}}\oplus L_{\mathcal{V}}\longrightarrow L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\longrightarrow\Sigma L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\longrightarrow\cdots$$

and

$$(\gamma_{\mathcal{U},\mathcal{V}})\quad \cdots\longrightarrow\Sigma^{-1}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\longrightarrow\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\xrightarrow{(2)}\Gamma_{\mathcal{U}}\oplus\Gamma_{\mathcal{V}}\longrightarrow\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\longrightarrow\Sigma\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\longrightarrow\cdots$$

其中 (1) 和 (2) 由 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}\subseteq\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}\subseteq\mathcal{V}$ 的包含关系诱导。

证明。 正合列 (2.1由 $\mathcal{U}$ 给出，并与 $L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\to L_{\mathcal{V}}$ 复合后，得到正合列之间的态射。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Sigma^{-1}L_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \to & L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}} & \longrightarrow & \Sigma\Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \to & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Sigma^{-1}L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Sigma\Gamma_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

这里我们使用引理 $L_{\mathcal{U}}L_{\mathcal{V}}=L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}$ 中的识别 3.4，同构则由引理 3.1 得出。将它们求逆后得到连接态射$L_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\to\Sigma L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}$，然后通过标准论证将该图表转化为形如 $\lambda_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ 的正合列；参见 [24, 引理 10.7.4]。第二个正合列的证明类似。 □

推论 3.8。对于一对 $\mathcal{U}$、 $\mathcal{V}\in\mathsf{Thick}\mathcal{T}$，以下条件等价。

(1) 这对 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ 是交换的。(2) 存在一个正合的 Mayer–Vietoris 序列$\lambda_{\mathcal{U},\ \mathcal{V}}$。(3) 对每个对象 $X\in\mathcal{T}$，都存在一个典范正合列

$$\begin{aligned}\cdots\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(-,X)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{U}}(-,X)\oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{V}}(-,X)\to\\ \to\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\vee\mathcal{V})}(-,X)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(-,\Sigma X)\to\cdots.\end{aligned}$$

证明。(1) $\Rightarrow$ (2) 这可由命题3.7得出。

(2) $\Rightarrow$ (3) 对于 $X \in \mathcal{T}$，应用 Mayer–Vietoris 序列 $\lambda_{\mathcal{U},\,\mathcal{V}}$ 至 H_X。(3) $\Rightarrow$ (1) 对于 $X \in \mathcal{U} \vee \mathcal{V}$，序列 $\lambda_{\mathcal{U},\,\mathcal{V}} H_X$ 给出一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})}(-,X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{U}}(-,X) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{V}}(-,X).$$

因此，根据引理 3.3，$\mathcal{U}$，$\mathcal{V}$ 这一对是交换的。 □

这一结果反映了经典情形：拓扑空间 X中的一对子空间 A，$B \subseteq X = A \cup B$。在这种情况下，同调理论的 Mayer–Vietoris 序列等价于一种关于 A 与 B对称的切除性质；参见 [24, 10。7]。其三角化类比是引理 3.3中的同构 $L_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{V}} \xrightarrow{\sim} L_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}$。相关但并不等价的是第二诺特同构 $\mathcal{V}/(\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{U}\wedge\mathcal{V})/\mathcal{U}$。

文献中有大量关于三角范畴的 Mayer–Vietoris 序列 [4, 7, 21, 23], ，其中包括一些有趣的应用。我们重新得到其中的一部分，并指出它们都（隐含地）基于一对交换的厚子范畴。一个典型例子是满足 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(U,V) = 0$ 且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(V,U) = 0$ 的子范畴 $\mathcal{U},\mathcal{V}$，其中对所有 $U \in \mathcal{U}$ 和 $V \in \mathcal{V}$均成立。

分配性。回顾一下，若一个格中的任意元素 x,y,z 都满足等式

$$(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

一个等价条件是，格中的任意元素 x,y,z 都满足等式

$$(x \vee z) \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z.$$

格 Thick$\mathcal{T}$ 很少是分配的。不过，将范围限制在该格中的中心元时，我们便能得到分配性。证明还需要另一个技术性引理。

引理 3.9。设 $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W} \in$属于 Thick $\mathcal{T}$，并假设 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$。若 $\Gamma_{\mathcal{W}} \xrightarrow{\sim} \Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}$，则$\mathcal{W} = \mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$。

证明。令 $X \in \mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$。于是 $\Gamma_{\mathcal{W}}H_X \cong \Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}H_X \cong H_X$。因此 $H_X \in$Coh $\mathcal{W}$，从而 $X \in \mathcal{W}$。 □

命题 3.10。设 $\mathcal{U},\mathcal{V} \in$Thick $\mathcal{T}$ 是中心的。那么 $\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$ 是中心的。此外，对于所有 $\mathcal{W} \in$ Thick$\mathcal{T}$，我们有

$$(\mathcal{U}\wedge\mathcal{W}) \vee (\mathcal{V}\wedge\mathcal{W}) = (\mathcal{U}\vee\mathcal{V}) \wedge \mathcal{W}$$

and

$$(\mathcal{U}\vee\mathcal{W}) \wedge (\mathcal{V}\vee\mathcal{W}) = (\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}) \vee \mathcal{W}$$

证明。显然，$\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$ 是中心的，因为

$$\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{W}} \cong \Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{W}} \cong \Gamma_{\mathcal{W}}\Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} \cong \Gamma_{\mathcal{W}}\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}.$$

现在我们证明 $\mathcal{U}\vee\mathcal{V}$ 是中心的，并将此与第一个恒等式的证明结合起来。考虑以下 Mayer–Vietoris 序列，其中中间的序列用到了 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{V}\wedge\mathcal{W}$ 根据引理 3.6是交换的。

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{W}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{W}} \oplus \Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{W}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{W}} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}\wedge\mathcal{W}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{W}} \oplus \Gamma_{\mathcal{V}\wedge\mathcal{W}} & \longrightarrow & \Gamma_{(\mathcal{U}\wedge\mathcal{W})\vee(\mathcal{V}\wedge\mathcal{W})} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{W}}\Gamma_{\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{W}}\Gamma_{\mathcal{U}} \oplus \Gamma_{\mathcal{W}}\Gamma_{\mathcal{V}} & \longrightarrow & \Gamma_{\mathcal{W}}\Gamma_{\mathcal{U}\vee\mathcal{V}} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

竖直同构显然，因为 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是中心的。包含关系

$$(\mathcal{U} \wedge \mathcal{W}) \vee (\mathcal{V} \wedge \mathcal{W}) \subseteq (\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \wedge \mathcal{W}$$

是自动成立的。因此我们可以应用引理 3.9，然后由五引理得到关于 $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}$的断言。我们得出，中心元构成 $\mathsf{Thick}\mathcal{T}$ 的一个分配子格。 □

我们推广命题3.10 ，并利用一些标准论证为任意并建立相同的断言。

命题 3.11. 设 $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ 是 $\mathsf{Thick}\mathcal{T}$中的一个中心元族。那么$\bigvee_{i\in I}\mathcal{U}_i$ 是中心的，并且

$$\bigvee_{i\in I}(\mathcal{U}_i \wedge \mathcal{V}) = (\bigvee_{i\in I}\mathcal{U}_i) \wedge \mathcal{V}$$

对所有 $\mathcal{V} \in \mathsf{Thick}\mathcal{T}$均成立。

证明。 置 $\mathcal{U} = \bigvee_{i\in I}\mathcal{U}_i$。 根据命题 $\mathcal{U}_J = \bigvee_{i\in J}\mathcal{U}_i$ 对所有有限的 $J \subseteq I$均为中心的3.10。现在选取对象 $U \in \mathcal{U}$ 和 $V \in \mathcal{V}$。那么 $U \in \mathcal{U}_J$ 对某个有限的 $J \subseteq I$ 成立，因此 U 与 V 之间的任意态射都经过 $\mathcal{U}_J \wedge \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$中的一个对象分解。于是 $\mathcal{U}$ 是中心的。

包含关系 $\bigvee_{i\in I}(\mathcal{U}_i \wedge \mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$显然。对于另一个包含关系，我们再次使用命题 3.10。事实上，任意对象 $X \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$属于 $\mathcal{U}_J \wedge V = \bigvee_{i\in J}(\mathcal{U}_i \wedge \mathcal{V})$，其中某个有限 $J \subseteq I$，因此 X 属于 $\bigvee_{i\in I}(\mathcal{U}_i \wedge \mathcal{V})$。 □

中心子范畴的框架。回顾一下，格是框架，当且仅当它是完备的（即存在任意并），并且满足以下无限分配律：对于所有元素 $(x_i)_{i\in I}$ 和 y ，等式

$$\bigvee_{i\in I}(x_i \wedge y) = (\bigvee_{i\in I}x_i) \wedge y.$$

框架态射是保持有限交和任意并的格态射。

框架 F 对应于其点空间 $\mathrm{Pt}\,F$ 。点按定义是一个框架态射 $p\colon F \to \{0,1\}$，而开集具有如下形式

$$U(a) := \{p \in \mathrm{Pt}\,F \mid p(a) = 1\} \qquad (a \in F).$$

对于拓扑空间 X ，我们可以关联其开子集帧 ΩX，由此得到一对伴随函子

$$\mathbf{Frm} \underset{\Omega}{\overset{\mathrm{Pt}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Top}^{\mathrm{op}}.$$

若赋值 $a \mapsto U(a)$ 给出同构 $F \xrightarrow{\sim} \Omega\,\mathrm{Pt}\ F$，则框架 F 是空间帧。通过赋值，将 $\mathrm{Pt}\,F$ 中的点与 F 的素元对应起来会很方便

$$\mathrm{Pt}\,F \ni p \longmapsto \bigvee_{p(a)=0} a \in F.$$

中心厚子范畴构成一个子格

$$Z(\mathsf{Thick}\,\mathcal{T}) \subseteq \mathsf{Thick}\,\mathcal{T}$$

由命题3.10可知。事实上，这个格是一个空间帧。

推论 3.12. 中心厚子范畴构成一个空间帧，因此中心厚子范畴的格与某个饱和拓扑空间的开子集格相同。

证明。 无限分配律可由命题3.11推出。应用佐恩引理可得到足够多的素元，使得该框架是空间的；参见 [12]中定理 4.7 的证明。 □

赋值 $\mathcal{T} \mapsto Z(\mathsf{Thick}\,\mathcal{T})$ 在如下意义下是函子性的。

推论 3.13. 对任意三角子范畴 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ 典范函子$\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{S}$ 诱导出框架态射

$$Z(\mathrm{Thick}\,\mathcal{T}) \longrightarrow Z(\mathrm{Thick}\,\mathcal{S}), \qquad \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U} \wedge \mathcal{S}$$

and

$$Z(\mathrm{Thick}\,\mathcal{T}) \longrightarrow Z(\mathrm{Thick}\,\mathcal{T}/\mathcal{S}), \qquad \mathcal{U} \mapsto (\mathcal{U} \vee \mathcal{S})/\mathcal{S}.$$

证明。 由引理可知这些映射是良定义的 3.6。根据命题 3.10 和 3.11，它们保持有限交和任意并。 □

中心支撑。设本质小三角范畴 $\mathcal{T}$，令

$$\mathrm{Spc}_{\mathrm{cent}}\,\mathcal{T} := \mathrm{Pt}\,Z(\mathrm{Thick}\,\mathcal{T})$$

表示与 $\mathcal{T}$ 的中心厚子范畴框架相关联的空间。对于任意对象 $X \in \mathcal{T}$，其中心支撑是 $Z(\mathsf{Thick}\,\mathcal{T})$ 中不包含 X 的素元 $\mathcal{P}$ 的集合，因此

$$\mathrm{supp}_{\mathrm{cent}}\,X := \{\mathcal{P} \in \mathrm{Spc}_{\mathrm{cent}}\,\mathcal{T} \mid X \notin \mathcal{P}\}. \tag{3.1}$$

对于对象类 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$，我们定义

$$\mathrm{supp}_{\mathrm{cent}}\,\mathcal{X} := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{supp}_{\mathrm{cent}}\,X,$$

它等于满足 $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{P}$ 的素理想 $\mathcal{P}$ 的集合。

推论 3.14. (1) 映射 $\mathcal{U} \mapsto \mathrm{supp}_{\mathrm{cent}}\,\mathcal{U}$ 在 $Z(\mathsf{Thick}\,\mathcal{T})$ 与 $\mathrm{Spc}_{\mathrm{cent}}\,\mathcal{T}$ 的开子集帧之间诱导出一个同构。(2) 对于 $\mathsf{Thick}\,\mathcal{T}$ 中任意一对 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$，存在一个 Mayer–Vietoris 序列 $\lambda_{\mathcal{U},\,\mathcal{V}}$ 前提是 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中至少有一个是中心的。

证明。 这只是推论3.8 和 3.12的另一种表述。 □

4. Examples

在为任意三角范畴引入中心厚子范畴的格之后，现在该来看一些例子了。

张量三角范畴。设 $\mathcal{T} = (\mathcal{T}, \otimes, 1)$ 是一个张量三角范畴，即一个赋有对称幺半结构且该结构在每个变量上都是正合的三角范畴。则 $\mathsf{Coh}\,\mathcal{T}$ 继承一个对称幺半结构，该结构在每个变量上都是正合的，并且保持滤过余极限，其定义为 $H_X \otimes H_Y = H_{X \otimes Y}$，对所有 $X, Y \in \mathcal{T}$ 均成立。若存在一个正合函子$D\colon \mathcal{T}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{T}$ 以及一个自然同构，则称范畴 $\mathcal{T}$ 是刚性的

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X \otimes Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, DX \otimes Z)$$

对所有 $X, Y, Z \in \mathcal{T}$ 均成立。注意，在这种情况下，对所有 $X \in \mathcal{T}$，都有 $X \xrightarrow{\sim} D^2X$。

引理 4.1. 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性张量三角范畴，$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ 是一个厚张量理想。那么 $\mathsf{Coh}\,\mathcal{U}$ 和 $\mathsf{Coh}\,\mathcal{T}/\mathcal{U}$ 是 $\mathsf{Coh}\,\mathcal{T}$的张量理想。

证明。我们先考虑 Coh $\mathcal{U}$。设 $E,F\in\operatorname{Coh}\mathcal{T}$写成滤过余极限 $E=\operatorname{colim}_i H_{X_i}$和 $F=\operatorname{colim}_j H_{X_j}$。若 $F\in\operatorname{Coh}\mathcal{U}$，则可假设对所有$j$都有 $X_j\in\mathcal{U}$。因此，对所有 i， $H_{X_i}\otimes F\cong\operatorname{colim}_j H_{X_i\otimes X_j}$都属于 $\operatorname{Coh}\mathcal{U}$，因为 $\mathcal{U}$是一个张量理想，故 $E\otimes F\cong\operatorname{colim}_i(H_{X_i}\otimes F)$ 属于 Coh $\mathcal{U}$。

现在考虑 Coh $\mathcal{T}/\mathcal{U}$，其中刚性如下所示。设 $F\in\operatorname{Coh}\mathcal{T}/\mathcal{U}$和$U,X\in\mathcal{T}$。那么我们有

$$(H_X\otimes F)(U)\cong\operatorname{Hom}(H_U,H_X\otimes F)\cong\operatorname{Hom}(H_{DX\otimes U},F)\cong F(DX\otimes U)=0$$

当 $U\in\mathcal{U}$时。对于任意 $E=\operatorname{colim}_i H_{X_i}$在 $\operatorname{Coh}\mathcal{T}$ 中，我们得出 $E\otimes F$属于 Coh $\mathcal{T}/\mathcal{U}$，因为

$$(E\otimes F)(U)\cong\operatorname*{colim}_i(H_{X_i}\otimes F)(U)=0\qquad\text{for}\qquad U\in\mathcal{U}.$$ □

命题 4.2. 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性张量三角范畴。那么任意一对厚张量理想都是交换的。

证明。 我们给出两种证明；第二种证明归功于 Kent Vashaw[25] ，且不使用张量积的交换性。

设 $\mathcal{U}$， $\mathcal{V}\in$厚子范畴 $\mathcal{T}$为张量理想。由引理 4.1 我们知道 $\operatorname{Coh}\mathcal{U}$和 $\operatorname{Coh}\mathcal{T}/\mathcal{U}$是 Coh $\mathcal{T}$的张量理想。由此我们推出同构

$$\Gamma_{\mathcal{U}}\cong(\Gamma_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes-\qquad\text{and}\qquad L_{\mathcal{U}}\cong(L_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes-$$

如下。对于 $F\in\operatorname{Coh}\mathcal{T}$，考虑正合列

$$\cdots\longrightarrow(\Gamma_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F\longrightarrow F\longrightarrow(L_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F\longrightarrow\cdots$$

并应用 $\Gamma_{\mathcal{U}}$。我们有

$$\Gamma_{\mathcal{U}}((\Gamma_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F)\cong(\Gamma_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F\qquad\text{and}\qquad\Gamma_{\mathcal{U}}((L_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F)=0$$

因为

$$(\Gamma_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F\in\operatorname{Coh}\mathcal{U}\qquad\text{and}\qquad(L_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F\in\operatorname{Coh}\mathcal{T}/\mathcal{U}$$

由本证明的第一部分可知。因此 $(\Gamma_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F\xrightarrow{\sim}\Gamma_{\mathcal{U}}F$，而同构 $(L_{\mathcal{U}}H_{\mathbb{1}})\otimes F\xrightarrow{\sim}L_{\mathcal{U}}F$的证明类似。现在，交换性 $\Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}}\cong\Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}}$ 成立。

第二个证明更直接。给定 $U\in\mathcal{U}$ 和 $V\in\mathcal{V}$，任意态射 $U\to V$都可分解为

$$U\to U\otimes DU\otimes U\to V\otimes DU\otimes U\to V$$

其中 $V\otimes DU\otimes U$属于 $\mathcal{U}\wedge\mathcal{V}$。由对称性，态射 $V\to U$也同样如此。因此， $\mathcal{U}$、 $\mathcal{V}$ 这一对是交换的。□

注记 4.3。 （1）在例 4.13中，可以找到一对不交换的厚张量理想。

（2）第二个证明表明，即使张量积不满足交换律，该命题仍然成立 [25]。

（3）关于该命题的一个前身，参见 [10]中的命题6.5。

下面这个直接推论解释了为什么在若干有趣的例子中，所有厚子范畴都是中心的。这包括交换环上的完美复形范畴，或有限谱的稳定同伦范畴。

推论4.4。如果一个张量三角范畴由其张量单位生成，那么所有厚子范畴都是中心的。

证明。 该假设意味着 $\mathcal{T}=$ 厚$\mathbb{1}$ ，这表明所有厚子范畴都是张量理想。特别地，Coh $\mathcal{U}$和 $\operatorname{Coh}\mathcal{T}/\mathcal{U}$都是 Coh 的张量理想$\mathcal{T}$，对所有厚的 $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{T}$均成立。现在应用命题 4.2中的论证。□

注 4.5。 若假设具有刚性，则即使张量积不满足交换律，该推论仍然成立；此时可使用命题 4.2的第二个证明。

中心作用。设 R 是一个分次交换环。我们只考虑分次 R-模，而 $\operatorname{Spec} R$ 表示 R 的齐次素理想集合，并赋予 Zariski 拓扑。我们固定一个三角范畴 $\mathcal{T}$，其上通过分次环同态 $R \to Z^*(\mathcal{T})$ 到 $\mathcal{T}$ 的分次中心，赋予一个 R-线性作用；参见 [7, 11]。这意味着，对于所有对象 X、$Y \in \mathcal{T}$

$$\operatorname{Hom}^*_{\mathcal{T}}(X,Y) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \Sigma^n Y)$$

是一个分次 R-模。此外，对于 $F \in \operatorname{Coh}\mathcal{T}$，以及 $X \in \mathcal{T}$ 这个分次阿贝尔群

$$F^*(X) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F(\Sigma^{-n} X)$$

是一个 R-模。

设 Φ 是 R 中齐次元素构成的乘法封闭集。对于一个 R-模 M，定义

$$M[\Phi^{-1}] := M \otimes_R R[\Phi^{-1}]$$

并注意，$M[\Phi^{-1}] = 0$ 当且仅当对于所有满足 $\mathfrak{p} \cap \Phi = \varnothing$ 的 $R \in \operatorname{Spec}$，均有 $M_{\mathfrak{p}} = 0$。我们如下定义一个三角范畴 $\mathcal{T}[\Phi^{-1}]$。其对象与 $\mathcal{T}$ 中的对象相同。对于态射，定义

$$\operatorname{Hom}^*_{\mathcal{T}[\Phi^{-1}]}(X,Y) := \operatorname{Hom}^*_{\mathcal{T}}(X,Y)[\Phi^{-1}].$$

$\mathcal{T}[\Phi^{-1}]$ 中的正合三角由与 $\mathcal{T}$ 中的正合三角在典范函子 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}[\Phi^{-1}]$下的像同构的三角给出。该函子的核是厚子范畴

$$\mathcal{T}_\Phi := \{X \in \mathcal{T} \mid H^*_X[\Phi^{-1}] = 0\}$$

由 [8, 引理 3.5] 可得一个三角等价

$$\mathcal{T}/\mathcal{T}_\Phi \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}[\Phi^{-1}]. \tag{4.1}$$

对于每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{谱} R$，上述构造都有一个特例。我们将对 $\mathfrak{p}$处的态射进行局部化所得到的三角范畴记为 $\mathcal{T}_{\mathfrak{p}}$，因此

$$\operatorname{Hom}^*_{\mathcal{T}_{\mathfrak{p}}}(X,Y) := \operatorname{Hom}^*_{\mathcal{T}}(X,Y)_{\mathfrak{p}}.$$

记号 $X \mapsto X_{\mathfrak{p}}$ 用于表示典范函子 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_{\mathfrak{p}}$。

引理 4.6. 形如 $\mathcal{T}_\Phi$ 的厚子范畴是中心的。

证明. 为简化记号，令 $\Gamma_\Phi := \Gamma_{\mathcal{T}_\Phi}$ 和 $L_\Phi := L_{\mathcal{T}_\Phi}$。注意

$$(L_\Phi F)^* \cong F^*[\Phi^{-1}]$$

对每个 F 属于 $\operatorname{Coh}\mathcal{T}$ 由（4.1）得出。现在固定一个厚子范畴 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$。我们有典范同构

$$L_\Phi\Gamma_\mathcal{U} \xleftarrow{\sim} \Gamma_\mathcal{U} L_\Phi \Gamma_\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \Gamma_\mathcal{U} L_\Phi$$

因为 L_Φ 限制为一个函子 $\operatorname{Coh}\,\mathcal{U} \to \operatorname{Coh}\mathcal{U}$。接下来考虑以下具有正合行的交换图。

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Gamma_\Phi\Gamma_\mathcal{U} & \longrightarrow & \Gamma_\mathcal{U} & \longrightarrow & L_\Phi\Gamma_\mathcal{U} \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\cdots & \longrightarrow & \Gamma_\mathcal{U}\Gamma_\Phi\Gamma_\mathcal{U} & \longrightarrow & \Gamma_\mathcal{U}\Gamma_\mathcal{U} & \longrightarrow & \Gamma_\mathcal{U}L_\Phi\Gamma_\mathcal{U} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & \Gamma_\mathcal{U}\Gamma_\Phi & \longrightarrow & \Gamma_\mathcal{U} & \longrightarrow & \Gamma_\mathcal{U}L_\Phi \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

于是由五引理可得同构 $\Gamma_\Phi\Gamma_\mathcal{U} \cong \Gamma_\mathcal{U}\Gamma_\Phi$。因此 $\mathcal{T}_\Phi$ 是中心的。 □

对于由有限多个齐次元素生成的 R 的理想 $\mathfrak{a}$，令

$$V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$$

并考虑厚子范畴

$$\mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})} := \{X \in \mathcal{T} \mid X_\mathfrak{p} = 0 \text{ for } \mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} R) \setminus V(\mathfrak{a})\}.$$

引理 4.7. 形如 $\mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})}$ 的厚子范畴是中心的。

证明。取齐次生成元 $r_1, .., r_n$，它们属于 $\mathfrak{a}$并令 $\Phi_i = \{r_i^p \mid p \geq 1\}$对于 $1 \leq i \leq n$。则 $\mathcal{T}_{V(r_i)} = \mathcal{T}_{\Phi_i}$ 对每个 i 都是中心的，由引理 4.6可知。我们有$V(\mathfrak{a}) = V(r_1) \cap \cdots \cap V(r_n)$，因此

$$\mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})} = \mathcal{T}_{V(r_1)} \wedge \cdots \wedge \mathcal{T}_{V(r_n)}$$

由命题 3.10可知，其是中心的。 □

由有限生成理想给出的集合 $V(\mathfrak{a})$ 构成一个分配格，且

$$V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \qquad \text{and} \qquad V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

引理 4.8。对于 $U = V(\mathfrak{a})$ 和 $V = V(\mathfrak{b})$，有

$$\mathcal{T}_{U\cap V} = \mathcal{T}_U \wedge \mathcal{T}_V \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{T}_{U\cup V} = \mathcal{T}_U \vee \mathcal{T}_V.$$

证明。第一个等式显然。对于第二个等式，选取 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的齐次生成元 r_1、...、r_m 与 s_1、...、s_n，使得

$$V(\mathfrak{a}) = V(r_1) \cap \cdots \cap V(r_m) \qquad \text{and} \qquad \mathrm{V}(\mathfrak{b}) = V(s_1) \cap \cdots \cap V(s_n).$$

对于次数为 $|r|$ 的齐次元素 $r \in R$ 和对象 $X \in \mathcal{T}$，我们将 $X/\!\!/r$ 记为 $X \xrightarrow{r} \Sigma^{|r|}X$ 的锥，并且有

$$\mathcal{T}_{V(r)} = \operatorname{thick}(\{X/\!\!/r \mid X \in \mathcal{T}\})$$

由命题 3.10]。对于齐次元素 r、$s \in R$，应用八面体公理可知 $X/\!\!/rs$ 是 $X/\!\!/r$ 和 $\Sigma^{|r|}X/\!\!/s$ 的扩张。因此

$$\mathcal{T}_{V(r)\cup V(s)} = \mathcal{T}_{V(rs)} = \mathcal{T}_{V(r)} \vee \mathcal{T}_{V(s)}.$$

利用命题 $Z(\operatorname{Thick}\mathcal{T})$ 中的分配性，我们得到 3.10，于是有

$$\mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})} \vee \mathcal{T}_{V(\mathfrak{b})} = \bigwedge_{i,j}(\mathcal{T}_{V(r_i)} \vee \mathcal{T}_{V(s_j)}) = \bigwedge_{i,j} \mathcal{T}_{V(r_i s_j)} = \mathcal{T}_{V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})} = \mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})}$$

因为

$$V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \bigcap_{i,j} V(r_i s_j).$$ □

回顾一下，集合 $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ 具有扎里斯基开且拟紧的补集，当且仅当 $V = V(\mathfrak{a})$ 是由 R 中有限多个齐次元素生成的理想 $\mathfrak{a}$。若子集 $V \subseteq \operatorname{Spec} R$ 可写为 $V = \bigcup_i V_i$，且每个 $(\operatorname{Spec} R)\setminus V_i$ 都是扎里斯基开且拟紧的，则称其为 Thomason 子集。Thomason 子集恰好是 $\operatorname{Spec} R$ [14] 上 Hochster 对偶拓扑的开子集。我们用 $\operatorname{Spec}^\vee R$ 表示赋予此对偶拓扑的素理想谱。

给定一个框架 F，若 $x \leq \bigvee_{i\in I} y_i$ 蕴含 $x \leq \bigvee_{i\in J} y_i$ 对某个有限子集 $J \subseteq I$ 成立，则称 $x \in F$ 有限或紧。若框架中的每个元素都可以写成有限元的并，且有限元构成一个子格，则该框架称为相干。在这种情况下，我们用 F^c 表示有限元构成的子格，并注意到，对于任意框架 F'，格态射 $F^c \to F'$ 都唯一地延拓为框架态射$F \to F'$。

下面的命题刻画了 $\mathcal{T}$ 中由中心环作用给出的厚子范畴；它们是 $\operatorname{Thick}\mathcal{T}$ 中的中心元。

命题 4.9。该赋值

$$V \longmapsto \mathcal{T}_V := \bigvee_{V(\mathfrak{a})\subseteq V} \mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})}$$

诱导出一个框架态射，将 $\operatorname{Spec}^\vee R$ 的开子集映至 $\mathcal{T}$的中心厚子范畴。

证明。 $\operatorname{Spec}^\vee R$ 的开集构成一个相干框架，其有限元恰好是形如 $V(\mathfrak{a})$ 的集合。于是，只需注意到形如 $\mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})}$ 的厚子范畴由引理 4.7 可知是中心的，并且映射 $V(\mathfrak{a}) \mapsto \mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})}$ 由引理 4.8 是一个格态射，便可由前面的讨论得出断言。□

有趣的是，对于给定的三角范畴，何时所有中心子范畴都由中心环作用给出。在代数例子中，这种情况似乎更有可能；而对于有限谱的稳定同伦范畴，情况似乎并非如此。

诺特上同调。设 R 是一个分次交换环， $\mathcal{T}$ 是一个三角范畴，其上通过分次环同态$R \to Z^*(\mathcal{T})$作用着一个 R-线性作用。我们假设 R 是诺特的，并且对于 $\mathcal{T}$中的所有对象 X、 Y， $\operatorname{Hom}^*_{\mathcal{T}}(X,Y)$都是一个诺特的$R$-模。

对象 X 的上同调支撑按定义为

$$\operatorname{supp}_R X := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid X_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

引理 4.10. 我们有 $\operatorname{supp}_R X = V(\mathfrak{a})$，其中 $\mathfrak{a}$ 表示环同态 $R \to \operatorname{End}^*_{\mathcal{T}}(X)$ 的核。

证明. 注意到 $X_{\mathfrak{p}} = 0$ 当且仅当 $(H^*_X)_{\mathfrak{p}} = 0$。于是，由于对每个 $Y \in \mathcal{T}$， R 在 $H^*_X(Y) = \operatorname{Hom}^*_{\mathcal{T}}(Y,X)$ 上的作用都经由 $\operatorname{End}^*_{\mathcal{T}}(X)$ 分解，且对任意有限生成的 R-模 M，等式即得。

$$\operatorname{supp}_R M := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0\} = V(\operatorname{Ann}_R M). \qquad \square$$

引理 4.11. 对于对象 $X \in \mathcal{T}$ 和 Thomason 集 $V \subseteq \operatorname{Spec} R$， 我们有

$$\operatorname{supp}_R X \subseteq V \quad \Longleftrightarrow \quad X \in \mathcal{T}_V.$$

证明. 根据前一个引理，我们有一个理想 $\mathfrak{a}$， 使得 $\operatorname{supp}_R X = V(\mathfrak{a})$。那么 $\operatorname{supp}_R X \subseteq V$ 蕴含 $X \in \mathcal{T}_{V(\mathfrak{a})} \subseteq \mathcal{T}_V$。另一方面， $X \in \mathcal{T}_V$ 蕴含对于某个 $V(\mathfrak{b}) \subseteq V$ 有 $X \in \mathcal{T}_{V(\mathfrak{b})}$， 因此 $\operatorname{supp}_R X \subseteq V(\mathfrak{b}) \subseteq V$。□

遗传代数。对于有限维遗传代数，我们考虑其完美复形范畴。在这种情况下，由例外序列生成的厚子范畴已通过非交叉分划进行了分类 [15, 16]。下面的引理表明，它们通常不是中心的。

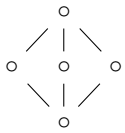
引理 4.12. 设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ 是一个厚子范畴，且其包含关系存在左伴随和右伴随。若 $\mathcal{U}$ 是中心的，则 ${}^\perp\mathcal{U} = \mathcal{U}^\perp$。

证明。我们有

$$\operatorname{Ker} \Gamma_{{}^\perp\mathcal{U}} = \operatorname{Coh}\mathcal{U} \qquad \text{and} \qquad \operatorname{Ker} \Gamma_{\mathcal{U}} = \operatorname{Coh}\mathcal{U}^\perp.$$

因此 $\Gamma_{{}^\perp\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{U}} = 0$，而当 ${}^\perp\mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{U}^\perp$时 $\Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{{}^\perp\mathcal{U}} \neq 0$。另一方面，我们有 $\operatorname{Ker} L_{\mathcal{U}} = \operatorname{Coh}\mathcal{U}$。因此 $L_{\mathcal{U}}L_{{}^\perp\mathcal{U}} = 0$，而当 ${}^\perp\mathcal{U} \not\supseteq \mathcal{U}^\perp$时 $L_{\mathcal{U}}L_{{}^\perp\mathcal{U}} \neq 0$。□

例 4.13。我们考虑域 k 上的路径代数 $A = k(\circ \to \circ)$，以及有限生成 A-模的有界导出范畴 $\mathcal{T} = \mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\, A)$，它与 A上的完美复形范畴同构。厚子范畴格的哈斯图如下。



对于任意真厚子范畴 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$，我们有

$$\mathrm{Thick}\,\mathcal{T} = \{0, \mathcal{U}, {}^{\perp}\mathcal{U}, \mathcal{U}^{\perp}, \mathcal{T}\}.$$

特别地，$Z(\text{厚子范畴}\,\mathcal{T}) = \{0, \mathcal{T}\}$ 由引理 4.12。

A-模范畴具有由逐点张量积定义的对称幺半结构，其中张量积取在 k上。除了由张量单位生成的厚子范畴外，所有厚子范畴都是张量理想。这给出一对厚张量理想$\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$，使得 $\Gamma_{\mathcal{U}}\Gamma_{\mathcal{V}} \ncong \Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}}$，因为 $\mathcal{U}$ 与$\mathcal{V}$ 之间存在非零态射，但反向不存在。

上述例子可以推广如下。

例 4.14. 设 R 是一个交换环，并考虑矩阵环 $T_2(R) = \left[\begin{smallmatrix} R & R \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right]$上的完美复形范畴 $\mathcal{T} = \mathsf{Perf}\ T_2(R)$。该范畴具有显然的 R-作用，从而给出一个嵌入

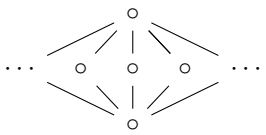
$$\mathrm{Thick}\,\mathrm{Perf}\, R \hookrightarrow Z(\mathrm{Thick}\,\mathcal{T}) \subsetneq \mathrm{Thick}\,\mathcal{T}.$$

例 4.15. 我们考虑固定域 k 上的射影直线 $\mathbb{P}^1$ 上的凝聚层范畴及其导出范畴 $\mathcal{T} = \mathrm{D}^b(\mathrm{coh}\,\mathbb{P}^1)$；它等价于路径代数 $k(\circ \rightrightarrows \circ)$上的完美复形范畴。

我们回顾 [18] 中对 $\mathrm{Thick}\,\mathcal{T}$ 的描述。存在一个格同构

$$\{\text{thick subcategories of } \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}\,\mathbb{P}^1) \text{ generated by vector bundles}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

由 $\mathsf{thick}\,\mathcal{O}(n) \mapsto n$ 给出，其中 $\mathbb{Z}$ 表示由以下哈斯图给出的格：



我们有

$$(\mathrm{thick}\,\mathcal{O}(n))^{\perp} = \mathrm{thick}\,\mathcal{O}(n-1) \quad \text{and} \quad {}^{\perp}(\mathrm{thick}\,\mathcal{O}(n)) = \mathrm{thick}\,\mathcal{O}(n+1).$$

因此，根据引理 $\mathcal{O}(n)$ 这种形式的子范畴不是中心的4.12。另一方面，我们有一个格同构

$$\{\text{thick tensor ideals of } \mathbf{D}^b(\mathrm{coh}\,\mathbb{P}^1)\} \xrightarrow{\sim} \{\text{Thomason subsets of } \mathbb{P}^1\}$$

由 $\mathcal{U} \mapsto \bigcup_{X\in\mathcal{U}} \mathsf{supp}\, X$ 给出。这导出了一个同构[2]

$$\mathrm{Thick}\,\mathbf{D}^b(\mathrm{coh}\,\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\sim} \{\text{Thomason subsets of } \mathbb{P}^1\} \amalg \mathbb{Z}.$$

现在设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$是一个真厚张量理想，且 $\mathcal{V} = \text{厚}\,\mathcal{O}(n)$。那么 $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = 0$，但 $\Gamma_{\mathcal{V}}\Gamma_{\mathcal{U}} \neq 0$，因为对于 $\mathcal{U}$ 中任意非零挠层X，我们都有 $\mathsf{Hom}(\mathcal{O}(n)\ X) \neq 0$。因此，$\mathcal{U}$不是中心的。我们得出结论，$Z(\text{厚}\ \mathcal{T}) = \{0, \mathcal{T}\}$。

[2]设 L', L'' 是一对格，其最小元分别为 $0', 0''$，最大元分别为 $1', 1''$。那么，$L' \amalg L''$ 表示通过将 $0' = 0''$ 与 $1' = 1''$等同，从不交并 $L' \cup L''$（视为偏序集的和）得到的新格。

群代数。设 G 是一个有限群，且 k 是一个域。我们考察群代数 kG上的有限生成模的稳定范畴 $\mathcal{T} = \operatorname{stmod} kG$ 。这是一个刚性张量三角范畴，其张量理想恰好是由群上同调的中心作用所确定的厚子范畴 [6]。

例 4.16（Benson）。一般而言，存在不是张量理想的中心厚子范畴。令 $B_0 = e(kG)$ 表示由中心幂等元 $e \in kG$ 给出的 kG 的主块。我们用 $R := Z(kG)$ 表示中心，并令 $V := V((1-e)R) \subseteq$ 谱 R。那么 $\operatorname{stmod} B_0 = \mathcal{T}_V$ 是中心的，并且它是张量理想当且仅当 $B_0 = kG$。例如，对于 $G = A_7$ 且 $\operatorname{char} k = 2$，我们有 $\operatorname{thick} k = \operatorname{stmod} B_0 \neq \mathcal{T}$。

例 4.17（Benson）。令 $G = \mathbb{Z}/3 \times S_3$ 且 $\operatorname{char} k = 3$。那么 $\operatorname{thick} k$ 不是中心的。存在两个简单模，分别记为 k 和 ε（符号表示）。有一个支撑于核 [5] 中的单列模 $X = [k, \varepsilon, k]$，以及一个非零态射 $k \to X$。然而，厚子范畴 $\operatorname{thick} k$ 与 $\operatorname{thick} X$ 的交为零。

进一步了解 $Z(\operatorname{stmod} kG)$ 及其关联空间似乎很有意思。当 $Z(\operatorname{stmod} kG)$ 等于厚张量理想格时，相应的空间由群上同调环 $H^*(G, k)$ 的射影簇给出；但一般情形需要更大的空间，目前尚不清楚。例如，所有中心子范畴是否都由分次交换环的中心作用给出?

5. The relative perspective

令 $\mathcal{T}$ 为一个本质小三角范畴。例子表明，我们应回到定义 3.2，引入中心厚子范畴格的以下相对版本。

定义 5.1. 设 $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{Thick} \mathcal{T}$ 是一个子格，对有限交和任意并封闭，且特别包含 0 和 $\mathcal{T}$。那么，如果 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{T}$ 中所有 $\mathcal{V}$ 都可交换，就称 $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ 相对于 $\mathcal{T}$ 是中心的。一个等价条件是：$\mathcal{U}$ 中对象之间的态射与任意一个 $\mathcal{V} \in \mathcal{T}$ 之间的态射（任一方向）都可分解并通过 $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ 中的某个对象。我们记

$$Z(\mathcal{T}) := \{\mathcal{U} \in \mathcal{T} \mid \mathcal{U} \text{ is central relative to } \mathcal{T}\}.$$

定理 5.2. 设 $\mathcal{T} \subseteq$ 厚子范畴$\mathcal{T}$ 是一个对任意并封闭的子格。那么，其中心 $Z(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}$ 也构成一个对任意并封闭的子格。此外，$Z(\mathcal{T})$ 是一个空间帧；对于 $\mathcal{T}$ 中任意一对 $\mathcal{U}$、$\mathcal{V}$，只要 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 中至少有一个是中心的，Mayer–Vietoris 序列 $\lambda_{\mathcal{U},\,\mathcal{V}}$ 便存在。

证明。 我们已经给出了 $\mathcal{T} =$ 厚子范畴$\mathcal{T}$的证明。命题 3.10 和 3.11 以及推论 3.12 中的论证均可直接沿用。关于 Mayer–Vietoris 序列，参见推论3.8。 □

由此可知，当 $\mathcal{T}$时， $Z(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$是一个分配格。反之则未必成立；参见例4.13。

例 5.3. 设 $\mathcal{T}$ 是一个刚性张量三角范畴（不一定是交换的），且 $\mathcal{T} \subseteq \operatorname{Thick} \mathcal{T}$是所有厚张量理想构成的子格。那么，根据命题 4.2，$(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。特别地，与这个框架相对应的空间

$$\operatorname{Spc}_{\otimes} \mathcal{T} := \operatorname{Pt} \mathcal{T}$$

与 Balmer 空间 Spc$\mathcal{T}$ [1, 17] 及其非交换类比物 [12, 19]（在 Hochster 对偶意义下）相一致。

例 5.4。考虑 $\mathcal{T}$ 的分次中心 $Z^*(\mathcal{T})$，并令

$$T := \{\mathcal{T}_V \mid V \subseteq \operatorname{Spec} Z^*(\mathcal{T}) \text{ is Thomason}\}.$$

于是 $T \subseteq Z$(厚 $\mathcal{T}$) 根据命题 4.9 是一个框架，$Z(T) = T$。可以将其对应的空间称为

$$\operatorname{Spc}_{\mathrm{coh}} \mathcal{T} := \operatorname{Pt} T$$

$\mathcal{T}$的上同调谱；它具有普适性，具体而言，任意分次交换环 R 通过同态 $R \to Z^*(\mathcal{T})$ 给出的中心作用，都会诱导一个连续映射 $\operatorname{Spc}_{\mathrm{coh}} \mathcal{T} \to \operatorname{Spec}^{\vee} R$。特别地，$\operatorname{Spc}_{\mathrm{coh}} \mathcal{T}$ 的开子集参数化了 $\mathcal{T}$ 的厚子范畴，而这些厚子范畴由任意分次交换环的中心作用给出。

对于刚性张量三角范畴 $\mathcal{T}$，$\operatorname{Spc}_{\otimes} \mathcal{T}$ 与 $\operatorname{Spc}_{\mathrm{coh}} \mathcal{T}$之间存在一种有趣的关系；关于这一点的讨论，请参见 [2]。

对于 $T \subseteq$ 厚$\mathcal{T}$ 的任意选取，都有一个显而易见的概念，即相对于 T 的对象在 $\mathcal{T}$中的中心支撑，它类似于通过 (3.1) 定义的中心支撑，并参数化 $Z(T)$ 中的元素；参见推论 3.14。特别地，可以表述中心支撑的一个普适性质，并以 T 作为输入。详情留给感兴趣的读者。

References

[1] P. Balmer，《张量三角范畴中的素理想谱》，《纯粹与应用数学杂志》588（2005），149–168。[2] P. Balmer，《谱、谱、谱——张量三角谱与自同态环的 Zariski 谱》，《代数几何与拓扑》10（2010），第3期，1521–1563。[3] P. Balmer，《张量三角几何》，载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II* 85 2010 ，–112，Hindustan Book Agency，新德里，。[4] P. Balmer 和 G. Favi，《三角几何中的粘合技术》，《季刊数学杂志》58（2007），第4期，415–441。[5] D. J. Benson，《有限群主块中模的上同调》，《纽约数学杂志》1（1994/95），196–205。[6] D. J. Benson、J. F. Carlson 和 J. Rickard，《稳定模范畴的厚子范畴》，《数学基础》153（1997），第1期，59–80。[7] D. Benson、S. B. Iyengar 和 H. Krause，《三角范畴的局部上同调与支撑》，《高等师范学校科学年刊》 ´Ec. Norm. Sup´er.（4）41（2008），第4期，573–619。[8] D. Benson、S. B. Iyengar 和 H. Krause，《小三角范畴的局部-整体原理》，《剑桥哲学学会数学论文集》158（2015），第3期，451–476。[9] A.B. Buan、H. Krause 和 Ø. Solberg，《支撑簇——一种理想方法》，《同调、同伦及其应用》9（2007），45–74。[10] A. B. Buan、H. Krause、N. Snashall 和 Ø. Solberg，《支撑簇——一种公理化方法》，《数学杂志》295（2020），第1–2期，395–426。[11] R.-O. Buchweitz 和 H. Flenner，《奇异空间的全局 Hochschild（上）同调》，《数学进展》217（2008），第1期，205–242。[12] S. Gratz 和 G. Stevenson，《以空间逼近三角范畴》，arXiv:2205.13356。[13] A. Grothendieck 和 J. L. Verdier，《预层》，载于 Pr ´ *SGA 4 Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas Tome 1. Théorie des Topos* 269，efaisceaux，in , , ,《数学讲义》第卷，Springer，海德堡，1972-1973，第1–184页。[14] M. Hochster，《交换环中的素理想结构》，《美国数学会汇刊》142（1969），43–60。[15] A. Hubery 和 H. Krause，《非交叉划分的范畴化》，《欧洲数学会杂志》（JEMS）18（2016），第10期，2273–2313。[16] C. Ingalls 和 H. Thomas，《非交叉划分与箭图表示》，《数学汇编》145（2009），第6期，1533–1562。[17] J. Kock 和 W. Pitsch，《导出范畴中的 Hochster 对偶与概形的无点重构》，《美国数学会汇刊》369（2017），第1期，223–261。[18] H. Krause 和 G. Stevenson，《射影直线的导出范畴》，载于 *Spectral structures and topological methods in mathematics* 275 297，，–EMS 会议报告丛书，EMS 出版社，苏黎世，2019。

[19] D. K. Nakano、K. B. Vashaw 和 M. T. Yakimov，《非交换张量三角几何》，《美国数学杂志》144（2022），第6期，1681–1724。[20] A. Neeman，《Brown 表示定理与无幻象三角范畴》，《代数学杂志》151（1992），第1期，118–155。[21] J. Rickard，《稳定范畴中的幂等模》，《伦敦数学会杂志》（2）56（1997），第1期，149–170。[22] C. M. Ringel，《世纪之交的代数》，在第七届全国代数会议上的报告，北京师范大学，1999年10月，《东南亚数学通报》25（2001），第1期，147–160。[23] R. W. Thomason，《三角子范畴的分类》，《数学汇编》105（1997），第1期，1–27。[24] T. tom Dieck，*Algebraic topology*，《EMS 数学教材》，欧洲数学会（EMS），苏黎世，2008。[25] K. B. Vashaw，私人通信。[26] J.-L. Verdier，
Des catégories dérivées des catégories abéliennes，《Ast´erisque》239，法兰西数学会，1996。

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, D-33501 Bielefeld, Germany
Email address: hkrause@math.uni-bielefeld.de