皇家天文学会月刊 000,1–?? (???)　　预印本 2023年1月26日　　使用 MNRAS LATEX 样式文件 v3.0 编译

嵌套椭球平衡图形 III. 与引力矩 J_{2n} 的联系

B. Basillais[3]⋆ 和 J.-M. Hur´e[1,2]†
[1] Univ. Bordeaux, LAB, UMR 5804, F-33615, Pessac, France [2] CNRS, LAB, UMR 5804, F-33615, Pessac, France
[3] Institute for Computational Science, University of Zurich, Winterthurerstr. 190, 8057, Zurich, Switzerland

arXiv:2301.10469v1 [astro-ph.EP] 25 Jan 2023

收稿日期 ??? / 接受日期 ???

摘要
在嵌套图形理论的框架下，我们推导出由 $\mathcal{L}$ 个均匀层构成、层间由椭球面分隔且彼此相对旋转的系统的引力矩 J_{2n} 表达式。随后，我们讨论如何求解逆问题，即寻找能够“精确”再现一组可观测量的平衡构型（即内部结构），这些可观测量包括赤道半径、总质量、形状和前几个引力矩。每个表面有两个系数 J_{2n}受到约束，因此需要 $\mathcal{L}=1+\frac{n}{2}$ 层（n 为偶数）才能将 J_2 确定到 J_{2n}。如文中所示，这个问题已经存在严重的简并，其根源在于系统中任意两个彼此共焦的椭球面不会改变任何矩。随着所涉及层数的增加，问题的复杂性也随之上升；考虑每一层的自转速率可以降低这种复杂性。我们以木星为试验对象来说明这一方法，具体针对 $\mathcal{L}=2$、3和4。对于这颗行星，$\mathcal{L}>2$的可能内部结构有无限多种。中间层的扁率可以更大或更小，自转也可以比相邻层更慢或更快。大而质量高的核心构型始终存在。对于 $\mathcal{L}\geq 4$，预测的核心质量较低（约为几个地球质量）。结果与使用自洽场方法得到的数值解非常吻合。

关键词：引力 — 行星和卫星：气态行星 — 行星和卫星：内部 — 恒星：内部 — 方法：解析 — 方法：数值

1 引言

天体的外部引力势通常可按球面距离 r 从中心起展开为级数。在轴对称和赤道对称条件下，该势可表示为（例如Kellogg 1929；Heiskanen &Moritz 1976）

$$\Psi_{\rm ext.}(\boldsymbol{r})=-\frac{GM}{r}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n}(\mu)\right], \quad (1)$$

其中，P_{2n} 是 n阶勒让德多项式，$\mu=\cos\theta$（θ 为从 z轴量起的余纬），$a\leq r$ 是该系统的参考赤道半径，M 是总质量，系数 J_{2n} 定义为

$$Ma^{2n}J_{2n}=2\pi\iint_{\rm body}\rho(r,\mu)r^{2n}P_{2n}(\mu)r^2d\mu dr. \quad (2)$$

由于该引力势完全决定了绕天体运行的任意试探粒子的运动，因此有极大的机会对质量密度分布施加约束 $\rho(r,\mu)$体内的情况，前提是已知某些数据，即 a、M，尤其是 J_{2n}。基于此，自20世纪70年代以来，随着空间探测器穿越太阳系，人类对行星内部的理解得到了极大提升。近期对木星前几个引力矩的测量（Folkner 2017；Durante 等人，2020），结合基于复杂状态方程、输运机制、表面风等因素的复杂模型，为进一步揭示深层旋转物质的性质提供了新的机会（Wahl 等，2017；Helled 2018）。模型能否正确输出 J_{2n}——尽管这些系数并不是探测最中心区域的最合适量——仍然是一项重大挑战（Guillot 1999；Miguel 等人，2016；Nettelmann 2017a；Cisneros-Parra 等，2019a；Neuenschwander 等，2021；Nettelmann 等，2021）。木星的情况十分特殊：其偶数阶和奇数阶矩一直测量到 J_{12}，与土星相比具有相对较高的精度（例如 Iess 等，2019），其中 J_2 的测量范围从 10^{-8} 到 J_8 的1%（更高阶的误差棒更大）。

⋆ 电子邮箱：baptiste.boutin-basillais@uzh.ch
† 电子邮箱：jean-marc.hure@u-bordeaux.fr

© ??? 作者

1.1 自转与界定表面的层

行星内部结构建模中的一个主要困难，早已为经典理论所知（例如 Volterra，1903；V´eronet 1912；Love 等，1914），来自自转；自转是天体形成和演化至某种准稳定状态的结果。与大多数研究自引力系统的工作一样，自转分布通常是预先规定的，并倾向于采用刚体自转等简单定律（例如 Hachisu 1986）。一个著名的解归功于 Maclaurin（基于 Newton 关于均质椭球体的定理）：刚体自转中由扁球体表面包围的均匀天体是完美的平衡态。遗憾的是，不可能仅通过堆叠 Maclaurin椭球的片段来构造一个整体自转的复合体。实际上，简单地逐层堆叠并不能自动确保处处合力为零，也不能确保每个界面处的压力平衡。正如 Poincar´e（1888年）所断言的，

only layers bounded by confocal spheroidal surfaces are strictly compatible with a rigidly rotating body 1890 。

Hamy（ ）通过证明共焦平衡所需的质量密度分布——无论涉及的层数 $\mathcal{L}$ 是多少——在物理上都不合理，完善了这一理论。Abramyan & Kaplan（1974年）以及 Montalvo 等（1983）在另一背景下也确立了这一结果。正如 V´eronet（1912）所引述的，以及 Chambat（1994）近期所证明的，并由 Poh´anka（2011）和 Hur´e（2022a,b）通过递推得到的，该结论在连续极限下仍然成立，此时 $\mathcal{L} \to \infty$。这些经典结果十分稳健，并且已通过采用自洽场方法求解 $\mathcal{L}$-问题所获得的数值解得到充分确认；这不仅适用于不可压缩情形，也适用于非零多方指数（Kiuchi 等，2010；Kadam 等，2016；Basillais & Hur´e 2021）。Poincar´e 的定理及其他相关定理明确指出，具有扁球体边界层且各层彼此不共焦的整体自转非均匀天体，必然只能是近似解。通过放宽某个基本假设，可以恢复精确解（或至少是自洽解）。事实上，对于整体自转而言，不仅等压面/等密度面通常不是相似面，而且严格来说，它们还会略微偏离椭圆（Volterra，1903；V´eronet 1912）；例如可参见 Cisneros-Parra 等（2017），他们研究了扁椭球。在此基础上，Zharkov & Trubitsyn（1970年）通过对压力（或有效势）的表面等值面进行双变量展开，并结合最小化过程，证明木星的前几个矩完全可以获得。七阶处理仅用四层便能够达到J_{12}（Nettelmann 等，2021）。Concentric Maclaurin Spheroid（CMS）模型同样允许偏离完美椭圆，该模型由 Hubbard（2013）提出。这些方法被广泛应用于木星和土星的建模（Nettelmann 2017b；Militzer 等，2019；Ni，2020），并采用整体自转。

1.2 关于估算 J_{2n}'s 的矩的评论

正如（2）所示，精确确定引力矩可能存在困难。当 $\rho(\mathbf{r})$ 不是解析函数，而是由某种离散化产生时，尤其如此。首先，系数预期会随阶数 n迅速减小。例如，$J_2/J_4 \approx 2 \times 10^3$ 对于太阳（Rozelot & Kosovichev 2021），以及 $J_2/J_{10} \approx 10^5$ 木星（Durante 等人 2020）。毋庸置疑，要同时获得较大和极小的数值（例如，Debras & Chabrier 2018），都需要高分辨率。若要通过二阶离散化格式，以几 J_2 的相对精度求得 10^{-8}（进而以几 10^{-6} 的精度求得 J_4，其数值比 J_2 小约 25 倍），原则上数值分辨率优于约 10^{-4} 即可。这要求计算网格至少包含 $10^3 \times 10^3$ 个节点（轴对称条件下），若反复使用，计算时间可能会变得难以承受。其次，尖锐的密度梯度，乃至层间的跃变（由状态方程变化所致），是另一项严峻障碍；尤其对谱方法而言更是如此。原则上，只要质量密度是坐标的光滑可导函数，谱方法就比局部方法更强大。另一个重要的技术难点来自核函数的特定形式（即其中含有勒让德多项式 P_{2n}）（例如，Mecheri & Meftah 2021）。对于取正值和负值的任意函数（如 P_{2n}的情形），由于相消抵消，数值求积的效率通常会降低；对于相对极小的量，这一问题尤为关键。最后，受自转变形的层间界面必须以极高精度定位，尤其是为了进行这类数值积分。因此，任何能够消除或减少估算 J_{2n}不确定性的质量密度分布，即便将其定义为空间坐标的分段函数，也至关重要。本文所考虑的均匀层即属此类。

1.3 嵌套椭球体理论简介：研究动机

本文采用Hur´e(2022年a,b)中阐述的嵌套椭球体理论（以下分别称为论文 I 和论文 II），建立引力矩 J_{2n} 与由 $\mathcal{L}$ 异形椭球层（即由 *non-similar spheroidal surfaces* 界定的层）构成、处于异步运动状态（即各层可以以 *different rates* 自转）的天体内部结构之间的联系。这里所说的结构，是指界定各层的椭圆集合 $\{E_i(a_i,b_i)\}_{\mathcal{L}}$ 、从中心到表面的质量密度集合 $\{\rho_i\}_{\mathcal{L}}$ ，以及各层各自的自转速率 $\{\Omega_i\}_{\mathcal{L}}$。实际上，该系统的平衡要求特定的动力学配置，并非所有 $\{E_i,\rho_i,\Omega_i\}_{\mathcal{L}}$都可行。嵌套扁球体形式理论虽是一种近似理论，但其设计适用于共享 *small confocal parameters* $c_{i,\ j}$的扁球体，即

$$|c_{i,j}| = \frac{1}{a_j^2}\left|a_i^2 - b_i^2 - (a_j^2 - b_j^2)\right| \ll 1, \qquad (3)$$

在慢速旋转的情况下，这对应于小椭率 ϵ_i，其中 $\epsilon_i^2 = 1 - b_i^2/a_i^2$。

1.4 关于该方法对木星（及其他行星）适用性的初步说明

嵌套图形理论的一些基本假设限制颇多，可能并不适用于所有情况。不可压缩层（零多方指数）的假设，或许很适合类地行星或海洋——

行星。这对于气态行星或恒星而言则更为关键。此外，经向环流（即流体上升/下降流）可能会显著扰乱纯静水平衡，例如在天体表面附近。有些层可能呈现纬度相关的自转状态（可能是科里奥利力和地转流作用的结果），这超出了本研究的范围。为了使问题具体化并说明这种方法，我们需要考虑一个具体案例。我们选用木星[1] 作为“试验对象”（其偶数阶矩的精度已知至 $n = 6$）。实际上，由于质量密度是预先给定的（且每一层内均为常数），我们可以反向处理通常的 J_{2n}问题：将这些系数以及行星的半径、质量、扁率和行星核的自转速率视为 *input parameters*。这大大简化了问题。在大多数研究中（例如Zharkov & Trubitsyn 1970年；Hubbard 2013年），都是通过对矩（作为输出量）进行最小化过程来寻找最佳结构。

人们普遍认为木星主要由氢和氦组成，但对木星内部，尤其是无法通过光子发射探测到的深处，仍存在诸多不确定性。我们尚不清楚其化学组成随半径的详细变化，包括较重元素的比例与分布。另一个争议问题是质量密度剖面：各层是否彼此明显分隔，还是从中心到表面的转变相当平缓（例如 Miguel 等 2022）？近期模型将木星描述为由三个主要层组成：富含重元素的致密核心、由金属氢和氦构成的内部区域，以及由分子氢构成且氦含量较低的外层包壳（Militzer 等 2016；Helled 2018）。来自 *Juno* 探测器的观测似乎表明，木星存在一个巨大的稀释内核，其延伸范围可达行星半径的一半左右，从而为其结构增添了一个可能的新层（Wahl 等 2017；Ni 2019）。这引出了关于这种稀释内核如何形成的新问题（Liu 等 2019；M¨uller 等 2020）。

木星表面呈现出复杂的动力结构，快速的顺行与逆行纬向风延伸至 ~ 3000 km 深处（Guillot 等，2018；Kaspi，2018；Kaspi 等，2020），叠加在占主导地位的刚性运动之上。尽管这一层的动力学会受到科里奥利力的轻微影响，但相对于行星尺度而言，它非常薄，例如。其厚度仅为行星尺度的 4%，且仅包含总质量中的极小一部分。纬向风所在的深度可能不足以显著改变低阶引力矩 J_{2n} （$n < 5$ 通常如此）。相较于深部内部，纬向风对前几个引力矩的贡献低 1 至 3 个数量级，而且没有明确迹象表明其自转状态——据信类似固体自转（Kaspi，2013；Kaspi 等，2017）。在很深处，密度似乎随半径变化得非常缓慢（例如Wahl 等，2017；Neuenschwander 等，2021）。

[1] 还可以分析太阳系中的其他行星。就现有数据而言，土星的情况非常相似，尽管其 J_{2n}整体不确定性略高一些（Iess 等，2019）。海王星和天王星的约束条件则少得多。

考虑到行星的复杂性，我们很容易理解，当前的方法（至少就其现阶段而言）并非要与其他模型竞争，甚至取而代之，也不是要带来新的决定性见解。然而，我们表明，放宽对椭球面扁率的现有限制（例如参见Cisneros-Parra 等，2019a），并使各层的运动不同步（Volterra，1903），能够为解的多样性开辟新的前景。正如我们将看到的，$\mathcal{L} = \frac{n}{2} + 1$ 层足以再现偶次带谐波，直至 J_{2n} （即，四层足以匹配从 J_2 到 J_{12} 的偶数值）。与木星数据相容的双层解只有一个，但三层及以上的平衡态则有无穷多个，即便排除那些表层相对范围仅为百分之几的解。

1.5 文章内容

本文结构如下。第 2 节给出非均质 M 层体的质量 J_{2n}方程组，该层体由均质异形椭球体构成。本文还给出了样本中椭球面的相对几何形状以及质量密度分层的一些约束条件。随后，我们回顾整个结构的平衡条件，这些条件由样本中各层自转速率的表达式定义。特别地，通过将复合体中某一层的自转速率与一个已知值相匹配，我们得到了一个基本方程。所有问题均以无尺度形式呈现。第 3 至第 5 节分别利用木星数据探讨二层、三层和四层问题。本文还考察了 J_{2n}中的误差条的影响。本文使用 `DROP` 代码通过自洽场方法数值求解 $\mathcal{L}$层问题，并将其作为辅助工具（Basillais & Hur´e 2021），同时给出了一些示例。最后一节进行讨论，并简要展望未来的研究方向。

2 理论背景

2.1 均质扁球体的质量和引力矩

对于某些密度分布，系数 J_{2n} 在（2）中是完全解析的。特别地，当物体是均质旋转椭球（即扁球体）时，积分（2）的适当形式为

$$\iint_{E(a,b)} r^{2n+2} P_{2n}(\mu) d\mu dr = \frac{2}{3} a^{2n+3} \bar{\epsilon} \times j_{2n} \epsilon^{2n}, \qquad (4)$$

其中 ϵ 是边界面 E（a，b）的扁率，a而 b 分别是半长轴和半短轴，$\bar{\epsilon} = \sqrt{1-\epsilon^2} = b/a$ 是轴比，质量为 $M = \rho V$（体积为 $V = \frac{4}{3}\pi a^3 \epsilon$），系数 j_{2n} 由下式给出（另见 Heiskanen & Moritz 1976；Cisneros-Parra et al.2019b）

$$j_{2n} = -\frac{3(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}, \qquad n > 0. \qquad (5)$$

由于（2）关于 ρ 呈线性（这一性质是引力势固有的），因此适用叠加原理：

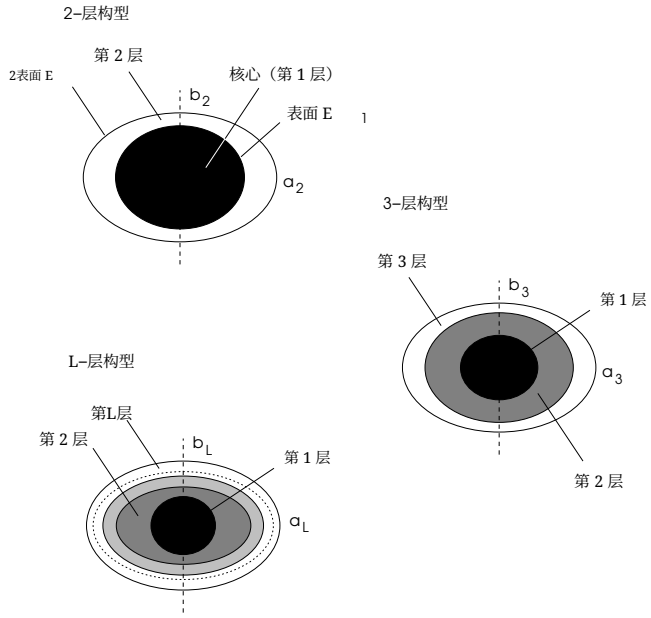


图 1. 由均匀层构成、以椭球面为界且相对旋转的复合体。

对于任意额外质量密度分布 $\delta\rho$，其对 M 和 J_{2n} 的贡献，只需分别将相应的额外质量 δM 和额外矩 δJ_n相加即可得到。

2.2 由 $\mathcal{L}$ 层构成、以椭球面为界的物体情形

考虑一个质量密度为 ρ_1、由表面 $E_1(a_1, b_1)$ 围成的均质扁球体（为方便起见，也称为一“层”），其上堆叠着 $\mathcal{L}-1$ 个均匀层，这些层具有相同的旋转轴和对称面，如图 1 所示。每一层（索引为 $i \geq 1$）在力学上支撑着一个更大的层（索引为 $i+1$），该层的质量密度为 ρ_{i+1}，外部由椭球面 $E_{i+1}(a_{i+1}, b_{i+1})$ 围成。最外层（索引为 $\mathcal{L}$）的质量密度为 $\rho_{\mathcal{L}}$，外部由 $E_{\mathcal{L}}(a_{\mathcal{L}}, b_{\mathcal{L}})$ 围成。在这些条件下，由 $\mathcal{L}$ 个异形椭球层组成的这一复合系统的总质量 M 和总 n 阶引力矩 J_{2n}（E_i 和 E_{i+1} 并非同心或相似）分别为

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_{\mathcal{L}} a_{\mathcal{L}}^3 \bar{\epsilon}_{\mathcal{L}} \left(1 + \sum_{i=1,\mathcal{L}-1} C_i\right), \tag{6}$$

and

$$MJ_{2n} = \frac{4}{3}\pi j_{2n}\rho_{\mathcal{L}} a_{\mathcal{L}}^3 \bar{\epsilon}_{\mathcal{L}} \epsilon_{\mathcal{L}}^{2n} \left(1 + \sum_{i=1,\mathcal{L}-1} C_i y_i^n\right), \tag{7}$$

其中

$$y_i = q_i^2 \frac{\epsilon_i^2}{\epsilon_{\mathcal{L}}^2} \geq 0, \tag{8}$$

$$q_i = \frac{a_i}{a_{\mathcal{L}}} \leq 1 \tag{9}$$

是层 i 相对于赤道半径 $a_{\mathcal{L}}$（天体的赤道半径），

$$\alpha_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}}, \tag{10}$$

是层 i 与层 $i+1$之间的质量密度跃变，而“系数” C_i 为

$$C_i = (\alpha_i - 1) q_i^3 \frac{\bar{\epsilon}_i}{\bar{\epsilon}_{\mathcal{L}}} \times \begin{cases} \prod_{\ell=i+1}^{\mathcal{L}-1} \alpha_\ell, \\ 1, \quad \text{if } i = \mathcal{L}-1, \end{cases} \tag{11}$$

其中 $i \in [1, \mathcal{L}-1]$ 从（8）到（11）。注意，C_i 与层 $i+1$ 相对于层 i的超额质量密度成正比，并且我们看到，$C_i = 0$ 消去了问题中的 y_i 变量，正如预期的那样（两个相邻层合并）。

方程（6）和（7）可写成无量纲形式，以 $\rho_{\mathcal{L}}/\bar{\rho}$表示，其中 $\bar{\rho} = M/V$ 为平均质量密度，并使用 η_{2n} 参数，其定义为

$$\eta_{2n} j_{2n} \epsilon^{2n} = J_{2n}, \quad n \geq 0. \tag{12}$$

注意，（7）应根据需要重复，以表示 J_2，J_4 至 J_{2n}，这意味着有 n 个方程。

2.3 嵌套条件。稳定性原理

我们假设椭球面完美嵌套，且彼此不相交（除赤道处 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或极点处 $\theta = 0$可能有一个交点外）。这样可以避免密度反转（见下文），尤其是避免出现难以想象的负质量密度区域。这些“浸入条件”要求 $q_{i+1} - q_i \geq 0$ 和 $b_{i+1} - b_i \geq 0$同时成立。后一不等式等价于 $q_{i+1}\bar{\epsilon}_{i+1} - q_i\bar{\epsilon}_i > 0$，也可以用 y_i表示。利用式（8），可得浸入条件为

$$\begin{cases} q_{i+1} - q_i > 0, & \text{(13a)} \\ q_{i+1}^2 - q_i^2 - (y_{i+1} - y_i)\epsilon_{\mathcal{L}}^2 > 0, & \text{(13b)} \end{cases}$$

这主要为所有 q_i设定了一个下限。实际上，如果 $y_{i+1} \geq y_i$，那么 q_{i+1} 必须严格大于 q_i。例如，当扁率随深度增加而减小时（最极端情况下，E_i 和 E_{i+1} 在极点处接触），就会出现这种情况。反之，如果 $y_{i+1} \leq y_i$，那么 q_{i+1} 可以等于 q_i（最极端情况下，E_i 和 E_{i+1} 在赤道处接触）。由于 q_i 不能超过 1，可知某个 y_i取值较大时可能会带来问题（见第 5节）。这取决于行星性质。注意，式（13a）和（13b）可以合并为一个更方便的不等式，即

$$q_{i+1} \geq \sqrt{\max\{q_i^2, q_i^2 - (y_{i+1} - y_i)\epsilon_{\mathcal{L}}^2\}} \equiv q_{i+1,\min}, \tag{14}$$

其强烈取决于 y_i的（见下文）。如果将所有椭率都刻意设为表面值 $\epsilon_{\mathcal{L}}$，则 $y_i = q_i$ 适用于所有层。这是 *coellipticity*的假设，但它与整体自转状态并不相容；参见论文 II 和 Cisneros-Parra 等人（2017年）。

此外，出于稳定性考虑，我们规定质量密度从中心到表面呈负梯度（即不存在密度反转），这意味着

$$\alpha_i > 1, \quad i \in [1, \mathcal{L}-1]. \tag{15}$$

2.4 y_i问题

假设 $a_{\mathcal{L}}$， $\epsilon_{\mathcal{L}}$， M 以及直到 J_{2n}的偶数阶矩均已知，那么，(6)和(7)总共表示 $n+1$ 个方程，其中有 $2\mathcal{L}-1$ 个未知数，即 $\rho_{\mathcal{L}}$、 C_i以及y_i。除非存在冗余方程，
*it is in principle possibleto solve this equation set*如果

$$n+1=2\mathcal{L}-1, \tag{16}$$

无论是否考虑结构的平衡，皆是如此。以下我们将其称为“y_i问题”。换言之，只要$\frac{n}{2}=\mathcal{L}-1$ 为整数（n 必须为偶数），数据集（$a_{\mathcal{L}}$、 $\epsilon_{\mathcal{L}}$、 M、 J_2、 $\dots J_{2n}$）最终都可以由一个 $\mathcal{L}$层的物体再现。此条件是必要条件，但不充分。

正如我们将看到的， y_i问题的解可通过求解一个 $\mathcal{L}-1$ 次多项式的根得到。显然，这些根直接取决于 J_{2n}，见（7），且必须为实数和正数，但这并无保证。仅依据（14），任何较大的根都可能使某个解失效。如果所有根都很大且彼此相差悬殊，也会出现这种情况。不仅 y_i 可以在不同层之间变化，其值也可能很小或很大，这主要取决于椭率。对于较小的椭球面和/或近球形的椭球面，它接近于零；若第 i 层的分数半径接近于一（因此其上方的层都非常薄），且 E_i 与 $E_{\mathcal{L}}$ 的椭率相近，则它接近于一。不过， y_i 最终可能远大于一。这种情况出现在 $E_{\mathcal{L}}$ 接近球形，而 E_i则相反，极为扁平且 q_i 接近于一时。然而，由于 $q_i\epsilon_i$ 不能超过一，因此必须满足

$$0\le y_i\le\frac{1}{\epsilon_{\mathcal{L}}^2},\qquad i\in[1,\mathcal{L}-1]. \tag{17}$$

y_i 的上限因此受最外层的扁率限制，且该上限大于 1。

2.5 典范集合 $\{Y_k\}$ 及排列

方程组（6）和（7）具有某种对称性。因此，如果找到y_1， y_2，……， $y_{\mathcal{L}-1}$）这一 y_i问题的一个解（其中包括 $\bar{\rho}/\rho_{\mathcal{L}}$ 和 C_i），那么该集合内各值的任意排列都是可接受的。原因在于各层不可互换。对于三层问题，至多有两种可能的排列，即（y_1，y_2）和（y_2， y_1）；而对于四层情形，则有 6 种。排列的总数取决于行星的数据。特别方便的做法是，在（$\mathcal{L}-1$）！种可能的排列中，定义一个 *canonical set*（Y_1， Y_2，……，$Y_{\mathcal{L}-1}$）作为基准，通过排列生成所有 y_i解，即

$$(y_1,y_2,\dots,y_{\mathcal{L}-1})=\begin{cases}(Y_1,Y_2,\dots,Y_{\mathcal{L}-1})\equiv S_{1,2,\dots,\mathcal{L}-1},\\(Y_2,Y_1,\dots,Y_{\mathcal{L}-1})\equiv S_{2,1,\dots,\mathcal{L}-1},\\\dots\\(Y_{\mathcal{L}-1},\dots,Y_2,Y_1)\equiv S_{\mathcal{L}-1,\dots,2,1},\end{cases}$$

实际上，我们通过按升序排列 Y_k的方式构造这个特殊集合，即 $Y_1<Y_2<\cdots<Y_{\mathcal{L}-2}<Y_{\mathcal{L}-1}$。这并非完全任意：这种分布大致对应于一种满足（13a）的“标准”构型，其中椭球面从中心到表面的扁率逐渐增大。

2.6 简并与超定

由于 C_i 和 y_i 总共包含三个参数（分数半径 q_i、扁率 ϵ_i 和跃变 α_i），我们可以看出， y_i问题的任意一个解都可能产生一个 *contin-uum of configurations*，它与同一组可观测量（$a_{\mathcal{L}}$、 $\epsilon_{\mathcal{L}}$、 M、 J_2、……、 J_{2n}）相匹配，但这些构型未必处于平衡状态；详见下文。若没有任何额外约束，该问题因此显得高度简并。首先，根据方程（8），存在无穷多组对应于给定$y_i\epsilon_{\mathcal{L}}^2$值的$(q_i,\epsilon_i)$。因此，每一层都通过其两个边界面成为简并的来源。注意，$\sqrt{y_i}\epsilon_{\mathcal{L}}$ 基本上代表
location of the focus of the ellipse E_i。其次，如上所述，由典范集合 $\{Y_k\}$得到的排列是多重解的另一个来源。在这个层次上，简并很重要，因为它提供了自由度，可用于确定其他可观测量，例如一个或多个层中的自转速率（见下文）。相反，如果指定了某些参数，问题可能会变得超定，因此适用性会差得多。例如，若我们为 $i\in[1,\mathcal{L}-1]$设定 $y_i=1$，则由方程（8）可得$q_i^2\epsilon_i^2-q_j\epsilon_j^2$。所有椭球面彼此 *confocal*（Poincar´e 1888年；Abramyan & Kaplan 1974年；Martinez et al. 1990）。因此，只要 $\mathcal{L}>1$，方程组（6）和（7）就会超定，除非满足以下条件之一：i）$C\equiv\sum_{i=1、\ \mathcal{L}-1}C_i=-1$，这意味着结构内部存在密度反转；或ii）$C\neq-1$，但对所有 n都有 $\eta_{2n}=1$，这种情况只有在单层时才可能出现，即 $\mathcal{L}=1$。若所有 y_i （ $y_{\mathcal{L}}$除外）都相等，那么只要满足以下条件之一，方程组仍会超定：i）若 $y_i\neq1$，则 $\mathcal{L}>2$；或ii）若 $y_i=1$，则 $\mathcal{L}>1$。另一个值得一提的超定情形是*coellipticity*。实际上，对于无尺度问题，异形椭球层系列由 $3\mathcal{L}-2$ 个参数描述。但若我们对 $i\in[1,\mathcal{L}-1]$施加 $\epsilon_i=\epsilon_{\mathcal{L}}$，参数数量便会减少到 $2\mathcal{L}-1$，恰如方程（16）所示。这意味着，对于给定的一组数据（$a_{\mathcal{L}}$、 $\epsilon_{\mathcal{L}}$、 M、 J_2、 $\dots J_{2n}$）， y_i 问题至多只有一个解，而与系统的自转状态或平衡状态无关（见下一节）。

2.7 动力学平衡的条件

为了判断哪些 q_i、 ϵ_i 和 α_i 的取值在满足（13a）、（13b）和（15）的情况下代表一种平衡，我们必须考察整体结构的动力学平衡。没有理由可以判断所有层是否都能以相同速率自转。每个自转层都必须满足类伯努利方程（由欧拉方程积分得到），并且所有界面处的压力 E_i 必须保持平衡。正如Hamy （1890年）所示，如果所有层（其内外边界均为椭球面）的椭率都接近于零，那么所有层都进行刚体自转在一阶近似下是可接受的。正如论文 I 和 II 所示，在更一般的情形下，只要共焦参数 $c_{i,\ j}$由

$$c_{i,j}=q_i^2\epsilon_i^2-\epsilon_j^2,\qquad i,j\in[1,\mathcal{L}]^2 \tag{18}$$

接近于零。这种延拓使我们能够考虑高度扁平的系统。在这种情况下，每一层的自转速率 Ω_i 都能被精确确定，其形式为

$$\Omega_i\equiv\Omega_i(\rho_{\mathcal{L}},q_1,\dots,q_{\mathcal{L}-1},\epsilon_1,\dots,\epsilon_{\mathcal{L}},\alpha_1,\dots,\alpha_{\mathcal{L}-1}), \tag{19}$$

对于 $i \in [1, \mathcal{L}]$。实际计算中，我们使用论文 II 中的（32）和（33）（此处未列出），通过递推得到形式如（19）的自转速率级数 Ω_i^2。参数的数量看起来很多，但在当前情形下可以有效地减少。首先， $\epsilon_{\mathcal{L}}$ 是已知的（它就是最外层的扁率）。其次，假设 y_i问题已得到求解；参见第2.4节。这意味着 α_i 取决于ϵ_i 以及 q_i 由（11）给出的量，而 ϵ_i 取决于由（ q_i8）给出的各'。结果表明，层$_i$的自转速率 Ω i 仅取决于 $\mathcal{L}-1$ 变量（这对所有层都成立）。如果我们选取各q_i'作为变量，那么（19）形式上就变为

$$\Omega_i \equiv \Omega_i(q_1, \ldots, q_{\mathcal{L}-1}), \tag{20}$$

若观测到的自转速率 $\Omega_{\rm obs}$ 可归因于样本中的单一层 $i_{\rm rot}$（通常归因于核心），则我们必须考虑一个补充方程

$$\chi_{\mathcal{L}}(q_1, \ldots, q_{\mathcal{L}-1}) = 0, \tag{21}$$

其中

$$\chi_{\mathcal{L}}(q_1, \ldots, q_{\mathcal{L}-1}) = \frac{\Omega^2_{i_{\rm rot}}(q_1, \ldots, q_{\mathcal{L}-1})}{\Omega^2_{\rm obs}} - 1, \tag{22}$$

并 $i_{\rm rot} = 1$ 将核心指定为该层（全文均采用这一假设）。显然，在此21维空间中，方程 ($\mathcal{L}-1$) 的根至少在一般情况下并无解析解，但可通过标准数值方法求得。

2.8 完整问题的方程组。策略

因此，可根据 ($a_{\mathcal{L}}$、 $\epsilon_{\mathcal{L}}$、 M、 J_2、 ……、 J_{2n}、$\Omega_{\rm obs}$) 推导出与这组观测数据相符的物理构型，满足 (6)、(7) 和 (21)，并满足 (17) 、 (14) 和 (15)。完整问题分两步求解：

- 首先，我们根据（ y_i问题，利用（6）和（7）求出解，并定义典范集合 $\{Y_k\}$；参见第 2.5节。随后，我们考察典范集合中所有与（14）和（17）相容的排列；其中一些集合 $\{y_i\}$ 可以排除。

- 其次，根据（21）构造 $\chi_{\mathcal{L}}$-函数，用以比较核心的理论自转速率与观测值。在这一步中，我们考虑y_i问题的解与 q_i、 ϵ_i 和 α_i 之间的关系，以减少变量数量；参见（22）。通过求出（22）的零点，并在（14）和（15）成立的条件下，我们得到能够精确再现数据的平衡态集合，不仅再现（$a_{\mathcal{L}}$、 $\epsilon_{\mathcal{L}}$、 M、 J_2、 $\ldots J_{2n}$），也再现 $\Omega_{\rm obs}$。对所有相关排列重复这一过程。

显然，如果 y_i 问题不存在任何解，或者拒绝所有排列（见第 2.4 节），就会陷入僵局，并使第二步无法执行。在这种情况下，基于实际的观测数据集，不可能存在平衡构型。反之则不然：对于 y_i问题的任何解，都不一定能导出物理上有意义的构型，因为 q_i、 ϵ_i 和 α_i 可能超出其适用／定义范围。

2.9 分层质量、转动惯量与高阶引力矩

对于完整问题的一个给定解，我们可以计算每一层的分数质量。我们有

$$\nu_1 = q_1^3 \frac{\bar{\epsilon}_1}{\bar{\epsilon}_{\mathcal{L}}} \frac{\prod_{\ell=1}^{\mathcal{L}-1} \alpha_\ell}{1 + \sum_{\ell=1,\mathcal{L}-1} C_\ell}, \tag{23}$$

对于最深层，以及

$$\nu_i = \frac{q_i^3 \bar{\epsilon}_i - q_{i-1}^3 \bar{\epsilon}_{i-1}}{\bar{\epsilon}_{\mathcal{L}}} \frac{\prod_{\ell=i}^{\mathcal{L}-1} \alpha_\ell}{1 + \sum_{\ell=1,\mathcal{L}-1} C_\ell} \tag{24}$$

对于 $i \in [2, \mathcal{L}]$。可以证明，浸入条件确保了 $\nu_i \geq 0$。另一个重要的量是归一化转动惯量，即

$$\frac{I_\Delta}{MR_{\rm e}^2} = \frac{2}{5} \frac{1 + \sum_{i=1,\mathcal{L}-1} C_i q_i^2}{1 + \sum_{i=1,\mathcal{L}-1} C_i}. \tag{25}$$

有趣的是，由于假设流体不可压缩，且式（7）中括号内项具有特定形式，因此可以通过递推求出 J_{2n} 之后的引力矩；见下文。

3 双层情形

3.1 方程组与关键函数 $\chi_2(q_1)$

根据第 2 节 $\mathcal{L} = 2$，总质量和前两个引力矩 J_2 和 J_4 由下式给出

$$\begin{cases} M = \frac{4}{3}\pi\rho_2 a_2^3 \bar{\epsilon}_2 (1 + C_1), & \text{(26a)} \\ M a_2^2 J_2 = \frac{4}{3}\pi j_2 \rho_2 a_2^5 \bar{\epsilon}_2 (1 + C_1 y_1), & \text{(26b)} \\ M a_2^4 J_4 = \frac{4}{3}\pi j_4 \rho_2 a_2^7 \bar{\epsilon}_2 (1 + C_1 y_1^2), & \text{(26c)} \end{cases}$$

其中 $q_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$,

$$y_1 \epsilon_2^2 = q_1^2 \epsilon_1^2 \in [0, 1]. \tag{27}$$

and

$$C_1 = (\alpha_1 - 1) q_1^3 \frac{\bar{\epsilon}_1}{\bar{\epsilon}_2}. \tag{28}$$

注意， $q_1 \in [q_{1,\min}, q_{1,\max}]$ 其中

$$\begin{cases} q_{1,\min}^2 = y_1 \epsilon_2^2, \\ q_{1,\max}^2 = 1 + (y_1 - 1)\epsilon_2^2, \end{cases} \tag{29}$$

其中，下界取在 $\epsilon_1 = 1$ （允许的最大值），上界对应于 $b_1 = b_2$（包围核心的包层在极点处厚度为零）。利用（12），上述方程组可写成如下紧凑形式

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \rho_2 (1 + C_1), & \text{(30a)} \\ \eta_2 (1 + C_1) = 1 + C_1 y_1, & \text{(30b)} \\ \eta_4 (1 + C_1) = 1 + C_1 y_1^2. & \text{(30c)} \end{cases}$$

并在已知 $\bar{\rho}$、 η_2 和 η_4 的情况下，求解 y_1、 C_1 和 ρ_2。该 y_i问题的唯一相关解为

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{\eta_2 - \eta_4}{1 - \eta_2}, & \text{(31a)} \\ C_1 = -\dfrac{1 - \eta_2}{y_1 - \eta_2}, & \text{(31b)} \\ \dfrac{\rho_2}{\bar{\rho}} = \dfrac{1}{1 + C_1}, & \text{(31c)} \end{cases}$$

其中 y_1 必须满足（17）。随后由（28）可推导出质量密度跃变，即

$$\alpha_1 = 1 + \frac{C_1 \bar{\epsilon}_2}{q_1^2 \sqrt{q_1^2 - \epsilon_2^2 y_1}} = \alpha_1(q_1). \tag{32}$$

从（27）可知， q_1 和 ϵ_1 尚未知。若无额外约束，两个极端构型之间原则上存在无穷多个解：i）核心是一个分数半径为 $q_{1,\,\min}$的扁平赤道盘；ii）核心在极点处裸露，并占据最大体积，此时 $q_{1,\,\max}$ 为相对赤道延伸。如第 2.7节所述，必须纳入复合结构的动力平衡条件。对于$\mathcal{L} = 2$，核心和周围包层的自转速率基本上取决于五个参数，即

$$\Omega_i \equiv \Omega_i(\rho_2, q_1, \epsilon_1, \epsilon_2, \alpha_1), \quad i \in \{1, 2\}, \tag{33}$$

其中 ϵ_2 已知。此外，由（27）可得 $\epsilon_2^2/\epsilon_1^2 = q_1^2/y_1$，而 α_1 由（32）给出。由于 ρ_2、 C_1 和 y_1 可由（31a）- （31c）得知，我们可以看出，Ω_i仅取决于一个变量，例如 q_1。若观测到的自转速率 $\Omega_{\rm obs}$是由核心产生的，则（21）写作

$$\chi_2(q_1) = 0, \tag{34}$$

其中

$$\chi_2(q_1) = \frac{\Omega_1^2(q_1)}{\Omega_{\rm obs}^2} - 1. \tag{35}$$

重现（a_2， ϵ_2， M， J_2， J_4，$\Omega_{\rm obs}$）的构型，基本上可通过求解（34）的根得到。对于小椭率，Ω_1 具有简单形式（见论文 I；相关函数 χ_2 见附录A；见下文）。请注意，如果将参考自转速率 Ω_{obs} 指定给包层，则会得到不同的 χ_2函数。

3.2 超越 J_4

超出 J_4 的矩可由（7）通过递推得到。实际上，在 n阶时，我们有

$$M a_2^{2n} J_{2n} = \frac{4}{3}\pi j_{2n} \rho_2 a_2^{2n+3} \epsilon_2^{2n} \bar{\epsilon}_2 (1 + C_1 y_1^{2n}), \tag{36}$$

或者 $\eta_{2n}\,(1+C_1) = 1 + C_1 y_1^{2n}$，利用（12）可写成无量纲形式。比较 η_{2n+2}， η_{2n} 和 η_{2n-2}，可得

$$\eta_{2n+2} - \eta_{2n} = y_1(\eta_{2n} - \eta_{2n-2}), \tag{37}$$

可得出公式 η_6，适用于 $n = 2$， η_8适用于 $n = 3$，等等，随后得到级数 J_6， J_8，.....；见表 2。这些值不依赖于 q_1。

参考数据

$\bar{\epsilon}_{\mathcal{L}} = \frac{R_{\rm p}}{R_{\rm e}}$	$\frac{66854}{71492} \approx 0.93512560$
	$\rightarrow \epsilon_{\mathcal{L}} \approx 0.35431637$
M	1.898124×10^{30} g
$\Omega_{\rm obs}^{\dagger}$	$\frac{2\pi}{35729.704}$ s^{-1}

$2n$	$J_{2n}^{\star}(\times 10^6)$	j_{2n}	η_{2n}
2	$+14696.5735 \pm 0.0017$	$+\frac{1}{5}$	$+0.58533384$
4	-586.6085 ± 0.0024	$-\frac{3}{35}$	$+0.43424039$
6	$+34.2007 \pm 0.0067$	$+\frac{1}{21}$	$+0.36300024$
8	-2.422 ± 0.021	$-\frac{1}{33}$	$+0.32177940$
10	$+0.181 \pm 0.065$	$+\frac{3}{143}$	$+0.27668210$
12	$+0.062 \pm 0.190$	$-\frac{1}{65}$	-1.02946195
14		$+\frac{3}{255}$	

†来源：Higgins 等人 (1997年)； Yu 与 Russell (2009) *来源：Durante 等人 (2020年)

表1。 木星的参考数据。 j_{2n} 和 η_{2n} 分别由（5）和（12）得出。

该 y_i-问题†

y_1	0.36437
C_1	1.87665
$\rho_2/\bar{\rho}$	0.34762
$J_6\ (\times 10^6)$	+35.7256
$J_8\ (\times 10^6)$	−2.703
$J_{10}\ (\times 10^6)$	+0.230
$J_{12}\ (\times 10^6)$	−0.021
$J_{14}\ (\times 10^9)$	+2.01

†输入数据： $a_2, \epsilon_2, M, J_2, J_4$

表 2。双层模型下木星的 y_i问题的解，以及超出 J_4 根据（37）估算的引力矩；参考数据见表 1 。

3.3 木星数据的结果

我们将上述方法应用于木星。对于这颗行星，参考数据，即 a_2、ϵ_2、 M、 J_2、 J_4 和 $\Omega_{\rm obs}$，汇总于表 1。我们还给出了由公式 (5) 和 (12) 分别针对 $n \in [1, 7]$ 计算得到的系数 j_{2n} 和 η_{2n}。如上所述，假定从去厘米波观测中推得的自转速率源自核心（Higgins 等人 1997年；Yu 与 Russell 2009）。根据这些数据，我们可以求得由公式 (31a) 至 (31c) 给出的 y_i 问题的解（ y_1、 C_1、 ρ_2）。结果汇总于表 2。尽管模型十分简单，我们注意到，由公式 (37) 推得的 J_6 至 J_{12} 的预测值与观测值非常接近。

该 $\chi_2(q_1)$-函数由 y_i问题的解和参考自转速率 $\Omega_{\rm obs}$精确定义。图 q_1 中绘出了它随2的变化，并同时给出由（A4）得到的近似值。当 $q_1 \approx 0.689$时，它趋于零。这是该区间内唯一的根。因此，这个值就是核心的相对赤道延伸。包层的相对延伸约为 0.31，因此完全涵盖了观测到的纬向风。核心椭率 ϵ_1 和质量密度跃变 α_1 分别由（27）和（32）得出，由此可计算质量分数和转动惯量。结果列于表 3

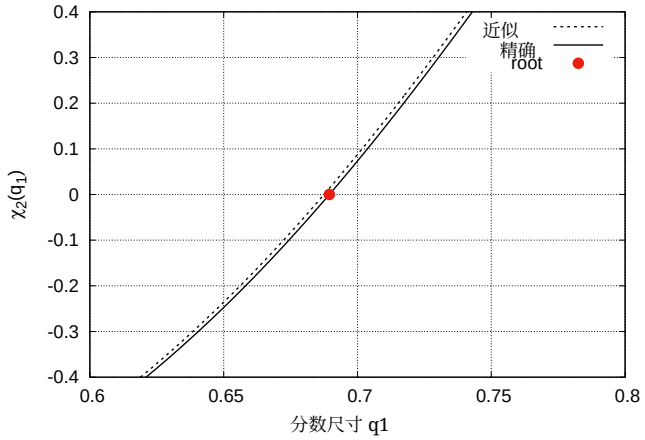


图2。函数 $\chi_2(q_1)$ 对于木星 (*plain line*) 在感兴趣区间内有一个根，位于 $q_1 \approx 0.689$。同时还展示了 (*dashedline*) 由 χ_2 的自转速率在小椭率极限下展开所得的近似值（根据 (A4，近似根为 0。687）。

	本研究†	DROP-代码⋆
$q_{1,\min}$	0.21387	
$q_{1,\max}$	0.92020	
q_1	0.68948	0.68924
ϵ_1	0.31019	0.30820
$b_1/a_2 = q_1\bar{\epsilon}_1$	0.65547	0.65569
$c_{1,2}$	−0.07979	−0.08041
α_1	6.63183	
Ω_1^2/Ω_2^2	1.00017	
ν_1	0.76821	0.76837
I_Δ/MR_e^2	0.26310	0.26300

†输入数据： $a_2, \epsilon_2, M, J_2, J_4, \Omega_{\text{观测值}}$ ⋆输入数据： $a_2, \epsilon_2, M, b_1/a_2, \alpha_1, \Omega_1/\Omega_2$

表3. 木星双层问题的解（第2列）以及通过数值自洽场方法得到的数值（第3列；见注释2）；参考数据见表1，解见表2，对应于 y_i-问题。

（第 2 列）。可以看出，核心比周围的包层略呈球形。由（23）得到的核心分数质量约为 77%，由（25）得到的归一化转动惯量为 0263。核心的自转速度略快于包层。因此，我们的模型非常接近整体自转。对 J_2 和 J_4 的不确定性会导致 q、α和 ϵ出现误差，其相对于 10^{-5} 中心值的典型幅度为 q_1。这些不确定性不足以显著改变 q，也不足以逆转两层之间的相对运动。然而，只要自转周期略微增加，就可以达到同步运动；参见第6节。

3.4 与自洽场方法（DROP 代码）的比较

将这种解析方法与通过数值求解类伯努利方程和泊松方程耦合系统得到的解进行比较，很有意思。为此，

我们使用 DROP 代码[2]，该代码能够根据一组 $2\mathcal{L}-1$ 输入数据，利用自洽场（SCF）方法，以网格间距的二阶精度求出 $\mathcal{L}$ 层构型（Basillais & Hur´e 2021 年）。为 $\mathcal{L} = 2$ 保留的构型如图 3所示。两种方法具有相同的质量密度跃变和相同的比值 Ω_1/Ω_2。图中以颜色表示质量密度，并显示了沿 $R = 0$ 和 $Z = 0$方向的压力（以中心值归一化）、这两个方向上的引力势，以及“真实”表面等值面与椭圆 E_i之间的偏差。收敛所需的 SCF 循环次数为 17，相对维里参数为 2.8×10^{-5}。代码输出的数据汇总于表 3（第 3 列）。可以看到，分数半径 q_1 和分数质量 ν_1 非常吻合，通常仅相差几个 10^{-4}。共焦参数 $c_{1,2}$ 的绝对值远小于 1，这验证了该形式体系的适用性（见论文 I）。

4 三层情形

4.1 y_i问题的解

如第 2节所述，增加一层即可匹配接下来的两个引力矩。对于 $\mathcal{L} = 3$，质量 M 和四个偶数阶矩 J_2 至 J_8，以无量纲形式表示为

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \rho_3(1+C), & \text{(38a)} \\ \eta_2(1+C) = 1 + C_1 y_1 + C_2 y_2, & \text{(38b)} \\ \eta_4(1+C) = 1 + C_1 y_1^2 + C_2 y_2^2, & \text{(38c)} \\ \eta_6(1+C) = 1 + C_1 y_1^3 + C_2 y_2^3, & \text{(38d)} \\ \eta_8(1+C) = 1 + C_1 y_1^4 + C_2 y_2^4, & \text{(38e)} \end{cases}$$

为方便起见，我们令 $C = C_1 + C_2$，$y_1\epsilon_3^2 = q_1\epsilon_1^2$、$y_2\epsilon_3^2 = q_2\epsilon_2^2$、$q_1 = \frac{a_1}{a_3}$、$q_2 = \frac{a_2}{a_3}$、$\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$、$\alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_3}$，并且

$$\begin{cases} C_1 = (\alpha_1 - 1) q_1^3 \dfrac{\bar{\epsilon}_1}{\bar{\epsilon}_3} \alpha_2, & \text{(39a)} \\ C_2 = (\alpha_2 - 1) q_2^3 \dfrac{\bar{\epsilon}_2}{\bar{\epsilon}_3}. & \text{(39b)} \end{cases}$$

若已知数据集（a_3、ϵ_3、M、J_2、J_4、J_6、J_8），则可通过方程（38a）至（38d）求解（y_1、y_2、C_1、C_2、ρ_3），因为未知数有 5 个，方程数量也相同。例如，将量 $1 + C$ 从（38b）至（38e）的等式两边同时减去，即可得到解。随后，对（38b）至（38d）进行代数运算，可得到关于 y_1 和 y_2 的第一个关系式，即

$$y_1 y_2 + A_1(y_1 + y_2) + A_2 = 0, \qquad (40)$$

[2] 在当前版本中，DROP-代码的输入参数包括：i) 各层 i的轴比 $b_i/a_{\mathcal{L}}$，ii) 极点处的质量密度跃变 α_i，以及 iii) $i \in [1, \mathcal{L}-1]$的比值 $\Omega_i^2/\Omega_{i+1}^2$。在 SCF 循环的每一步，层间边界表面都会在二阶精度下得到恰当确定，因此可以与椭圆 E_ℓ进行比较。分数半径 q_i并非预先指定，而是由代码输出。在整篇论文中，代码有意以较低分辨率运行：圆柱形（R，Z）计算区域内设有 128^2 个节点，从而可以快速运行。因此，输出量的相对误差预计约为 10^{-3}。J_{2n}的估算也符合这一点。

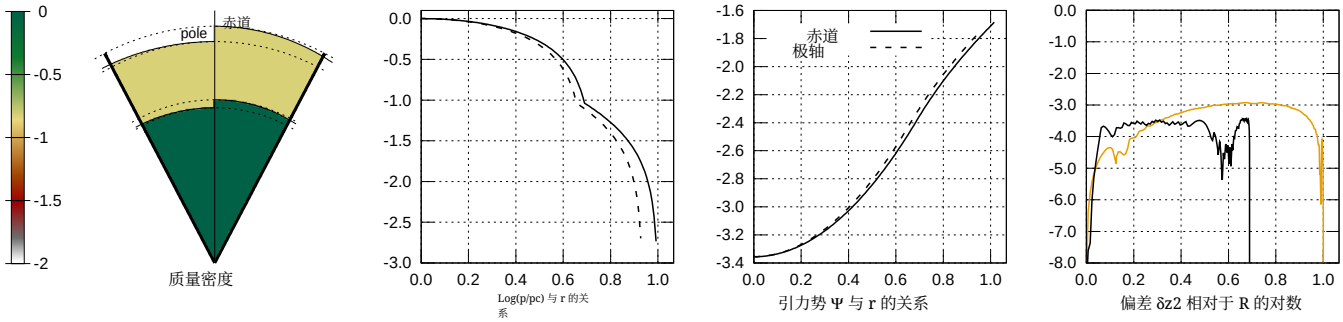


图 3. 使用 DROP-代码计算得到的 $\mathcal{L}=2$ (*from left to right*) 的内部结构：以颜色表示的归一化质量密度、沿极轴 (*dotted lines*) 和赤道处 (*plain lines*) 的归一化压力、引力势，以及椭圆 E_ℓ 与“真实”界面之间的偏差。数据列于表 2。

其中

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\eta_4-\eta_2}{1-\eta_2} \\ A_2 = \frac{\eta_4-\eta_6}{1-\eta_2} \end{cases} \tag{41}$$

通过例如将 (38e) 代替 (38d)，可以得到 y_1 与 y_2 之间的第二个联系。我们得到

$$y_1 y_2 + A_3(y_1+y_2) + A_4 = 0, \tag{42}$$

其中

$$\begin{cases} A_3 = \frac{\eta_6-\eta_4}{\eta_2-\eta_4} \\ A_4 = \frac{\eta_6-\eta_8}{\eta_2-\eta_4}. \end{cases} \tag{43}$$

这些关系可以写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} 1 & A_1 \\ 1 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

并求解根的乘积 $p = y_1 y_2$ 和根的和 $s = y_1 + y_2$，得到

$$\begin{cases} s = \frac{A_4-A_2}{A_1-A_3} \\ p = \frac{A_2 A_3 - A_1 A_4}{A_1-A_3}. \end{cases} \tag{45}$$

消去 y_2 （或 y_1）后，我们可以看出这两个量都是二次多项式的根

$$Y^2 - sY + p = 0, \tag{46}$$

其中，Y 表示 y_1 或 y_2。若 $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$，则根 Y_1 和 Y_2 均为正数，因此我们有

$$Y_k = \frac{s-\sqrt{\Delta}}{2} + (k-1)\sqrt{\Delta}, \quad k = \{1,2\}. \tag{47}$$

（y_1、y_2）有两种可能的组合（参见 2.4）：典范集合（Y_1、$Y_2 \geq Y_1$）$\equiv S_{1,\,2}$ 以及（Y_2、Y_1）$\equiv S_{2,\,1}$；参见第 2.5节。对于每一对，三个常数 C_1、C_2 和 ρ_3均可由（38a）-（38c）轻易求得，即

$$\begin{cases} C_1 = \frac{(1-\eta_2)(\eta_4-y_2^2)-(1-\eta_4)(\eta_2-y_2)}{(\eta_2-y_2)(y_1^2-\eta_4)-(y_1-\eta_2)(\eta_4-y_2^2)}, \\ C_2 = \frac{(1-\eta_2)(\eta_4-y_1^2)-(1-\eta_4)(\eta_2-y_1)}{(\eta_2-y_1)(y_2^2-\eta_4)-(y_2-\eta_2)(\eta_4-y_1^2)}, \\ \rho_3 = \frac{\bar{\rho}}{1+C_1+C_2}, \end{cases} \tag{48}$$

4.2 木星数据的结果

我们在表 4 中给出了根据木星数据得到的结果。图 4 展示了 y_2 相对于 y_1的关系，如式（40）和（42）所示，并且

y_i-问题†				
	A_1	−0.36437	A_2	+0.17180
	A_3	−0.47149	A_4	+0.27281
	s	+0.94298		
	p	+0.17179		
	Y_1	+0.24675		
	Y_2	+0.69622		
	C_1	+1.71976		
	C_2	+1.51145		
	$\rho_3/\bar{\rho}$	+0.23633		
J_{10}	($\times 10^6$)	+0.193		
J_{12}	($\times 10^6$)	−0.016		
J_{14}	($\times 10^9$)	+1.46		

†输入数据：$a_3, \epsilon_3, M, J_2, J_4, J_6, J_8$

表 4. 木星 y_i-问题的典范解，适用于三层模型；引力矩超出 J_8，由（51）计算得出；参考数据见表 1；见图 4。

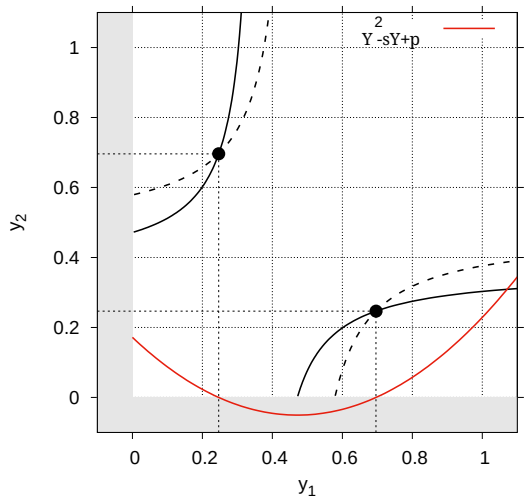


图 4. 三层模型中 y_1 与 y_2 之间的两种关系，分别来自（40）和（42），以及等价的二次多项式（*red line*）；见（46）。

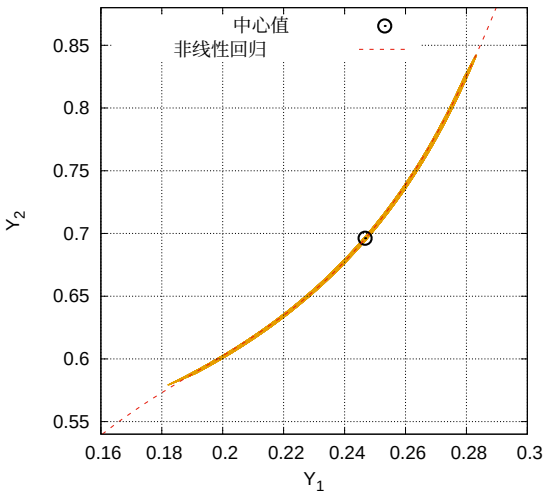


图 5. 误差框（$J_6 \pm \Delta J_6$） × （$J_8 \pm \Delta J_8$）在（Y_1， Y_2）平面上的图像（三层问题的典范集合），应用于木星（*orange*）。参见表 4 中的中心值（*black circle*）。非线性回归参见（52）（*red dashed line*）。

关于 Y的二次多项式；见式（46）。由于 Y_1 和 Y_2的量级都很小，且满足式（17），因此可以通过求解 $\chi_3(q_1,\ q_2) = 0$ 来确定平衡态（见下文）。高于 J_8 的矩由式（7）得到，其中 $\mathcal{L} = 3$ 和 $n > 4$。鉴于我们有

$$Ma_2^{2n} J_{2n} = \frac{4}{3}\pi j_{2n}\rho_3 a_3^{2n+3}\epsilon_3^{2n}\bar{\epsilon_3}(1 + C_1 y_1^{2n} + C_2 y_2^{2n}), \quad (49)$$

or

$$\eta_{2n}(1 + C) = 1 + C_1 y_1^{2n} + C_2 y_2^{2n}, \quad (50)$$

在无量纲形式下，通过比较（$\eta_{2n} - \eta_{2n-2}$）（$y_1 + y_2$）和（$\eta_{2n-2} - \eta_{2n-4}$）$y_1 y_2$的表达式，可以得到一个递推关系。我们得到

$$(\eta_{2n-2} - \eta_{2n-4})\, y_1 y_2 - (\eta_{2n} - \eta_{2n-2})\,(y_1 + y_2) - (\eta_{2n+2} - \eta_{2n}) = 0, \quad (51)$$

由此可逻辑地得出 $n = 2$ 和 $n = 3$对应的（40）和（42）。令 $n = 4$分别取 5 和 6，参见（12），即可得到 J_{10} 至 J_{14}。所得数值列于表 4。请注意，两组解都导出相同的矩（因为 s 和 p 不受 y_1 和 y_2排列的影响）。我们注意到，这两个矩接近测量值，且远在误差棒范围内。$\mathcal{L} = 2$则并非如此。预测得到的 $J_{14} \approx +1.46 \times 10^{-9}$ 值接近双层情形下所得的值。J_6 的不确定性，尤其是 J_8 的不确定性（相对值约为百分之一），会导致 y_i发生显著偏移。图 5 展示了通过扫描整个误差框（$J_6 \pm \Delta J_6$） × （$J_8 \pm \Delta J_8$）得到的所有典范集合（Y_1， Y_2）。我们可以分别在$\Delta J_6/J_6$ 和 $\Delta J_8/J_8$ 中展开（47），以解析方式得到变化趋势，但公式相当复杂。更直接地说，我们可以用三次多项式准确拟合误差框的图像，即

$$Y_2 = -0.818716 + 19.0979 Y_1 - 91.7828 Y_1^2 + 159.111 Y_1^3, \quad (52)$$

对于 $Y_1 \in [0.19, 0.28]$；再参见图 5。

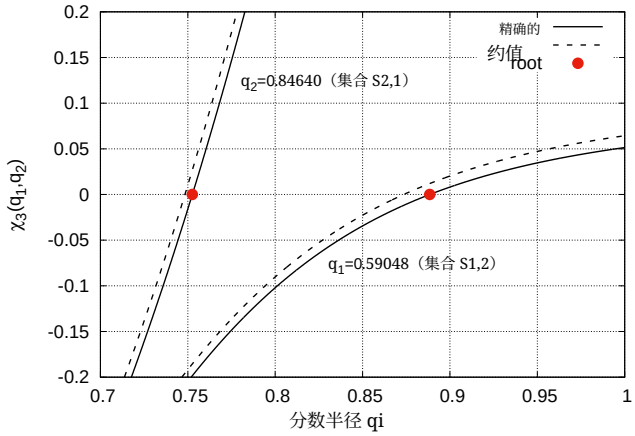


图6。 函数 $\chi_3(q_1,\ q_2)$ 及其根（对应 $q_1 = 0.59048$ 由 S_1得到，2 以及对应 $q_2 = 0.84640$ 由 S_2得到，1 在木星的三层模型中（*plain lines*）。同时展示了（*dashedlines*）该函数在小椭率下的近似（见论文 II）；另见图 7 和 8。

4.3 关键函数 $\chi_3(q_1, q_2)$。结果

为了得到物理构型，现在必须考虑动力学平衡方程。在这一层次，y_1 和 y_2 已知（以及 C_1、C_2 和 ρ_3）。分数半径、椭率和质量密度跃变尚待确定。因此，可能存在无限多个物理平衡态。与双层问题一样，不能任意指定每一层的自转速率。为此，我们仍使用论文 II 中的 (32) 和 (33)。每个自转速率取决于 $3\mathcal{L} - 1 = 8$ 个变量，即

$$\Omega_i \equiv \Omega_i(\rho_3, q_1, q_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha_1, \alpha_2), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (53)$$

但 ϵ_3 是输入，且 y_i问题已得到解决；见上文。因此，$2\mathcal{L} = 6$ 变量可以消去。Ω_i最终取决于两个变量，例如 q_1 和 q_2。如果我们假设观测到的自转速率源于核心，那么（22）仍然成立。三层问题的 χ关键函数为

$$\chi_3(q_1, q_2) \equiv \frac{\Omega_1^2(q_1, q_2)}{\Omega_{\rm obs}^2} - 1, \quad (54)$$

这再次是一个二维空间中的求根问题。我们看到，与双层情形相比，无法将 q_1 和 q_2分别确定为单一数值。对于典范集合 $S_{1,\,2}$ 及其唯一排列 $S_{2,\,1}$，因此我们通过在完整范围内改变 q_1 来确定（54）的零点，$[0, 1]$，和 $q_2 \in [q_{2,\min}, 1]$ 其中

$$q_{2,\min} = \sqrt{\max\{q_1, q_1^2 + (y_2 - y_1)\epsilon_3^2\}}, \quad (55)$$

根据（14）。在图 6 χ_3中，我们展示了对于由典范解 $S_{1,\,2}$得到的 q_2，$q_1 = 0.59048$ 下的 (q_1, q_2)；以及对于由另一集合 $S_{2,\,1}$得到的 $q_2 = 0.84640$，q_1 下的结果。我们还绘制了在小椭率极限下展开自转速率时得到的结果。

完整扫描的结果显示在图 7 中，对应于典范集合。我们使用了 J_6和 J_8 的“中心值”，以及由 $J_6 \pm \Delta J_6$ 和 $J_8 \pm \Delta J_8$ 定义的误差矩形四个顶点处的数值。实际上，通过改变

该矩后，系数 A_i 会发生变化，从而为 y_i问题产生新的典范根（Y_1， Y_2），继而改变可用平衡态的范围。图中显示了 q_2、ϵ_1、ϵ_2、α_1、α_2、ν_1、ν_2、$\Omega_2^2/\Omega_1^2, \Omega_3^2/\Omega_2^2$, 和 I_Δ 随 q_1的变化。对于这一集合，核心的分数半径大致处于 $[0.5, 0.75]$范围内，而我们有 $q_2 \gtrsim 0.72$。界面 E_1 和 E_2 处的质量密度跃变大小相近，通常有 $\alpha_2 \gtrsim \alpha_1$ 。除 $q_1 \lesssim 0.52$之外，核心的质量大致大于其上方两层的总质量。核心的扁率始终小于行星的扁率，而包围第 2 层和第 3 层的表面 E_2的扁率则可能低于或高于自由边界的扁率。总体而言，中间层 2 的旋转速度快于核心，但当 q_2 接近 1 时例外。转动惯量通常处于 $[0.24, 0.32]$ 范围内。我们注意到， J_6 的不确定性，尤其是 J_8 的不确定性，会显著影响解。对于 $q_2 \gtrsim 0.96$ 得到的构型应谨慎看待，因为转变发生在观测到纬向流的区域内。这些构型对应于最小的核心。

我们在图 8 中展示了第二组 $S_{2,\ 1} = (Y_2, Y_1)$所得的结果。核心的分数半径约为 0.75，而 $0.75 \lesssim q_2 \lesssim 0.95$ 通常如此。E_1 处的质量密度跃变约为 2，而在下一个界面 E_2处约为 4。核心的质量大约是其上方两层总质量的 4 倍。核心比行星表面更扁，而 E_2 则近乎球形；其自转速度比中间层快 10 倍，因此产生了显著的扁率。归一化转动惯量通常处于 $[0.27, 0.32]$ 范围内。结果对J_6 非常敏感，尤其对 J_8敏感，特别是在自转速率的大小方面。与第一组一样，增大 J_8 会使曲线向较小半径方向移动。对于这些构型，外层的厚度明显大于观测到的纬向流深度。

4.4 内部结构示例

例如，通过设定核心的分数半径 q_1，我们可以得到特定构型。表5（左侧，第2列）给出了针对 $q_1 = 0.59048$ 得到的结果，该结果可从典范集合 $S_{1,}$2 中获得；参见图 6 和图 7。对于此情形，转动惯量处于 Neuenschwander 等（2021）讨论的合理取值范围内，而整体自转的偏差仅为百分之几。核心的质量密度约为最外层质量密度的10倍。核心的质量分数为56 %。扁率梯度为正（从中心到表面，各层越来越扁）。第 2 层的转速似乎比第1层和第3层稍慢。在与 $\mathcal{L} = 2$ 相同的条件下，用 DROP 代码计算出的构型如图9所示；参见注2。轴比 b_1/a_3 和 b_2/a_3 经过调整，直至输出的 q_1 和 q_2 大致吻合（考虑到分辨率较低）。最终选取的构型对应于 $q_1 = 0.59038$, 与解析对应解非常接近。经过15次SCF迭代后，计算收敛，相对维里参数为 1.07×10^{-4}。结果见表5（左侧，第3列）。可以看出，两种方法的结果非常吻合（共焦参数的绝对值很小）。各界面都非常接近椭圆。

	本工作†	DROP-代码⋆
$c_{1,3}$	−0.09456	−0.09403
$c_{2,3}$	−0.03813	−0.03792
q_1	0.59049	0.59038
q_2	0.88829	0.88956
ϵ_1	0.29805	0.30063
ϵ_2	0.33282	0.33275
$b_1/a_3 = q_1\bar{\epsilon}_1$	0.56362	0.56307
$b_2/a_3 = q_2\bar{\epsilon}_2$	0.83764	0.83887
α_1	3.61692	
α_2	3.12887	
Ω_1^2/Ω_2^2	1.01326	
Ω_2^2/Ω_3^2	0.98702	
ν_1	0.56234	0.56158
ν_2	0.36836	0.36983
I_Δ/MR_e^2	0.26397	0.26419

†输入数据： a_3， ϵ_3， M， J_2， J_4， J_6， J_8， $\Omega_{观测}$⋆输入数据： a_3， ϵ_3， M， b_1/a_3， b_2/a_3， α_1， α_2， Ω_2^2/Ω_{21}， Ω_3^2/Ω_{22}

表 5。本方法（第 2 列）与数值自洽场方法（第 3 列；见注释2）对 3 层模型的比较，适用于典范集合 $q_1 = 0.59038$ 可用于典范集合$S_{1,}$ $_2 = (Y_1, Y_2)$。另见图6 和7 以及表1 和4。

	本研究†	DROP-代码⋆
$c_{1,3}$	−0.03813	−0.03848
$c_{2,3}$	−0.09456	−0.09474
q_1	0.75259	0.75262
q_2	0.84640	0.84635
ϵ_1	0.39283	0.39202
ϵ_2	0.20794	0.20733
$b_1/a_3 = q_1\bar{\epsilon}_1$	0.69209	0.69238
$b_2/a_3 = q_2\bar{\epsilon}_2$	0.82789	0.82796
α_1	1.97147	
α_2	3.71150	
Ω_1^2/Ω_2^2	6.77728	
Ω_2^2/Ω_3^2	0.14756	
ν_1	0.72491	0.72551
ν_2	0.18864	0.18816
I_Δ/MR_e^2	0.29193	0.29188

†输入数据： a_3， ϵ_3， M， J_2， J_4， J_6， J_8， Ω_{obs}⋆输入数据： a_3， ϵ_3， M， b_1/a_3， b_2/a_3， α_1， α_2， Ω_2^2/Ω_{21}， Ω_3^2/Ω_{22}

表6。 标题与表格相同。 5 但针对 $q_1 \approx 0.75259$ 可用于第二组 $S_{2,}$ $_1 = (Y_2,\ Y_1)$。另见图 6 和 8。

对于大多数量而言，偏差约为相对值的几个 10^{-3} ，尤其是质量分数和扁率。

我们在表6 （右侧，第 2 列）中给出了 $q_1 = 0.75259$ 的结果，该构型可由 $S_{2,\ 1}$ 得到；见图 6 和 7。与第一个示例不同，中间层相较于第 1 层和第 3 层转动较慢。核心质量更大，尽管质量密度跃变降低了 3 倍。出现了椭率反转（第 2 层比其他层更扁）。在相同条件下，由 DROP 代码计算得到的构型如图 10 所示。标称构型对应于 $q_1 = 0.75262$，与解析得到的对应构型非常接近。SCF 迭代在 14 次 SCF 迭代后收敛，相对维里参数为 5×10^{-6}。模拟结果汇总于表 6 （右侧，第 3 列）。同样，由于共焦参数较小（绝对值小于 0。01），两种方法的结果吻合良好。

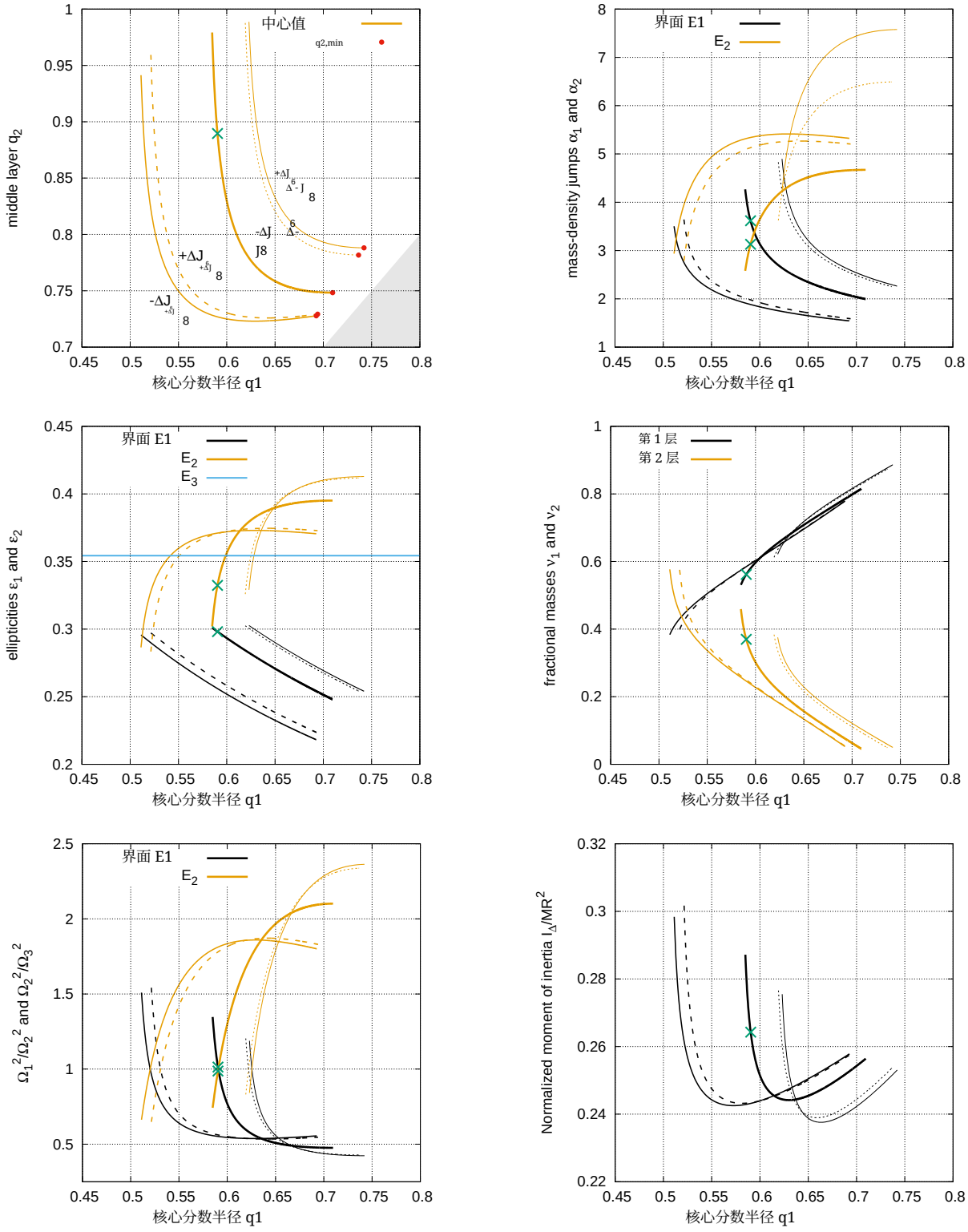


图 7. 典范解 $S_{1,}2$ 对应的平衡构型：对于应用于木星的三层模型，分数半径 q_2 (*top left panel*)、界面处的质量密度跃变 (*top right panel*)、 E_1 和 E_2 的椭率 (*middle left panel*)、第 1 层和第 2 层的质量分数 (*middle rightpanel*)、自转速率平方之比 (*bottom left panel*) 以及归一化转动惯量 (*bottom right panel*)，均为核心的分数半径 q_1 的函数。曲线对应引力矩的 5 组取值： J_6 和 J_8 的中心值 (*thick lines*)、 $J_6 \pm \Delta J_6$ (*thin lines*) 以及 $J_8 \pm \Delta J_8$ (*dotted lines*)。与 $q_1 \approx 0.59038$ (*green cross*) 对应、并使用 DROP-code 计算得到的内部结构详见图9；另请参见表 5。

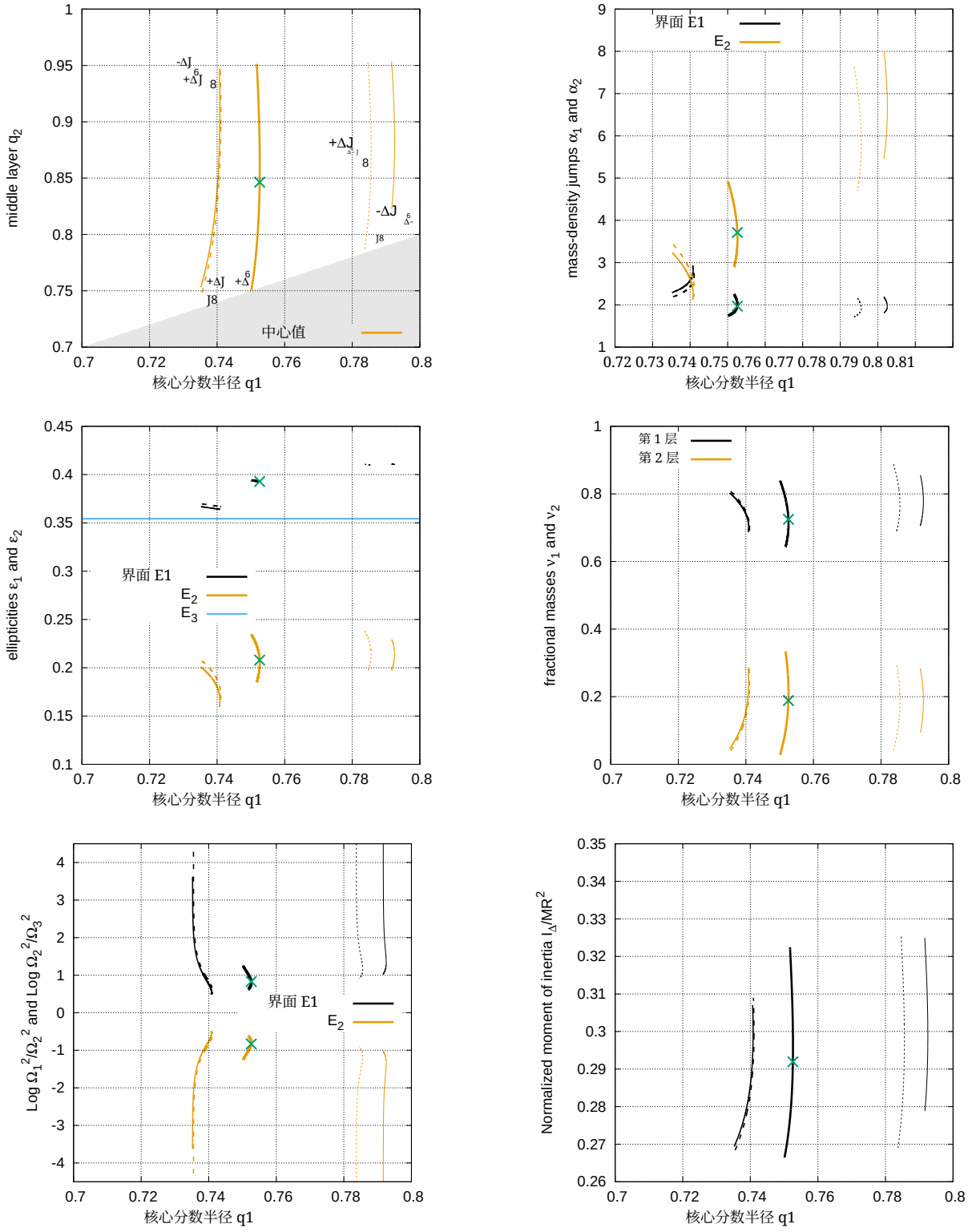


图 8。 图例与图 7 相同，但对应于解 $S_{2,\ 1}$。对应于 $q_1 = 0.75262$ (*green cross*) 且使用 DROP-代码计算得到的内部结构如图 10所示；另见表 6。

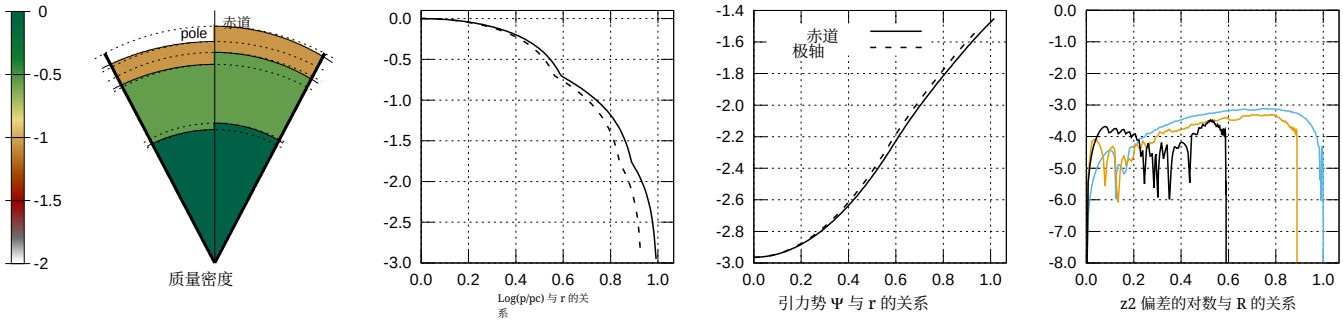


图9。 图例与图 3 相同，但对应于三层模型。该结构对应于 $q_1 = 0.59038$ 作为解之一 $S_{1,\ 2}$ 展示于图 7；参见表 4 和 5。

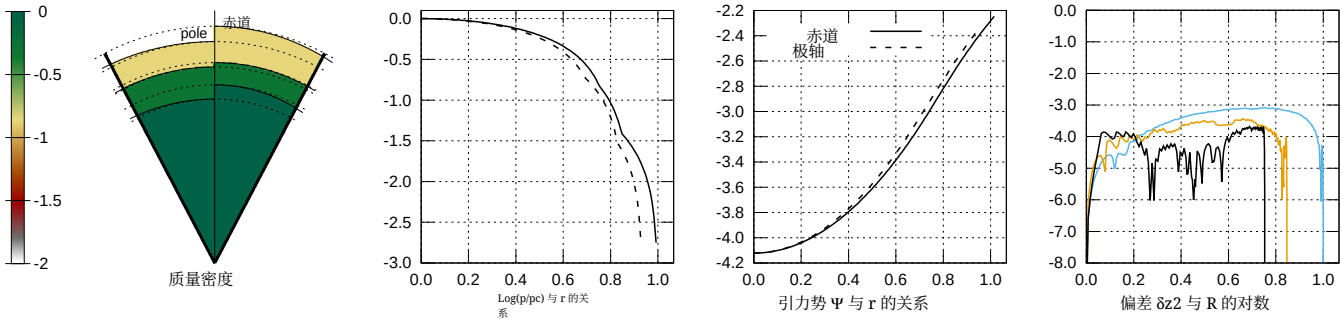


图10。 图例与图 3 相同，但针对三层模型。该结构对应于 $q_1 = 0.75262$ 作为解之一 $S_{2,\ 1}$ 显示于图 8中；参见表 4 和 6。

5 四层情形

5.1 y_i问题的三次方程

由于每增加一层附加层就会引入两个新参数，因此对于四层，我们可以将两个参数用于额外的引力矩，即 J_{10} 和 J_{12}。对于 $\mathcal{L} = 4$, (6) 和 (7) 总共给出 7 个耦合方程。写成无量纲形式，我们有

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \rho_4(1+C), & (56a)\\ \eta_2(1+C) = 1 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, & (56b)\\ \eta_4(1+C) = 1 + C_1 y_1^2 + C_2 y_2^2 + C_3 y_3^2, & (56c)\\ \eta_6(1+C) = 1 + C_1 y_1^3 + C_2 y_2^3 + C_3 y_3^3, & (56d)\\ \eta_8(1+C) = 1 + C_1 y_1^4 + C_2 y_2^4 + C_3 y_3^4, & (56e)\\ \eta_{10}(1+C) = 1 + C_1 y_1^5 + C_2 y_2^5 + C_3 y_3^5, & (56f)\\ \eta_{12}(1+C) = 1 + C_1 y_1^6 + C_2 y_2^6 + C_3 y_3^6, & (56g) \end{cases}$$

其中，为方便起见，令 $C = C_1 + C_2 + C_3$ （与 $\mathcal{L} = 3$ 中的定义不同），$y_1\epsilon_4^2 = q_1\epsilon_1^2$, $y_2\epsilon_4^2 = q_2\epsilon_2^2$, $y_3\epsilon_4^2 = q_3\epsilon_3^2$, $q_1 = \frac{a_1}{a_4}$, $q_2 = \frac{a_2}{a_4}$ $q_3 = \frac{a_3}{a_4}$ $\alpha_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ $\alpha_2 = \frac{\rho_2}{\rho_3}$ $\alpha_3 = \frac{\rho_3}{\rho_4}$ ，，，，，和

$$\begin{cases} C_1 = (\alpha_1 - 1) q_1^3 \dfrac{\bar{\epsilon}_1}{\bar{\epsilon}_4} \alpha_3 \alpha_2, & (57a)\\ C_2 = (\alpha_2 - 1) q_2^3 \dfrac{\bar{\epsilon}_2}{\bar{\epsilon}_4} \alpha_3. & (57b)\\ C_3 = (\alpha_3 - 1) q_3^3 \dfrac{\bar{\epsilon}_3}{\bar{\epsilon}_4}. & (57c) \end{cases}$$

对于任意阶 $n \geq 0$，由式（7）可得

$$\eta_{2n}(1+C) = 1 + C_1 y_1^n + C_2 y_2^n + C_3 y_3^n, \qquad (58)$$

因此，三个量 $\eta_{2n-4} - \eta_{2n-6}$、$\eta_{2n-2} - \eta_{2n-4}$ 和 $\eta_{2n} - \eta_{2n-2}$ 之间存在如下联系

$$\begin{aligned} &(\eta_{2n-4} - \eta_{2n-6})\, y_1 y_2 y_3 \\ &\quad - (\eta_{2n-2} - \eta_{2n-4})\,(y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3) \\ &\quad + (\eta_{2n} - \eta_{2n-2})(y_1 + y_2 + y_3) - (\eta_{2n+2} - \eta_{2n}) = 0, \end{aligned} \qquad (59)$$

适用于 $n \geq 3$。特别地，在这个递推关系中依次令 $n = 3$,$n = 4$ 和 $n = 5$，可得与 (40) 和 (42) 类似的结果。写成矩阵形式，即

$$\begin{pmatrix} 1 & A_1 & A_2 \\ 1 & A_4 & A_5 \\ 1 & A_7 & A_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 y_2 y_3 \\ y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_3 \\ A_6 \\ A_9 \end{pmatrix}. \qquad (60)$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\eta_2 - \eta_4}{\eta_2 - 1}, \quad A_2 = \frac{\eta_6 - \eta_4}{\eta_2 - 1}, \quad A_3 = \frac{\eta_6 - \eta_8}{\eta_2 - 1}, \\ A_4 = \frac{\eta_4 - \eta_6}{\eta_4 - \eta_2}, \quad A_5 = \frac{\eta_8 - \eta_6}{\eta_4 - \eta_2}, \quad A_6 = \frac{\eta_8 - \eta_{10}}{\eta_4 - \eta_2}, \\ A_7 = \frac{\eta_6 - \eta_8}{\eta_6 - \eta_4}, \quad A_8 = \frac{\eta_{10} - \eta_8}{\eta_6 - \eta_4}, \quad A_8 = \frac{\eta_{10} - \eta_{12}}{\eta_6 - \eta_4}. \end{cases} \qquad (61)$$

我们可以轻易地分离出 $s = y_1 + y_2 + y_3$, $d = y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3$ 和 $p = y_1 y_2 y_3$，并求解（60）以得到 y_1, y_2 和y_3。关于 s, d 和 p的表达式是 A_i的组合，现列于附录B中。由于 $y_2 y_3$ 和$y_2 + y_3$ 仅可表示为 y_1, s, d和 p 的函数，求解（60）等价于求解以下三次方程的根

$$Y^3 - sY^2 + dY - p = 0, \qquad (62)$$

其中 Y 表示 y_1、y_2 或 y_3。由于我们要寻找与（14）和（17）相容的解，因此复根

y_i问题†

A_1	-0.36437	A_2	$+0.17180$	A_3	-0.09407
A_4	-0.47149	A_5	$+0.27281$	A_6	-0.29847
A_7	-0.57861	A_8	$+0.63303$	A_9	-18.33437
s	$+68.81435$				
d	$+63.03239$				
p	$+11.24436$				
Y_1	$+0.24221$				
Y_2	$+0.68381$				
Y_3	$+67.88832$				
C_1	$+1.63992$				
C_2	$+1.50302$				
C_3 $(\times 10^{11})$	-5.53540				
$\rho_4/\bar{\rho}$	0.24137				
J_{14} $(\times 10^{9})$	-511				

†输入数据： $a_4, \epsilon_4, M, J_2, J_4, J_6, J_8, J_{10}, J_{12}$

表 7。四层问题应用于木星数据的 y_i问题的典范解； J_{12} 由（59）计算得出。参考数据见表1 。

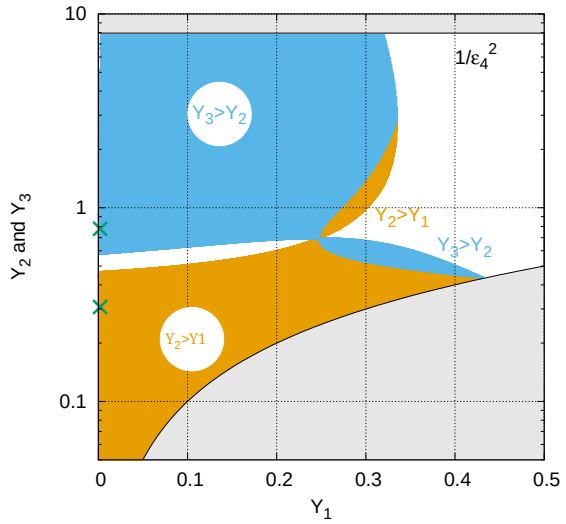


图 11。典范解 $Y_2 > Y_1$ （*orange*）和 $Y_3 > Y_2$（*blue*）的 y_i-问题，适用于木星的四层问题，以及 J_{10} 和 J_{12} 在误差棒范围内。关于由表 14 的典范集合得到的平衡构型，见图8 （*green cross*）。参考数据见表 1。

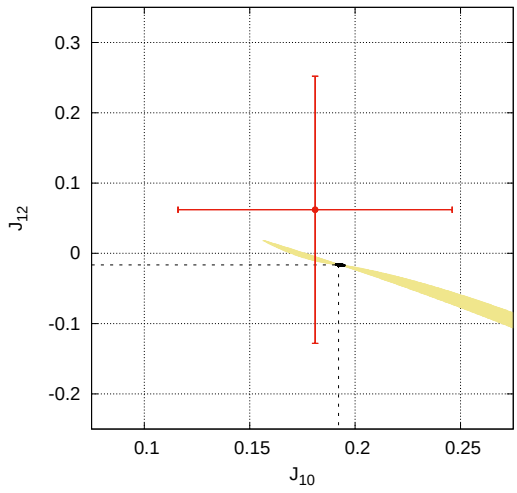
或负实根均可排除。相关的根例如可以通过卡尔丹公式表示

$$Y_k = \frac{1}{3}s + 2\sqrt{-Q}\cos\left[\theta_0 + (k-1)\frac{2\pi}{3}\right], \qquad (63)$$

与 $k = \{1, 2, 3\}$ 和

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{9}(3d - s^2), \\ R = \frac{1}{54}(27p - 9sd + 2s^3) \\ 3\theta_0 = \arccos\frac{R}{\sqrt{-Q^3}}, \quad \text{with } Q^3 + R^2 \le 0. \end{cases} \qquad (64)$$

最多可以从典范集合中构造出 6 个三元组（y_1、y_2、y_3），其数量很大程度上取决于 A_i's。请注意，与（47）不同，（Y_k）所给出的 63并未按升序排列。



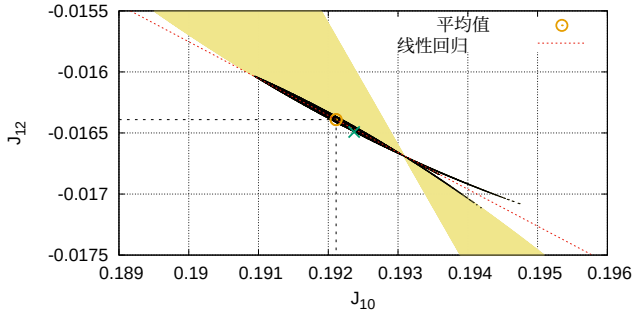


图12。所有满足（ J_{10} 和 J_{12} （单位为 10^{-6}）的 y_i-问题的四层模型的所有解的值（ 17 *yellow* *bot-* ）（），*tom panel* $y_i \le 1$ 并放大显示平均值附近的区域（ ）。对应于 的值已被分开（*black*）。示例见图14，其中展示了利用表 8 （*green cross*）中的集合计算得到的内部结构。

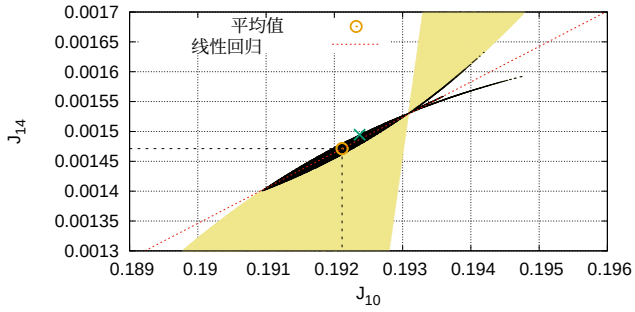


图13。与图 12 相同的图注，但适用于 J_{10} 和 J_{14}。

5.2 木星数据的结果。中心值采用典范集合的否定。误差棒

基于木星的数据，我们可以确定九个系数 A_1 到 A_9，然后 s，d 以及 p，即 Y_k。结果见表 7。我们看到，其中一个根超过了式（17）给出的限值。因此，这个基于 J_{2n}中心值的解应予以舍弃。不过，我们可以考虑 J_{10} 和 J_{12}中的误差棒。实际上，我们发现改变 Y_1 和 $Y_2 > Y_1$ （例如）并仅保留

与$J_{10} \pm \Delta J_{10}$和 $J_{12} \pm \Delta J_{12}$相容且满足式（17）的典范解（Y_1、 Y_2、 $Y_3 > Y_2$）。采用这一方法的原因是，与 $\mathcal{L} = 3$ 的情况不同，误差框（$J_{10} \pm \Delta J_{10}$） × （$J_{12} \pm \Delta J_{12}$）内的每个点并不能得到可接受的 Y_k。扫描结果见图 11。图12显示了（J_{10}、 J_{12}）平面中对应的区域。可以发现，该区域极小，且相对于中心值偏离中心。这两个量之间存在显著相关性，尤其是当我们将数据限定为 $Y_k \leq 1$（见第 2.4 节）时；此时平均值为 $J_{10} \approx +0.19211 \times 10^{-6}$和 $J_{12} \approx -0.01639 \times 10^{-6}$，线性回归得到 $J_{12} \approx -0.30217 J_{10} + 0.04166 \times 10^{-6}$。

图 13 展示了由同一样本代入式（59）推得的 J_{14}值。其平均值约为 $+1.47 \times 10^{-9}$，与三层问题的预测值一致。线性回归得出 $J_{14} \approx 0.059234 J_{10} - 0.009908 \times 10^{-6}$。请注意，根据式（62），由对 Y_k进行排列而形成的集合（y_1、 y_2、 y_3）不会影响 J_{2n}。有趣的是，若将 J_8的不确定性考虑在内，三层问题的解也不会发生很大变化；图 11 略有拉伸，但整体形态保持不变。对矩 J_{10} 到 J_{14} 的影响也较弱，偏移仅为几个百分点（其量级与 $\Delta J_8/J_8$相当），如下所示（见表 1）：

$$\Delta J_8 = +0.021 \times 10^{-6} \rightarrow \begin{cases} \Delta J_{10} \approx +0.0050 \times 10^{-6}, \\ \Delta J_{12} \approx -0.0008 \times 10^{-6}, \\ \Delta J_{14} \approx +0.11 \times 10^{-9}. \end{cases} \tag{65}$$

5.3 关键函数 $\chi_4(q_1, q_2, q_3)$。给定典范集合的结果。结构示例

自转速率 Ω_1 至 Ω_4 仍由论文 II 的式（32）和（33）表示。每个 Ω_i 都依赖于 $3\mathcal{L} - 1 = 11$ 个变量，即

$$\Omega_i \equiv \Omega_i(\rho_4, q_1, q_2, q_3, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \tag{66}$$

对 $i = \{1, 2, 3, 4\}$，其中 ϵ_4是行星的扁率。由于y_1 至 y_3，C_1 至 C_3 以及 ρ_4 均已知（见上文），我们可以消去 8 个变量，例如消去 ϵ_i和 α_i。因此，Ω_i本质上取决于三个变量 q_1，q_2 和 q_3。于是，式（22）成立，其中四层问题的 χ函数形式为

$$\chi_4(q_1, q_2, q_3) \equiv \frac{\Omega_1^2(q_1, q_2, q_3)}{\Omega_{\rm obs}^2} - 1, \tag{67}$$

这里我们假设，与二层和三层问题一样，核心的自转与 $\Omega_{\rm obs}$ 一致。原则上，通过在允许范围内改变 q_i，即可轻松数值求得方程 $\chi_4 = 0$ 的根。然而，由于涉及的维度数量如今达到 6，这项工作十分繁琐。实际上，对于每组 $\{y_i\}$及其 6 种可能的排列，我们都必须探查（q_1， q_2， q_3）空间。正如我们所检验的那样，不仅计算时间很快变得难以承受，而且输出信息也难以概括。我们认为，从图 11所示的三元组（Y_1， Y_2， Y_3）中选取一个典范集合更具说明性。我们选择了一个 Y_1值极低的集合，从而能够捕捉到在 $\mathcal{L} \leq 3$情况下不允许出现的小内核。该特定集合的数据见

y_i问题	
A_8	+0.38903
A_9	−0.28398
s	+1.08772
d	+0.24135
p	$+4.78269 \times 10^{-4}$
Y_1	$+1.99959 \times 10^{-3}$
Y_2	+0.30724
Y_3	+0.77847
C_1	+0.13120
C_2	+2.24911
C_3	+1.48762
$\rho_4/\bar{\rho}$	+0.20542
J_{14} ($\times 10^9$)	+1.49

†输入数据： $a_2\ \epsilon_2\ M\ J_2\ J_4\ J_6\ J_8$ 1,,,,,,, $\Omega_{\text{观测值}}$ 来自表，$J_{10} = +\mathbf{0.1923711}\ldots$ $J_{12} = -\mathbf{0.0164917}\ldots$

表 8. 一个规范解 $\{Y_k\}$ 的 y_i问题，适用于 4 层情形；另见图。11、12 和 13。 A_1 至 A_7的取值不依赖于 J_{10} 和 J_{12}，因此保持不变；见表。7。

	本文	DROP代码
c_{14}	−0.12528	−0.12533
c_{24}	−0.08696	−0.08766
c_{34}	−0.02780	−0.02800
q_1	0.10800	0.10800
$q_{2,\min}$	0.22357	
q_2	0.64980	0.64926
$q_{3,\min}$	0.69383	
q_3	0.91772	0.91762
ϵ_1	0.14670	0.13305
ϵ_2	0.30223	0.29973
ϵ_3	0.34064	0.34035
$b_1/a_4 = q_1\bar{\epsilon}_1$	0.10683	0.10704
$b_2/a_4 = q_2\bar{\epsilon}_2$	0.61941	
$b_3/a_4 = q_3\bar{\epsilon}_3$	0.86283	
α_1	9.98762	
α_2	3.75928	
α_3	2.91428	
Ω_1^2/Ω_2^2	1.01294	
Ω_2^2/Ω_3^2	1.04399	
Ω_3^2/Ω_4^2	1.01262	
ν_1	0.02995	0.02986
ν_2	0.62646	0.62632
ν_3	0.29779	0.29799
I_Δ/MR_e^2	0.26328	0.26313

表 9. 构型的结果： $q_1 = 0.108$ 参数见表 8；另见图 15。

表。8。表中还列出了对应的矩 J_{10}和 J_{12}，以及根据（59）计算得到的 J_{14}；另见图 12 和 13。然后通过求解（67）确定物理平衡态。在这项实验中，我们对 $q_1 \in [0, 1]$ 和均采用了适中的分辨率 0.01 J_{12}

$$q_2 \geq \sqrt{\max\{q_1^2, q_1^2 + (y_2 - y_1)\epsilon_4^2\}} \equiv q_{2,\min}, \tag{68}$$

扫描（q_1， q_2）平面。对于给定的 q_1 和 q_2，随后在范围 $[q_{3,\min}, 1]$ 内搜索（67）中的根，其中 q_3

$$q_3 \geq \sqrt{\max\{q_2^2, q_2^2 + (y_3 - y_2)\epsilon_4^2\}} \equiv q_{3,\min}, \tag{69}$$

再次依据浸入条件。

我们发现所有排列都相关。我们展示

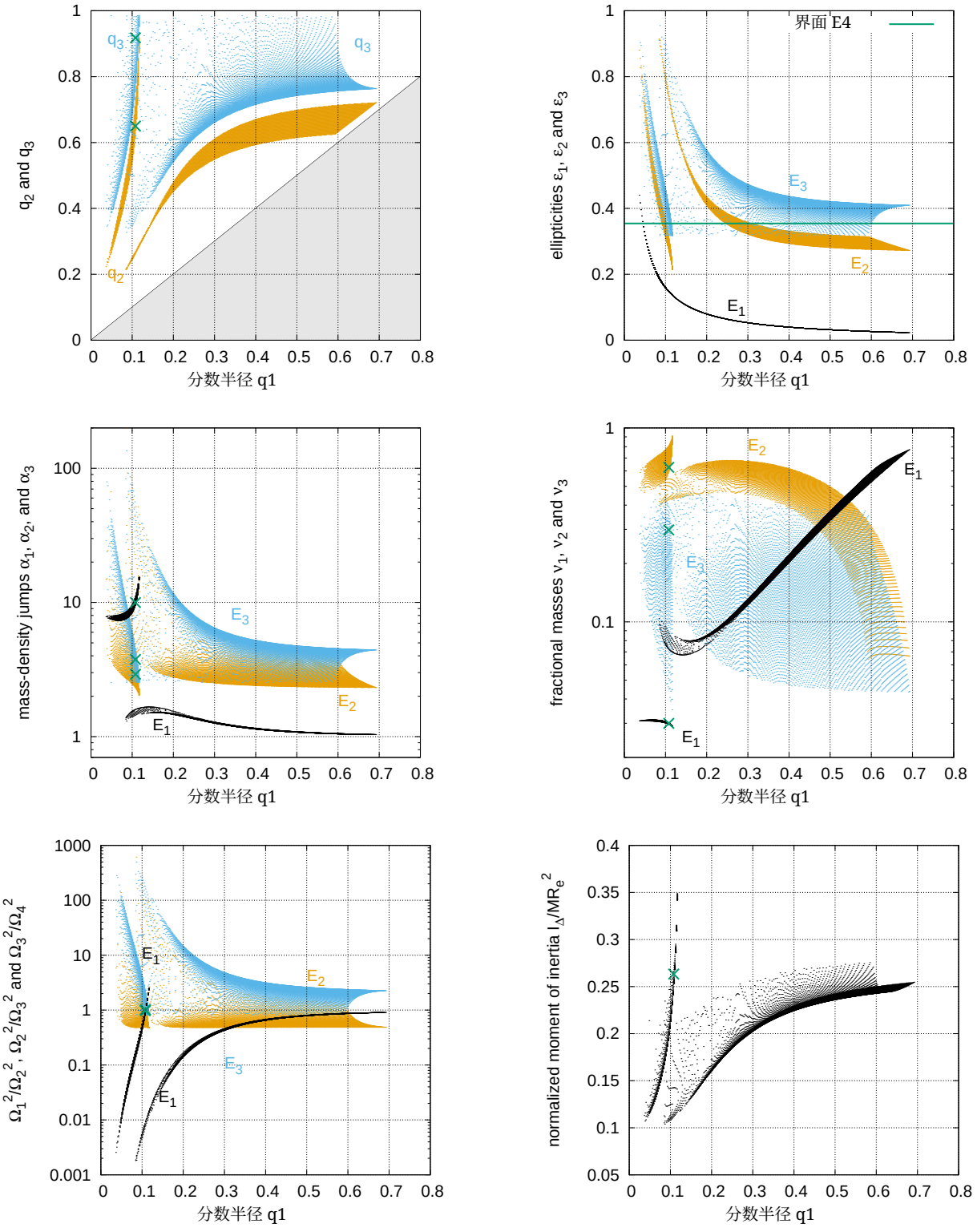


图14。 表 8 中的典范集合的结果（每个点代表一个平衡）。图中显示了分数半径 q_1、 q_2 和 q_3 （*topleft panel*）、界面处的质量密度跃变 α_1、 α_2 和 α_3 （*top right panel*）（ *middle panel*）、椭率 ϵ_1、 ϵ_2 和 ϵ_3 （*middleleft panel* ν_1 ν_2 ν_3 *middle right panel* $\frac{2}{2}/\frac{2}{1}$, $\frac{2}{3}/\frac{2}{2}$ $\frac{2}{4}/\frac{2}{1}$ *bottom* ）、 *left panel* *bottom right panel* q_1
质量分数，以及（），自转速率平方之比 Ω Ω Ω Ω 和 Ω Ω（），以及归一化转动惯量（），均为核心的分数半径的函数。

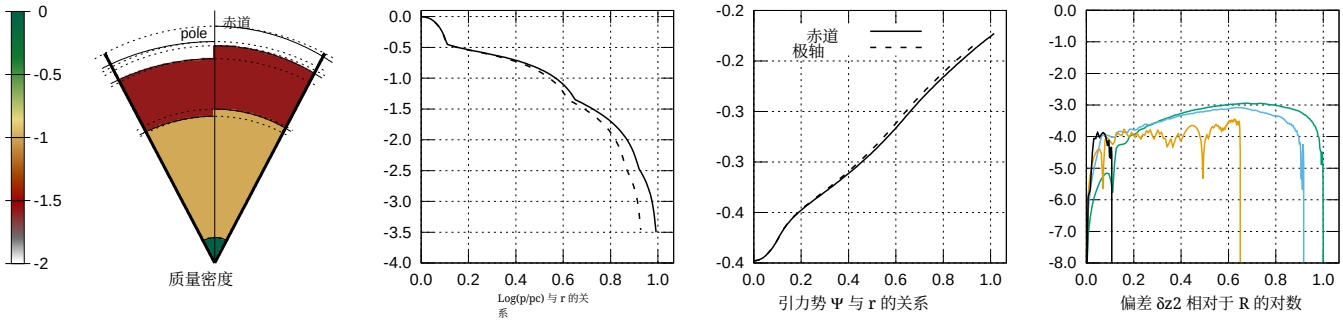


图15。图例与图9 相同，但此处将四层模型应用于木星，参数取自表8 （一个典范解）和9；另见图14。

在图14 中，可以从典范集合 $S_{1,2,3}$得到的物理构型分为两组。第一组由小内核构成，且具有 $q_1 \lesssim 0.12$。当 q_1取值最小时，椭率相当大。质量密度跃变最大， α_3 在 q_1极小时可达数百。这意味着中心与表面之间的反差达数千倍。核心的分数质量较小，约为 0.02，而质量最大的层是第 2 层。自转速率差异很大（在 q_1极小时可相差多达 2 个数量级）。第 2 层自转极快，而表层相对自转较慢。第二组与三层问题中从 $S_{1,2}$ 得到的结果相当（尽管这里得到的 q_1 值较小）。我们有 $q_1 \gtrsim 0.09$ ，且 q_2 不超过约 0.73。质量密度跃变大多约为 4，但在 E_1 处，α_1 接近 1。核心高度接近球形，其分数质量在 q_1 较小时低至 7%，但在 q_1 较大时可达 80%。两组平衡态在 $q_1 \approx 0.1$ 处略有重叠，因此对于给定的一对（q_2， q_3）， χ_4 可能有两个不同的根。基于前文讨论三层问题时提到的原因， $q_3 \gtrsim 0.96$ 对应于上层大气内部的转变，在那里自转随纬度变化。这只是允许构型中微不足道的一部分。

表 9 （第 2 列）给出了小型核心的计算结果，其分数半径为 $q_1 = 0.10800$，该核心在图 14 中以标记表示。核心接近球形（$\epsilon_1 \approx 0.146$），其质量密度约为第 2 层的 10 倍，但质量占比仅约为 3%。质量最大的层是第 2 层（覆盖在核心上）。扁率从中心到表面逐渐增大。该结构与整体自转仅有几个百分点的偏差。根据 DROP 代码计算得到的内部结构见图 15 ，相关输出数据列于表 9 （第 3 列）。正如共焦参数所预示的，两种方法在整体上相符，相对偏差仅为几个 10^{-4} （而扁率的偏差为 10^{-3} ）。

5.4 给定典范集合的结果（续）

针对 $S_{1,3,2}$ 得到的结果如图 16 所示，彼此非常相似。通过交换 y_2 和 y_3，阈值 $q_{2,\min}$ 和 $q_{3,\min}$ 会发生变化。因此，需要更高的 q_2 值，而较低的 q_3 值则成为可能。这两组构型仍然存在，但彼此分隔良好，没有任何重叠。主要差异涉及椭率的分布（ ϵ_2 和 ϵ_3之间出现了反转，这是排列 $y_2 \leftrightarrow y_3$直接导致的结果）以及自转速率（层 2 的相对运动之间同样出现了反转）。

其余四组的结果汇总于图 17。由于涉及质量更大、体积也大得多的核心，这些构型与 $S_{2,1}$ 在三层问题中得到的结果相似，即

- 对于 $S_{2,1,3}$，我们有 $0.63 \lesssim q_1 \lesssim 0.7$, $\epsilon_2 \ll \epsilon_1 \lesssim \epsilon_4 \approx \epsilon_3$ E_2 $\alpha_1 \approx 1$ $\alpha_1 < \alpha_1 \approx \alpha_3 \in$ (近 $[2.5, 4.5]$ $\nu_1 \gtrsim 0.6$ $\nu_2 \lesssim \nu_2$ 球形)，且通常有 和。旋转不连续量通常在 $0.5 - 2$ 范围内，没有任何情况接近同步。转动惯量范围为 $0.24 - 0.28$。

- 对于 $S_{2,3,1}$，我们有 $0.65 \lesssim q_1 \lesssim 0.75$。与 $S_{2,1,3}$相比，第 2 层和第 3 层的情况恰好相反。第 2 层的质量大于第 3 层（$\alpha_2 > \alpha_3 \approx 1$），且自转更快。

- 对于 $S_{3,1,2}$： 我们有 $q_1 \approx 0.75$。核心包含了大部分质量。它的旋转速度快于其他层，且比表层更扁。界面 E_2 接近球形。我们有 $\alpha_2 \approx 1$，以及 $\alpha_1 < \alpha_3 \approx 4$。转动惯量的范围为 $0.27 - 0.33$。

- 对于 $S_{3,2,1}$： 核心比 $S_{3,1,2}$ 的核心稍大，$q_1 \approx 0.75$ 但其性质与 $S_{3,1,2}$相似。第 2 层和第 3 层之间发生了整体反转。

如前所述，显然不可能对所有可能的典范集合都进行同类分析。我们注意到，上文介绍的 6 种构型在不同典范集合中大致保持不变。然而，当 Y_1 增大时（对于 $Y_1 \gtrsim 0.43$不再有根；见图 11），涉及小内核的平衡态往往会消失。

6 讨论

本文研究由 $\mathcal{L}$均匀、异形椭球层构成的非均质天体在相对轨道运动中处于平衡状态时，其结构与一组给定观测数据相容的条件，即:

- 赤道半径 R_e,
- 最外层的球状形状（通过扁率），

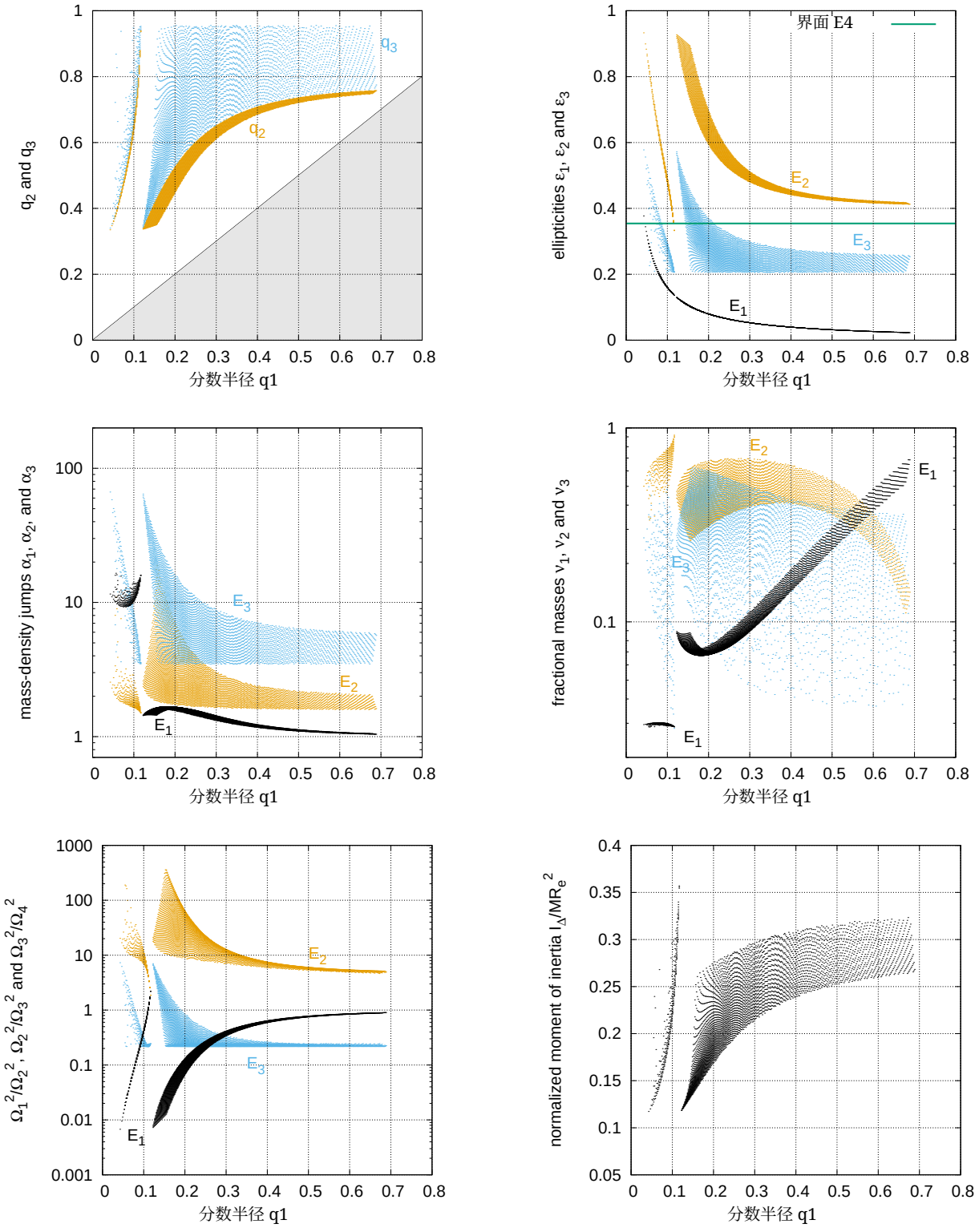


图16. 与图 14 的图注相同，$S_{1,\ 3,\ 2}$ (y_3 和 y_2 相对于 $S_{1,\ 2,\ 3}$)的排列顺序已互换；集合见表 8。

- 总质量 M,
- 最初的引力矩 J_2 至 J_{2n},
- 自转速率 $\Omega_{观测}$ （此处归因于最深的“层”）。

如图所示，只要满足 n，该问题原则上便可求解并且 $\mathcal{L}$ 由 $2\mathcal{L}-1=n$联系起来。完整问题是自洽的，并在嵌套图形理论所依据的近似范围内得到精确求解（见论文 I 和 II）。特别是，界定各层的椭球面为 *not necessarily homothetical* 或类似形状，并且

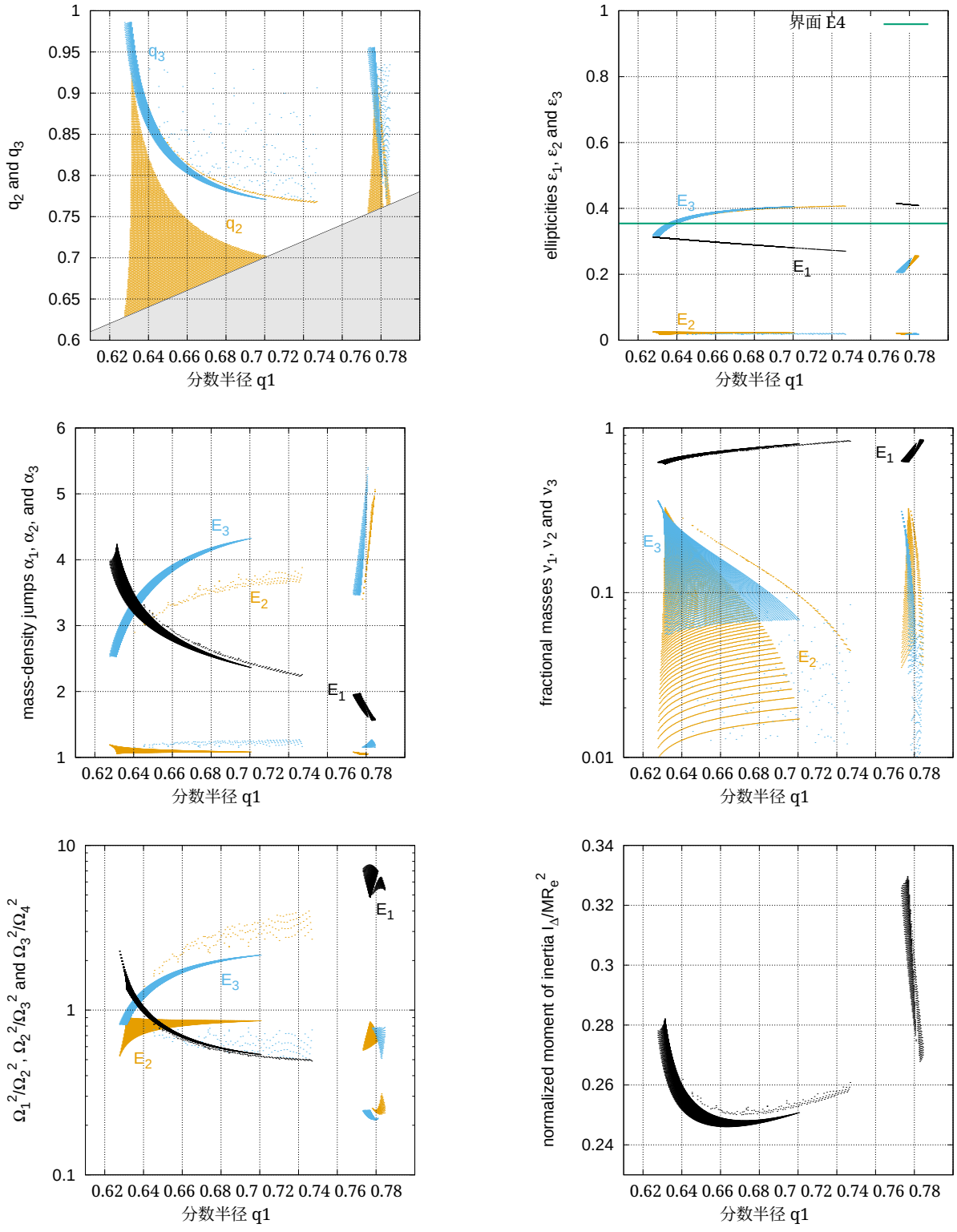


图17。图注同图 14 ，但对应以下四组 $S_{2,\ 1,\ 3}$， $S_{2,\ 3,\ 1}$， $S_{3,\ 1,\ 2}$ 和 $S_{3,\ 3,\ 1}$；组见表 8。

由动力学平衡决定的自转速率彼此不同，这正是本文的主要创新之处。结果与通过 SCF 方法获得的数值解进行了比较，吻合良好。尽管这种方法没有考虑

尽管研究行星内部需要复杂的物理学，但它可以作为数值模型的参考。

6.1 木星总结

尽管对于气态行星而言，尤其是在表面，采用均匀层的假设很难成立，但由于木星的偶数阶矩已精确测定至 J_{12} ，我们仍将该方法应用于木星。正如前文所述，我们主要旨在通过一个具体案例，说明非相似边界椭球面与自转解耦的层相结合对整体量的影响。我们考虑了 $\mathcal{L} \in \{2, 3, 4\}$。

在 *two-layer problem*中，我们可以重现木星主要数据，包括两个矩 J_2 和 J_4。对于 $\mathcal{L} = 2$没有自由度：只有一种构型与之匹配。核心的赤道半径约为 0。689。其质量为 244 个地球质量，质量密度约为 3 g/cm^3。这一数值与文献中双层木星模型所得结果非常吻合。界面处的密度跃变约为 6。63，远高于通常所得的数值（Miguel 等人，2016；Ni，2020）。因此，该模型推导出的核心质量是通常推断值的 5 至 10 倍。由于核心延伸至超过总半径的一半，因此可将其视为致密内核与稀释内核的组合。仅用两个不可压缩层无法匹配更现实模型所得结果，这并不令人意外。核心/包层界面的扁率约为 0。310。核心的自转速度略快于包层，快约 0。02%，因此该系统的状态非常接近整体自转。对 J_2 和 J_4 的不确定性对这些结果没有显著影响。不过，将自转周期延长约 3 秒即可达到同步运动，如表10 所示。该模型对 J_4以外的矩也给出了非常准确的数值。

在 *three-layer case*中，偶数阶矩匹配至J_8。参数空间更宽（但仍可处理）。能够匹配观测数据的内部结构数量基本上是无限的。存在两组平衡构型。第一组的特征是核心分数半径 q_1 处于 $[0.58, 071]$范围内。核心质量通常介于160至255个地球质量之间。中心密度与 $\mathcal{L} = 2$的相近。整体自转状态在 $q_1 \approx 0.59$处达到，误差仅为几个百分点。在低于该值时，核心和表层的自转速度明显快于中间层；超过该值后，情况则相反。同样，我们发现，略微增加行星的自转周期，可以更好地实现所有层的完全同步。我们在表11 中给出了自转周期增加2秒后获得的参数，这似乎是名义上的偏移量。由于 ΔJ_8 的不确定性，所有这些数值都可能发生一定变化。第二组构型更为特殊。核心质量仍然很高，介于200至265个地球质量之间，但其自转速度是中间层的10倍，并且明显呈扁球形。与双层情形一样，我们只找到了核心远大于且质量远高于预期的构型。这同样可以解释为将致密内核与稀释内核统一起来。中间层可视为富含氦的金属氢层，而包层（第3层）则可视为贫氦的分子氢层。相较于双层情形，一项重要的改进是质量密度跃变分布，这使三层模型更加令人满意（Hubbard 和 Militzer，2016年；Miguel 等人，2016；Wahl 等，2017年；Vazan 等，2018；Nettelmann 等，2021年）。核心与中间层之间的跃变范围为1。5至约4，而在中间层—包层界面处则介于2和7。5之间。

在 *four-layer case* 中，情况变得更加复杂，它重现了 J_2 到 J_{12}。实际上，参数空间（6 个维度）已难以进行详细探测。不过，借助 $\mathcal{L} = 4$，两个主要特性清晰地显现出来。第一个结果与各矩有关。严格来说，对于 J_{10} 和 J_{12} 的中心值，不存在解；模型自然排除了由 J_{10} 和 J_{12} 的不确定性所形成的误差框中的一大片区域。如果我们聚焦于从中心到表面椭率呈正梯度的构型，那么可以发现（包括 J_8 的误差棒）

$$\begin{cases} J_{10} = +0.1921 \pm 0.0050 \times 10^{-6}, \\ J_{12} = -0.0164 \mp 0.0008 \times 10^{-6}. \end{cases} \tag{70}$$

根据 J_{2n} 之间的递推关系（该递推关系随 $\mathcal{L}$ 而异），模型甚至可以预测 J_{14} 的数值。在与上述相同的条件下，我们得到

$$J_{14} = +1.47 \pm 0.11 \times 10^{-9}. \tag{71}$$

另一个重要之处在于有可能得到尺寸较小（约为 10% 或更小）、质量较小（约为几个地球质量）的内核。两层和三层模型不允许出现这一结果；它是针对所考虑行星的特定结果（通过 A_i’s）。小而致密的核心被稀释内核包围、且稀释内核延伸约 $50 - 60\%$ 的解，与其他内部结构和形成模型最近提出的观点相符（Ni 2019年；Militzer 等 2016年）。表 9 和图 15 所示的解中，致密内核与稀释内核之间存在较大的密度跃变，约为 10；这一数值与主要由重元素组成的核心相符。接下来的跃变要小得多：第二层与第三层之间约为 3。8，第三层与最外层之间约为 2。9。与当前模型相比，这些数值仍然偏高，可以将其解释为含有不同化合物、分子量也不同的层之间的转变（例如，贫氦层与富氦层之间的转变）。

值得注意的是，对于 $\mathcal{L} \geq 3$，在某些解中，相邻层之间界面处的自转不连续性相当大（即 $\Omega_i/\Omega_{i+1} \gg 1$ or $\ll 1$）。这类构型可能出现在行星形成的早期阶段，具体取决于吸积物质的角动量以及正在形成的天体的自旋状态。然而，层与层之间长期维持大幅度的相对运动并不容易。这需要机械输入来对抗耗散效应；耗散效应会使所有层趋于处于相似的自转状态（只要可以忽略任何经向环流）。

6.2 展望

如有需要，该方法可以扩展到更多层。对于 $\mathcal{L}$ 层， y_i问题的解在于求解一个（$\mathcal{L} - 1$）次多项式的根，即

$$P_{\mathcal{L}-1}(Y) = 0. \tag{72}$$

	本研究†
q_1	0.68950
ϵ_1	0.31018
$b_1/a_2 = q_1\bar{\epsilon}_1$	0.65549
α_1	6.63121
Ω_2^2/Ω_1^2	1.00000
ν_1	0.76822
$I_\triangle/MR_e^2$	0.26311

†输入数据： a_2， ϵ_2， M， J_2， J_4 见表1$\Omega_{\text{观测}} = \frac{2\pi}{\mathbf{35732.704}}$ s^{-1}

表10。与整体自转相容的木星双层模型参数（自转周期有所延长）；另见表2。

	本研究†	本研究⋆
q_1	0.59070	0.59071
q_2	0.88633	0.88633
ϵ_1	0.29795	0.29795
ϵ_2	0.33355	0.33355
α_1	3.59224	3.59203
α_2	3.15317	3.15316
Ω_1^2/Ω_2^2	1.00009	0.99998
Ω_2^2/Ω_3^2	1.00001	1.00001
ν_1	0.56323	0.56325
ν_2	0.36632	0.36631
$I_\triangle/MR_e^2$	0.26351	0.26351

†输入数据： $a_2, \epsilon_2, M, J_2, J_4, \Omega_{\text{观测值}}$⋆输入数据： $a_2, \epsilon_2, M, J_2, J_4$， 摘自表1$\Omega_{\text{观测值}} = \frac{2\pi}{\mathbf{35732.704}}$ s^{-1}

表11。 与整体自转相容的木星三层模型标称参数：未增强自转周期（第2列）和增强自转周期（第3列）； 参见表 1 和 4。

如果能够获得更多的矩，这种做法是有意义的，但代价是简并。从分析角度来看，增加均匀层的数量来模拟连续分层可能并不是一个好选择。如上所示，四层问题已经相当复杂。

均质层的假设显然对气态天体有很强的限制，因此本文提出的方法并非要与采用复杂状态方程的模型竞争，而只是为这一问题提供一种不同且互补的方法，并揭示其敏感性。假设各层刚性自转又构成了另一项限制，尤其是在模拟最外层时，因为那里的动力学通常比深处复杂得多。相比之下，该模型似乎很适合研究周围有液态海洋的自转岩质行星。

能够解释非均匀密度分布的嵌套平衡图形理论将具有重要价值。尽管具体而言，此处讨论的方程和关系会有所不同，但文章中提出的两步法仍然适用。如果能够考虑具有不同状态方程的层（并将多方指数作为一组新的参数），此处观察到的简并甚至会更加显著。另一个值得研究的有趣问题是层间相对运动。若没有激发机制，界面处出现巨大的自转跃变似乎不太可能（至少难以稳定维持），但自转不连续显然会引出一些值得探讨的问题。若层间剪切能够长期维持，它显然是能量耗散和热释放的来源，量化这一点将很有意义。

数据可用性

所有数据均已纳入本文。

致谢

我们感谢 A. Dutrey、S. Guilloteau、T. Guillot、W. Hubbard、E. Di Folco 和 C. Staelen 提供富有启发性的讨论和意见。我们感谢审稿人提出富有启发性的评审意见。感谢 MCIA 为我们提供本地计算机的计算时间。

参考文献

Abramyan M. G., Kaplan S. A., 1974, 天体物理学, 10, 358 Basillais B., Hur ´e J. M., 2021, 皇家天文学会月刊, 506, 3773 Chambat F., 1994, 《天文学与天体物理学》, 292, 76 Cisneros-Parra J. U., Martinez-Herrera F. J., Montalvo-Castro J. D., 2017, 《天体物理学杂志》, 848, 109 Cisneros-Parra J. U., Martinez-Herrera F. J., Montalvo-Castro J. D., 2019a, 《天体物理学杂志增刊》, 241, 8 Cisneros-Parra J. U., Martinez-Herrera F. J., Montalvo-Castro J. D., 2019b, 《天体物理学杂志增刊》, 241, 8 Debras F., Chabrier G., 2018, 《天文学与天体物理学》, 609, A97 Durante D., Parisi M., Serra D., Zannoni M., Notaro V., Racioppa P., Buccino D. R., Lari G., Gomez Casajus L., Iess L., Folkner W. M., Tommei G., Tortora P., Bolton S. J., 2020, 《地球物理研究快报》, 47, e86572 Folkner W. M., 2017, 《地球物理研究快报》, 44, 4694 Guillot T., 1999, 《行星与空间科学》, 47, 1183 Guillot T., Miguel Y., Militzer B., Hubbard W. B., Kaspi Y., Galanti E., Cao H., Helled R., Wahl S. M., Iess L., Folkner W. M., Stevenson D. J., Lunine J. I., Reese D. R., Biekman A., Parisi M., Durante D., Connerney J. E. P., Levin S. M., 2018, 《自然》, 555, 227 Hachisu I., 1986, 《天体物理学杂志增刊》, 61, 479 Hamy M., 1890, 纯粹与应用数学杂志，第六卷。Gauthier-Villars et Fils Heiskanen W., Moritz H., 1976, 《物理大地测量学》。W.H. Freeman Helled R., 2018, 《木星和土星的内部结构》。第175页 Higgins C. A., Carr T. D., Reyes F., Greenman W. B., Lebo G. R., 1997, J. Geophys. Res., 102, 22033 Hubbard W. B., 2013, 《天体物理学杂志》, 768, 43 Hubbard W. B., Militzer B., 2016, 《天体物理学杂志》, 820, 80 Hur ´e J. M., 2022a, 皇家天文学会月刊, 512, 4031 Hur ´e J. M., 2022b, 皇家天文学会月刊 , 512, 4047 Iess L., Militzer B., Kaspi Y., Nicholson P., Durante D., Racioppa P., Anabtawi A., Galanti E., Hubbard W., Mariani M. J., Tortora P., Wahl S., Zannoni M., 2019, 《科学》, 364, aat2965 Kadam K., Motl P. M., Frank J., Clayton G. C., Marcello D. C., 2016, 皇家天文学会月刊, 462, 2237 Kaspi Y., 2013, 《地球物理研究快报》, 40, 676 Kaspi Y., Galanti E., Showman A. P., Stevenson D. J., Guillot T., Iess L., Bolton S. J., 2020, 《空间科学评论》, 216, 84 Kaspi Y., Guillot T., Galanti E., Miguel Y., Helled R., Hubbard W. B., Militzer B., Wahl S. M., Levin S., Connerney J. E. P., Bolton S. J., 2017, 《地球物理研究快报》, 44, 5960

Kaspi Y. e. a., 2018, 《自然》, 555, 223 Kellogg O. D., 1929, 《势理论基础》。纽约：Frederick Ungar 出版公司 Kiuchi K., Nagakura H., Yamada S., 2010, 《天体物理学杂志》, 717, 666 Liu S.-F., Hori Y., M¨uller S., Zheng X., Helled R., Lin D., Isella A., 2019, 《自然》, 572, 355 Love A., Appell P., Beghin H., Villat H., 1914, 《纯粹与应用数学百科全书》。第四卷。第五分卷。第2分册。18.4。Les grands classiques Gauthier-Villars, J. Gabay, 索镇 Martinez F. J., Cisneros J., Montalvo D., 1990, 《墨西哥天文学与天体物理学评论》, 20, 15 Mecheri R., Meftah M., 2021, 皇家天文学会月刊, 506, 2671 Miguel Y., Bazot M., Guillot T., Howard S., Galanti E., Kaspi Y., Hubbard W. B., Militzer B., Helled R., Atreya S. K., Conner- ney J. E. P., Durante D., Kulowski L., Lunine J. I., Stevenson D., Bolton S., 2022, arXiv 预印本, 第 arXiv:2203.01866 页 Miguel Y., Guillot T., Fayon L., 2016, 《天文学与天体物理学》, 596, A114 Miguel Y., Guillot T., Fayon L., 2016, 《天文学与天体物理学》, 596, A114 Militzer B., Soubiran F., Wahl S. M., Hubbard W., 2016, 《地球物理研究杂志：行星》, 121, 1552 Militzer B., Wahl S., Hubbard W. B., 2019, 《天体物理学杂志》, 879, 78 Montalvo D., Martinez F. J., Cisneros J., 1983, 《墨西哥天文学与天体物理学评论》, 5, 293 M¨uller S., Helled R., Cumming A., 2020, 《天文学与天体物理学》, 638, A121 Nettelmann N., 2017a, 载于《美国地球物理联合会秋季会议摘要》第2017卷, 《刚性自转木星内部模型的低阶与高阶引力谐波》。第 P31C–2809页 Nettelmann N., 2017b, 《天文学与天体物理学》, 606, A139 Nettelmann N., Movshovitz N., Ni D., Fortney J. J., Galanti E., Kaspi Y., Helled R., Mankovich C. R., Bolton S., 2021, 《行星科学杂志》, 2, 241 Neuenschwander B. A., Helled R., Movshovitz N., Fortney J. J., 2021, 《天体物理学杂志》, 910, 38 Ni D., 2019, 《天文学与天体物理学》, 632, A76 Ni D., 2020, 《天文学与天体物理学》, 639, A10 Poh´anka V., 2011, 《地球物理学与大地测量学论丛》, 41, 117 Poincar´e H., 1888年, 法国科学院院刊，第106卷。Gauthier-Villars et Fils，法国国家图书馆，巴黎 Rozelot J. P., Kosovichev A. G., 2021, 载于 Georgieva K., Kirov B., Danov D. 编，《第十三届“太阳对磁层的影响”研讨会论文集：太阳引力矩：它们是什么，有什么作用？简明综述》。第92–97页 Vazan A., Helled R., Guillot T., 2018, 《天文学与天体物理学》, 610, L14 V´eronet A., 1912年, 纯粹与应用数学杂志，第6辑，8, 331 Volterra V., 1903, 《数学学报》, 27, 105 Wahl S. M., Hubbard W. B., Militzer B., Guillot T., Miguel Y., Movshovitz N., Kaspi Y., Helled R., Reese D., Galanti E., Levin S., Connerney J. E., Bolton S. J., 2017, 《地球物理研究快报》, 44, 4649 Yu Z. J., Russell C. T., 2009, 《地球物理研究快报》, 36, L20202 Zharkov V. N., Trubitsyn V. P., 1970年, 《苏联天文学》, 13, 981

附录 A：小椭率的双层情形

椭率趋于零的情形通常与慢速旋转极限相关，此时 Ω_1 和 Ω_2 的表达式形式简单，因此可以显式写出 χ_2-函数。实际上，在最低阶下，论文 I 中的 (42) 和 (58) 可简化为

$$\frac{\Omega_2^2}{2\pi G\rho_2} \approx \frac{2}{15}\epsilon_1^2\left[2\frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} + (\alpha_1-1)q_1^3\left(5\frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2} - 3q_1^2\right)\right] \tag{A1}$$

对于包层，

$$\frac{\alpha_1\Omega_1^2}{2\pi G\rho_2} \approx \frac{\Omega_2^2}{2\pi G\rho_2} + \frac{2}{15}\epsilon_1^2(\alpha_1-1)\left[2\alpha_1 - 3\left(\frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1^2}-1\right)\right] \tag{A2}$$

对于核心。这些表达式（V 型解；参见论文 I）在一般性上并未作整体自转的假设（即 $\Omega_1 = \Omega_2$）。尽管 ρ_2 尚未知，但可利用（26a）消去该量，得到：

$$\frac{1}{2\pi G\rho_2} = \frac{a_2^3\bar{\epsilon}_2}{GM}\frac{2}{3}(1+C_1). \tag{A3}$$

代入此　　将 (A1) 和 (A2) 中的表达式代入，可得 $\chi_2(q_1)$ 的表达式。一般情况下，由

$$\chi_2(q_1) = \frac{GM\epsilon_2^2}{5a_2^3\bar{\epsilon}_2(1+C_1)\Omega_{\rm obs}^2} \times \frac{1}{1+\frac{C_1\bar{\epsilon}_2}{q_1^2\sqrt{q_1^2-\epsilon_2^2 y_1}}}\left\{2 + \frac{C_1\bar{\epsilon}_2}{q_1^2\sqrt{q_1^2-\epsilon_2^2y_1}}\left[2\frac{C_1\bar{\epsilon}_2}{q_1^2\sqrt{q_1^2-\epsilon_2^2y_1}} - 3 + 5\frac{y_1}{q_1^2} + q_1^3(5-3y_1)\right]\right\} - 1 \tag{A4}$$

对于整体自转，该函数可简化为

$$\chi_2(q_1) = \frac{GM\epsilon_2^2}{5a_2^3\bar{\epsilon}_2(1+C_1)\Omega_{\rm obs}^2} \times \left[\frac{10y_1(q_1^2-y_1)}{q_1^2[2y_1+q_1^5(3y_1-5)]} - 3 + 5\frac{y_1}{q_1^2}\right] - 1. \tag{A5}$$

在这种情况下，由 (A1) 和 (A2) 可推导出质量密度跃变，即

$$\alpha_{1C} \approx 1 + \frac{5(q_1^2-y_1)}{2y_1+q_1^5(3y_1-5)}. \tag{A6}$$

附录　　B：四层情形下 S、D 和 P 关于 Y_I 问题的公式　　**E**

$$\begin{cases} s = -\dfrac{(A_3-A_6)(A_1-A_7)-(A_3-A_9)(A_1-A_4)}{(A_2-A_5)(A_1-A_7)-(A_2-A_8)(A_1-A_4)}, & \text{(B1a)} \\ d = -\dfrac{(A_3-A_6)(A_2-A_8)-(A_3-A_9)(A_2-A_5)}{(A_2-A_5)(A_1-A_7)-(A_2-A_8)(A_1-A_4)}, & \text{(B1b)} \\ p = \dfrac{(A_3A_4-A_6A_1)(A_2A_7-A_1A_8)-(A_3A_7-A_1A_9)(A_2A_4-A_1A_5)}{(A_4-A_1)(A_2A_7-A_1A_8)-(A_7-A_1)(A_2A_4-A_1A_5)} & \text{(B1c)} \end{cases}$$