arXiv:2301.10603v1 [physics.flu-dyn] 25 Jan 2023

深水不规则破碎波引起的随机粒子输运

D. Eeltink[1,2,3],R. Calvert[4,5],J.E. Swagemakers[4],Qian Xiao[2] 和 T.S. van den Bremer[2], [4]†

[1]麻省理工学院机械工程系，美国马萨诸塞州剑桥[2]牛津大学工程科学系，帕克斯路，牛津 OX1 3PJ，英国[3]洛桑联邦理工学院纳米系统理论物理实验室，瑞士洛桑 Ch-1015[4]代尔夫特理工大学土木工程与地球科学学院，荷兰代尔夫特 2628 CD

[5]爱丁堡大学工程学院，英国爱丁堡 EH9 3FB

（收到日期：xx；修订日期：xx；接受日期：xx）

在许多实际应用中，准确预测表面波引起的粒子输运至关重要，例如搜救、打捞作业、污染追踪及清理工作。Deike等人（2017年）和 Pizzo等人（2019年）的近期研究结果表明，与非破碎波相比，深水破碎波会增强输运。为了模拟不规则波（其中有些会破碎）中的粒子输运，我们建立了一个随机微分方程，用以描述平均粒子输运及其不确定性。该方程结合了布朗运动和复合泊松过程：前者描述非破碎波引起的漂移-扩散效应，后者则描述破碎导致的粒子位置跳跃。根据描述粒子位置概率密度函数演变的相应福克-普朗克方程，我们推导出其前三阶矩的闭式表达式。我们通过新的实验验证了这些预测，在实验中追踪了不规则破碎波里的大量粒子。对于破碎和非破碎波场，我们的实验确认，粒子位置的方差随时间线性增长，这与泰勒单粒子弥散理论一致。对于包含破碎波的波场，复合泊松过程会提高均值和方差的线性增长率，并使粒子位置分布呈现有限偏度。

1. 引言

正确理解并预测海洋表面物体的运动，对多种应用至关重要。例如，漂浮塑料海洋垃圾已迅速成为一个严峻的环境问题（例如，Eriksen 等（2014年））。陆源塑料进入沿海水域的估计量（每年500万至1200万吨，Jambeck 等（2015年））与海上漂浮塑料总量的估计值（不足0.3百万吨，C´ozar 等（2014年）；Eriksen 等（2014年）；van Sebille 等（2015年））之间存在差异，因此需要更准确的输运与弥散模型（van Sebille 等2020年）。此外，清理漂浮塑料的工作有赖于准确预测粒子的分布与轨迹，以便在合适地点部署清理设备（例如，Sainte-Rose等（2020年））。同样，评估

† 联系邮箱地址：t.s.vandenbremer@tudelft.nl

石油泄漏的环境影响以及远海救援行动，都极大地依赖输运模型（例如，Christensen等（2018年））。

在表面重力波（深水波）的周期运动过程中，流体质点并不会沿着完美的圆形轨迹运动。相反，它会沿波传播方向产生净漂移，这被称为斯托克斯漂移（Stokes 1847）。WAM 和 WaveWatch III 等波浪模型基于较长时间尺度（通常为 3 小时）内的平均结果，预测波场的性质，据此可以估算该时间段内的平均斯托克斯漂移（Webb & Fox-Kemper 2011；Breivik等 2014）。这种斯托克斯漂移预测通常会叠加到欧拉流场上，而欧拉流场通常由海洋环流模式或观测数据提供。近期多项研究表明，以这种方式纳入斯托克斯漂移可能会改变所预测的塑料污染输运方向，使辐合区发生偏移（Dobler等 2019），并将微塑料推向更靠近海岸的位置（Delandmeter & van Sebille 2019；Onink 等 2019）。

然而，出于几个原因，斯托克斯漂移本身不应被视为波浪实际输运海洋表面物体的速度。首先，也是最重要的一点，波浪输运粒子时所对应的速度是波致拉格朗日平均速度，它由斯托克斯漂移与波致欧拉平均速度相加而成。在旋转地球上，科里奥利力与斯托克斯漂移共同驱动上层海洋湍流边界层中的欧拉平均流，这种流动称为埃克曼–斯托克斯流，其中包含边界层流的影响（Longuet-Higgins 1953）。为了预测输运粒子时对应的波致拉格朗日平均流，需要将这种埃克曼–斯托克斯流叠加到斯托克斯漂移上（Higgins 等2020a）；或者，波浪与海洋环流模式需要进行适当耦合（例如，Staneva 等 (2021)）。埃克曼–斯托克斯流会显著影响全球漂浮海洋垃圾的聚集分布（Cunningham 等 2022）。波致欧拉平均流也可能在实验室实验中发挥作用（van den Bremer 等 2019；van den Bremer & Breivik 2018）。其次，物体本身的特性，如形状、大小和浮力，会使其轨迹偏离无穷小拉格朗日粒子的轨迹，从而导致平均输运不同（Santamaria 等 2013；Huang 等 2016；Alsina 等 2020；Calvert 等2021；DiBenedetto 等 2022）。第三，众所周知，破碎波输运粒子的速度远高于非破碎波。对于陡波，粒子可能会乘波而行（Pizzo 2017），并因波浪破碎而受到比斯托克斯漂移更快的输运（Deike 等2017；Pizzo 等2019）。本文将聚焦于（近乎）理想的拉格朗日粒子，并考察单向不规则深水波及波浪破碎的影响，因此忽略科里奥利力、风以及非波浪驱动流的作用；显然，这些因素也会决定物体在真实海洋中的漂移。

对于非破碎波，可针对不同海况估算斯托克斯漂移（例如，Webb & Fox-Kemper（2011）；Breivik 等 （2014）），其中谱尾发挥着重要作用，但这一作用并非总能得到解析（Lenain & Pizzo 2020）。在不规则或随机波场中，斯托克斯漂移本身也会成为一个随机过程。也就是说，由于波场具有随机性，粒子会相对于这一平均速度发生扩散，从而使其预测位置呈现为一种分布（Herterich & Hasselmann，1982）。斯托克斯漂移方差的估计既可以从谱中获得（Herterich & Hasselmann，1982），也可以根据有效波高与峰值周期的联合分布获得（Longuet-Higgins，1983；Myrhaug等 2014）。或者，也可以进行确定性模拟来计算粒子轨迹（例如，Li & Li（2021）；Farazmand & Sapsis（2019）），进而利用蒙特卡洛方法计算不同初始条件下演变过程的统计量。

破碎波的粒子输运可以在不同尺度上进行描述。在单个波浪或波群的尺度上，可以建立包含波浪破碎效应的粒子轨迹确定性模型。对破碎的聚焦波群进行直接数值模拟表明，净粒子输运与波群在焦点处的理论波陡呈线性关系 $\mathcal{S}$ （Deike 等2017），这与非破碎波中斯托克斯漂移随波陡呈二次关系形成对比。Restrepo & Ramirez（2019）通过 $\mathcal{S}$ 证实了这种线性关系，并计算了漂移的方差。Lenain 等 （2019）和 Sinnis 等（2021）的实验进一步证实了波群增强的漂移以及漂移与波陡之间的线性关系；Sinnis 等（2021）还考察了带宽的影响。若考虑与真实海洋应用相关的大得多的尺度，则需要采用随机方法。Pizzo等 （2019）将 Deike 等（2017）针对波群获得的结果推广到海况尺度。根据波谱（峰值波数）和风速，可以估算破碎统计量$\Lambda(c)\mathrm{d}c$ （Banner 等 2000；Dawson 等 1993；Ochi & Tsai，1983；Holthuijsen & Herbers，1986；Sullivan 等 2007）。该统计量定义为以速度范围（c，$c+\mathrm{d}c$）移动的破碎波峰的平均长度，其中 c为相速度（Phillips，1985）。因此，Pizzo 等 （2019）得到的破碎漂移速度按单位面积内破碎海面的比例加权，而这一比例又可以表示为峰值波数和风速的函数。将他们预测的漂移速度与非破碎波的斯托克斯漂移进行比较可见，随着风速和波陡增加，漂移中的波浪破碎分量变得更加重要，其值最高可达非破碎波斯托克斯漂移的30%（Pizzo 等 2019）。

一系列论文研究了随机斯托克斯漂移（Jansons & Lythe，1998；Bena等 ，2000），重点考察了两个对向波情形下的扩散；在这种情况下，平均漂移应为零，但扩散仍会导致输运。这些研究结果无法直接应用于真实的海洋波浪。更广泛地说，若干作者研究了随机表面重力波场的泰勒粒子扩散（Herterich & Hasselmann，1982；Sanderson & Okubo，1988；Weichman & Glazman，2000；Balk，2002、2006）。B¨uhler & Holmes-Cerfon（2009）推导了科里奥利力作用下浅水系统中随机波的泰勒单粒子扩散率，并通过蒙特卡洛模拟验证了其结果。B¨uhler & Guo（2015）提出了一个普遍适用的随机框架，推导出描述粒子位置的随机微分方程（SDE），以及针对沿准水平层化面运动的粒子的柯尔莫哥洛夫后向方程；这些层化面由受白噪声强迫、并通过旨在模拟内波衰减的非线性阻尼耗散的小振幅内重力波所诱导。

本文提出了一个随机微分方程（SDE），用于描述粒子位置在存在波浪破碎的单向不规则深水波场中的演化，并推导出相应的福克-普朗克方程，用以描述分布的演化。该随机微分方程结合了布朗运动和复合泊松过程：前者刻画非破碎情况下的漂移-扩散效应，后者刻画由破碎导致的粒子位置跳跃。我们聚焦于短时间范围，在此期间海况（即其谱）保持不变，并通过新的实验室实验验证该随机微分方程的预测；实验中，我们追踪了大量粒子。

本文的结构安排如下。首先，第2节介绍布朗漂移-扩散过程，用于模拟无破碎情况下粒子位置的演化；并介绍泊松过程，用于模拟粒子遇到破碎波峰时所经历的冲浪行为。第2节还推导了描述粒子位置概率密度函数演化的相应福克-普朗克方程，以及其均值、方差和峰度。随后，第3节概述所开展的波浪水池实验，其中对粒子在

不规则波中的运动进行了跟踪。在第4节中，我们将不同波陡下、因而不同破碎波比例对应的实验结果与理论预测进行对比验证。最后，我们在第5节中作出结论。

2. 粒子输运的随机模型

对于给定的初始粒子位置 $X_0 = X(t = 0)$，我们旨在确定粒子位置 $X(t)$ 的（长期）演变及其分布，此处仅考虑波浪平均量（欧拉平均量或拉格朗日平均量）。粒子以拉格朗日平均速度输运，该速度由欧拉平均速度与斯托克斯漂移之和构成（例如，B¨uhler (2014年)）。在我们的情形中，所考虑的拉格朗日平均速度为：

$$u_{\mathrm{L}} = u_{\mathrm{E,NB}} + \underbrace{u_{\mathrm{S}} + u_{\mathrm{B}}}_{u_{\mathrm{D}}}, \tag{2.1}$$

它由不包含波浪破碎影响的欧拉平均速度 $u_{\mathrm{E,\ NB}}$ 和漂移速度 u_{D} 相加构成，而后者又由非破碎波的斯托克斯漂移 u_{S} 和破碎贡献 u_{B}构成。为简化起见，后续模型中我们忽略波致欧拉平均速度$u_{\mathrm{E,\ NB}}$ 因为对于深水波，它对（非旋转）海洋表面漂移的贡献可以忽略不计（例如，van den Bremer & Taylor (2015年)；Higgins 等 (2020年b)）。为与水槽实验（§3）进行比较，我们将考虑欧拉流（无论是否由波浪引起）的影响。

我们拟将（波浪平均后的）粒子位置 $X(t)$建模为跳跃扩散过程，其随机微分方程（SDE）可写为：

$$\mathrm{d}X = \underbrace{b(X(t),t)\mathrm{d}t}_{\text{Mean drift}} + \underbrace{\sigma(X(t),t)\mathrm{d}W(t)}_{\text{Diffusion process}} + \underbrace{\mathrm{d}J(t),}_{\text{Compound jump process}} \tag{2.2}$$

$$= \langle u_{\mathrm{S}}\rangle \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t) + \mathrm{d}J(\Lambda(\epsilon), G(s;\epsilon); t), \tag{2.3}$$

其中，$b(X(t)) = \langle u_{\mathrm{S}}\rangle$ 是随机或不规则非破碎波场的平均斯托克斯漂移（尖括号表示随机过程的均值）；$\sigma(X(t)\ t) = \sigma$由单个波浪的随机性引起的波浪平均漂移率的标准差，其中 $D = \sigma^2/2$ 为相应的扩散系数；$W(t)$表示维纳过程（布朗运动）。波浪破碎的影响由复合泊松过程 $J(t)$描述，它表示破碎所引起的粒子位置跳跃。请注意，该过程的均值非零，即 $\langle u_{\mathrm{B}}\rangle \neq 0$，这反映了破碎对平均漂移的贡献。

我们将依次讨论式（2.2）中的各项，先概述在没有破碎波时，粒子位移如何可视为漂移扩散过程（§2.1），再引入复合跳跃过程以考虑波浪破碎（§2.2）。最后，在§2.3中，我们将提出一个描述粒子位置概率密度函数 $P(X,\ t)$演化的福克-普朗克方程，并给出 $P(X,\ t)$前三阶矩的解析解（假设初始粒子分布为狄拉克δ函数）。

2.1. 无破碎情况下的随机斯托克斯漂移

式（2.2）中的第一项表示粒子在没有波浪破碎时所经历的平均漂移，即所谓的斯托克斯漂移。对于深水中的单色单向波，斯托克斯漂移表示为（Stokes，1847）：

$$U_{\mathrm{S}}(z) = a^2\omega k e^{2kz}, \tag{2.4}$$

其中， ω 为波浪的角频率， k 为其波数， a 为其振幅， z为从静水面向上测量的垂直位置。在水面处 u_S 的斯托克斯漂移值通常近似为 $u_\mathrm{S} = U_\mathrm{S}$（$z = 0$）。对于周期性线性波，以（通常估计的）波周期 T 和波高表示为$H = 2a$:

$$u_\mathrm{S} = (ak)^2 c = \frac{a^2\omega^3}{g} = \frac{(2\pi)^3}{g}\frac{H^2}{T^3}, \tag{2.5}$$

其中 $c = \omega/k$，并且我们采用了线性深水色散关系 $\omega^2 = gk$，其中 g 为引力常数。斯托克斯漂移与陡峭度的平方 ak成正比，这从式（2.5）中显而易见。

不规则波场或随机波场由不同波周期和波高的分布组成。平均斯托克斯漂移可通过累加不同谱分量的斯托克斯漂移贡献得到（Kenyon 1969年；Webb & Fox-Kemper 2011）：

$$\langle u_\mathrm{S}\rangle = \frac{16\pi^3}{g}\int_0^\infty S(f) f^3 \mathrm{d}f, \tag{2.6}$$

其中，单向频率谱密度 $S\ f$ 的定义满足 $\int_0^\infty S\ f\ \ f = (\ )\mathrm{d}$ ，$\langle\eta^2\rangle$ $\eta\ t$ 其中 $(\ )$ 为水面高程序列， f 为波频率。显然，对于单色波，方程（2.6）给出的结果与方程（2.5）相同。

式（2.2）中的第二项 $\mathrm{d}X = \sigma\mathrm{d}W$将相对于均值的随机偏差建模为维纳过程或正态扩散过程。从概念上讲，均值偏差的产生是因为在波浪平均时间尺度上，不规则海况中的每种不同波长和波高都会产生不同的斯托克斯漂移，因此导致不同的位移。无论斯托克斯漂移的分布如何，只要其方差有限，中心极限定理就指出，粒子位置 $X(t)$ 将呈正态分布。对于正态过程，二阶中心矩或方差 $\langle(X(t) - \langle X(t)\rangle)^2 = 2Dt$，其中 D 为扩散系数。假设底层随机过程平稳，漂移速度波动（即 $\tilde{u}_\mathrm{S} = u_\mathrm{S} - \langle u_\mathrm{S}\rangle$）的统计量不随时间变化。可写为 $D = \langle\tilde{u}_\mathrm{S}^2\rangle\tau = \sigma_\mathrm{S}^2\tau$ ，其中 $\tau \propto \Delta\omega^{-1}$ 为漂移速度的积分相关时间， $\Delta\omega$ 表示底层谱的宽度， $\sigma_\mathrm{S}^2 = \langle\tilde{u}_\mathrm{S}^2\rangle$ 为斯托克斯漂移的方差（Taylor 1922；Herterich & Hasselmann，1982；Farazmand & Sapsis 2019年）。因此，式（2.2）中的 $\sigma = \sqrt{2D} = \sqrt{2\tau}\sigma_\mathrm{S}$ 。

因此，要估算扩散系数 D，有必要获得斯托克斯漂移 $P(u_\mathrm{S})$ 的分布，并由此推导出其标准差 σ_S。在 Herterich 与 Hasselmann（1982）中，假定谱较窄，这意味着周期 $T = T_p$ 为一个恒定的（非随机）值。因此，可以利用（2.5）直接从波高的瑞利分布推导出斯托克斯漂移的分布（Longuet-Higgins 1952）。由于 $u_\mathrm{S} \propto H_s^2$，斯托克斯漂移服从指数分布。具体而言， u_S 的概率密度函数为:

$$P(u_\mathrm{S}; H_\mathrm{s}, T_p) = \frac{gT_p^3}{4\pi^3}\frac{1}{H_\mathrm{s}^2}\exp\left[-\frac{gT_p^3}{4\pi^3}\frac{u_\mathrm{S}}{H_\mathrm{s}^2}\right]. \tag{2.7}$$

或者，Myrhaug 等人 （2014年）和 Longuet-Higgins（1983年）推导出了适用于 Pierson–Moskowitz 谱的指数分布，并将波高与波周期的联合分布考虑在内。在这两种情况下，得到的都是指数分布，其特点是均值等于标准差。因此，我们有 $\sigma_\mathrm{S} = \langle u_\mathrm{S}\rangle$，并将用它来预测扩散系数 D。

2.2. 作为跳跃过程的破碎波遭遇

我们的实验将表明（参见§3，尤其是图2），对于陡峭度足够大以至于开始破碎的波浪，除了非破碎波所预测的粒子的缓慢渐进漂移和扩散之外，波浪发生破碎时还会出现粒子位置的跳跃。每个"跳跃"事件都代表粒子与（破碎波的）波峰的一次遭遇。我们用式（2.2）中的复合泊松过程 $J(t)$ 对这些跳跃事件进行建模：

$$J(t) = \sum_{i=0}^{N_\Lambda(t)} s_i. \tag{2.8}$$

其中，$N_\Lambda(t)$ 是泊松点过程的计数过程，而到达率 Λ 对应于复合泊松过程中单位时间内跳跃的期望次数。

我们预计到达率 Λ 会随陡峭度 ϵ 的增加而增加。假设到达率随陡峭度逐渐增加，并在陡峭度足够大时达到饱和，我们提出了一个三参数 S形函数（见图3a）：

$$\Lambda(\epsilon; \tau_\Lambda, \phi_\Lambda, \epsilon_{0,\Lambda}) = \frac{1/\tau_\Lambda}{1 + \exp\left[-\phi_\Lambda(\epsilon - \epsilon_{0,\Lambda})\right]}, \tag{2.9}$$

其中，参数 τ_Λ、ϕ_Λ 和 $\epsilon_{0,\Lambda}$ 将根据我们的实验数据进行估计（见 §3）。此外，我们假设跳跃的振幅 s_i 服从二参数伽马分布，其概率密度函数为 $G(s; \alpha(\epsilon), \beta(\epsilon))$（见图 3b）：

$$G(s; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} e^{-\beta s}, \tag{2.10}$$

其中，$\alpha > 0$ 为形状参数，$\beta > 0$ 为率参数，$\Gamma(\alpha)$ 为伽马函数。根据实验数据，我们将在 §3 中展示，α 和 β 均可有效地建模为陡峭度 ϵ 的线性函数。

2.3. 福克-普朗克方程与解析解

有两种方法可以对随机微分方程 (2.2) 进行积分，从而得到粒子位置 $X(t)$ 的概率分布。可以通过数值积分对 (2.2) 进行蒙特卡洛模拟（例如，Milstein (1995)；Higham (2001)），并根据这些轨迹的统计量，在每个时间步获得经验概率密度函数。另一种方法是直接求解与 (2.2) 对应的随机变量 $X(t)$ 的概率密度函数 $P(x,\ t)$ 的演化方程，即所谓的福克-普朗克方程。对于 (2.2)，福克-普朗克方程为（例如，Gardiner (1983)；Denisov 等 (2009)；Gaviraghi 等 (2017)：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\langle u_S \rangle \frac{\partial}{\partial x}P(x,t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,t) - \Lambda P(x,t) + \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' P(x',t) J(x - x'). \tag{2.11}$$

这个偏微分方程可以通过数值方法求解（例如，Gaviraghi（2017年））。或者，通过利用该分布的特征函数，

$$\hat{P}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{ilx} P(x), \tag{2.12}$$

我们得到常微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{P}(l) = i\langle u_S \rangle l\hat{P}(l) - \frac{\sigma^2}{2}l^2\hat{P}(l) - \Lambda\hat{P}(l) + \Lambda\hat{G}\hat{P}(l), \tag{2.13}$$

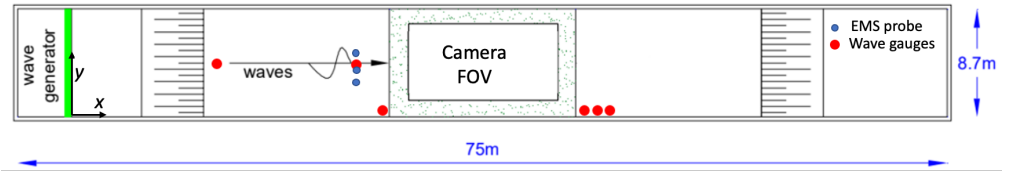


FIGURE 1. 实验装置，标示了上方粒子追踪相机的视场（FOV）、波浪仪（红点）和 EMS 速度测量探头（蓝点）。

其中，伽马分布的特征函数为

$$\hat{G}(l) = \left(1 - i\frac{l}{\beta}\right)^{-\alpha}. \tag{2.14}$$

方程 (2.13) 可精确求解，其解为：

$$\hat{P}(l,t) = A(l)\exp\left[\left(i\langle u_S\rangle l - \frac{\sigma^2}{2}l^2 - \Lambda + \Lambda\left(1 - i\frac{l}{\beta}\right)^{-\alpha}\right)t\right], \tag{2.15}$$

其中 $A(l)$ 是一个由初始条件确定的未知函数。

利用概率密度函数的特征函数，可以轻松求得其原始矩：

$$m_n = \langle X^n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^n e^{ilx} P(x) = (-i)^n \frac{\partial^n \hat{P}(l)}{\partial l^n}\bigg|_{l=0}. \tag{2.16}$$

对于以狄拉克δ函数为初始条件的情形（即 $\hat{P}(t=0) = 1$），由 (2.15) 中的 $A = 1$ 可得方程 (2.11) 的第一（三个）中心矩的精确解：

$$\langle X(t)\rangle = -i\frac{\partial \hat{P}(l,t)}{\partial l}\bigg|_{l=0} = \left(\langle u_S\rangle + \frac{\alpha}{\beta}\Lambda\right)t, \tag{2.17}$$

$$\langle \tilde{X}(t)^2\rangle = -\frac{\partial^2 \hat{P}(l,t)}{\partial l^2}\bigg|_{l=0} - m_1^2 = \left(\sigma^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta}\Lambda\right)t, \tag{2.18}$$

$$\langle \tilde{X}(t)^3\rangle = i\frac{\partial^3 \hat{P}(l,t)}{\partial l^3}\bigg|_{l=0} - 3m_1m_2 + 2m_1^3 = \frac{\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)}{\beta^2}\Lambda t, \tag{2.19}$$

其中 $\tilde{X}(t) = X(t) - \langle X(t)\rangle$。在 (2.17)-(2.19) 中，非破碎波的预期斯托克斯漂移 $\langle u_S\rangle(\epsilon)$、到达率 $\Lambda(\epsilon)$，以及形状因子和尺度因子 $\alpha(\epsilon)$ 和 $\beta(\epsilon)$ 均为陡峭度的函数；它们对 ϵ 的依赖关系将在下一节根据实验数据进行估算。由 (2.17)-(2.19) 可知，各中心矩均随时间线性增加。破碎会增大平均漂移（参见 (2.17)）和粒子位置方差（参见 (2.18)）；此外，破碎还会引入非零（正）偏度，而非破碎波不会出现这一现象（参见 (2.19)）。

H_s (m)	$H_{\mathrm{s,\ exp}}$ (m)	ϵ_{exp}	Δt (s)	N_{traj}	Λ (1/秒)	$\langle u_{\mathrm{S}} \rangle$ (毫米/秒)	$\langle u_{\mathrm{L,exp}} \rangle$ (毫米/秒)	$\langle u_{\mathrm{E,fit}} \rangle$ (毫米/秒)
0.050	0.053	0.074	257	143	3.25×10^{-5}	13.1	13.7	+4.1
0.090	0.087	0.122	167	136	1.42×10^{-2}	24.9	22.5	+0.8
0.120	0.115	0.162	122	85	6.96×10^{-2}	35.3	30.0	-5.7
0.170	0.132	0.185	143	113	6.59×10^{-2}	43.8	31.2	-10.8

TABLE 1. 实验概述及参数值。对于所有实验，$T_p = 1.2$ s。下标 exp 表示实验中测得的值，Δt 是一段（分段）轨迹的时长，N_{traj} 对应于被跟踪的球体数量，Λ 是粒子位置跳跃的到达率。平均斯托克斯漂移 $\langle u_{\mathrm{S}} \rangle$ 根据式 (2.6) 计算，平均拉格朗日速度 $\langle u_{\mathrm{L,exp}} \rangle$ 根据实验中的示踪粒子位置获得，欧拉平均速度 $\langle u_{\mathrm{E,fit}} \rangle$ 则通过调整，使实验与模型预测的平均值一致（见 §3.1.3）。

3. 实验室实验

3.1. 实验室布置和输入条件

3.1.1. 波浪条件

实验在荷兰 Deltares 的大西洋水池中进行，该水池宽 8.7 m、长 75 m。图 1 概述了实验装置。水槽一端配备了分段式活塞造波机，由 20 块造波板组成；另一端设有消波滩。水深 d 为 1 m。实验采用由 JONSWAP 谱密度 $S(\omega)$ 规定的非规则波，

$$S(\omega) = \frac{Kg^2}{\omega^5} \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^4\right] \gamma^r, \tag{3.1}$$

其中，ω 表示波浪的频率（rad/s），g 表示重力加速度，ω_p 表示峰值频率，$r = \exp\left[-(\omega-\omega_p)^2/(2\sigma_{\mathrm{S}}^2\omega_p^2)\right]$，其中（无量纲）谱宽为$\sigma_{\mathrm{S}} = 0.07$，对于 $\omega \leqslant \omega_p$ 取值为 $\sigma_{\mathrm{S}} = 0.09$，对于 $\omega > \omega_p$取值为 γ。形状参数 $\gamma = 3.3$ 刻画谱的“尖峰程度”，从而也刻画其带宽；所有实验中我们均设定 τ。带宽十分重要，因为它决定了相关时间 $\sigma = \sqrt{2D} = \sqrt{2\tau\sigma_{\mathrm{S}}}$，进而决定由式（2.2）预测的粒子位置方差（即 $\overline{\Delta\omega = 1.39}$）。利用谱的二阶矩，我们计算得到谱宽为 $\tau = 1/\Delta\omega$ rad/s，并设定 K。调整式（3.1）中的前因子 H_s，以获得所需的有效波高。随机选取离散谱的相位，以生成持续30 min的不规则波浪时间序列，并将其作为线性强迫输入造波机。反射通常小于5%。

实验所选取的参数值见表1。峰值周期为 T_p =1.2 s，考察了四种（输入）有效波高：$H_s = 0.05$、0.09、0.12 和 0.17 m（输入），其中破碎波所占比例逐渐增加。将特征陡峭度定义为 $\epsilon = k_p H_s/2$，其中 k_p 为对应于 T_p的波数，可得 ϵ =0.070、0.126、0.168 和 0.238（输入）。实验在深水条件下进行（$k_p d$ =2.8）。水槽中共布置了 6 个波浪仪。利用 2 号波浪仪（与 EMS 探头位于同一位置）测得的水面高程时间序列 $\eta(t)$，计算表1所报告实验中测得的参数值；这些参数以下标 expt 标记，以区别于输入值。功率谱 $S(f)$则用于根据式（2.6）估算斯托克斯漂移。从表1可以看出

显然，在实验中，H_s较大时，H_s 的产生量偏低，这在很大程度上是由波浪破碎造成的。

3.1.2. 拉格朗日示踪粒子

示踪粒子为直径 20 mm 的黄色聚丙烯球，选择尽可能小的尺寸，但又足以让俯视摄像机追踪。粒子的密度为 920 kg/m^3，使粒子尽可能浸没，以便随流体运动，同时又能从上方检测到。实验在淡水（998 kg/m^3）中进行。使用自动装置每隔 10 s 向水槽中投放一组约 20 个球，沿水槽 3.0 m 的横向区段（y方向）间隔 15 cm 排列，并在进入相机视场前的一小段距离处（x方向）投放。一台 Z-CAM摄像机安装在水槽上方 11.9 m 处，可拍摄水槽长度方向约 8 m、宽度方向约 6 m 的区域（见图 1）。

为考察我们的示踪粒子是否表现为理想化的拉格朗日粒子，我们将测得的示踪粒子速度谱与根据附录D中的线性波理论、利用测得的水面高程得到的速度谱进行比较。对于远高于谱峰的高频截止频率以下的频率范围，我们发现两者吻合良好，证实了示踪粒子的拉格朗日特性。根据 Calvert 等人(2021年)，我们估计，直径小于波长 10% 的球形粒子通常表现为拉格朗日粒子。对于直径为 20 mm 的球体，这对应于 2.8 Hz 的截止频率（根据线性色散计算），这也与我们在附录D中前述的谱比较结果一致。由于 $D/\lambda_p = 0.9\%$，我们预计，与非破碎波中的斯托克斯漂移相比，我们的示踪粒子不会因 Calvert 等人 (2021 年) 所述机制而经历增强的输运。

3.1.3. 欧拉平均流的作用

虽然我们的模型 (2.2) 中未考虑欧拉平均流 u_{E}，但实验中存在这种流动，因此必须将其纳入考虑，才能进行比较（参见 (2.1)）。波浪引起的欧拉平均流常常使人们无法在实验室波浪水槽中观测到斯托克斯漂移；众所周知，这类流动极难预测，且因实验室水槽和实验条件而异。在实验室中观测到的这类流动，也不能代表野外波浪引起的欧拉平均流（综述见 van den Bremer与Breivik（2017）和 Monismith（2020））。

使用三个 EMS速度测量装置，在三个不同深度（始终完全浸没）和一个水平位置测量欧拉流（(x, y =14。2，4。05-4。65) m）。据此，可以针对每种实验条件，估算水槽特有的欧拉平均流；测量深度固定为 $z = -20$、-30 和 -50 cm，且相对于静水位为 $z = 0$。

尽管我们直接测量了欧拉流，但在实验与模型预测的比较中（参见（2.1）），并未直接使用从这些测量结果（通过波平均）得到的欧拉平均流。原因在于，出于实际考虑，这些欧拉流测量仅在空间中的一个点（x, y）以及自由表面以下某一深度处进行，因此向表面外推可能会带来误差。尽管如此，我们可以从测量结果推断，欧拉平均流是非随机的，也就是说，它不会像测得的拉格朗日平均速度那样，在相同的时间尺度上呈现数量级相当的变化。

因此 修正 b ，均值非破碎 g 漂移，在我们的模型中 (2.2), 采用一个 n

任意（未测量的）欧拉平均流 $\langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$，使得 $b = \langle u_{\mathrm{S}}\rangle + \langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$。平均斯托克斯漂移 $\langle u_{\mathrm{S}}\rangle$ 根据测得的表面高程谱（拟合的 JONSWAP 谱）使用式（2.6）计算。随后选择欧拉平均流的任意值 $\langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$，使模型预测的平均拉格朗日漂移 $\langle u_{\mathrm{L,mod}}\rangle = \mathrm{d}\langle X(t)\rangle/\mathrm{d}t$（使用 $b = \langle u_{\mathrm{S}}\rangle + \langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$）等于实验中的平均拉格朗日漂移 $\langle u_{\mathrm{L,exp}}\rangle$，即 $\langle u_{\mathrm{L,mod}}\rangle = \langle u_{\mathrm{L,exp}}\rangle$。因此，在 §4 中我们将模型预测与实验结果进行比较，关注的是粒子位置的高阶矩。由此得到的值 $\langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$ 与在深度 $\langle u_{\mathrm{E,exp}}\rangle$ 处测得的值相差不大（见附录C中的表3）。补充说明，对于非破碎波，我们预期 $\langle u_{\mathrm{L,mod}}\rangle = \langle u_{\mathrm{S}}\rangle + \langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$；而对于破碎波，跃变也会对均值 $\langle u_{\mathrm{B}}\rangle$产生贡献。下一节将说明如何计算这一贡献，且必须先完成这项计算，才能求得 $\langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$。表1列出了不同实验中各项平均速度的数值。

3.2. 轨迹数据处理

我们的目标是根据波浪谱的信息，预测粒子轨迹及粒子位置概率分布的性质。为此，我们首先需要处理相机图像以获取粒子轨迹。随后，我们利用这些轨迹来获取用于模拟破碎的跳跃过程的性质。

3.2.1. 图像处理

我们使用 OpenCV 跟踪黄色球体。我们通过色调饱和度滤波器识别球体，随后使用 CSRT 算法进行跟踪，从而获得每个球体中心在各个时刻的亚像素位置（x_p, y_p）。时间步长由相机的帧率 24 Hz 确定。我们使用边长为 75 mm 的棋盘格计算相机内参，并据此校正轨迹的畸变。随后，将像素位置转换为水槽坐标（x, y），并假设这些坐标位于静水位平面 $z = 0$ 上；该平面由一个位于已知位置的漂浮棋盘格定义。更多细节见附录A。

3.2.2. 创建样本轨迹

为了生成可用于与随机模型预测进行比较的样本，我们将粒子轨迹 $X_i(t)$ 分割为长度为 Δt 的轨迹，并将所有轨迹平移，使其初始位置为 $X_i(t=0) = 0$，如图2所示。由此得到的初始分布为狄拉克δ函数，并获得 N_{traj} 条长度相同的轨迹 Δt（每种有效波高各一组）。

图2插图中的虚线显示了相机分辨率（24 Hz）下的粒子位置 $X(t)$，呈现出粒子随每个波浪发生的振荡运动。随机模型（2.2）适用于足够大的时间尺度，此时波浪的振荡效应已被平均消除，而不规则波场对粒子输运的随机效应仍得以保留。因此，我们以时间间隔 T_p 对轨迹进行采样，从而获得随机的波浪平均轨迹。这些轨迹由图2插图中的实线表示（图2本身中的所有线也表示这些轨迹）。

3.2.3. 破碎检测

对于我们考察的最低有效波高，破碎可以忽略不计；而在最高有效波高下，粒子会多次遭遇破碎波峰，如表1中的跳跃到达率 Λ 所示，该值衡量单位时间内发生的跳跃次数。图2展示了这两个极端情况下粒子位置的演变。

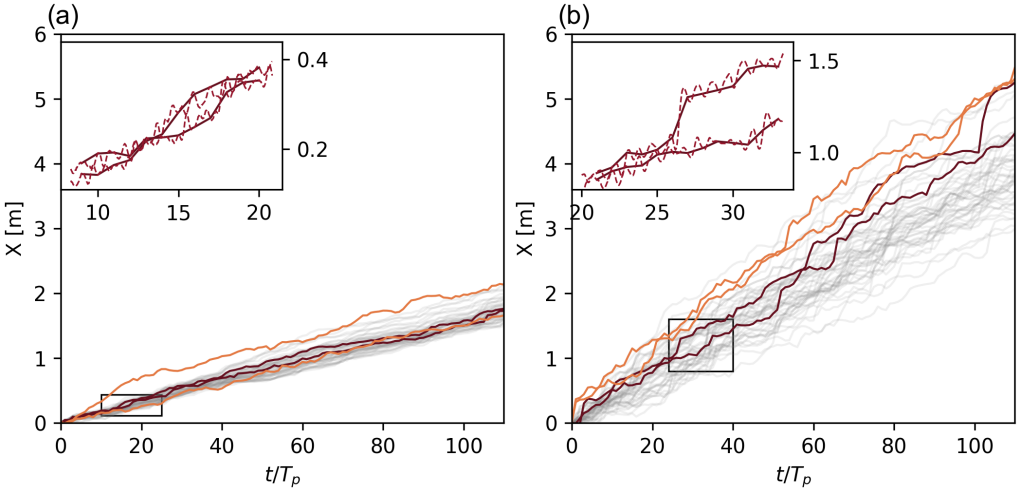


FIGURE 2. 不规则波中的粒子轨迹示例，其中显示了实验结果（浅灰色和深红色）以及我们模型的蒙特卡洛模拟结果（橙色）：（a） $H_s = 0.05$ m，几乎没有破碎事件，轨迹按照布朗运动演变；（b） $H_s = 0.17$ m，粒子定期在破碎波上冲浪，导致位置发生跳跃。模拟中通过离散跳跃对此进行建模。插图展示了深红色曲线的放大视图，其中红色虚线表示振荡轨迹，对应波浪的作用，也对应于波平均前的实验数据。其他所有（实线）均表示波平均位置数据（通过按波浪峰值周期 T_p 对应的周期进行平均得到）。

当瞬时水平速度（根据波平均前的轨迹获得）超过设定为 $u_{th} = 0.3c$ 的速度阈值时，我们便将粒子运动归类为一次“跳跃”；其中， $c = \omega/k$ 是根据线性色散关系得到的相速度。尽管这一阈值是任意设定的，但降低阈值会导致在 $H_s = 0.05$ m 条件下出现大量跳跃事件，而这些实验中破碎却极少发生。从物理上看，这一阈值反映了这样一种观点：破碎过程中，粒子以波浪的相速度 c 随波峰输运（它们在波浪上“冲浪”），而非以小得多的斯托克斯漂移速度运动。一次破碎事件中以高于该阈值的速度移动的距离，就是跳跃幅度 s。破碎检测程序示例见附录B。

我们使用由此得到的跳跃来校准式（2.9）–（2.10）所述的跳跃过程。图3a显示了根据四种陡峭度下的实验数据估算的跳跃到达率 Λ 随陡峭度 ϵ 的变化。图中还显示了式（2.9）给出的、针对 $\Lambda(\epsilon)$ 的S形函数，其参数估计值见表2。图3b中根据实验数据估算的跳跃振幅 s 的变化可由伽马分布（2.10）很好地描述。最后，我们将伽马分布（2.10）的参数估计为陡峭度的线性函数：

$$\alpha = a_\alpha + b_\alpha \epsilon, \quad \beta = a_\beta + b_\beta \epsilon, \tag{3.2a,b}$$

如图 3c 所示，系数见表 2。

4. 结果

在本节中，我们将把模型（2.2）的蒙特卡洛模拟（使用 10^5条轨迹）与实验进行比较。蒙特卡洛模拟与精确

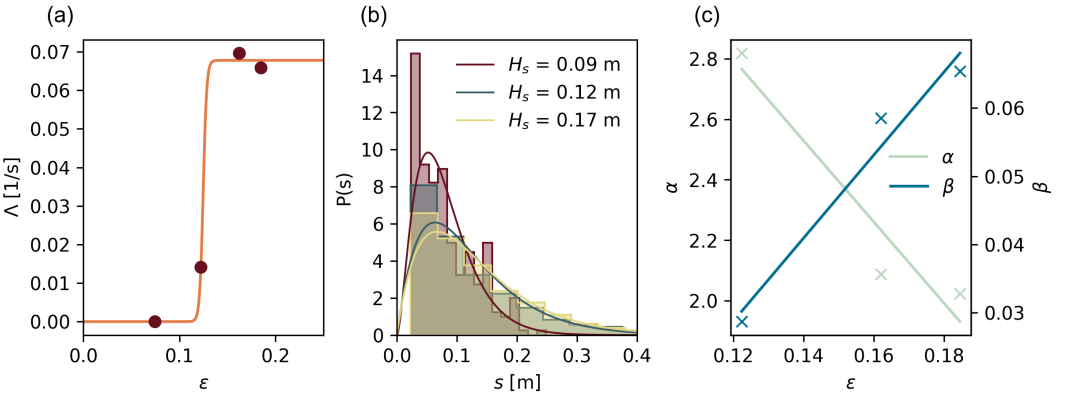


FIGURE 3. 破碎波输运跳跃过程的校准：(*a*) 跳跃到达率Λ 随陡峭度 ϵ的变化；(*b*) 跳跃大小的概率密度函数 $G(s) = \Gamma(s;\ \alpha,\ \beta)$ 对于 $H_s = 0.09$（红色）、0.12（绿色）和 0.17 米（黄色）（未显示 $H_s = 0.05$ 米的情况，因为未检测到跳跃）；(*c*) 跳跃大小概率密度函数的尺度参数和形状参数 α 和 β 随 ϵ 的变化，如式 (3.2) 所示。

$\Lambda(\epsilon)$			$G(s;\ \alpha(\epsilon)\ \beta(\epsilon))$			
τ_Λ [s]	ϕ_Λ	$\epsilon_{0,\Lambda}$	a_α	b_α	a_β	b_β
0.0677	503	0.128	-6.49	3.46	0.305	-0.003

TABLE 2. 经校准的参数值，用于描述破碎波的跳跃过程对陡峭度 ϵ 的依赖关系，其中跳跃到达率 $\Lambda(\epsilon)$ 按照（2.9）确定，跳跃大小的概率密度函数 $G(s)$ 按照（2.10）确定。

的前三阶矩解（2.17）–（2.19）完全吻合，因此我们只展示前者。我们将依次考察未破碎波（§4.1）和破碎波（§4.2），随后讨论模型预测随陡峭度的变化（§4.3）。

4.1. 非破碎波：实验与模型预测的比较

图4a显示了归一化均值 $\langle X(t)\rangle/\lambda_p$（点划线），其中 λ_p 为峰值波长；图中展示了实验（红色）与针对最小陡峭度波的（2.2）蒙特卡洛模拟（橙色）的结果（H_s =0.05 m，$\epsilon = 0.074$）。此情况下破碎的波数量可以忽略不计，因此 $\Lambda \approx 0$，波浪破碎项对（2.2）没有贡献。因此，斯托克斯漂移造成的平均位移（点线）与模型预测的平均漂移一致，而后者又与实验观测值一致（在此按定义如此，因为我们利用这一一致性估算了欧拉平均流，见§3.1.3）。虚线表示 ± 1 标准差。

更重要的是，模型模拟的归一化方差 $\langle|\tilde{X}(t)|^2\rangle/\lambda_p^2$（其中 $\tilde{X}(t) = X(t) - \langle X(t)\rangle$）在图4b中与实验结果高度吻合。事实上，从图4b中提取幂律行为可知，实验中的粒子位置方差呈线性 t 依赖关系，这与 Herterich 与 Hasselmann（1982）提出的单粒子泰勒扩散预测一致；而该预测又与我们的理论预测（2.18）相符，条件是 $\Lambda = 0$（无破碎）。值得注意的是，维纳过程或正态扩散过程随时间呈线性变化，这与次扩散或超扩散不同，因为后两者不满足中心极限定理的条件。请注意，这一结果（随时间呈线性变化）与 Farazmand & Sapsis（2019）的观点相悖；他们

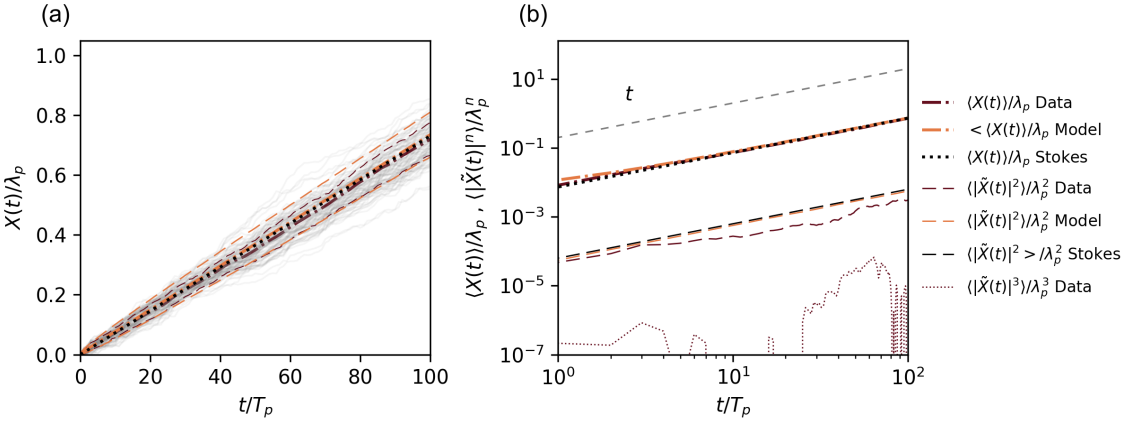


FIGURE 4. 非破碎不规则波（$H_s = 0.05$ m）的模型与实验数据对比：(*a*) 实验（红色）和模型模拟（橙色）的归一化平均位置 $\langle X(t)\rangle/\lambda_p$（点划线）和 ± 1 标准差（虚线）；(*b*) 实验（红色）、模型模拟（橙色）以及非破碎波的斯托克斯理论（黑色点线）的归一化平均位置（点划线），显示其与 t成正比。实验（红色）和模型模拟（橙色）的归一化方差$\langle|\tilde{X}(t)|^2\rangle/\lambda_p^2$（虚线）近似与时间 t 成正比。实验中的归一化偏度 $\langle|\tilde{X}(t)|^3\rangle/\lambda_p^3$（点线）可忽略

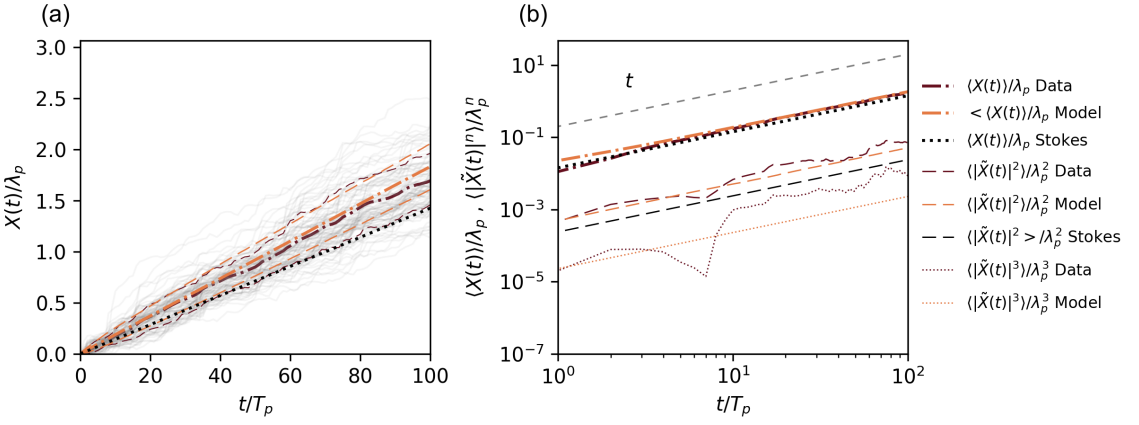


FIGURE 5. 破碎不规则波（$H_s = 0.17$ m）的模型与实验数据对比：(*a*) 实验（红色）和模型模拟（橙色）的归一化平均位置 $\langle X(t)\rangle/\lambda_p$（点划线）和 ± 1 标准差（虚线）；(*b*) 实验（红色）、模型模拟（橙色）以及非破碎波的斯托克斯理论（黑色点线）的归一化平均位置（点划线），显示其与 t成正比。实验（红色）和模型模拟（橙色）的归一化方差$\langle|\tilde{X}(t)|^2\rangle/\lambda_p^2$（虚线）近似与时间 t 成正比。该波陡下的归一化偏度 $\langle|\tilde{X}(t)|^3\rangle/\lambda_p^3$（点线）为有限值，实验（红色）与模型模拟（橙色）的数量级一致。

基于非线性 John–Sclavounos方程，预测 $t > T_p$ 会出现超扩散 $\langle|\tilde{X}(t)|^2\rangle \propto t^4$。我们观察到的粒子分布仍呈高斯分布，偏度为零（见图4），这与式（2.19）中三阶中心矩的解析解预测一致。

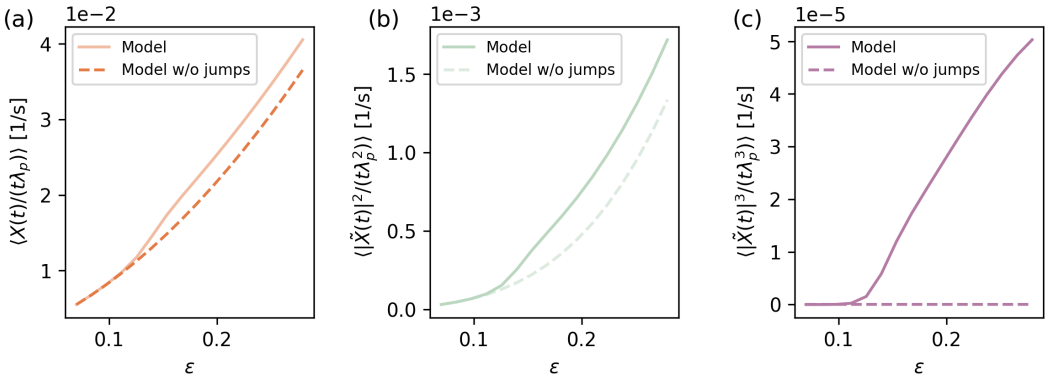


FIGURE 6.展示破碎波输运中包含和不包含跳跃的模型预测，其中包括（a）归一化平均速度随特征陡峭度 ϵ 的变化、（b）粒子位置方差，以及（c）粒子位置偏度。

4.2. 破碎波：实验与模型预测的比较

图5a展示了实验中（红色）和式（2.2）的蒙特卡洛模拟中（橙色）的粒子平均位置（点划线）± 1 标准差（虚线），对应最大陡峭度的波（$H_s = 0.17$ m 和 $\epsilon = 0.185$）。对于这一有效波高，位置会因破碎而发生许多跳跃，正如图2b所示。由于这些跳跃事件，平均漂移（图5a中线的斜率）高于斯托克斯漂移的理论预测（黑色点线），而是遵循式（2.17）的预测，其中 $\Lambda \neq 0$。图5b中的幂律行为表明，与式（2.18）一致，方差仍随时间线性增长。这里，仅基于斯托克斯漂移的扩散（黑色虚线）低估了测得的扩散。根据式（2.18）加入破碎的影响后，结果与实验数据吻合良好，表明破碎对粒子扩散的贡献可以有效地建模为泊松过程。最后，模型（2.19）预测的有限偏度也在实验中得到观测（分别为图5b中的橙色和红色点线）。

4.3. 陡峭度函数下的模型预测

为量化破碎波遭遇次数如何影响粒子位置的平均速度、方差和偏度，我们针对特征陡峭度范围 $\epsilon = [0.05, 0.3]$ 进行了模拟，并将欧拉平均流设为零，结果如图6所示。

图6a显示了基于式（2.2）的平均漂移 $\langle u_{\mathrm{L,mod}}\rangle = \mathrm{d}\langle X(t)\rangle/\mathrm{d}t$。若式（2.2）中不考虑破碎项（即 $\Lambda = 0$），该漂移将等于理论斯托克斯漂移值 $\langle u_{\mathrm{S}}\rangle \propto \epsilon^2$（虚线）。考虑式（2.2）的跳跃扩散过程后，对于发生许多破碎事件的陡波，$\langle u_{\mathrm{L,mod}}\rangle$ 开始偏离 $\langle u_{\mathrm{S}}\rangle$。这种偏离的性质由式（2.17）给出，其中$\langle u_{\mathrm{L,mod}}\rangle$ 增大了一个因子 $(1 + \alpha\Lambda/(\langle u_{\mathrm{S}}\rangle\beta))$。图6b中的二阶矩（即方差）也以类似方式偏离无破碎情形，偏离因子为 $\big(1 + \alpha(\alpha+1)\Lambda/(\sigma^2\beta)\big)$。随着陡峭度增加，三阶矩（即偏度，图6c）变为非零；只有在陡峭度较小时，粒子位置分布才保持对称（偏度为零）。

请注意，在研究单个聚焦波群所引发的漂移时，Pizzo 等人（2019年）观察到，漂移速度与陡峭度的关系会发生明显转变：在破碎阈值以下呈二次关系

而在破碎阈值以上呈线性关系。对于单个波浪或波群，陡峭度存在一个明确阈值，超过该阈值便会发生破碎。然而，由于我们考虑的是许多不规则波，其中只有一部分会破碎，因此破碎事件的数量，从而平均漂移速度，会随 ϵ 持续增加，如图 3a 所示。

5. 结论

本文建立了一个随机框架，利用跳跃扩散过程对不规则海况下的粒子漂移进行描述，以模拟此前由 Deike 等 (2017年)、Pizzo 等 (2019年) 和 Sinnis等 (2021年) 观察到的波浪破碎所导致的增强漂移。该框架由描述粒子输运的随机微分方程及相应的福克-普朗克方程组成，后者描述其概率分布的演化。给定海况的基本信息（如其谱或相关的汇总参数，即有效波高和峰值周期），即可利用该框架预测平均漂移及其高阶统计矩。我们将长时间、大量粒子的实验室实验结果与理论预测进行比较，发现两者吻合良好，尤其是跳跃过程对模拟破碎波增强输运的贡献。

对于波浪破碎可忽略不计的不规则波场，我们通过实验验证，粒子位置方差（即单粒子扩散）与时间成正比，证实正态扩散的假设成立（这与 Farazmand & Sapsis（2019年）的预测相反）。此外，我们将波浪破碎的影响建模为复合泊松过程，描述了粒子输运的演化并量化了其不确定性；其中跳跃振幅服从由波陡参数化的伽马分布。我们发现，考虑破碎波引起的跳跃会增大平均漂移和方差，并使粒子位置分布呈现有限偏度；而在非破碎扩散问题中，分布仍为正态，因此偏度为零。粒子追踪实验室实验验证了这一结果。我们关于破碎波增强平均漂移的结果，在定量上与 Pizzo 等 (2019年) 大致一致；他们指出，在某些情况下，破碎导致的漂移增幅最高可达斯托克斯漂移的 30%。

本文研究了长峰（或单向）波浪。在海洋中，海况几乎总是具有方向扩散性（或呈短峰）。我们设想，可利用 Kenyon（1969）关于非破碎波的研究结果，将我们的模型轻松扩展至方向性海况。要校准方向扩散破碎波的跳跃扩散过程，还需要开展新的实验室实验。

展望未来，我们认为，我们开发的这一简单随机框架基于广泛应用于金融经济学和气候物理学的随机微分方程，可成为实际应用中对预测模型进行不确定性量化的重要工具，应用场景包括搜救、打捞作业、污染追踪和清理工作。

致谢

我们谨此感谢 Deltares 的 Anton de Fockert 和 Wout Bakker，以及代尔夫特理工大学的 Pieter van der Gaag、Arie van der Vlies 和 Arno Doorn，他们协助筹备并开展了这项实验。本研究部分由欧洲空间局资助（资助编号

4000136626/21/NL/GLC/my）。D.E. 感谢瑞士国家科学基金会（P2GEP2-191480）以及美国海军研究办公室资助项目 N00014-21-1-2357 和 N00014-20-1-2366 提供的资金支持。T.S.vdB 获得了英国皇家工程院研究奖学金的资助。

利益声明

作者声明不存在利益冲突。

REFERENCES

Alsina, José M., Jongedijk, Cleo E. & van Sebille, Erik 2020塑料颗粒波致运动的实验室测量：波周期、塑料尺寸和塑料密度的影响。 *Journal of Geophysical Research: Oceans* **125** (12)。Balk, Alexander M. 2002 波浪湍流中被动示踪物的反常行为。*Journal of Fluid Mechanics* **467**, 163–203。Balk, A M 2006 *Journal of Statistical* 多普勒频 *Mechanics: Theory and Experiment* **2006** 08 08018 08018 移导致的波浪湍流扩散。（），P–P。Banner, M. L., Babanin, A. V. & Young, I. R. 2000 海面主导波的破碎概率。 *Journal of Physical Oceanography* **30** (12), 3145–3160。Bena, I., Copelli *Journal* , *of Statistical Physics* **101** 1 2 415 424, 9908338

M. & Van Den Broeck, C. 2000 斯托克斯漂移：一种摇摆棘轮。（-），– arXiv:。Breivik, Øyvind, Janssen, Peter A.E.M. & Bidlot, Jean Raymond 2014 深水中的近似斯托克斯漂移剖面。 *Journal of Physical Oceanography* **44** (9), 2433–2445。van den Bremer, T. S. & Breivik, Ø. 2017 斯托克斯漂移。 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **376**, 20170104年。van den Bremer, T. S. & Breivik, Ø 2018 *Philosophical Transactions of the* 斯托克斯漂移。， *Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences* **376** 2111 20170104 （），。van den Bremer, T. S. & Taylor, P. H. 2015 波群拉格朗日输运的估算：有限水深和方向性的影响。 *J. Geophys. Res.* **120** (4), 2701–2722。van den Bremer, T. S., Yassin, H. & Sutherland, B. R. 2019 垂向受限内重力波包引起的拉格朗日输运。 *Journal of Fluid Mechanics* **864**, 348–380。Bühler, O. 2014 *Waves and Mean Flows*, 第2版。剑桥大学出版社，英国剑桥。Bühler, Oliver & Guo, Yuan 2015 非线性阻尼随机波引起的粒子弥散。*Journal of Fluid Mechanics* **786**, 332–347。Bühler, Oliver & Holmes-Cerfon, Miranda 2009 旋转浅水中随机波引起的粒子弥散。 *Journal of Fluid Mechanics* **638**, 5–26。Calvert, R. McAllister M.L. Whittaker C. Raby A. Borthwick A.G.L. &，，，，，，，，，，，van den Bremer T.S. 2021 漂浮海洋垃圾波致漂移增强的一种机制。 *Journal of Fluid Mechanics* **915**, A73。Christensen, Kai H., Øyvind Breivik Dagestad Knut-Frode Röhrs Johannes &，，，，，海洋 Ward Brian 2018 3 59 67 漂移的短期预测。 *Oceanography* **31** （），–。Cózar, Andrés, Echevarría, Fidel, González-Gordillo, J. Ignacio, Irigoien, Xabier,Úbeda, Bárbara, Hernández-León, Santiago, Palma, Álvaro T., Navarro, Sandra García-de Lomas Juan Ruiz Andrea Fernández-de Puelles María L.，，，，，，，，& Duarte Carlos M. 2014 公海中的塑料碎片。 *Proceedings of the National* *Academy of Sciences of the United States of America* **111** 28 10239 10244 （），–。

Cunningham, H. J., Higgins, C. & van den Bremer, T.S. 2022 非定常表面波驱动的埃克曼–斯托克斯流在漂浮海洋垃圾聚集中的作用。 *J.* （），e JC。 *Geophys. Res. Oceans* **127** 6 2021 01810

Dawson, T. H., Kriebel, D. L. & Wallendorf, L. A. 1993 实验室生成的 JONSWAP 海况中的破碎波。 *Applied Ocean Research* **15** (2), 85–93。Deike, Luc, Pizzo, Nick & Melville, W. Kendall 2017 破碎表面波引起的拉格朗日输运。 *Journal of Fluid Mechanics* **829**, 364–391。

Delandmeter, Philippe & van Sebille, Erik 2019 Parcels v2.0 拉格朗日框架：新的场插值方案。 *Geoscientific Model Development* **12** (8), 3571–3584。Denisov, S. I., Horsthemke, W. & Hänggi, P. 2009 广义福克-普朗克方程：推导与精确解。 *European Physical Journal B* **68** (4), 567–575, arXiv: 0808.0274。DiBenedetto, M. H., Clark, L. K. & Pujara, N. 2022 表面波中惯性粒子的沉降与弥散增强。 *Journal of Fluid Mechanics* **936**, A38。Dobler, Delphine, Huck, Thierry, Maes, Christophe, Grima, Nicolas, Blanke,Bruno, Martinez, Elodie & Ardhuin, Fabrice 2019 斯托克斯漂移对南印度洋海盆表面漂浮碎屑归宿的重大影响。 *Marine Pollution Bulletin* **148** 202 209 , –。Eriksen, Marcus, Lebreton, Laurent C.M., Carson, Henry S., Thiel, Martin, Moore, Charles J. Borerro Jose C. Galgani Francois Ryan Peter G. & Reisser , , , , , , Julia 2014 世界海洋中的塑料污染：海上漂浮着超过5万亿块、重量超过250,000吨的塑料碎片。 *PLoS ONE* **9** (12), 1–15。Farazmand, Mohammad & Sapsis, Themistoklis 2019 表面波增强粒子弥散。 *Fluids* **4** (1), 55, arXiv: 1902.04034。Gardiner, C. W. 1983 *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* 。施普林格出版社，电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/bbpc.19850890629。Gāviraghi, Beatrice 2017 跳扩散过程福克-普朗克最优控制问题的理论与数值分析。博士论文，尤利乌斯-马克西米利安-维尔茨堡大学。¨at W¨urzburg。Gaviraghi, B., Annunziato, M. & Borzì, A. 2017 求解偏积分微分福克–普朗克方程的分裂方法分析 294, 1–17。Herterich, K. & Hasselmann, K. 1982 表面波对示踪物的水平扩散。*J. Phys. Oceanogr.* **12** (7, 1982年7月), 704–711。Higgins, C., Vanneste, J. & Bremer, T. S. 2020*a* 非定常埃克曼-斯托克斯动力学：对漂浮海洋垃圾表面波致漂移的影响。 *Geophysical Research Letters* **47** 18 ()。

Higgins, C., van den Bremer, T. & Vanneste, J. 2020*b* 深水表面重力波包引起的拉格朗日输运：方向扩展和层化的影响。 *Journal of Fluid Mechanics* **883** 42 , A。Higham, D. J. 2001 随机微分方程数值模拟的算法导论。 *SIAM Review* **43** (3), 525–546。Holthuijsen, L. H. & Herbers, T. H. C. 1986 公海中以白浪形式观测到的破碎波统计量。 *Journal of Physical Oceanography* **16** (2), 290–297。Huang, Guoxing, Huang, Zhen Hua & Law, Adrian W. K. 2016 规则波作用下小型漂浮物体漂移的解析研究。 *Journal of Engineering Mechanics* **142** 6 06016002 ()，。

Jambeck, Jenna R., Geyer, Roland, Wilcox, Chris, Siegler, Theodore R., Perryman,Miriam, Andrady, Anthony, Narayan, Ramani & Law, Kara Lavender 2015 陆地塑料废弃物进入海洋的输入量。 *Science* **347** (6223), 768–771。Jansons, Kalvis M. & Lythe, G. D. 1998 随机斯托克斯漂移。**81** 15 3136 3139, *Physical Review Letters* 9808042 ()，– arXiv:。Kenyon, Kern 1969 随机重力波的斯托克斯漂移。 *J Geophys Res* **74** (28), 6991–6994。Lenain, Luc & Pizzo, Nick 2020 高频风生表面波对斯托克斯漂移的贡献。 *J. Phys. Oceanogr.* **50** (12), 3455–3465。Lenain, Luc, Pizzo, Nick & Melville, W. Kendall 2019 破碎表面波拉格朗日输运的实验室研究。 *Journal of Fluid Mechanics* **876**, 1–12。Li, Yan & Li, Xin 2021 任意水深下弱非线性宽频多方向表面波：框架、斯托克斯漂移和粒子轨迹。 *Physics of Fluids* **33** 7 ()。

Longuet-Higgins, M. S. 1952 海浪高度的统计分布。*Journal of Marine Research* **11**, 245–266。

18 D. Eeltink, R. Calvert, J.E. Swagemakers, Qian Xiao 和 T.S. van den BremerLonguet-Higgins, M. S. 1953 水波中的质量输运。 *Philos. T. R. Soc. A.* **245** (903), 535–581.Longuet-Higgins, M. S. 1983 随机波场中波周期与振幅的联合分布。

Proceedings of The Royal Society of London Series A: Mathematical , ( ), – . Milstein, *and Physical Sciences* **389** 1797 241 258
G. N. 1995 *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*。Springer Netherlands. Monismith, S. G. 2020 斯托克斯漂移：理论与实验。 *J. Fluid Mech.* **884**, F1.Myrhaug, Dag, Wang, Hong & Holmedal, Lars Erik 2014基于波浪条件短期变化的深水波斯托克斯漂移估算。 *Coastal Engineering* **88**, 27 32– .Ochi, Michel K. & Tsai, Cheng-Han 1983 深水中破碎波出现的预测。 *Journal of Physical Oceanography* **13** (11), 2008–2019.Onink, Victor, Wichmann, David, Delandmeter, Philippe & Sebille, Erik 2019埃克曼流、地转平衡和斯托克斯漂移在漂浮微塑料聚集中的作用。 *Journal of Geophysical Research: Oceans* **124** (3), 1474–1490. Phillips, O. M. 1985 风生重力波平衡区间的谱与统计性质。 *Journal of Fluid Mechanics* **156**, 505–531.Pizzo, Nick, Melville, W. Kendall & Deike, Luc 2019 海洋表面非破碎与破碎深水波引起的拉格朗日输运。 *Journal of Physical Oceanography* **49** 4 983 992 *Journal of Physical* ( ), – . Pizzo, Nick E. 2017 冲浪表面重力波。 *Journal of Fluid Mechanics* **823**, 316–328.Restrepo, Juan M. & Ramirez, Jorge M. 2019 瞬态行进波引起的输运。 *Journal of Physical Oceanography* **49** (9), 2323–2336.Sainte-Rose, Bruno, Wrenger, Hendrik, Limburg, Hans, Fourny, Arthur &Tjallema, Arjen 2020 塑料清理系统的监测与性能评估：第一部分——实验活动描述。 *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering* **6** B卷：海洋工程。

Sanderson, Brian G. & Okubo, Akira 1988 *Journal of*内波引起的扩散。 *Geophysical Research* **93** 4 3570
(C), . Santamaria, F. Boffetta F. Martins Afonso M. Mazzino A. Onorato M. & , , , , , , , , , 水波输 Pugliese D. 2013
运惯性粒子的斯托克斯漂移。

Europhys. ( ), . *Lett.* **102** 1 14003
van Sebille, Erik, Aliani, Stefano, Law, Kara Lavender, Maximenko, Nikolai,Alsina, José M, Bagaev, Andrei, Bergmann, Melanie, Chapron, Bertrand,Chubarenko, Irina, Cózar, Andrés, Delandmeter, Philippe, Egger, Matthias,Fox-Kemper, Baylor, Garaba, Shungudzemwoyo P, Goddijn-Murphy, Lonneke,Hardesty, Britta Denise, Hoffman, Matthew J, Isobe, Atsuhiko, Jongedijk,Cleo E, Kaandorp, Mikael L A, Khatmullina, Liliya, Koelmans, Albert A,Kukulka, Tobias, Laufkötter, Charlotte, Lebreton, Laurent, Lobelle,Delphine, Maes, Christophe, Martinez-Vicente, Victor, Morales Maqueda,Miguel Angel, Poulain-Zarcos, Marie, Rodríguez, Ernesto, Ryan, Peter G,Shanks, Alan L, Shim, Won Joon, Suaria, Giuseppe, Thiel, Martin, van denBremer, Ton S & Wichmann, David 2020 漂浮海洋碎屑输运的物理海洋学。 *Environmental Research Letters* **15** (2), 023003.van Sebille, Erik, Wilcox, Chris, Lebreton, Laurent, Maximenko, Nikolai, Hardesty, Britta Denise, van Franeker, Jan A, Eriksen, Marcus, Siegel, David,Galgani, Francois & Law, Kara Lavender 2015 小型漂浮塑料碎片全球清单。 *Environmental Research Letters* **10** (12), 124006. Sinnis, J. T., Grare, L., Lenain, L. & Pizzo, N. 2021 带宽在深水破碎波表面输运和能量耗散中作用的实验室研究。

J. , A .Staneva, *Fluid Mech.* **927** 5
Joanna, Ricker, Marcel, Carrasco Alvarez, Ruben, Breivik, Øyvind &Schrum, Corinna 2021 耦合波浪—海洋模型中波浪诱导过程对粒子输运模拟的影响。 *Water* **13** (4). Stokes, G. G. 1847 振荡波理论。 *Trans. Camb. Phil. Soc.* **8**, 411–455.Sullivan, Peter P., McWilliams, James C. & Melville, W. Kendall 2007 表面重力

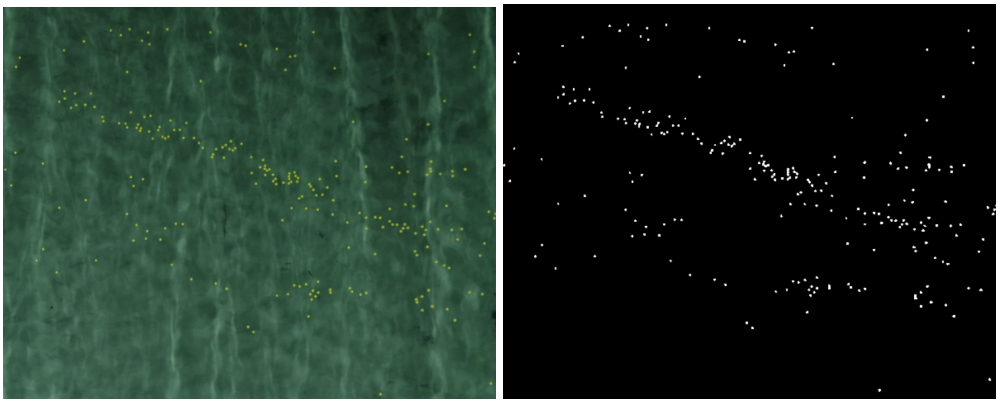


FIGURE A.1. (a) 向下拍摄的相机拍摄的大西洋水池画面。可以看到漂浮在水面上的小黄色球体。(b) 在 OpenCV 中应用色调饱和度滤波器后识别出的球体。

波对海洋边界层的影响：采用涡旋力和随机破碎波的大涡模拟。 *Journal of Fluid Mechanics* **593**, 405–452. TAYLOR, G. I. 1922 连续运动引起的扩散。 *Proceedings of the London Mathematical Society* **2 20** 1 196 212 s-( ), – . WEBB, A. & FOX-KEMPER, B. 2011 波谱矩与斯托克斯漂移估算。 *Ocean Modelling* **40** 3 4 273 288 (-), – . WEICHMAN, PETER B. & GLAZMAN, ROMAN E. 2000 行进波场中的被动标量输运。 *Journal of Fluid Mechanics* **420**, 147–200。

附录A. 粒子追踪

使用安装在水槽上方走道上的向下拍摄的相机，追踪粒子在水槽中的移动。通过检测视场（FOV）内不同朝向的棋盘格图像，求得相机内参。图 A.1(a) 展示了大西洋水池的俯视图，其中黄色塑料球大致随机分布并漂浮在水面上。使用 Python 中的 OpenCV 识别并追踪这些球体。首先使用色调滤波器对图像进行滤波，得到图 A.1(b)。随后使用带通道和空间可靠性的相关滤波器（CSRT）算法追踪各帧中的目标，从而生成具有亚像素位置和时间信息的轨迹。接着，通过检测并反演相机内参，并应用从相机视场测得的平移，将轨迹转换到静水面（由漂浮棋盘格的图像定义）和水槽坐标系（x, y）中。

对追踪器和轨迹进行了后处理，以剔除所有错误的追踪事件，例如球体碰撞、追踪丢失，或算法将被追踪粒子跳转到附近的另一个粒子上；当粒子在破碎波下短暂丢失时，有时会发生这种情况。最后，对轨迹进行了人工检查，以进行质量控制。

附录 B. 跳跃检测

图 B.1 展示了两条示例轨迹的跳跃检测和跳跃幅度（跳跃过程中移动的距离）估算步骤。对于 $H_s = 0.05$ m，面板 a 显示了粒子位置在时间步长 δt 内的导数，该时间步长由

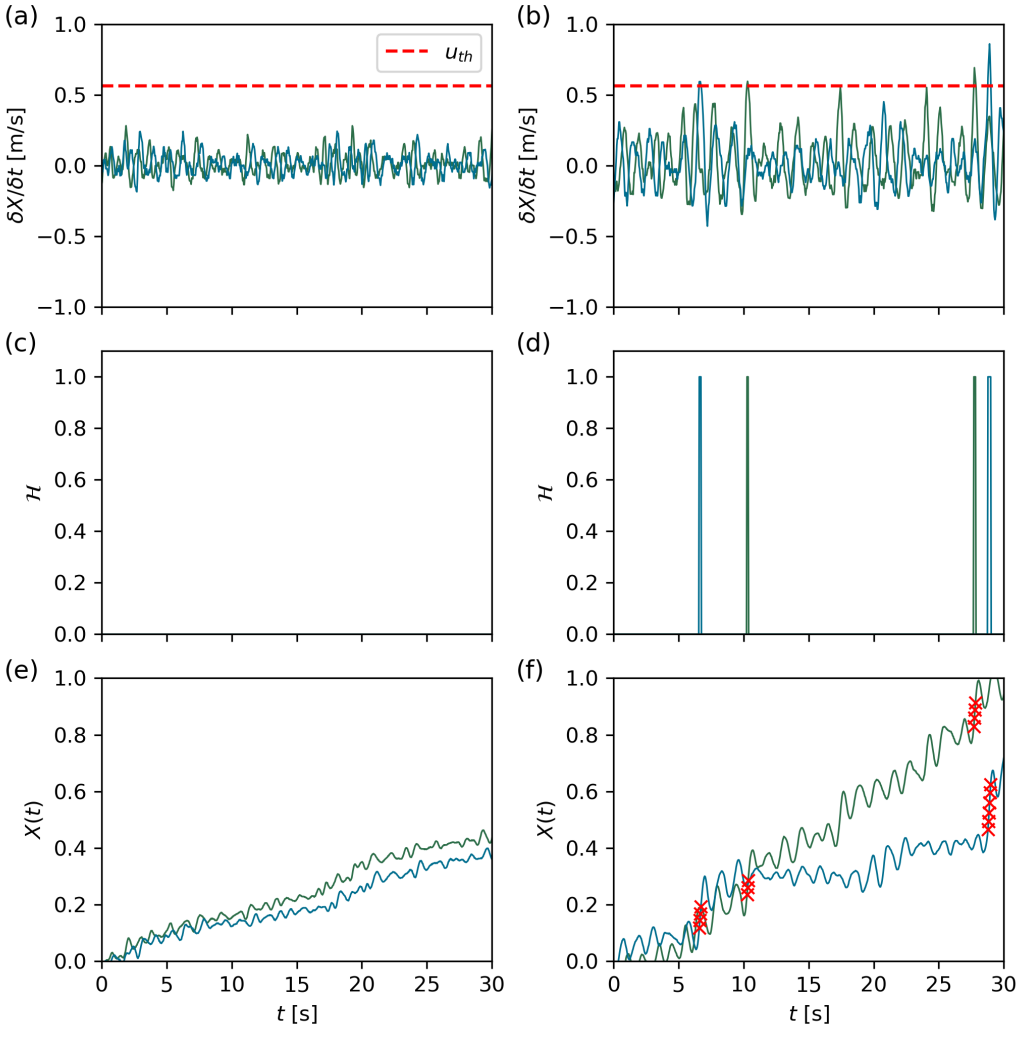


FIGURE B.1. 跳跃检测与振幅估计过程：（a,c,e）振幅为 $H_s = 0.05$ m 的最缓波浪，以及（b,d,f）振幅为 $H_s = 0.17$ m 的最陡波浪。（a,b）根据相机帧率 $u_I = \delta X/\delta t$ 下的粒子位置导数得到的瞬时粒子速度（波平均之前）。虚线表示阈值 $u_{th} = 0.3c$，其中 c 为相速度。（c,d）海维赛德函数 $\mathcal{H}(u_I(t) - u_{th})$ 标记粒子处于“跳跃”状态的时间段。（e,f）相机帧率下的粒子位置 $X(t)$；红色叉号标记海维赛德函数为正且行为被归类为“跳跃”的位置。

相机帧率确定：$u_I = \delta X/\delta t$；我们将其视为瞬时速度（波平均之前）。虚线表示阈值 $u_{th} = 0.3c$，其中 $c = \omega/k$是根据线性色散关系得到的相速度。面板 c 和 d 中的海维赛德函数 $\mathcal{H}(u_I(t) - u_{th})$ 标示了将粒子判定为“跳跃”的时间段。根据面板 c 和 d 中的海维赛德函数，可以在面板 e 和 f 中估算跳跃幅度 s（跳跃过程中移动的距离）。

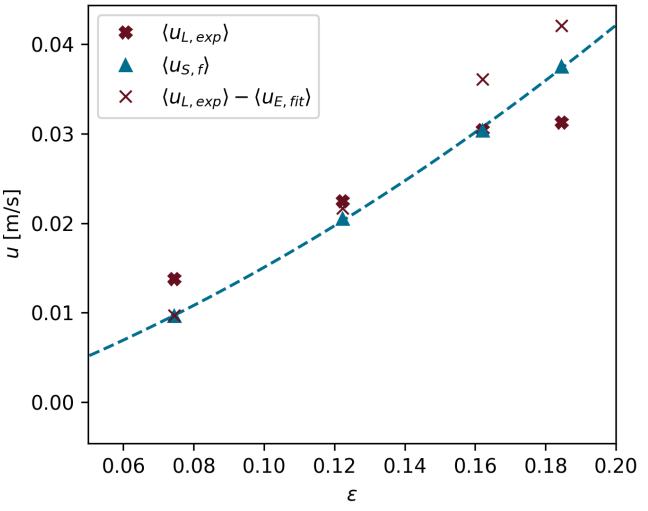


FIGURE C.1. 漂移速度估算值和测量值随陡峭度的变化。斯托克斯漂移基于对截至 $\langle u_{\mathrm{S},f}\rangle$ (△) 的截断谱进行 JONSWAP 拟合得到，并采用其二次拟合曲线（虚线）；测得的粒子漂移 $\langle u_{\mathrm{L,exp}}\rangle$（粗线 ×）；经模型平均流校正后的测得粒子漂移 $\langle u_{\mathrm{L,exp}}\rangle - \langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$（细线 ×）

H_s (m)	$\langle u_{\mathrm{E,\ exp}}\rangle$ （毫米/秒）	$\langle u_{\mathrm{E,\ fit}}\rangle$ （毫米/秒）
0.050	-2	+4.1
0.090	-10	+0.8
0.120	-6	-5.6
0.170	-17	-10.8

TABLE 3. 实验测得的欧拉平均流与模型中所用数值之间的差异。

附录C. 漂移速度

图 C.1 展示了各种漂移速度估算值。对于我们的实验，斯托克斯漂移基于 JONSWAP 谱；该谱通过将 JONSWAR 谱拟合到实验测得的谱 $\langle u_{\mathrm{S},f}\rangle$ 得到，图中以蓝色三角形表示，蓝色虚线为其二次拟合曲线。

我们用模型中的平均流 $\langle u_{\mathrm{E,fit}}\rangle$ 对实验测得的平均漂移速度 $\langle u_{\mathrm{L,exp}}\rangle$ 进行修正，得到细红色叉号（×）。这些数据与蓝色虚线之间的差值，即斯托克斯漂移，表明在特征陡峭度较低时，两者一致；而在陡峭度较高时，斯托克斯漂移会低估平均漂移速度一定的比例。这一差异归因于模型中的跳跃过程。

附录D. 粒子速度谱

图 D.1 比较了粒子轨迹的速度谱（深红色）与根据水面高程计算得出的一阶速度谱（粉色）。后者

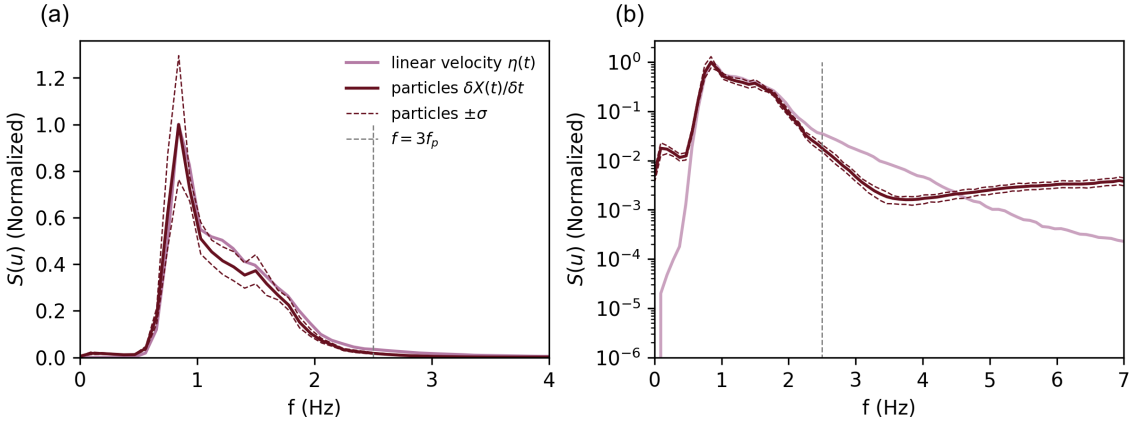


FIGURE D.1. $H_s = 0.05$ m. 粒子速度谱（红色），虚线表示 ± 1 std。由水面高程谱 η 计算得到的线性速度以粉色显示。灰色虚线表示 $f = 3f_0$。（a）线性坐标（b）对数坐标。

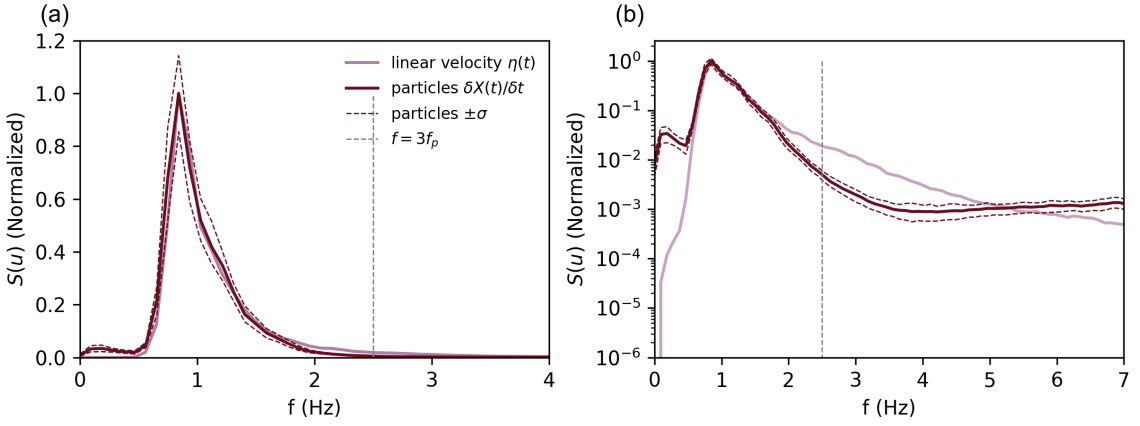


FIGURE D.2. $H_s = 0.09$ m. 曲线与图 D.1 相同

在较高频率处具有大量谱能量，而前者在这些频率处没有。因此，如果这一阶速度在这些频率处不影响粒子运动，那么高阶速度（Stokes 漂移）也不会产生影响。

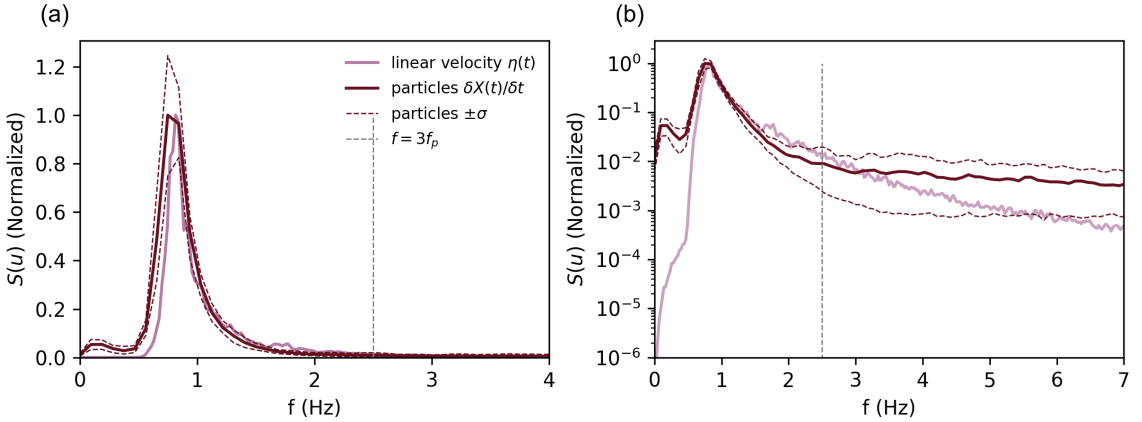


FIGURE D.3. $H_s = 0.12$ 米。线条与图 D.1 相同

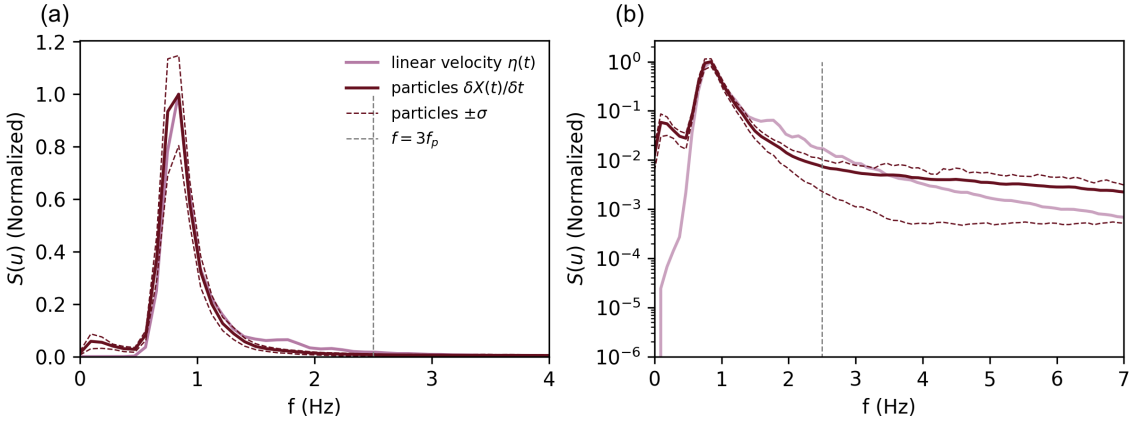


FIGURE D.4. $H_s = 0.17$ 米。线条与图 D.1 相同