arXiv:2301.10632v2 [cs.GT] 2 Jan 2025

(Alm三种（及更多类型）代理人的无嫉妒至多一件物品分配 s

Pratik Ghosal
印度理工学院帕拉卡德分校
pratik@iitpkd.ac.in

Vishwa Prakash HV[*]
[†] 金奈数学研究所
vishwa@cmi.ac.in

Prajakta Nimbhorkar
金奈数学研究所
prajakta@cmi.ac.in

Nithin Varma
科隆大学，德国 [‡]
nithvarma@gmail.com

摘要

我们研究如何在多个具有可加估值的代理人之间确定不可分物品的无嫉妒分配这一问题。EFX，即至多任意一个物品无嫉妒，是无嫉妒分配问题的一种广为研究的放宽形式，并已证明在特定情形下存在。已知，当代理人为三人时，以及估值类型只有两种时（代理人数量不限），EFX 均存在。对于四名代理人，已知也存在至多有一件物品未分配的 EFX 分配。

本文证明，对于具有 k 种不同估值的任意数量代理人，均存在至多有 $k-2$ 件物品未分配的 EFX 分配。此外，我们证明，当除两名代理人外的所有代理人估值都相同时，存在完整 EFX 分配。

1 引言

不可分物品的公平分配是多智能体系统研究中的一个基本问题。该问题涉及在代理人之间公平地分配不可分资源。许多现实场景都体现了这一问题的重要性，例如遗产分配、将计算机上的时隙分配给作业等。要维持公平并非易事，尤其是在代理人对物品子集具有异质偏好的情况下。形式上，该问题是将集合 $\mathcal{G} = \{g_1, \dots g_m\}$ 中的 m 件物品分配给集合 $\mathcal{A} = \{a_1, \dots a_n\}$ 中的 n 名代理人，使每件物品至多分配给一名代理人，并且每名代理人都认为整体分配是公平的。

研究最为广泛的公平概念之一是无嫉妒性。为了形式化这一概念，我们将每位代理人 $a_i, i \in [n]$建模为具有估值函数 $v_i : 2^{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，该函数定义在物品的子集（物品束）上。若分配 $X = (X_1, X_2, \dots X_n)$ 中，物品束 X_i 分配给代理人 $a_i, i \in [n]$，且每位代理人对自己物品束的估值至少与对任意其他代理人物品束的估值一样高，即对于所有 $i, j \in [n]$，$v_i(X_i) \geq v_i(X_j)$，则该分配是无嫉妒的 (EF)。

一般而言，无嫉妒分配可能不存在，最简单的实例是两个代理人和一个有价值的物品。人们提出了多种无嫉妒性的松弛概念。其中一种概念是

[*]由TCS研究学者奖学金资助

[†]作者在金奈数学研究所工作期间完成了本研究的部分工作。

[‡]作者在金奈数学研究所和德国萨尔兰信息学园区的马克斯·普朗克信息学研究所工作期间完成了本研究的部分工作。

至多一个物品无嫉妒 （EF1）由 [Bud11] 提出。若一个分配 X 满足：对于每个 $i, j \in [n]$，都存在某个物品 $g \in X_j$，使得 $v_i(X_i) \geq v_i(X_j \setminus \{g\})$，则称其为 EF1 分配。已知 EF1 分配必定存在，且可在多项式时间内找到 [LMMS04]。

在无嫉妒（EF）和 EF1 分配这两个概念之间，还有至多任意一个物品无嫉妒（EFX），由 [CKM+19] 提出。给定一个分配 X，如果存在$g \in X_j$ 使得 $v_i(X_j \setminus \{g\}) > v_i(X_i)$，则代理人 a_i 强烈嫉妒代理人 a_j，也就是说，即使从 X_j的物品束 X_j 中移除物品 g， a_i 仍会嫉妒a_j 的物品束。若没有代理人强烈嫉妒其他代理人，则该分配是 EFX 分配。换言之，对于每一对代理人 a_i 和a_j，对于任意物品 $g \in X_j$，都有 $v_i(X_i) \geq v_i(X_j \setminus \{g\})$。

与 EF 和 EF1 不同，EFX 分配是否总是存在，远未有定论，也是离散公平分配领域的重要开放问题之一。当所有代理人具有相同的估值函数，或只有两名代理人时，EFX 分配存在 [PR20]。在 [Mah23a, Mah21]，中，作者改进了这一结果，并证明当存在多个代理人但只有两种估值函数时，EFX 分配存在。在一项突破性成果中， [CGM24] 证明，当代理人的估值函数为可加时，3 名代理人的 EFX 分配总是存在。[1]

上述所有结果都针对完全分配，即将每件物品分配给某个代理人。在 [CKMS21], 中，作者研究了不完全分配，即允许部分物品未分配，并证明当至多有 $n-1$ 件物品未分配时， n 个代理人存在无嫉妒至多一件物品分配，同时保证没有代理人嫉妒未分配物品束。 [BCFF22] 改进了这一结果：作者证明，当至多有 $n-2$件物品未分配时， n 个代理人存在无嫉妒至多一件物品分配；此外，对于有4个代理人的特殊情形，至多有一件物品未分配时也存在无嫉妒至多一件物品分配。在这两种情形下，都没有代理人嫉妒未分配物品束。

1.1 我们的贡献

在本文中，我们将 [CGM24、AAC+23、Mah23a 和 BCFF22]的结果推广到多个代理人具有相同估值函数的情形。我们的第一个结果表明，当每个代理人的估值函数都从一组包含 k 个不同可良好抵消[2] 估值函数中选取时，对于 n 个代理人，总是存在至多有 $k-2$ 件物品未分配的无嫉妒至多一件物品分配。换言之，在这 n 个代理人中，部分代理人子集具有相同的估值函数，因此总共至多有 k 个不同的估值函数。

定理 1. 当有 n 个代理人，且每个代理人的估值均从一组包含 k 个不同可加估值的集合中选取时，存在一种 *EFX* 分配，至多留下 $k-2$ 件物品未分配。此外，没有代理人会嫉妒未分配物品组成的物品束。更进一步，即使所有代理人的估值都是良好可消去估值（可加估值的一种推广），上述结论依然成立。

推论 1. 在每个代理人具有三种不同良好可消去估值之一的实例中，始终存在一种仅有一件物品未分配的 *EFX* 分配。

注意，若在定理 1 中代入 $k=2$，就能为具有两种估值类型的代理人得到完整 EFX 分配。因此，定理 1 推广了 [Mah23b] 的结果。

我们还证明了推论 1 的一个特殊情形存在完整 EFX 分配：在 n 名代理人中，$n-2$ 名代理人具有相同估值，而另外两名代理人可以具有不同估值。我们将此问题称为存在两名离群代理人时的 EFX 分配问题。

[1]若对于每个物品束 $S \subseteq \mathcal{G}$，都有 $v(S) = \sum_{g \in S} v(\{g\})$，则估值 $v: 2^{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是可加的。 [AAC+23] 的结果（简化了 [CGM24], 的结果）适用于更一般的估值函数，他们将这类估值函数称为 MMS 可行估值（见定义 9）。[2]v 若对于任意两个物品束 S，$T \subseteq \mathcal{G}$ 和任意一件物品 $g \in \mathcal{G} \setminus (S \cup T)$，都有 $v(S \cup g) > v(T \cup g) \implies v(S) > v(T)$。，则称其为良好可消去估值。

定理 2. 考虑一组具有可加估值的 n 名代理人，其中至少 $n-2$ 名代理人具有相同估值。那么，对于任意物品集合，始终存在完整 *EFX* 分配。此外，即使所有代理人的估值均为 *MMS* 可行估值（这是对可加估值的一种推广），这一结论仍然成立。

这推广了 [AAC+23] 和 [CGM24] 的结果，因为它表明，当 $n=3$ 时，n 个代理人满足无嫉妒至多一件物品。

1.2 我们技术的概述

这里，我们描 述证明主要定理所涉及的关键思路。 .

为证明定理 1，我们考虑 k 个代理人组，其中每组中的所有代理人都具有相同估值。组中获得价值最低物品束的代理人称为该组的领头代理人 。我们从一种无嫉妒至多一件物品的分配开始，其中每位代理人至多获得一件物品。随后，我们迭代地寻找一种新的无嫉妒至多一件物品的分配，使其帕累托支配之前的分配，直到找到所需的无嫉妒至多一件物品的分配。为此，我们聚焦于每组中的 $\mathcal{L}$ 位领头代理人。为了改进给定的无嫉妒至多一件物品的分配 X，我们考虑仅限于领头代理人的子分配 $X(\mathcal{L})$，并将 $X(\mathcal{L})$ 替换为一种帕累托支配的无嫉妒至多一件物品的分配（仅限于领头代理人） $Y(\mathcal{L})$。然而，并非所有这类帕累托支配的子分配都能扩展为对所有代理人均满足无嫉妒至多一件物品的分配，因为一些非领先代理人可能会强烈嫉妒领头代理人获得的新物品束。为解决这一问题，在引理 2 中，我们证明：如果将 $X(\mathcal{L})$ 替换为一种特殊的帕累托支配的无嫉妒至多一件物品的分配 $Y(\mathcal{L})$，其中每位领头代理人获得的都是相对于其先前物品束的最小受嫉妒子集 ，那么用这样的 $Y(\mathcal{L})$ 替换 $X(\mathcal{L})$ 后，所得分配对所有代理人均满足无嫉妒至多一件物品。我们注意到，当分配 $X(\mathcal{L})$ 无嫉妒时，可以利用 [BCFF22] 中的一个结果计算出这种特殊分配 $Y(\mathcal{L})$。另一方面，如果分配 $X(\mathcal{L})$ 并非无嫉妒，我们注意到嫉妒图中至多有 $k-1$ 个源点（命题 2 中对此有讨论），因此可以利用 [CKMS21] 中的一个结果，在这种情况下得到一种帕累托支配的分配。

我们对定理 2 的证明首先考虑一个由 n 个物品束组成的近似可行的 *EFX* 分配（见定义 10）。近似 EFX 可行分配保证，对于具有相同估值的每个 $n-2$ 代理人， $n-1$ 个物品束均为 EFX 可行（见定义 2），而剩余的物品束对两名离群参与者中的一名是 EFX 可行的。我们的过程会谨慎地修改这样的分配，直至得到 EFX 分配（此时证明即告完成），或得到另一个近似 EFX 可行分配。该过程必定终止，因为所得的近似 EFX 可行分配在某种具体意义上严格优于先前的分配，即其势函数值更高，而势函数不可能无限增长。难点在于维持上述不变量并证明势函数确实增加。

1.3 相关工作

无嫉妒分配的概念由 [GS58] 和 [Fol67]提出。对于不可分物品，[LMMS04] 和 [Bud11] 考虑了一种称为至多一个物品无嫉妒（*EF1*）的宽松无嫉妒概念。至多任意一个物品无嫉妒（EFX）的概念由 [CKM+19]提出。在一些受限情形下，研究已证明存在 EFX 分配，例如：对于任意估值的 2 名代理人，以及估值相同的任意数量代理人 [PR20], ；对于 3 名代理人的可加估值 [CGM24], ；对于任意数量代理人且估值至多有两种的情形 [Mah23a, Mah21],；对于每名代理人的每项物品价值只能取两种可能值之一的情形 [ABF+21]，等等。若允许部分物品不予分配，已有多项研究探讨 EFX 分配 [BKK22, CGG13, CGH19] 等。 [CGH19] 表明，丢弃部分物品可实现至少为最大纳什福利一半的结果，而 [CKMS21] 则证明，始终存在一种 EFX 分配

对于估值任意的 n 名代理人，且未分配物品数至多为 $n-1$， [BCFF22] 改进了这一结果，证明存在至多有 $n-2$ 件物品未分配的 EFX 分配；对于 4 名代理人，则至多有一件物品未分配。关于公平分配的更多相关研究，请参阅 [AAB+23]最近发表的综述。

2 预备知识

设 $\mathcal{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 为一组 n 代理人， $\mathcal{G}=\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$ 为一组 m 不可分割物品。离散公平分配的一个实例由元组 $\langle\mathcal{A},\mathcal{G},\mathcal{V}\rangle$ 指定，其中$\mathcal{V}=\{v_1(\cdot)\ v_2(\cdot)\ \cdots,v_n(\cdot)\}$ 满足：对于 $i\in[n]$, 函数 v_i：$2^{\mathcal{G}}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 表示代理人 a_i 对物品子集的估值。我们用“物品束”表示物品的一个子集。对于物品束 $X_1,\ldots,X_k$ 以及代理人 a，我们用 $\max_a(X_1,\ldots,X_k)$（分别用 $\min_a(X_1,\ldots,X_k)$）表示根据估值函数 v_a 价值最高（分别为最低）的物品束。分配是一个由 n 个两两不相交的物品束组成的元组$X=\langle X_1,X_2,\ldots,X_n\rangle$，其中物品束 X_i 被分配给代理人 a_i，对所有 $i\in[n]$ 均如此。给定一个分配 $X=\langle X_1,X_2,\cdots,X_n\rangle$，若 $v_i(X_j)>v_i(X_i)$，则称代理人 a_i 嫉妒另一位代理人a_j。我们通常也说代理人 a_i 嫉妒物品束 X_j。

定义 1 (强嫉妒)。 给定一个分配 $X=\langle X_1,X_2,\cdots,X_n\rangle$，如果对于某个 $g\in X_j$， $v_i(X_j\setminus\{g\})>v_i(X_i)$，则代理人 a_i 强烈嫉妒 代理人 a_j。

如果任意一对代理人之间都不存在强嫉妒，则该分配满足无嫉妒至多一件物品（EFX）。

定义 2 (EFX 可行性)。 根据估值 v，若对于所有 $h\in T, v,\ T\setminus\{h\})\leq v(S)$，则称物品束 $S\subseteq\mathcal{G}$ 相对于一个与其不相交的物品束 T是 *EFX* 可行的。给定一个分配 $X=\langle X_1,X_2,\cdots,X_n\rangle$，如果物品束 X_i 根据估值 v_j相对于 X 中的所有其他物品束都是 *EFX* 可行的，则称物品束 X_i 对于代理人 a_j 是 *EFX* 可行的。

如果对于所有 $i\in[n]$，物品束 X_i对代理人 a_i都是 EFX 可行的，则称分配 $X=\langle X_1,X_2,\cdots,X_n\rangle$ 满足 EFX。设 $a\in\mathcal{A};g\in\mathcal{G}$； $S,T\subseteq\mathcal{G}$和 v：$2^{\mathcal{G}}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$。为简化记法，我们用$v(g)$表示 $v(\{g\})$，并分别用 $S\setminus g, S\cup g$ 表示 $S\setminus\{g\}, S\cup\{g\}$。我们还用$S>_a T$表示 $v_a(S)>v_a(T)$， $<_a,\geq_a,\leq_a$和 $=_a$也同理。我们用 $\min_a(S,T)$ 和 $\max_a(S,T)$分别表示 $\arg\min^{Y\in\{S,T\}} v_a(Y)$ 和 $\arg\max^{Y\in\{S,T\}} v_a(Y)$。

定义 3 （最小受嫉妒子集 [CKMS21]）。 给定一个分配 X，若代理人 a_i 持有物品束X_i 并嫉妒物品束 S，则称 $T\subseteq S$ 为代理人 a_i 的 S 的最小受嫉妒子集，当且仅当以下两个条件均成立。

1. $v_i(X_i)<v_i(T)$ 2. $v_i(X_i)\geq v_i(T\setminus h)\quad\forall h\in T$

我们将上述定义推广到相对于代理人子集的最小受嫉妒子集。

定义 4。 设 $N\subseteq\mathcal{A}$为非空代理人集合， $X(N)$ 为限制在代理人集合 N上的分配，且 $S\subseteq\mathcal{G}$ 为一个物品集合，使得 N 中至少有一名代理人嫉妒 S。

如果 N 中至少有一个代理人嫉妒 T，且 N 中没有代理人强烈嫉妒 T，我们就称 $T\subseteq S$ 为相对于 N 和 $X(N)$ 的 S 的最小受嫉妒子集，记作最小被嫉妒子集$_N(X(N)\ S)$。我们将 N 中嫉妒 T 的代理人集合称为 N 中 S 的最嫉妒的代理人。此外， $S\setminus T$ 被称为剔除 集。

请注意，最小被嫉妒子集$_N(X(N)\ S)$ 不一定唯一。不过，对于给定的 $N, X(N)$ 和 S，最小受嫉妒子集 |最小被嫉妒子集$_N(X(N)\ S)$| 的大小是固定的。

定义 5. 给定一个分配 X 和物品子集 $S \subseteq \mathcal{G}$，若至少有一位代理人嫉妒 S，则称代理人 a_i 支持 S，如果 a_i 嫉妒 最小被嫉妒子集$_{\mathcal{A}}(X, S)$。

给定一个分配 X，代理人之间的嫉妒关系可用图形表示如下 .

定义 6 (嫉妒图)。 给定一个分配 X，令 $E_X = (\mathcal{A}, E)$ 为一个有向图，其中代理人集合 $\mathcal{A}$ 是顶点集合，并且对于任意一对代理人(a_i, a_j)，$(a_i, a_j) \in E$ 当且仅当代理人 a_i 在分配 X下嫉妒代理人 a_j。

定义 7. 若分配 X 帕累托支配另一个分配 Y，则称前者帕累托支配后者，记作 $X \succ Y$；这意味着对于每位代理人 $a_i \in \mathcal{A}$，$v_i(X_i) \geq v_i(Y_i)$，且存在至少一位代理人 a_j，使得 $v_j(X_i) > v_j(Y_i)$。

给定一个分配 X 及其嫉妒图 E_X，若代理人 a 在 E_X 中没有入边，则称其为源点。当源点代理人较少且未分配物品足够多时，我们使用 [CKMS21] 的以下结果来证明帕累托改进：

引理 1 ([CKMS21])。 设 X 是一个部分 ***EFX*** 分配，且至少有 k 件未分配物品。若嫉妒图 E_X 至多有 k 个源点顶点，则存在另一个 ***EFX*** 分配 Y，使得 $Y \succ X$。

非退化实例 [CGM24, AAC$^+$23] 若实例 $\mathcal{I} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{V} \rangle$ 满足：没有任何代理人对两个不同物品束的估值相同，则称其为非退化。也就是说，对于所有 $S \neq T$，其中 $S, T \subseteq \mathcal{G}$，$\forall a_i \in \mathcal{A}$ 都有$v_i(S) \neq v_i(T)$。 [AAC$^+$23] 证明，当有 n 个代理人且估值函数一般时，只需考虑非退化实例；也就是说，如果每个非退化实例都有 EFX 分配，那么每个一般实例也都有 EFX 分配。在本文余下部分，我们只考虑非退化实例。这意味着所有代理人对所有物品的估值均为正，因为假设空物品束的价值为零。非退化实例具有以下性质。

命题 1. 给定任意分配 X，对于任意两个估值相同的代理人 a 和 a'，要么 a嫉妒 a'，要么反之。

估值函数的性质 如果对所有 $S, T \subseteq \mathcal{G}$，$S \subseteq T$蕴含 $v(S) \leq v(T)$，则称估值 v 为单调的 。单调性是对估值函数的一种自然限制，在现实世界的公平分配实例中十分常见。如果对所有 $S \subseteq \mathcal{G}$，$v(S) = \sum_{g \in S} v(\{g\})$，则称估值 v 为可加的 。根据定义，可加估值函数也是单调的。 [BCFF22]提出了可加估值的一种推广，即良好可抵消估值。

定义 8. 如果估值函数 v 是良好可抵消的，则称其为良好可抵消估值函数；这要求 v 非退化，并且对于任意两个物品束 S、$T \subseteq \mathcal{G}$以及一个物品 $g \in \mathcal{G} \setminus (S \cup T)$，

$$v(S \cup g) > v(T \cup g) \implies v(S) > v(T).$$

良好可抵消估值包括预算可加（$v(S) = \min(\sum_{g \in S} v(g)\ c)$）、单位需求（$v(S) = \max_{g \in S} v(g)$）和乘法（$v(S) = \prod_{g \in S} v(g)$）估值 [BCFF22]。[AAC$^+$23]提出了一类更一般的估值函数，称为 MMS 可行估值。

定义 9. 当且仅当对任意物品子集 $S \subseteq \mathcal{G}$ 以及任意一对$A = (A_1, A_2)$，$B = (B_1, B_2)$ 物品集合 S的划分，都有估值 $v\colon 2^{\mathcal{G}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是 ***MMS*** 可行的

$$\max(v(B_1), v(B_2)) > \min(v(A_1), v(A_2)).$$

Plaut 和 Roughgarden 的算法 对于单调估值函数，当所有代理人还具有相同的估值 $v(\cdot)$函数时，[PR20] 提出了一种计算 EFX 分配的算法。本文中，我们始终将该算法称为 PR 算法。令 $M \subseteq \mathcal{G}$ 为物品子集。令 $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_k\}$ 为 M的 k-划分。PR 算法最一般的形式以 (X, v, k) 为输入，并输出 M的一个（可能不同的） k-划分 $Y = \{Y_1, Y_2, \cdots, Y_k\}$。我们重点使用 PR 算法输出的以下性质 [PR20] 。

1. 对所有 $i \in [n]$，如果 Y_i 被分配给代理人 a，那么代理人 a 不会强烈嫉妒 Y中的任何其他物品束。2. 价值最低的物品束的价值不会降低，即 $\min(v(Y_1)\ v(Y_2)\ \cdots,\ v(Y_k)) \geq \min(v(X_1)\ v(X_2)\ \cdots,\ v(X_k))$。

3 代理人类型的近似无嫉妒至多一件物品

本节证明定理 1。回顾一下，输入实例由一组代理人 $\mathcal{A}$ 组成，这些代理人可以划分为 $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{A}_i$，使得任意给定部分 $\mathcal{A}_i$ 中的所有代理人都具有相同的估值，记作 v_i。我们将这种情形称为具有 n 代理人和 k 种估值的情形。此处v_1，v_2，.....，v_k 表示 k 个不同的估值函数。

对于所有 $i \in [k]$，令 $|\mathcal{A}_i| = n_i$。令 $\mathcal{A}_i = \{a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{n_i}^i\}$ 为估值函数为 v_i的代理人集合（或组）。给定一个分配 X，令 X_j^i 表示分配给代理人 a_j^i的物品束。在任意给定的组 $\mathcal{A}_i$中，不失一般性，我们可以假设代理人 a_1^i 获得价值最低的物品束，其次是代理人 a_2^i，依此类推。换言之，物品束 X_j^i 是在分配 X 中组 $\mathcal{A}_i$ 里价值第 j 低的物品束。对于任意给定的组 $\mathcal{A}_i$，我们称代理人 a_1^i 为该组的领头代理人。

现在，我们对具有 k类代理人的实例中任意给定分配 X的嫉妒图 E_X 作几点重要观察。

命题 2. 给定一个具有 k类代理人的实例和一个分配 X，非领头代理人永远不能成为嫉妒图 E_X中的源顶点。因此，E_X 至多有 k 个源点。

这是因为每个非领头代理人都会受到同一组中领头代理人的嫉妒。类似地，我们有如下观察：

命题 3. 如果组 $\mathcal{A}_i$ 中的代理人 a_p^i 嫉妒（或强烈嫉妒）代理人 a，那么领头代理人 a_1^i也会嫉妒（或分别强烈嫉妒）代理人 a。

令 $\mathcal{L} = \{a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^k\}$ 为每组领头代理人构成的集合。给定一个分配 X，令 $S \subseteq \mathcal{G}$ 为某个代理人 $a \in \mathcal{A}$ 所嫉妒的物品束。那么，我们有如下观察：

命题 4. 如果 $T =$ 最小被嫉妒子集$_{\mathcal{L}}(X(\mathcal{L})\ S)$ 是相对于 $\mathcal{L}$的 S 的一个最小受嫉妒子集，那么 T也是相对于 $\mathcal{A}$的一个最小受嫉妒子集。也就是说，$T =$最小被嫉妒子集$_{\mathcal{A}}(X, S)$。

证明。 反设 $T \neq \text{MES}_{\mathcal{A}}(X,\ S)$。也就是说，某个代理人 a_j^i 强烈嫉妒一个真子集 $R \subsetneq T$。那么，根据命题 3，我们知道领头代理人 a_1^i 也嫉妒 R。这与我们的假设 $T = \text{MES}_{\mathcal{L}}(X(\mathcal{L})\ S)$ 矛盾。 □

现在，我们证明一个对证明定理 1 至关重要的引理。在下面的引理中，我们假设已有一个（可能是不完整的）无嫉妒至多一件物品分配 X。我们证明，如果我们改进

领先代理人的物品束，使每位领先代理人的新物品束都是相对于 X 中各自物品束的最小受嫉妒子集，那么最终得到的分配对所有代理人都是无嫉妒至多一件物品的。

引理 *2.* 设 X 是一个 *EFX* 分配（不一定完整），且 $X(\mathcal{L})$ 是将分配 X 限制在领先代理人集合 $\mathcal{L}$ 上所得的分配。设 $Y(\mathcal{L}) = \langle Y_1^1, Y_1^2, \ldots, Y_1^k \rangle$ 是为 $\mathcal{L}$ 中的代理人给出的一个新分配，使得 $Y(\mathcal{L}) \succ X(\mathcal{L})$，且 $Y(\mathcal{L})$ 是 $\mathcal{L}$ 内部的 *EFX* 分配。此外，$\forall i \in k, \exists S \subseteq \mathcal{G}$，使得 $Y_1^i = MES_{\mathcal{L}}(X(\mathcal{L})\ S)$。那么，$X' = X(\mathcal{A} \setminus \mathcal{L} \cup Y(\mathcal{L}))$ 是针对 $\mathcal{A}$ 和 $X' \succ X$ 的 *EFX* 分配。

证明。由于与 X 相比，没有代理人在 X' 中获得更差的物品束，而且至少有一名代理人（恰好属于 $\mathcal{L}$）的境况严格改善，因此 X' 帕累托支配 X。接下来只需证明 X' 是一个 EFX 分配。

首先，我们证明在 X' 中，领头代理人不会强烈嫉妒任何人。任取一位领头代理人 a_1^j。代理人 a_1^j 不会强烈嫉妒 X' 中的任何其他领头代理人，因为 $Y(\mathcal{L})$ 是 $\mathcal{L}$ 内部的一个无嫉妒至多一件物品分配。代理人 a_1^j 不会强烈嫉妒任何非领先代理人 a_p^q，因为 $v_j(Y_1^j) \geq v_j(X_1^j) > v_j(X_p^q \setminus h),\ \forall h \in X_p^q$。

现在，我们证明非领先代理人不会强烈嫉妒任何人。任取一位非领先代理人 a_p^q。代理人 a_p^q 不会强烈嫉妒任何其他非领先代理人，因为他们保留的物品束与 X 中相同。我们知道，在 X' 中，每位领头代理人都持有形如 $\text{MES}_{\mathcal{L}}(X(\mathcal{L})\ S)$ 的最小受嫉妒子集。根据命题 4，我们知道 $\text{MES}_{\mathcal{L}}(X(\mathcal{L})\ S) = \text{MES}_{\mathcal{A}}(X,\ S)$。因此，代理人 a_p^q 也不会强烈嫉妒任何领头代理人。这证明 X' 是一个无嫉妒至多一件物品分配。

□

定理 1 的证明概要：定理 1 的证明分为两种情况。设 X 是一个（可能不完整的）EFX 分配。根据命题 2，嫉妒图 E_X 至多有 k 个源点。当未分配物品的数量至少与 E_X 中源点的数量相同时，根据引理 1，存在另一个 EFX 分配 Y，使得 $Y \succ X$。因此，存在一个至多有 $k-1$ 个未分配物品的 EFX 分配。现在，我们改进 [BCFF22] 中的技术，以得到一个至多有 $k-2$ 个未分配物品的 EFX 分配。

考虑只有 k 个代理人且其估值可能各不相同的情况。设 $\mathcal{N}$ 为这些代理人的集合。根据 [BCFF22]，已知存在一个至多有 $k-2$ 个未分配物品的 EFX 分配。如果嫉妒图至多有 $k-1$ 个源点，则可以通过 [CKMS21] 得到一个至多有 $k-2$ 个未分配物品的 EFX 分配。剩下的情况是嫉妒图有 k 个源点，此时也需要得到相同的结论。因此，这 k 个代理人之间不存在嫉妒，所以 X 是一个（可能不完整的）无嫉妒分配。在下文的 [BCFF22] 引理 4.2 中，对于给定的一个面向 k 个代理人的无嫉妒分配，且其中恰有 $k-1$ 个未分配物品，他们找到了一个新的 EFX 分配 Y，使得 $Y \succ X$。我们注意到 Y 具有一个特殊性质：在 Y 中，每个代理人获得的物品束都具有 $Y_i = \text{MES}_{\mathcal{N}}(X,\ S)$ 的形式，其中 S 或为 $X_j \cup g$，或为 $X_j \cup D$，而 D 是某个丢弃集。

引理 3 ([BCFF22])。设 $\mathcal{N}$ 恰好由 k 位代理人组成，每位代理人都可能具有不同的估值。现在，给定一个（可能是部分的）无嫉妒分配 X，其中恰好有 $k-1$ 件物品未分配，则存在一个（可能是部分的）*EFX* 分配 Y，使得 $Y \succ X$。此外，在 Y 中，每位代理人获得的物品束形如 $Y_i =$ 最小被嫉妒子集 $_{\mathcal{N}}(X, S)$，其中 S 要么是 $X_j \cup g$，要么是 $X_j \cup D$；这里，X_j是某个物品束，g是某件未分配物品，而 D是某个丢弃集。

现在我们证明以下两个引理，它们将作为子程序，用于构造性地证明定理 1。

引理 4. 考虑一个包含 k类代理人的实例。如果存在一个 *EFX* 分配 X，其中至少有$k-1$ 件未分配物品，那么存在一个 *EFX* 分配（不一定是完整分配） Y，使得 $Y \succ X$。

证明。 考虑分配 X 的嫉妒图 E_X。根据命题 2，我们知道只有领头代理人才能成为源点。因此，源点最多有 k 个。如果源点数量小于或等于 $k-1$，由于 X 中至少有 $k-1$ 个未分配物品，应用引理 1 可得一个 EFX 分配 $Y, Y \succ X$。

现在，考虑 E_X 中恰好有 k 个源点的情况。根据命题 2，我们知道，领头代理人集合 $\mathcal{L}$ 恰好是 E_X 中的源点集合。若考虑限制在 $\mathcal{L}$ 上的子分配$X(\mathcal{L})$，可以看到 $X(\mathcal{L})$ 是无嫉妒的。现在，我们对 $X(\mathcal{L})$ 应用引理 3，得到一个限制在 $\mathcal{L}$ 上的 EFX 分配 $Y(\mathcal{L})$，使得 $Y(\mathcal{L}) \succ X(\mathcal{L})$，并且 $\mathcal{L}$ 中的每个代理人都获得一个形如 $Y_1^i = \text{MES}_{\mathcal{L}}(X(\mathcal{L})\ S)$ 的物品束。根据引理 2，分配 $X(\mathcal{A} \setminus \mathcal{L} \cup Y(\mathcal{L}))$ 帕累托支配X。 □

引理 5。 设 X 是一个部分 *EFX* 分配，$U \neq \varnothing$ 是未分配物品的集合。如果某个代理人 a嫉妒 U，那么存在一个 *EFX* 分配（不一定是完整分配） Y，使得 $Y \succ X$。

证明。 如果某个代理人 a 嫉妒 U，那么就存在一位冠军代理人 a'，嫉妒最小受嫉妒子集 $T = \text{MES}_{\mathcal{N}}(X,\ U)$。我们用 T 替换代理人 a' 的物品束。由此得到一个新分配 Y，它帕累托支配 X。 □

定理 *1* 的证明。 考虑一个包含 k 种代理人类型的实例。如果物品数量 $|\mathcal{G}| \leq n$，那么任何每位代理人至多分得一件物品的分配都是 EFX 分配。因此假设 $|\mathcal{G}| > n$。我们从一个部分且显然满足 EFX 的分配 X 开始，其中每位代理人恰好拥有一件物品。设 U 为未分配物品的集合。

只要 $|U| \geq k-1$ 或某个代理人嫉妒 U，我们就利用引理 4 和引理 5 找到一个新分配 Y，使其帕累托支配 X。由于 EFX 分配的数量有限，这个过程必定会以一个 EFX 分配结束；该分配至多有 $k-2$ 件未分配物品，且没有代理人嫉妒 U。 □

4 两个离群估值下的 EFX

本节将证明，当 $n-2$ 个代理人具有相同估值时，n 个代理人始终存在 EFX 分配，从而证明定理 2。

考虑一组 n 个代理人 $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}, b_1, c_1\}$、一组 m 件物品 $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$，以及一组三个估值函数 $\mathcal{V} = \{v_a, v_b, v_c\}$，其中代理人 a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-2}的估值均为 v_a，而离群代理人 b_1 和 c_1 的估值分别为 v_b 和 v_c。假设估值函数 v_a和 v_b 单调，且 v_c 为 MMS 可行。

定义 10. 如果分配 $X = \langle X_1, X_2, \cdots, X_n \rangle$ 满足以下条件，我们就称其为几乎 EFX 可行：

1. 前四个 $n-1$ 物品束 $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ 对代理人 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$而言是 *EFX* 可行的。

2. X_n 对至少一名离群参与者（即代理人 b_1 或代理人 c_1）而言是 *EFX* 可行的。

我们定义一个势函数 ϕ，它为每个分配 $X = \langle X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n \rangle$赋予一个实数值，如下所示：

$$\phi(X) = \min\{v_a(X_1), v_a(X_2), \cdots, v_a(X_{n-1})\}.$$

为证明定理 2，我们首先证明几乎 EFX 可行分配总是存在的。接着证明，若分配 X 几乎 EFX 可行，那么要么 X 是一个 EFX 分配，要么存在另一个几乎 EFX 可行分配 X'，其势值严格更高，即 $\phi(X') > \phi(X)$。由于 $\phi(X)$不可能随着 $\phi(X) < v_a(\mathcal{G})$而无限增长，因此必定存在一个同时也是 EFX 分配的几乎 EFX 可行分配。

定理 *2* 的证明：对于任意给定的实例，若有 n 个代理人，且其中 $n-2$ 个代理人具有相同估值，则总是存在一个近似EFX可行分配。对 $\mathcal{G}$ 中的所有 n 个代理人采用估值 v_a 运行 PR 算法，即可得到这样的分配。我们将这个初始分配称为$X = \langle X_1、 X_2、 \cdots、 X_n\rangle$。根据 PR 算法的性质 1，所有物品束对代理人 $a_1、 a_2、 \cdots、 a_{n-2}$ 都是 EFX 可行的。让代理人 c_1 按照其估值v_c，从 X 中选择价值最高的物品束。不失一般性，我们可以假设代理人 c_1 选择的物品束是 X_n。显然，X_n 对 c_1是 EFX 可行的。因此，X 是近似EFX可行的。

如果代理人 b_1 或 c_1 中有一人至少有一个 EFX 可行的物品束不是 X_n，比如说 X_k，那么问题就解决了。我们分别将 $\langle X_n、 X_k\rangle$ 分配给代理人 c_1 和 b_1，再将剩余物品束任意分配给代理人 $a_1、 a_2、 \cdots、 a_{n-2}$。由此得到的分配是 EFX 的。

在证明的其余部分，我们考虑这样的情况：X_n 是 b_1 和 c_1唯一的 EFX 可行物品束。

根据代理人 b_1 和 c_1的价值，令 g_b 和 g_c 分别为 X_n 中价值最低的物品。由于 X_n 是价值最高的物品束，而且对于代理人 b_1（或c_1）来说，也是 X 中唯一 EFX 可行的物品束，即使我们把 $\{X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\}$中根据 v_b（分别为v_c）的价值最高的物品束分给代理人 b_1（分别为c_1），他们仍会强烈嫉妒物品束 X_n。也就是说

$$X_n \setminus g_b >_b \max_b(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}) \tag{1}$$

$$X_n \setminus g_c >_c \max_c(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}) \tag{2}$$

不失一般性，假设

$$X_1 <_a X_2 <_a \cdots <_a X_{n-1} \tag{3}$$

现在，我们考虑将 X_n 中价值最低的物品（按 b_1 或 c_1的价值）移出并加入物品束 X_1后出现的各种情况。

情况 1： 物品束 $X_n \setminus g_b$ 仍是代理人 b_1 最喜欢的物品束或 物品束$X_n \setminus g_c$ 仍是代理人 c_1最喜欢的物品束。也就是说，

$$X_n \setminus g_b >_b X_1 \cup g_b, \text{ or} \qquad\qquad X_n \setminus g_c >_c X_1 \cup g_c$$

假设 $X_n \setminus g_b >_b X_1 \cup g_b$。若考虑 $X_n \setminus g_c >_c X_1 \cup g_c$ 的情况，过程也类似。新的分配为 $X' = \langle X_1 \cup g_b, X_2, \cdots, X_n \setminus g_b\rangle$。将 $X_n \setminus g_b >_b X_1 \cup g_b$ 与方程 1 结合，可知物品束 $X_n \setminus g_b$ 根据 v_b 是最有价值的，因此在新的分配中对代理人 b_1 而言是 EFX 可行的。

情况 1.1： $X_1 \cup g_b <_a X_2$。
结合 $X_1 \cup g_b >_a X_1$ 和方程 3，我们可以看出

$$\phi(X') = v_a(X_1 \cup g_b) > v_a(X_1) = \phi(X).$$

因此，势有所增加。对于代理人 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$，物品束 $X_1 \cup g_b$ 仍然 EFX 可行，因为其他物品束的价值都没有增加。此外，对于代理人 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$，与 $X_1 \cup g_b$ 相比，物品束 $X_2, X_3, \cdots, X_{n-1}$ 是 EFX 可行的，因为根据 v_a，它们的价值高于 $X_1 \cup g_b$。与 $X_n \setminus g_b$ 相比，它们也满足 EFX 可行，因为它们相对于价值更高的物品束 X_n 也是 EFX 可行的。因此，物品束 $X_1 \cup g_b, X_2, \cdots, X_{n-1}$ 对于代理人 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$ 是 EFX 可行的。由此，新的分配几乎 EFX 可行，且势有所增加。

情况 1.2[3]：$X_1 \cup g_b >_a X_2$。
令 $(X_1 \cup g_b) \setminus Z$ 是关于估值 v_a 的 最小受嫉妒子集，相对于 X_2。也就是说，

$$\begin{aligned} &(X_1 \cup g_b) \setminus Z >_a X_2 \text{ , and} \\ &((X_1 \cup g_b) \setminus Z) \setminus h <_a X_2 \quad \forall h \in (X_1 \cup g_b) \setminus Z \end{aligned} \tag{4}$$

现在，令新的分配为

$$\begin{aligned} X' &= \langle X'_1, X'_2, \cdots, X'_n \rangle \\ &= \langle (X_1 \cup g_b) \setminus Z,\ X_2, \cdots, (X_n \setminus \{g_b\}) \cup Z \rangle \end{aligned}$$

由于 $(X_1 \cup g_b) \setminus Z >_a X_2$，$\phi(X') = v_a(X_2) > v_a(X_1) = \phi(X)$，因此势严格增加。由方程 1 可得 $X_n \setminus g_b >_b \max_b(X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})$。根据情况 1 的假设，我们还有 $X_n \setminus g_b >_b X_1 \cup g_b$。因此，

$$X'_n = (X_n \setminus g_b) \cup Z >_b \max_b(X'_1, X'_2, \ldots, X'_{n-1})$$

因此，X'_n 对代理人 b_1 是 EFX 可行的。

接下来，我们证明物品束 $X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n-1}$ 彼此之间是 EFX 可行的（即，不与 X'_n 比较），对于代理人 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$ 而言。物品束 X_1 在 X 中相对于 $X_2, \cdots, X_{n-1}$ 是 EFX 可行的。因此，$X'_1 >_a X_1$ 相对于 $X'_2, \cdots, X'_{n-1}$ 也同样是 EFX 可行的。物品束 $X'_2, \cdots, X'_{n-1}$ 彼此之间是 EFX 可行的，因为它们保持不变。由方程 4 可知 $X'_1 \setminus h = ((X_1 \cup g_b) \setminus Z) \setminus h <_a X_2 \ \forall h \in ((X_1 \cup g_b) \setminus Z)$，由方程 3 可得 $X_2 <_a \cdots <_a X_{n-1}$。因此，对于代理人 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$，物品束 $X'_2, \cdots, X'_{n-1}$ 均相对于 X'_1 是 EFX 可行的。因此，对于代理人 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$，物品束 $X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n-1}$ 彼此之间是 EFX 可行的。

剩下的只需检查物品束 $X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n-1}$ 相对于 X'_n 的 EFX 可行性。如果物品束 $X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n-1}$ 相对于 X'_n EFX 可行，那么我们就满足了不变量的所有条件，因此 X' 几乎 EFX 可行。由于 $\phi(X') > \phi(X)$，我们得到一个势更大的几乎 EFX 可行解，证明完毕。

现在，考虑 $\{X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n-1}\}$ 中有一个物品束不 EFX 可行（相对于）X'_n 的情形。也就是说，

[3]注意，由于假设该实例是非退化的，因此无需考虑 $X_1 \cup g_b =_a X_2$ 的情况。

$$\begin{aligned}
&\exists h \in X'_n \text{ such that } X'_n \setminus h >_a \min_a(X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n-1}) \\
&\implies X'_n >_a \min_a(X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n-1}) \\
&\implies \min_a(X'_1, X'_2, \cdots, X'_n) = \min_a(X'_1, X'_2, \cdots, X'_{n-1}) \\
&\qquad = X_2 >_a X_1
\end{aligned}$$

现在，我们在 X' 上根据估值 v_a 应用 PR 算法，得到一个新的分配 X''。我们让 b_1 （分别是 c_1）根据其估值 v_b （分别是 v_c），从 X'' 中选取价值最高的物品束。如果 b_1 和 c_1 选取的物品束不同，那么我们就得到了一个 EFX 分配。否则，我们将该物品束重新命名为 X''_n。根据 PR 算法的性质 2，我们还知道 $\min_a(X'') >_a \min_a(X') >_a X_1$。因此，$\phi(X'') > v_a(X_1) = \phi(X)$。由此，我们得到一个势增大的新近似EFX可行分配。

情况 2： 物品束 $X_n \setminus g_b$ 不是代理人 b_1 最喜欢的物品束，而且物品束 $X_n \setminus g_c$ 不是代理人 c_1最喜欢的物品束。由于 $X_n \setminus g_b >_b \max_b(X_2, \cdots, X_{n-1})$ 且 $X_n \setminus g_c >_c \max_c(X_2, \cdots, X_{n-1})$，我们有

$$X_n \setminus \{g_b\} <_b X_1 \cup \{g_b\}, \text{and } X_n \setminus \{g_c\} <_c X_1 \cup \{g_c\}$$

在这种情况下，我们对 $\langle X_1 \cup g_b, \ X_n \setminus g_b \rangle$ 使用 PR 算法，在估值 v_b 下得到物品束$Y_{n-1}, \ Y_n$。现在，新的分配为 $X' = \langle X'_1, \ X'_2, \ \cdots, \ X'_{n-1}, \ X'_n \rangle = \langle X_2, \ X_3, \ \cdots, \ Y_{n-1}, \ Y_n \rangle$。

我们首先证明，物品束 Y_{n-1} 和 Y_n 对代理人 b_1而言是 EFX 可行的。

$$\begin{aligned}
\min_b(Y_{n-1}, Y_n) &>_b \min_b((X_1 \cup g_b), (X_n \setminus g_b)) \\
&= X_n \setminus \{g_b\} \quad (\textit{Case 2} \text{ assumption}) \\
&>_b \max_b(X_2, \cdots, X_{n-1}) \text{ (From Equation 1)}
\end{aligned}$$

因此，物品束 Y_{n-1} 和 Y_n 对代理人 b_1而言都是 EFX 可行的。

我们让代理人 c_1 在 Y_{n-1} 和 Y_n中选择自己最喜欢的物品束，其中 不失一般性 令 $Y_n >_c Y_{n-1}$。现在证明，Y_n 对代理人 c_1而言是 EFX 可行的。根据 v_c的最大最小 性质，我们知道:

$$\begin{aligned}
Y_n &= \max_c(Y_{n-1}, Y_n) && (\because Y_n >_c Y_{n-1}) \\
&\geq_c \min_c(X_1 \cup \{g_c\}, X_n \setminus \{g_c\}) && (v_c \text{ 是 MMS 可行的}) \\
&= X_n \setminus \{g_c\} && (\text{情况 } \textit{2} \text{假设}) \\
&>_c \max_c(X_2, \cdots, X_{n-1}) && (\text{根据方程 2})
\end{aligned}$$

因此，物品束 Y_n 对代理人 c_1而言是 EFX 可行的。

现在，回想一下，当前的分配为 $X' = \langle X_2, \ X_3, \ \cdots, \ Y_{n-1}, \ Y_n \rangle$。根据代理人 a_1的嫉妒情况，我们有以下三种情形:

情形 2.1： 代理人 a_1 并不强烈嫉妒 Y_{n-1} 和 Y_n。由于 $X_2 <_a \cdots <_a X_{n-1}$，代理人$a_2, \ a_3, \ \cdots, \ a_{n-2}$ 也不强烈嫉妒 Y_{n-1} 和 Y_n。因此，X' 是一个无嫉妒至多一件物品分配。

情形 2.2： 代理人 a_1 强烈嫉妒 Y_{n-1} 和 Y_n。那么，

$$Y_n >_a X_2, \quad Y_{n-1} >_a X_2, \quad X_3 >_a X_2 \text{(From Equation 3)}$$

因此，$\min_a(X') = X_2 >_a X_1 = \phi(X)$。也就是说，最小值严格增加了。现在，我们对 X' 运行 PR 算法，使用估值 v_a，得到一个近似 EFX 可行分配 X''，其势值为 $\phi(X'') > \phi(X)$。

情形 2.3： 代理人 a_1 强烈嫉妒 Y_{n-1}，但不嫉妒 Y_n。另一种情形类似。[4]

令 $Y'_{n-1} \subseteq Y_{n-1}$ 满足 $Y'_{n-1} >_a X_2$，但 $Y'_{n-1} \setminus h <_a X_2 \; \forall h \in Y'_{n-1}$。现在考虑新的分配 $X'' = \langle X''_1, \cdots, X''_{n-1}, X''_n \rangle = \langle X_2, \cdots, Y'_{n-1}, Y_n \cup (Y_{n-1} \setminus Y'_{n-1}) \rangle$。此前，$Y_n$ 对代理人 c_1而言是 EFX 可行的。现在，该物品束的价值增加了，而其他物品束的价值没有增加。因此，新的物品束 X''_n 对代理人 c_1而言是 EFX 可行的。

新分配 X'' 的势为 $\phi(X'') = \min_a(X''_1, X''_2, \cdots, Y'_{n-1}) = X_2 >_a X_1 = \phi(X)$。也就是说，势值增加了。现在，如果物品束 $X''_1, X''_2, \cdots, X''_{n-1}$ 对代理人 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-2}$而言是 EFX 可行的，我们就完成了。

我们知道，物品束 X''_1、$\cdots$、X''_{n-2} 对于代理人a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-2}而言彼此之间是 EFX 可行的。根据 Y'_{n-1}的构造，显然 X''_1、X''_2、$\cdots$、$X''_{n-1} = Y'_{n-1}$ 对于代理人 a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-2}而言彼此之间是 EFX 可行的。现在，如果 X''_1、X''_2、$\cdots$、X''_{n-1} 相对于 X''_n是 EFX 可行的，那么所有不变约束都得到满足，且 X'' 是一个势值更高的近似 EFX 可行分配。否则，如果根据估值 v_a，X''_1、X''_2、$\cdots$、X''_{n-1} 中有一个相对于 X''_n 不是 EFX 可行的，那么我们有：

$$\begin{aligned} \exists h \in X''_n \text{ s.t. } X''_n \setminus h &>_a \min_a(X''_1, X''_2, \cdots, X''_{n-1}) = X_2 \\ &>_a \min_a(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{aligned}$$

也就是说，整体最小值提高了。现在，我们对 X'' 使用估值为 v_a 的 PR 算法，得到新的分配 Z。让代理人 c_1 挑选自己最喜欢的物品束。根据 PR 算法的性质，我们知道 $\phi(Z) > \phi(X)$。因此，我们得到一个势更高的新近似EFX可行分配。证明至此完成。

□

5 结论

本文将关于 EFX 分配的现有研究结果推广到不同估值的数量为 k、但代理人数任意的情形。我们给出一种 EFX 分配，其中未分配物品至多有 $k-2$ 件，且没有代理人嫉妒未分配物品构成的物品束。我们还证明，当除两名代理人外的所有代理人都具有相同估值时，在 MMS 可行估值下存在完整 EFX 分配。用于证明定理 1 的技术局限性，可从 [CGM24]中清楚看出。在每一步中，我们的分配都帕累托支配前一步的分配。正如 [CGM24], 所示，即使只有三名代理人，也可能存在一种部分分配，帕累托支配所有完整分配。因此，不可能指望用这种技术得到完整分配。减少未分配物品的数量或离群代理人的数量，仍是具有挑战性的开放问题。

[4]如果代理人 a_1 强烈嫉妒 Y_n，那么将 Y_n 分配给代理人 b_1，并将 Y_{n-1} 分配给代理人 c_1。我们知道，对于代理人 b_1而言，Y_n 和 Y_{n-1} 都是 EFX 可行的。因此，我们通过让 X''_n 对代理人 b_1 而非代理人 c_1满足 EFX 可行，来维持不变量。

致谢

我们感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。Vishwa PrakashHV 感谢 TCS研究学者奖学金的支持。

参考文献

[AAB+23] Georgios Amanatidis、Haris Aziz、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas、Bo Li、Hervé Moulin、Alexandros A Voudouris 和 Xiaowei Wu。不可分物品的公平分配：最新进展与开放问题。人工智能，322:103965，2023。[AAC+23] Hannaneh Akrami、Noga Alon、Bhaskar Ray Chaudhury、Jugal Garg、Kurt Mehlhorn 和 Ruta Mehta。EFX：一种更简单的方法，以及通过彩虹环数实现的（近乎）最优保证。载于第*24*届*ACM*经济学与计算会议论文集，第61–61页，英国伦敦，2023年7月。ACM。doi:10.1145/ 3580507.3597799。[ABF+21] Georgios Amanatidis、Georgios Birmpas、Aris Filos-Ratsikas、Alexandros Hollender 和 Alexandros A. Voudouris。最大纳什福利及其他关于EFX的讨论。理论计算机科学，863:69–85，2021。doi:10.1016/j.tcs.2021.02.020。[BCFF22] Ben Berger、Avi Cohen、Michal Feldman 和 Amos Fiat。四名代理人存在近乎完全的EFX。*AAAI*人工智能会议论文集，36(5):4826–4833，2022年6月。doi:10.1609/aaai.v36i5.20410。[BKK22] Steven J. Brams、D. Marc Kilgour 和 Christian Klamler。无法实现无嫉妒时两人如何公平分配不可分物品。运筹学论坛，3(2)，2022。doi:10.1007/s43069-021-00115-7。[Bud11] Eric Budish。组合分配问题：从等收入出发的近似竞争均衡。《政治经济学杂志》，119(6):1061–1103，2011。arXiv:https://doi.org/10.1086/664613，doi:10.1086/664613。[CGG13] Richard Cole、Vasilis Gkatzelis 和 Gagan Goel。公平分配的机制设计：无支付分配可分物品。载于Michael J. Kearns、R. Preston McAfee 和 Éva Tardos（编），第十四届*ACM*电子商务会议论文集（*EC 2013*），美国宾夕法尼亚州费城，*2013*年*6*月*16*日至*20*日，第251–268页。ACM，2013。doi:10.1145/2492002.2482582。[CGH19] Ioannis Caragiannis、Nick Gravin 和 Xin Huang。实现高纳什福利的至多移除任意一件物品后无嫉妒：捐赠物品的优势。载于Anna Karlin、Nicole Immorlica 和 Ramesh Johari（编），*2019*年*ACM*经济学与计算会议论文集（*EC 2019*），美国亚利桑那州菲尼克斯，*2019*年*6*月*24*日至*28*日，第527–545页。ACM，2019。doi:10.1145/3328526.3329574。[CGM24] Bhaskar Ray Chaudhury、Jugal Garg 和 Kurt Mehlhorn。三名代理人时存在EFX。《*ACM*杂志》，71(1):4:1–4:27，2024。doi:10.1145/3616009。

[CKM+19] Ioannis Caragiannis、David Kurokawa、Hervé Moulin、Ariel D. Procaccia、Nisarg Shah 和 Junxing Wang。《最大纳什福利的不合理公平性》。*ACM* 经济与计算学报，7(3)，2019年9月。doi:10.1145/3355902.

[CKMS21] Bhaskar Ray Chaudhury、Telikepalli Kavitha、Kurt Mehlhorn 和 Alkmini Sgouritsa。《少量慈善即可保证近乎无嫉妒》。*SIAMJ. Comput.*，50(4):1336–1358，2021年。doi:10.1137/20M1359134.[Fol67] D Foley。《资源分配与公共部门》。耶鲁经济学论文集，7:45–98，1967年。[GS58] G Gamow 和 M Stern。《Puzzle-math，版本》。*Viking Adult*，网址 *http://www. worldcat. org/isbn/0670583359*，1958年。[LMMS04] R. J. Lipton、E. Markakis、E. Mossel 和 A. Saberi。《不可分物品近似公平分配》。载于第*5*届*ACM*电子商务会议论文集，EC '04，第125–131页，美国纽约，2004年。计算机协会。doi:10.1145/988772.988792.[Mah21] Ryoga Mahara。《将可加估值扩展为一般估值：关于无嫉妒至多一件物品的存在性》。载于 Petra Mutzel、Rasmus Pagh 和 Grzegorz Herman 编，第*29*届年度欧洲算法研讨会，*ESA 2021*，*2021*年*9*月*6*日至*8*日，葡萄牙里斯本（线上会议），第204卷，*LIPIcs*，第66:1–66:15页。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2021年。doi:10.4230/LIPIcs.ESA.2021.66.[Mah23a] Ryoga Mahara。《两个可加估值下无嫉妒至多一件物品分配的存在性》。离散应用数学，340:115–122，2023年。网址：https://doi.org/10.1016/j.dam.2023.06.035，doi: 10.1016/J.DAM.2023.06.035.[Mah23b] Ryoga Mahara。《两个可加估值下无嫉妒至多一件物品分配的存在性》。离散应用数学，340:115–122，2023年12月。doi:10.1016/j.dam.2023.06.035.[PR20] Benjamin Plaut 和 Tim Roughgarden。《一般估值下的近乎无嫉妒》。*SIAM*离散数学杂志，34(2):1039–1068，2020年。arXiv:https://doi. org/10.1137/19M124397X，doi:10.1137/19M124397X。