arXiv:2301.10633v1 [cs.CE] 25 Jan 2023

面向结构动力学应用的 PGD 降阶建模

Cl´ement Vella[a]，Serge Prudhomme[b,*]

[a] LaMCube（UMR 9013），里尔大学，保罗·朗之万大道，59655 Villeneuved'Ascq，法国[b] 数学与工业工程系，蒙特利尔理工学院，邮政信箱 6079，市中心分局，蒙特利尔，魁北克 H3C 3A7，加拿大

摘要

本文提出一种适用于线性弹性动力学问题求解的适当广义分解（PGD）方法。本文的创新之处在于基于拉格朗日力学和哈密顿力学构建 PGD 问题的弱形式，主要目标是设计数值稳定且满足能量守恒的数值方法。我们证明，该方法允许采用基于Galerkin方法的 PGD 版本，并通过数值算例表明，基于哈密顿形式的 PGD求解器比基于拉格朗日形式的求解器具有更好的稳定性和能量守恒性质。本文通过若干描述一维杆动力学行为的数值算例展示并比较了这两种形式的性能。

关键词：适当广义分解，波动方程，拉格朗日与哈密顿力学，能量守恒定律

1 引言

结构动力学应用通常需要快速方法，以高效估算解，用于数字孪生中的实时仿真、不确定性量化分析或多查询优化。为此，我们在此致力于构建先验的降阶基表示，用于表示描述杆线弹性动力学行为的二阶双曲系统的解；该系统本质上描述了波在一维介质中的传播。模型降阶有多种方法，例如适当正交分解（POD） [1, 2], 适当广义分解（PGD） [3, 4], 降阶基（RB） [5, 6] 等方法。我们在此考虑的降阶方法是适当广义分解（PGD）方法，它提供了一种直接的方法，可即时构建降阶基，而无需事先先验了解待求问题的解。PGD 方法类似于分离变量法，因为它假设

E-mail addresses: clement.vella@univ-lille.fr (C. Vella), serge.prudhomme@polymtl.ca (S. Prudhomme)
URL: https://www.polymtl.ca/expertises/en/prudhomme-serge (S. Prudhomme)
*通讯作者

微分方程的解可关于自变量和/或模型参数分离。本文假设波动方程的解在空间和时间上可分离，换言之，可近似表示为空间函数与时间函数乘积之和。空间函数和时间函数称为模态，是 PGD 形式中的未知量。

近年来，人们致力于构建由二阶双曲型方程控制的解的分离近似。一般而言，各种方法的差异取决于用于描述此类系统的解的形式、构建降阶模型所采用的PGD 形式，或用于时间离散化的数值格式。针对弹性动力学的空间和时间低秩可分离表示已被提出并得到广泛研究，见 [7, 8]尽管人们早已知道，高效地构造这些表示有时颇具挑战性 [9, 10]。作者考虑了仅将位移或将位移和速度同时作为未知场。第一种方法得到了一种PGD 形式，其中仅考虑位移的分离表示；第二种方法则引入了两个不同的表示，分别用于位移和速度，并称为多场PGD（MF-PGD）。作者还研究了PGD的基于Galerkin方法版本和最小残差版本。数值实验表明，对于所有已实现的测试案例和时间积分格式，即Newmark、时间连续Galerkin（TG）和时间不连续Galerkin（TDG）方法，基于Galerkin方法的版本都会发散，而基于最小残差的版本则始终收敛。事实上，研究已证明，基于最小残差的PGD版本在贪婪秩一更新算法的情况下能够收敛，见 [11] 。在 [12], 中，作者采用基于非增量式Newmark积分格式的PGD方法，开发了一种时空表示。他们在Newmark方程中考虑了空间和时间上的离散波动方程，从而得到一个代数方程组。随后，将位移的完全离散时空分离表示（二阶张量）引入该代数方程组，并通过不动点迭代交替求解空间模态和时间模态。为克服使用空间和时间分离表示时遇到的困难，人们还提出了不同的方法。例如，文献 [13]提出了一种假设空间具有良好分离性的做法，其内容是在每个时间步自适应地估计空间模态的数量。此外，空间—频率分离表示也已应用于相当广泛的领域：二维声学 [14, 15], 非线性土力学 [16], 线性和非线性结构动力学 [17, 18]以及瞬态电子学 [19]。研究表明，在考虑额外参数（材料、几何等）时，空间—频率分离尤其有效。PGD也已成功应用于结构动力学，旨在以非侵入式方式为工业问题构建参数化解 [20, 21]。

本文旨在为波动方程开发新颖的时空分离表示，以设计稳定且守恒能量的数值方法。我们特别关注在应用哈密顿弱原理 [22] 后，于连续层面推导弱形式。第一种形式基于力学的拉格朗日描述 [23], ，其中仅将位移场视为问题的未知量。第二种形式基于哈密顿理论 [24, 25], ，其中位移场（广义坐标）和共轭场（广义动量）均作为未知场处理。因此，我们推导出两种弱形式，使我们能够实现基于伽辽金的方法的 PGD，分别称为 L-PGD 和 H-PGD。特别是，哈密顿方法自然导出一种混合弱形式，可引入两种分离表示：一种用于位移场，另一种用于

共轭场 d，方式类似于 MF-PGD [7], 但采用基于Galerkin方法的 PGD .

关于时间离散化，已有多种积分数值格式被应用于线性弹性动力学 [26, 27, 28]。本文仅考虑稳定且满足能量守恒的离散数值格式，即克兰克-尼科尔森方法 [29, 30, 31]（也称为隐式梯形法则），以及满足 $\gamma = 1/2$ 和 $\beta = 1/4$ 的 Newmark 方法 [32] 。此外，我们采用两种后处理程序来提高基于Galerkin方法的 PGD [4, 33], 的收敛性：1）通过改进的 Gram-Schmidt 算法对空间模态进行正交化；2）更新时间模态。这些程序同时应用于 L-PGD 和 H-PGD。数值算例将表明，对于所有已实现的测试案例，H-PGD 求解器都比 L-PGD 具有更好的数值稳定性，并能更好地实现能量守恒。其中一个原因是，H-PGD 的正交化和更新过程确实能够协同发挥作用。此外，我们为 H-PGD 提出了一种自适应不动点算法，可独立控制各场的收敛，从而加快收敛速度。最后，我们将通过一个数值算例说明，该方法可以直接扩展到包含线性阻尼项的波动方程情形。

本文的组织结构如下：在第2节中，我们描述问题模型，并针对一组特定的初始条件和边界条件，利用分离变量法给出解析解。在第3节中，我们基于拉格朗日形式和哈密顿形式给出问题的弱形式，并利用空间上的有限元法和时间上的数值积分格式推导其离散形式。第4节介绍 L-PGD 和 H-PGD 方法，以及正交化和更新过程与不动点算法。在第5 节中给出数值实验，以说明所提出方法的性能。最后，我们在第6节给出结论性意见。

2 问题模型

2.1 强形式

我们考虑的问题模型是一根处于拉伸或压缩状态的一维杆，并假设其发生无穷小变形。该杆的密度为 ρ，杨氏模量为 E，长度为 ℓ，横截面积为 A。我们假设 E 和 A 为常数，但 ρ 可能随空间变化。设 $\Omega = (0, \ell)$ 为杆所占据的 $\mathbb{R}$ 中的开区间，并设 $\mathcal{I} = (0, T)$ 表示时间区间。位移 $u = u(x, t)$ 由一维波动方程控制：

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathcal{I}, \tag{1}$$

并满足初始条件：

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \forall x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3}$$

以及边界条件：

$$u(0,t) = 0, \qquad \forall t \in \mathcal{I}, \tag{4}$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t) = g(t), \qquad \forall t \in \mathcal{I}, \tag{5}$$

其中，函数 $f = f(x, t)$、$u_0 = u_0(x)$、$v_0 = v_0(x)$ 和 $g = g(t)$ 应具有足够的正则性，以保证问题适定。下文中，我们将时间导数记为

$\dot{u} = \partial u/\partial t$ 和 $\ddot{u} = \partial^2 u/\partial t^2$，空间导数记为 $u' = \partial u/\partial x$ 和 $u'' = \partial^2 u/\partial x^2$。此外，我们将波速定义为 $c = \sqrt{E/\rho}$。

2.2 解析解

当速度 c 取为常数时，众所周知，在无限域中齐次波动方程 (1) 的通解，即 $f(x,t) = 0$ 且 $\Omega = \mathbb{R}$，可利用达朗贝尔公式改写为 $u(x,t) = \varphi(x+ct)+\phi(x-ct)$，其中 φ和 ϕ由初始数据 u_0 和 v_0确定。因此，该解可解释为两个速度恒为 c 的波，沿着 x轴向相反方向传播。在 $v_0(x) = 0$这一特殊情况下，解为 $u(x,t) = u_0(x+ct) + u_0(x-ct)$。由此可知，是否能将解表示为空间和时间的分离形式，取决于 u_0的选择。

不过，我们仍给出一个简单问题的解析解，即取$f(x,\ t) = 0$，$v_0(x) = 0$，$g(t) = 0$，且 c为常数。此外，位移的初始条件选为 $u_0(x) = Fx/(EA)$，这对应于杆在 $x = \ell$处受到力 F 时的平衡状态。位移 u 满足以下方程组：

$$\begin{aligned} \ddot{u} - c^2 u'' &= 0, && \forall (x,t) \in \Omega \times \mathcal{I}, \\ u(x,0) &= u_0(x), && \forall x \in \Omega, \\ \dot{u}(x,0) &= 0, && \forall x \in \Omega, \\ u(0,t) &= 0, && \forall t \in \mathcal{I}, \\ EAu'(\ell,t) &= 0, && \forall t \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{6}$$

使用分离变量法，我们寻求如下分离形式的解：

$$u(x,t) = \chi(x)\psi(t).$$

将上述 u 的表达式代入（6）可得：

$$\frac{\chi''(x)}{\chi(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\psi}(t)}{\psi(t)}, \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathcal{I}.$$

由此可知，必须求出常数 $\lambda \in \mathbb{R}$，使函数 $\chi(x)$ 满足特征值问题：

$$\begin{aligned} \chi''(x) + \lambda\chi(x) &= 0, && \forall x \in \Omega, \\ \chi(0) &= 0, \\ \chi'(\ell) &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

并且使函数 $\psi(t)$ 满足常微分方程：

$$\ddot{\psi}(t) + c^2\lambda\psi(t) = 0, \qquad \forall t \in \mathcal{I}. \tag{8}$$

特征值问题（7）的解由特征值 λ_k 及其对应的特征函数 χ_k：

$$\lambda_k = \left[\frac{(2k-1)\pi}{2\ell}\right]^2, \qquad \chi_k(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right), \qquad \forall k = 1,2,\ldots$$

而对于每个特征值，方程（8）的解 λ_k 为：

$$\psi_k(t) = \alpha_k \cos\left(c\sqrt{\lambda_k}t\right) + \beta_k \sin\left(c\sqrt{\lambda_k}t\right).$$

因此，该问题的通解为：

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\chi_k(x)\psi_k(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}\left[\alpha_k\cos\frac{(2k-1)\pi ct}{2\ell}+\beta_k\sin\frac{(2k-1)\pi ct}{2\ell}\right].$$

利用速度的初始条件，即 $\dot{u}(x,0)=v_0(x)=0$，可知 $\beta_k=0$ 对所有$k=1,2,\ldots\ldots$均成立。此外，系数 α_k 对应于与初始位移 $u_0(x)=Fx/(EA)$ 相关的正弦傅里叶级数的系数。因此，位移场可写为：

$$u(x,t)=\frac{8F\ell}{\pi^2EA}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2\ell}\cos\frac{(2k-1)\pi ct}{2\ell},\qquad\forall(x,t)\in\bar{\Omega}\times\bar{\mathcal{I}}.\tag{9}$$

我们注意到，在这种情况下，解可以表示为分离形式，并且级数的系数以二次速率递减。我们将利用这个解析解，在一些数值算例中评估计算结果的准确性。

3 问题的弱形式

问题的弱形式构造并非唯一。下面介绍两种基于拉格朗日方法和哈密顿方法的形式。首先回顾一下将在推导中用到的哈密顿原理。

3.1 哈密顿弱原理

设 q 表示系统的广义坐标，在此对应于位移场 u，并设 t_A 和 t_B 为两个指定的时间。我们注意到，该原理最初是在假设所研究系统的初态和终态已知的情况下提出的，$q(x,t_A)=q_A(x)$以及 $q(x,t_B)=q_B(x)$。给定系统的拉格朗日泛函 $\mathcal{L}$，q的作用泛函记为 $\mathcal{S}[q]$，其定义为 [24, 25]：

$$\mathcal{S}[q]=\int_{t_A}^{t_B}\mathcal{L}(q(t),\dot{q}(t),t)\,dt.\tag{10}$$

哈密顿弱原理指出，物理系统在状态 q_A 和 q_B 之间的演化轨迹 q 是作用量泛函的驻点：

$$\mathcal{S}'[q](q^*)=0,\qquad\forall q^*\in V_0,\tag{11}$$

其中，V_0 是扰动 q^* 的空间，这些扰动在 t_A 和 t_B处为零。V的精确定义取决于拉格朗日的选择。这里，$\mathcal{S}'[q](q^*)$是 $\mathcal{S}[q]$ 在 q 处关于扰动 q^*的盖托导数，即

$$\mathcal{S}'[q](q^*)=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta}\big(\mathcal{S}[q+\theta q^*]-\mathcal{S}[q]\big).$$

在状态 q 于时间 t_A 和 t_B 处未知的特殊情形下，最小作用量原理可改写为 [34]：

$$\mathcal{S}'[q](q^*)=\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}q^*\right]_{t_A}^{t_B},\qquad\forall q^*\in V.\tag{12}$$

我们在此指出，q^* 中的扰动不一定在 t_A 或 t_B处消失。在本文后文中，所有测试案例均假定初始位移 q_A 已知，而 q_B 仍未知。

3.2 拉格朗日形式

广义坐标函数 q描述了位移随 x 和 t变化的关系，定义了系统在构形空间中的一条所谓轨迹。因此，物理系统的轨迹完全由 q的已知信息决定。约瑟夫-路易·拉格朗日的开创性著作M'《分析力学》首次出版于 1788 [23]，其目的在于一劳永逸地奠定分析力学的基础。事实上，他早在1756年就引入了作用泛函 $\mathcal{S}$，其定义见（10）。

3.2.1 连续形式

对于我们的问题（1）-（5，拉格朗日泛函 $\mathcal{L}$ 为：

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t)=\underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \rho A\dot{q}^2\,dx}_{\text{Kinetic Energy}}-\underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega EA\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 dx}_{\text{Potential Energy}}+\underbrace{\int_\Omega fq\;dx+g(t)q(\ell,t)}_{\text{External Energy}}, \tag{13}$$

其中场 q 满足　初始条件（2）-（3）。换言之，试探场的空间 q 为　：

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_L=\{&q\in L^2(\mathcal{I},H^1(\Omega))\cap H^1(\mathcal{I},L^2(\Omega));\\ &q(0,t)=0,\ \forall t\in\mathcal{I};\ q(x,0)=u_0(x),\ \dot{q}(x,0)=v_0(x),\ \forall x\in\Omega\}.\end{aligned} \tag{14}$$

要求轨迹 q 为作用泛函 $\mathcal{S}$的驻点，可得到所谓的欧拉-拉格朗日方程。利用拉格朗日式（13），$\mathcal{S}$ 的 Gˆateaux 导数为：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'[q](q^*)&=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta}\left[\int_{\mathcal{I}}\mathcal{L}(q+\theta q^*,\dot{q}+\theta\dot{q}^*,t)\,dt-\int_{\mathcal{I}}\mathcal{L}(q,\dot{q},t)\,dt\right]\\&=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta}\int_{\mathcal{I}}\Big[\mathcal{L}(q+\theta q^*,\dot{q}+\theta\dot{q}^*,t)-\mathcal{L}(q,\dot{q},t)\Big]dt\\&=\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega \rho A\dot{q}^*\dot{q}-EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+q^*f\,dxdt+\int_{\mathcal{I}}q^*(\ell,t)g(t)\,dt,\end{aligned}$$

其中，扰动空间 q^* 定义为：

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_L=\{&q^*\in L^2(\mathcal{I},H^1(\Omega))\cap H^1(\mathcal{I},L^2(\Omega));\\ &q^*(0,t)=0,\ \forall t\in\mathcal{I};\ q^*(x,0)=0,\ \dot{q}^*(x,0)=0,\ \forall x\in\Omega\}.\end{aligned} \tag{15}$$

然后，利用（12），可得方程：

$$\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega \rho A\dot{q}^*\dot{q}-EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}+q^*f\,dxdt+\int_{\mathcal{I}}q^*(\ell,t)g(t)\;dt=\left[\int_\Omega \rho Aq^*\dot{q}\,dx\right]_0^T,\quad\forall q^*\in\mathcal{V}_L.$$

因此，该问题的弱形式为：

求 $q\in\mathcal{U}_L$ 使得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega \rho A\dot{q}^*\dot{q}-EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}\,dxdt-\int_\Omega \rho Aq^*(x,T)\dot{q}(x,T)\,dx\\&\qquad=-\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega q^*f\,dxdt-\int_{\mathcal{I}}q^*(\ell,t)g(t)\,dt,\quad\forall q^*\in\mathcal{V}_L.\end{aligned} \tag{16}$$

我们注意到，对于足够光滑的数据，上述公式等价于问题的强形式（1）-（5）。事实上，对时间变量进行分部积分可得：

$$\int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega}\rho A q^{*}\ddot{q}+EA\frac{\partial q^{*}}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}\,dxdt=\int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega}q^{*}f\,dxdt+\int_{\mathcal{I}}q^{*}(\ell,t)g(t)\,dt,\quad\forall q^{*}\in\mathcal{V}_{L}. \tag{17}$$

此外，对空间变量进行分部积分后，可得：

$$\int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega}q^{*}\left(\rho A\ddot{q}-EA\frac{\partial^{2}q}{\partial x^{2}}-f\right)dxdt+\int_{\mathcal{I}}q^{*}(\ell,t)\left(EA\frac{\partial q}{\partial x}(\ell,t)-g(t)\right)dt=0,\quad\forall q^{*}\in\mathcal{V}_{L},$$

由此可恢复波动方程的强形式（1）以及诺伊曼边界条件（5）。

3.2.2 离散形式

此处的目标是采用空间上的有限元法和时间上的有限差分方法来定义离散问题。为此，我们考虑半弱形式，而非弱形式（16）：

求 $q(\cdot,t)\in V,\forall t\in\mathcal{I}$，使得

$$\int_{\Omega}\rho(x)Aq^{*}(x)\ddot{q}(x,t)+EA\frac{\partial q^{*}}{\partial x}(x)\frac{\partial q}{\partial x}(x,t)\,dx = \int_{\Omega}q^{*}(x)f(x,t)\,dx+q^{*}(\ell)g(t),\quad\forall q^{*}\in V,\quad\forall t\in\mathcal{I}$$

并满足初始条件

$$q(x,0)=u_{0}(x),\quad\forall x\in\Omega,$$
$$\dot{q}(x,0)=v_{0}(x),\quad\forall x\in\Omega,$$

其中，V 是定义在 Ω 上的函数向量空间：

$$V=\left\{v\in H^{1}(\Omega);\ v(0)=0\right\}.$$

我们将区域划分为 N_e 个单元 K_e，使得 $\Omega=\cup_{e=1}^{N_e}K_e$ 且 $\mathrm{Int}(K_i)\cap\mathrm{Int}(K_j)=\varnothing,\ \forall i,\ j=1,\ .....,\ N_e,\ i\neq j$。随后，我们为该网格关联一个有限元空间 $V^h\subset V$，$\dim V^h=N_x$，它基于定义在 Ω 上的连续分片多项式函数：

$$V^{h}=\{v_{h}\in V:\ v_{h}|_{K_e}\in\mathbb{P}_{k}(K_e),\ e=1,\ldots,N_e\},$$

其中，$\mathbb{P}_k(K_e)$表示 K_e上次数为 k的多项式函数空间。令 ϕ_i、$i=1$、.....、N_x表示 V^h的基函数，即 $V^h=$张成$\{\phi_i\}$。接下来，我们将有限元解设为以下形式：

$$q_{h}(x,t)=\sum_{j=1}^{N_x}q_{j}(t)\phi_{j}(x)$$

其中，自由度q_j 随时间变化。因此，采用伽辽金方法的有限元问题可写为：

求解 $q_h(\cdot,\ t) \in V^h, \forall t \in \mathcal{I}$，使得

$$\int_\Omega \rho(x)A\phi_i(x)\ddot{q}_h(x,t) + EA\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x)\frac{\partial q_h}{\partial x}(x,t)\,dx$$
$$= \int_\Omega \phi_i(x)f(x,t)\,dx + \phi_i(\ell)g(t), \quad \forall i = 1,\ldots,N_x, \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

并满足初始条件

$$q_h(x,0) = u_{0,h}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$
$$\dot{q}_h(x,0) = v_{0,h}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

其中 $u_{0,\ h}$ 和 $v_{0,\ h}$ 是 u_0 和 v_0 在空间 V^h中的插值函数或投影。上述问题可改写为紧凑形式：

$$\begin{aligned} M\ddot{Q}(t) + KQ(t) &= F(t), \qquad \forall t \in \mathcal{I} \\ Q(0) &= U_0, \\ \dot{Q}(0) &= V_0, \end{aligned} \tag{18}$$

其中 M 和 K 分别为全局质量矩阵和刚度矩阵，二者均为对称正定矩阵：

$$M_{ij} = \int_\Omega \rho A\phi_i\phi_j\,dx, \qquad K_{ij} = \int_\Omega EA\phi_i'\phi_j'\,dx, \qquad \forall i,j = 1,\ldots,N_x,$$

$F(t)$ 是时间 t处的载荷向量：

$$F_i(t) = \int_\Omega \phi_i(x)f(x,t)\,dx + \phi_i(\ell)g(t), \qquad \forall i = 1,\ldots,N_x,$$

Q(t) 是自由度向量：

$$Q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) & \ldots & q_{N_x}(t) \end{bmatrix}^T$$

且 U_0 和 V_0 是初始向量：

$$U_0 = \begin{bmatrix} u_{0,1} & \ldots & u_{0,N_x} \end{bmatrix}^T,$$
$$V_0 = \begin{bmatrix} v_{0,1} & \ldots & v_{0,N_x} \end{bmatrix}^T.$$

一种经典方法 [29, 30]对二阶微分方程（18进行时间离散化，首先要通过引入速度向量 $W = \dot{Q}$，将系统改写为一阶微分方程组，即

$$\dot{Q}(t) - W(t) = 0, \qquad \forall t \in \mathcal{I}, \tag{19}$$
$$M\dot{W}(t) + KQ(t) = F(t), \qquad \forall t \in \mathcal{I}, \tag{20}$$

然后对（19）和（20）应用克兰克-尼科尔森格式（也称为隐式梯形法则）。将时间域 $\mathcal{I}$划分为 N_t 个子区间 $\mathcal{I}^n = [t^n, t^{n+1}]$，$n = 1$，……，$N_t$

大小为 $h_t = t^{n+1} - t^n$，我们计算 Q^n 和 W^n, $n = 0, \ldots\ldots, N_t$，使得 $Q^0 = U_0$ 和 $W^0 = V_0$，并且：

$$\begin{aligned} 2(Q^{n+1} - Q^n) - h_t(W^n + W^{n+1}) &= 0, && \forall n = 0, \ldots, N_t - 1, \\ 2M(W^{n+1} - W^n) + h_t K(Q^n + Q^{n+1}) &= h_t(F^n + F^{n+1}), && \forall n = 0, \ldots, N_t - 1. \end{aligned}$$

上述方程组可方便地改写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} h_t K & 2M \\ 2M & -h_t M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{n+1} \\ W^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_t K & 2M \\ 2M & h_t M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^n \\ W^n \end{bmatrix} + h_t \begin{bmatrix} F^n + F^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall n = 0, \ldots, N_t - 1, \tag{21}$$

这里，我们将第一行乘以矩阵 M。值得注意的是，该数值格式不仅是隐式的二阶格式，还能在时间演化过程中保持系统的能量 [29, 30, 31]。我们将把该数值格式与下文采用哈密顿框架得到的数值格式进行比较。

3.3 哈密顿形式体系

我们回顾一下，拉格朗日用构形空间中的广义坐标q（以及隐含的一阶导数 $\dot{q}$）描述系统的演化。哈密顿在 1834 [24] 中拓展了拉格朗日的工作，通过描述系统在相空间中的演化，将广义坐标 q 及其广义（或共轭）动量 $p = \rho A \dot{q}$ 作为独立量引入。为此，他对拉格朗日量相对于 $\dot{q}$（保持 q 不变）进行勒让德变换，从而将哈密顿泛函 $\mathcal{H}$ 定义为 [22]:

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \int_{\mathcal{I}} p\dot{q}\, dt - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t). \tag{22}$$

拉格朗日量以动能与势能之差表示，而哈密顿量则对应这两种能量之和。事实上，对于保守系统，哈密顿量实际上代表所研究系统的总能量，见下文。

3.3.1 连续形式

作用量 $\mathcal{S}$ (10) 根据哈密顿泛函（22) 定义如下：

$$\mathcal{S}[q, p] = \int_{\mathcal{I}} \dot{q}p - \mathcal{H}(q, p, t)\, dt$$

其中，本问题的哈密顿泛函为：

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \frac{1}{\rho A} p^2\, dx}_{\text{Kinetic Energy}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega EA\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 dx}_{\text{Potential Energy}} - \underbrace{\left(\int_\Omega fq\, dx + g(t)q(\ell, t)\right)}_{\text{External Energy}}$$

广义坐标和动量在以下空间中搜索：

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_H &= \{q \in L^2(\mathcal{I}; H^1(\Omega));\ q(0, t) = 0,\ \forall t \in \mathcal{I};\ q(x, 0) = u_0(x),\ \forall x \in \Omega\}, \\ \mathcal{W}_H &= \{p \in L^2(\mathcal{I}; L^2(\Omega));\ p(x, 0) = \rho A v_0(x),\ \forall x \in \Omega\}. \end{aligned}$$

因此，哈密顿弱原理指出，系统在相空间中的轨迹（q， p）应满足：

$$\mathcal{S}'[q,p](q^*,p^*) = \left[\int_\Omega q^* p\, dx\right]_0^T,$$

其中， $\mathcal{S}'[q,p](q^*,p^*)$ 表示此处 $\mathcal{S}[q,p]$ 关于属于以下空间的扰动 (q^*,p^*) 的 Gâteaux 导数：

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mathrm{H}} &= \{q^* \in L^2(\mathcal{I}; H^1(\Omega));\ q^*(0,t) = 0,\ \forall t \in \mathcal{I};\ q^*(x,0) = 0,\ \forall x \in \Omega\},\\
\mathcal{Z}_{\mathrm{H}} &= \{p^* \in L^2(\mathcal{I}; L^2(\Omega));\ p^*(x,0) = 0,\ \forall x \in \Omega\}.
\end{aligned}$$

我们可以轻松计算出 $\mathcal{S}[q,p]$ 的 Gâteaux 导数：

$$\mathcal{S}'[q,p](q^*,p^*) = \int_{\mathcal{I}}\int_\Omega \dot{q}^* p + p^*\dot{q} - \frac{1}{\rho A}p^* p - EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + q^* f\, dxdt\ + \int_{\mathcal{I}} q^*(\ell,t) g(t)\, dt,$$

因此，问题的弱形式为：

求 $(q,p)\ \in \mathcal{U}_H \times \mathcal{W}_H$，使得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega \dot{q}^* p + p^*\dot{q} - \frac{1}{\rho A}p^* p - EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} dxdt\ - \int_\Omega q^*(T)p(T)\, dx\\
&\qquad = -\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega q^* f\, dxdt\ - \int_{\mathcal{I}} q^*(\ell,t) g(t)\, dt, \qquad \forall (q^*,p^*) \in \mathcal{V}_H \times \mathcal{Z}_H.
\end{aligned} \tag{23}$$

对于足够光滑的数据，分别关于时间和空间进行分部积分后，可将（23）改写为：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega p^*\left(\frac{1}{\rho A}p - \dot{q}\right) + q^*\left(\dot{p} - EA\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - f\right) dxdt\\
&\qquad + \int_{\mathcal{I}} q^*(\ell,t)\left(EA\frac{\partial q}{\partial x}(\ell,t) - g(t)\right) dt = 0, \qquad \forall (q^*,p^*) \in \mathcal{V}_H \times \mathcal{Z}_H,
\end{aligned}$$

或者，按照测试函数 q^* 和 p^* 解耦的方式写为：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega p^*\left(\frac{1}{\rho A}p - \dot{q}\right) dxdt = 0, && \forall p^* \in \mathcal{Z}_H,\\
&\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega q^*\left(\dot{p} - EA\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - f\right) dxdt\ + \int_{\mathcal{I}} q^*(\ell,t)\left(EA\frac{\partial q}{\partial x}(\ell,t) - g(t)\right) dt = 0, && \forall q^* \in \mathcal{V}_H.
\end{aligned}$$

哈密顿形式（23）可视为一个混合问题，其耦合微分方程的强形式如下：

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{1}{\rho A}p, && \forall x \in \Omega, \forall t \in \mathcal{I},\\
\dot{p} &= EA\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + f, && \forall x \in \Omega, \forall t \in \mathcal{I}.
\end{aligned} \tag{24}$$

我们观察到，通过引入辅助变量$p = \rho A\dot{q}$，方程组等价于（1）。方程组（24）通常称为正则哈密顿方程。哈密顿形式的一个优点是，它明确指出了如何定义这个辅助变量。

3.3.2 离散形式

对于c 为方便起见，我们首先将弱形式（23）改写为方程组 s:

$$\int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega} p^*\left(\frac{1}{\rho A}p-\dot{q}\right)dxdt=0, \qquad \forall p^*\in\mathcal{Z}_H, \tag{25}$$

$$\int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega} q^*\dot{p}+EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x}\,dxdt=\int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega} q^*f\,dxdt\;+\int_{\mathcal{I}} q^*(\ell,t)g(t)\,dt, \qquad \forall q^*\in\mathcal{V}_H. \tag{26}$$

此处的目标是采用有限元法，在空间和时间上对方程组进行离散化。对于空间离散，我们采用与拉格朗日形式中相同的网格和有限元空间 V^h，用于 q 和p 。换言之，我们寻求如下形式的有限元解:

$$q_h(x,t)=\sum_{j=1}^{N_x} q_j(t)\phi_j(x),$$

$$p_h(x,t)=\sum_{j=1}^{N_x} p_j(t)\phi_j(x),$$

并分别用 Q和 P表示时间相关自由度 q_j和 p_j, $j=1,\ldots,N_x$的向量。同样，我们考虑如下形式的测试函数:

$$q_h^*(x,t)=\sum_{i=1}^{N_x} q_i^*(t)\phi_i(x),$$

$$p_h^*(x,t)=\sum_{i=1}^{N_x} p_i^*(t)\phi_i(x).$$

将试探函数与检验函数代入（25）和（26），可得半离散方程组:

$$\int_{\mathcal{I}} P^{*T}(t)\left(\bar{\bar{M}}P(t)-\bar{M}\dot{Q}(t)\right)dt=0, \tag{27}$$

$$\int_{\mathcal{I}} Q^{*T}(t)\left(\bar{M}\dot{P}(t)+KQ(t)\right)dt=\int_{\mathcal{I}} Q^{*T}(t)F(t)\,dt, \tag{28}$$

_ ¯ ¯其中，矩阵 M 和 M 为对称正定矩阵:

$$\bar{M}_{ij}=\int_{\Omega}\phi_i\phi_j\,dx, \qquad \bar{\bar{M}}_{ij}=\int_{\Omega}\frac{1}{\rho A}\phi_i\phi_j\,dx, \qquad \forall i,j=1,\ldots,N_x.$$

为了近似关于时间的函数 Q 和 P，我们采用与 [22]中提出的方法类似的思路。因此，我们在每个子区间 $\mathcal{I}^n=[t^n,t^{n+1}]$、 $n=0$、.....、 N_t-1上考虑连续分片线性试函数:

$$Q(t)\approx\left[\frac{t^{n+1}-t}{h_t}\right]Q^n+\left[\frac{t-t^n}{h_t}\right]Q^{n+1}$$

$$P(t)\approx\left[\frac{t^{n+1}-t}{h_t}\right]P^n+\left[\frac{t-t^n}{h_t}\right]P^{n+1}$$

并在每个子区间 $\mathcal{I}^n$ 上采用分片常数测试函数，即

$$Q^*(t)=Q^{*n}, \qquad P^*(t)=P^{*n}.$$

将上述表达式代入（27）和（28）可得：

$$\sum_{n=0}^{N_t-1}[P^{*n}]^T\int_{\mathcal{I}^n}\bar{\bar{M}}\left(\left[\frac{t^{n+1}-t}{h_t}\right]P^n+\left[\frac{t-t^n}{h_t}\right]P^{n+1}\right)-\bar{M}\left(\frac{Q^{n+1}-Q^n}{h_t}\right)dt=0,$$

$$\sum_{n=0}^{N_t-1}[Q^{*n}]^T\int_{\mathcal{I}^n}\bar{M}\left(\frac{P^{n+1}-P^n}{h_t}\right)+K\left(\left[\frac{t^{n+1}-t}{h_t}\right]Q^n+\left[\frac{t-t^n}{h_t}\right]Q^{n+1}\right)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{N_t-1}[Q^{*n}]^T\int_{\mathcal{I}^n}\left[\frac{t^{n+1}-t}{h_t}\right]F^n+\left[\frac{t-t^n}{h_t}\right]F^{n+1}dt,$$

积分后可得：

$$\sum_{n=0}^{N_t-1}[P^{*n}]^T\left[\frac{h_t}{2}\bar{\bar{M}}\Big(P^n+P^{n+1}\Big)-\bar{M}\Big(Q^{n+1}-Q^n\Big)\right]=0,$$

$$\sum_{n=0}^{N_t-1}[Q^{*n}]^T\left[\bar{M}\Big(P^{n+1}-P^n\Big)+\frac{h_t}{2}K\Big(Q^n+Q^{n+1}\Big)-\frac{h_t}{2}\Big(F^n+F^{n+1}\Big)\right]=0.$$

由于上述方程对任意试验场均成立，因此问题在于求解 Q^n和 P^n, $n=0,\ldots,N_t$，使得 $Q^0=U_0$和 $P^0=\rho AV_0$，并且：

$$2\bar{M}Q^{n+1}-h_t\bar{\bar{M}}P^{n+1}=2\bar{M}Q^n+h_t\bar{\bar{M}}P^n,\qquad\forall n=0,\ldots,N_t-1,$$

$$h_tKQ^{n+1}+2\bar{M}P^{n+1}=-h_tKQ^n+2\bar{M}P^n+h_t\Big(F^n+F^{n+1}\Big),\qquad\forall n=0,\ldots,N_t-1,$$

可方便地将其改写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}h_tK & 2\bar{M}\\ 2\bar{M} & -h_t\bar{\bar{M}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q^{n+1}\\ P^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-h_tK & 2\bar{M}\\ 2\bar{M} & h_t\bar{\bar{M}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q^n\\ P^n\end{bmatrix}+h_t\begin{bmatrix}F^n+F^{n+1}\\ 0\end{bmatrix},\quad\forall n=0,\ldots,N_t-1.\tag{29}$$

注意，如果我们选择采用克兰克-尼科尔森有限差分格式对问题进行时间离散，也会得到完全相同的一组方程。更有意思的是，我们观察到，(29) 的结构与 (21 M) 完全相同，唯一的区别是，($\bar{\bar{M}}$ 中的矩阵 21) 被 M 或 M所替代。下文将探讨这一细微差异如何影响 PGD 框架下的结果。

最后，我们可以将有限元解的自由度方便地汇总到大小为 $N_x\times N_t$ 的矩阵U 中：

$$U=\begin{bmatrix}Q^1 & Q^2 & \ldots & Q^{N_t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1^1 & q_1^2 & \ldots & q_1^{N_t}\\ q_2^1 & q_2^2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ q_{N_x}^1 & \ldots & \ldots & q_{N_x}^{N_t}\end{bmatrix}.$$

我们将采用（21）和（29）给出的解作为参考解，用于评估 PGD 的结果。具体而言，我们将对 U 进行奇异值分解，以识别有限元解的主成分或模态。

4 PGD 降阶建模

PGD 框架旨在寻找给定感兴趣场的近似解，例如广义坐标 q，其形式为分离形式：

$$q(x,t) \approx q_m(x,t) = q_0(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\mu_i(x),$$

其中，截断参数 m 表示表示式中的模态数， λ_i和 μ_i分别表示时间模态和空间模态。 q_0 是一个提升函数，它满足非齐次狄利克雷边界条件和初始条件，因此分离表示中的每个模态都满足相应的齐次边界条件和初始条件 [3]。

PGD 解通常采用贪心算法 [7, 3]计算。假设已计算出q_{m-1} 模态，接下来该方法按如下方式求得 m^{th} 增广模态：

$$q_m(x,t) = q_{m-1}(x,t) + \lambda(t)\mu(x),$$

为使符号表示简洁，已省略 λ_m 和 μ_m 中的下标 m 。将试探解 q_m 代入控制微分方程，并采用伽辽金方法或残差最小化方法 [7, 3, 35] ，可得到关于未知函数 λ 和 μ的非线性系统。通常使用适当的迭代方案求解该问题，例如本文将采用的不动点算法；在该算法的每次迭代中，交替求解 μ（此时 λ 已知）和 λ（此时 μ 已知） [3, 36]。

下面介绍如何利用拉格朗日和哈密顿形式推导 PGD 形式。我们首先构造连续层面的形式，然后提出一些数值格式来离散这些问题。

4.1 基于拉格朗日的PGD

我们首先考虑拉格朗日框架。由于我们将在空间上采用有限元方法、在时间上采用有限差分方法，因此从公式 (17) 出发。

4.1.1 连续形式

将 $q_{m-1}(x,\ t)\ +\lambda(t)\mu(x)$ 代入 $q_m(x,\ t)$ 得到公式 (17)：

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega} \rho A q^* \ddot{\lambda}\mu + EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\lambda\mu'\,dxdt \\ = \int_{\mathcal{I}}\int_{\Omega} q^*(f - \rho A\ddot{q}_{m-1}) - EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\frac{\partial q_{m-1}}{\partial x}\,dxdt + \int_{\mathcal{I}} q^*(\ell,t)g(t)\,dt, \qquad \forall q^* \in \mathcal{V}_L,\end{aligned} \tag{30}$$

其中，向量空间 $\mathcal{V}_L$ 的定义见 (15)。鉴于将采用不动点方法，我们现在推导关于 μ 和关于 λ的问题。

我们首先假设 λ 已知，并求解 $\mu \in V$。因此，我们将测试函数选为以下形式： $q^*(x,t) = \lambda(t)\mu^*(x)$，其中 $\mu^* \in V$。方程（30）因此简化为：

$$\int_{\Omega} m_{\ell t}\mu\mu^* + k_{\ell t}\mu'\mu^{*\prime}dx = \int_{\Omega} r_{\ell\mu}(\mu^*)\,dx + \left(\int_{\mathcal{I}} \lambda g(t)\,dt\right)\mu^*(\ell), \qquad \forall \mu^* \in V, \tag{31}$$

其中：

$$
\begin{aligned}
m_{\ell t} &= \rho A \int_{\mathcal{I}} \ddot{\lambda}\lambda \, dt = \rho A \left(\dot{\lambda}(T)\lambda(T) - \int_{\mathcal{I}} \dot{\lambda}^2 \, dt \right), \\
k_{\ell t} &= EA \int_{\mathcal{I}} \lambda^2 \, dt, \\
r_{\ell \mu}(\mu^*) &= \left(\int_{\mathcal{I}} f\lambda \, dt \right) \mu^* - \rho A \left(\int_{\mathcal{I}} \ddot{q}_{m-1}\lambda \, dt \right) \mu^* - EA \left(\int_{\mathcal{I}} \frac{\partial q_{m-1}}{\partial x}\lambda \, dt \right) \mu^{*\prime},
\end{aligned}
$$

其中，$m_{\ell t}$、$k_{\ell t}$ 和 $r_{\ell \mu}(\mu^*)$ 可能仅是空间变量的函数。

同样，我们现在假设 μ 已知，并求解 $\lambda = \lambda(t)$。选取形式如下的测试函数 $q^*(x,\ t) = \mu(x)\lambda^*(t)$，则方程（30）变为：

$$
\int_{\mathcal{I}} \lambda^* \left(m_{\ell x}\ddot{\lambda} + k_{\ell x}\lambda \right) dt = \int_{\mathcal{I}} \lambda^* r_{\ell \lambda} \, dt, \qquad \forall \lambda^*, \tag{32}
$$

或者简写为：

$$
m_{\ell x}\ddot{\lambda}(t) + k_{\ell x}\lambda(t) = r_{\ell \lambda}(t), \qquad \forall t \in \mathcal{I}, \tag{33}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
m_{\ell x} &= \int_{\Omega} \rho A \mu^2 \, dx, \\
k_{\ell x} &= \int_{\Omega} EA \left(\mu' \right)^2 dx, \\
r_{\ell \lambda}(t) &= \int_{\Omega} f\mu \, dx - \int_{\Omega} \rho A \ddot{q}_{m-1}\mu \, dx - \int_{\Omega} EA \frac{\partial q_{m-1}}{\partial x}\mu' \, dx + \mu(\ell)g(t),
\end{aligned}
$$

其中，$m_{\ell x}$ 和 $k_{\ell x}$ 为常数。

4.1.2 离散形式

与之前一样，我们采用有限元法对（ $\mu_h \in V^h$ ）进行离散。换言之，我们要寻找 μ的近似解：

$$
\mu(x) \approx \mu_h(x) = \sum_{j=1}^{N_x} \mu_j \phi_j(x),
$$

满足：

$$
\int_{\Omega} m_{\ell t}\mu_h\phi_i + k_{\ell t}\mu_h'\phi_i' dx = \int_{\Omega} r_{\ell \mu}(\phi_i) \, dx + \left(\int_{\mathcal{I}} \lambda g(t) \, dt \right) \phi_i(\ell), \qquad \forall i = 1, \ldots, N_x,
$$

可将其改写为矩阵形式：

$$
\left(M_{\ell t} + K_{\ell t} \right) U_{\ell \mu} = R_{\ell \mu}. \tag{34}
$$

这里，矩阵 $M_{\ell t}$ 和 $K_{\ell t}$ 分别是修正后的质量矩阵和刚度矩阵：

$$
M_{\ell t} = M \left(\int_{\mathcal{I}} \ddot{\lambda}\lambda \ dt \right), \qquad K_{\ell t} = K \left(\int_{\mathcal{I}} \lambda^2 \ dt \right),
$$

自由度向量 $U_{\ell\mu}$ 和载荷向量 $R_{\ell\mu}$ 分别为:

$$U_{\ell\mu} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \end{bmatrix}, \qquad R_{\ell\mu} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \int_\Omega r_{\ell\mu}(\phi_i)\,dx + \left(\int_{\mathcal{I}} \lambda g(t)\,dt\right)\phi_i(\ell) \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

对于时间离散，我们再次将二阶方程（32）化为一阶方程组，方法是引入新变量 $\omega = \dot{\lambda}$，即

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) - \omega(t) &= 0, \qquad \forall t \in \mathcal{I}, \\ m_{\ell x}\dot{\omega}(t) + k_{\ell x}\lambda(t) &= r_{\ell\lambda}(t), \qquad \forall t \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

并对每个方程应用克兰克-尼科尔森格式。因此，该数值格式要求求得一对 $(\lambda_n,\ \omega_n) \in \mathbb{R}^2$, $n = 1, \ldots, N_t$，使其满足:

$$\begin{bmatrix} h_t k_{\ell x} & 2m_{\ell x} \\ 2m_{\ell x} & -h_t m_{\ell x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{n+1} \\ \omega^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_t k_{\ell x} & 2m_{\ell x} \\ 2m_{\ell x} & h_t m_{\ell x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{n} \\ \omega^{n} \end{bmatrix} + h_t \begin{bmatrix} r_{\ell\lambda}^{n} + r_{\ell\lambda}^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall n = 0, \ldots, N_t - 1, \tag{35}$$

其中，第一行乘以了 $m_{\ell x}$。我们注意到，上述方程组的结构自然与式（21）中的方程组相同。

4.2 基于哈密顿量的PGD

在哈密顿框架下应用适当广义分解方法，旨在以分离形式近似广义坐标 q 及其广义动量 p：

$$\begin{aligned} q(x,t) &\approx q_m(x,t) = q_{m-1}(x,t) + \lambda(t)\mu(x), \\ p(x,t) &\approx p_m(x,t) = p_{m-1}(x,t) + \omega(t)\nu(x). \end{aligned}$$

本节旨在构造满足增广模态 $\lambda(t)\mu(x)$ 和 $\omega(t)\nu(x)$ 的问题，并假设 $q_{m-1}(x,\ t)$ 和 $p_{m-1}(x,\ t)$ 均已计算得到。我们首先给出这些问题的连续形式。

4.2.1 连续形式

将 q 和 p 代入（23）中的 q_m 和 p_m，即可直接得到 ts:

$$\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega p^*\left(\frac{1}{\rho A}\omega\nu - \dot{\lambda}\mu\right)dxdt = -\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega p^*\left(\frac{1}{\rho A}p_{m-1} - \dot{q}_{m-1}\right)dxdt, \qquad \forall p^* \in \mathcal{Z}_H, \tag{36}$$

$$\int_{\mathcal{I}}\int_\Omega q^*\dot{\omega}\nu + EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\lambda\mu'\,dxdt = \int_{\mathcal{I}}\int_\Omega q^*(f - \dot{p}_{m-1}) - EA\frac{\partial q^*}{\partial x}\frac{\partial q_{m-1}}{\partial x}\,dxdt + \int_{\mathcal{I}} q^*(\ell,t)g(t)\,dt, \qquad \forall q^* \in \mathcal{V}_H. \tag{37}$$

与拉格朗日过程一样，我们首先假设 λ 和 ω 已知，并求解 $\mu \in V$ 和 $\nu \in L^2(\Omega)$。因此，我们选择如下形式的测试函数： $q^*(x,t) = \lambda(t)\mu^*(x)$

和 $p^*(x,t) = \omega(t)\nu^*(x)$。方程（36）和（37）因此变为：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega m_{ht}\nu\nu^* - c_{ht}\mu\nu^*\,dx = \int_\Omega r_{h\nu}(\nu^*)\,dx, && \forall \nu^* \in L^2(\Omega),\\
&\int_\Omega d_{ht}\nu\mu^* + k_{ht}\mu'\mu^{*\prime}dx = \int_\Omega r_{h\mu}(\mu^*)\,dx + \left(\int_{\mathcal{I}} \lambda g(t)\,dt\right)\mu^*(\ell), && \forall \mu^* \in V,
\end{aligned} \tag{38}$$

其中：

$$\begin{aligned}
m_{ht} &= \frac{1}{\rho A}\int_{\mathcal{I}} \omega^2\,dt,\\
c_{ht} &= \int_{\mathcal{I}} \dot{\lambda}\omega\,dt,\\
d_{ht} &= \int_{\mathcal{I}} \dot{\omega}\lambda\,dt = \nu(T)\lambda(T) - c_{ht},\\
k_{ht} &= EA\int_{\mathcal{I}} \lambda^2\,dt,\\
r_{h\nu}(\nu^*) &= \left(\int_{\mathcal{I}} \dot{q}_{m-1}\omega\,dt\right)\nu^* - \frac{1}{\rho A}\left(\int_{\mathcal{I}} p_{m-1}\omega\,dt\right)\nu^*,\\
r_{h\mu}(\mu^*) &= \left(\int_{\mathcal{I}} f\lambda\,dt\right)\mu^* - \left(\int_{\mathcal{I}} \dot{p}_{m-1}\lambda\,dt\right)\mu^* - EA\left(\int_{\mathcal{I}} \frac{\partial q_{m-1}}{\partial x}\lambda\,dt\right)\mu^{*\prime}.
\end{aligned}$$

我们注意到，c_{ht} 和 d_{ht} 是常数，而 m_{ht} 和 k_{ht} 可能依赖于空间变量。

为了构造时间问题，我们假设已知 μ 和 ν，并求解 λ 和 ω。在式 (36) 和 (37) 中，选取测试函数为 $q^*(x,t) = \mu(x)\lambda^*(t)$ 和 $p^*(x,t) = \nu(x)\omega^*(t)$，可得：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{I}} c_{hx}\dot{\lambda}\omega^* - m_{hx}\omega\omega^*\,dt = \int_{\mathcal{I}} r_{h\omega}(\omega^*)\,dt, && \forall \omega^*,\\
&\int_{\mathcal{I}} c_{hx}\dot{\omega}\lambda^* + k_{hx}\lambda\lambda^*\,dt = \int_{\mathcal{I}} r_{h\lambda}(\lambda^*)\,dt + \left(\int_{\mathcal{I}} \lambda^* g(t)\,dt\right)\mu(\ell), && \forall \lambda^*,
\end{aligned} \tag{39}$$

其中：

$$\begin{aligned}
m_{hx} &= \int_\Omega \frac{1}{\rho A}\nu^2\,dx\\
c_{hx} &= \int_\Omega \mu\nu\,dx\\
k_{hx} &= \int_\Omega EA(\mu')^2\,dx\\
r_{h\omega}(\omega^*) &= \left(\int_\Omega \frac{1}{\rho A}p_{m-1}\nu\,dx\right)\omega^* - \left(\int_\Omega \dot{q}_{m-1}\nu\,dx\right)\omega^*\\
r_{h\lambda}(\lambda^*) &= \left(\int_\Omega f\mu\,dx\right)\lambda^* - \left(\int_\Omega \dot{p}_{m-1}\mu\,dx\right)\lambda^* - \left(\int_\Omega EA\frac{\partial q_{m-1}}{\partial x}\mu'\,dx\right)\lambda^*
\end{aligned}$$

4.2.2 离散形式

对于空间中问题 (38) 的离散化，我们分别寻求有限元解 $\mu_h \in V^h$和 $\nu_h \in V^h$ 的 μ 和 ν，使得：

$$\mu(x) \approx \mu_h(x) = \sum_{j=1}^{N_x} \mu_j \phi_j(x),$$
$$\nu(x) \approx \nu_h(x) = \sum_{j=1}^{N_x} \nu_j \phi_j(x),$$

满足耦合方程组：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega m_{ht}\nu_h\phi_i - c_{ht}\mu_h\phi_i \, dx = \int_\Omega r_{h\nu}(\phi_i)\, dx, && \forall i = 1, \ldots, N_x, \\
&\int_\Omega d_{ht}\nu_h\phi_i + k_{ht}\mu_h'\phi_i' dx = \int_\Omega r_{h\mu}(\phi_i)\, dx + \left(\int_{\mathcal{I}} \lambda g(t)\, dt\right)\phi_i(\ell), && \forall i = 1, \ldots, N_x,
\end{aligned}$$

其等价形式为：

$$\begin{bmatrix} K_{ht} & D_{ht} \\ -C_{ht} & M_{ht} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{h\mu} \\ U_{h\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{h\mu} \\ R_{h\nu} \end{bmatrix}. \tag{40}$$

刚度矩阵和质量矩阵表示为：

$$\begin{aligned}
K_{ht} &= K\left(\int_{\mathcal{I}} \lambda^2\, dt\right), & D_{ht} &= \bar{M}\left(\int_{\mathcal{I}} \dot{\omega}\lambda\, dt\right), \\
C_{ht} &= \bar{M}\left(\int_{\mathcal{I}} \omega\dot{\lambda}\, dt\right), & M_{ht} &= \bar{\bar{M}}\left(\int_{\mathcal{I}} \omega^2\, dt\right),
\end{aligned}$$

其中，向量 $U_{h\mu}$ 和 $U_{h\nu}$ 分别是与 μ_h 和 ν_h 相关的自由度向量，而载荷向量 $R_{h\mu}$ 和 $R_{h\nu}$ 则分别是对应于 $r_{h\mu}$ 和 $r_{h\nu}$ 的残差向量。

按照之前的方法，使用第 39 节中所述算法对方程组（3.3.2）进行时间离散化，可得到：

$$\begin{bmatrix} h_t k_{hx} & 2c_{hx} \\ 2c_{hx} & -h_t m_{hx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{n+1} \\ \omega^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_t k_{hx} & 2c_{hx} \\ 2c_{hx} & h_t m_{hx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^n \\ \omega^n \end{bmatrix} + h_t \begin{bmatrix} r_{h\lambda}^n + r_{h\lambda}^{n+1} \\ r_{h\omega}^n + r_{h\omega}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \forall n = 0, \ldots, N_t - 1. \tag{41}$$

我们注意到，上述系统与通过拉格朗日方法得到的系统略有不同（35）。

4.3 更新 时间模态与格拉姆-施密特过程的更新步骤

考虑可分离函数 $q(x,t)$。在第 m^{th} 次增广时， q 的 PGD近似为：

$$q(x,t) \approx q_m(x,t) = q_0(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\mu_i(x) = q_{m-1}(x,t) + \lambda_m(t)\mu_m(x).$$

这里用于构造模态的算法基于贪心方法；也就是说，每个增广步骤都旨在确定新的模态 (μ_m, λ_m)。因此，基于 $(\mu_k, \lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant m-1}$ 中所包含的信息来计算 (μ_m, λ_m)。然而，先前计算出的模态 $(\mu_k, \lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant m-1}$ 无法利用 (μ_m, λ_m) 引入的新信息。

提高 PGD近似收敛性的一种方法是以全局方式更新时间模态 [4, 33, 37, 38]。换言之，找到新的模态后，更新算法会重新评估各模态（λ_k）$_{1\leqslant k\leqslant m}$，以便获得更优的空间模态组合（$\mu_k$）$_{1\leqslant k\leqslant m}$。

该过程只需较低的计算成本（仅取决于 N_t 和 m [33]），即可显著提高 PGD 的收敛性。不过，该过程需要计算一些矩阵，而这些矩阵可能会随着模态数量的增加而变得病态。如果出现这种情况，该过程会导致不稳定性。

4.3.1 拉格朗日更新

我们考虑（17），并使用以下试探函数与检验函数求解（λ_k）$_{1\leqslant k\leqslant m}$，其中（$\mu_k$）$_{1\leqslant k\leqslant m}$ 已知：

$$q_m(x,t) = q_0(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\mu_i(x), \qquad q^*(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(t)\mu_i(x).$$

离散化后，我们得到以下方程组：

$$\begin{bmatrix} h_t K_{\ell x} & 2M_{\ell x} \\ 2\bar{M}_{\ell x} & -h_t \bar{M}_{\ell x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{n+1} \\ \boldsymbol{\omega}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_t K_{\ell x} & 2M_{\ell x} \\ 2\bar{M}_{\ell x} & h_t \bar{M}_{\ell x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{n} \\ \boldsymbol{\omega}^{n} \end{bmatrix} + h_t \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{\ell\lambda}^{n} + \boldsymbol{r}_{\ell\lambda}^{n+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \forall n = 1, \ldots, N_t - 1, \tag{42}$$

其中：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t) &= (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_m(t)), \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (\dot{\lambda}_1(t), \dot{\lambda}_2(t), \ldots, \dot{\lambda}_m(t)), \\ \boldsymbol{r}_{\ell\lambda}(t) &= (r_{\ell\lambda_1}(t), r_{\ell\lambda_2}(t), \ldots, r_{\ell\lambda_m}(t)), \end{aligned}$$

and:

$$\begin{aligned} K_{\ell x} &= \left[U_{\ell\mu_i}^T K U_{\ell\mu_j}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant m}, \\ M_{\ell x} &= \left[U_{\ell\mu_i}^T M U_{\ell\mu_j}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant m}, \\ \bar{M}_{\ell x} &= \left[U_{\ell\mu_i}^T \bar{M} U_{\ell\mu_j}\right]_{1\leqslant i,j\leqslant m}. \end{aligned}$$

4.3.2 哈密顿更新

这里考虑系统 (23)，并利用以下试探函数与检验函数求解 $(\lambda_k, \omega_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$，其中 $(\mu_k, \nu_k)_{1\leqslant k\leqslant m}$ 为已知：

$$\begin{aligned} q_m(x,t) &= q_0(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(t)\mu_i(x), & q^*(x,t) &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^*(t)\mu_i(x), \\ p_m(x,t) &= p_0(x,t) + \sum_{i=1}^{m} \omega_i(t)\nu_i(x), & p^*(x,t) &= \sum_{i=1}^{m} \omega_i^*(t)\nu_i(x). \end{aligned}$$

对方程进行离散化后，我们得到：

$$\begin{bmatrix} h_t K_{hx} & 2C_{hx} \\ 2C_{hx}^T & -h_t M_{hx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{n+1} \\ \boldsymbol{\omega}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_t K_{hx} & 2C_{hx} \\ 2C_{hx}^T & h_t M_{hx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{n} \\ \boldsymbol{\omega}^{n} \end{bmatrix} + h_t \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_{h\lambda}^{n} + \boldsymbol{r}_{h\lambda}^{n+1} \\ \boldsymbol{r}_{h\omega}^{n} + \boldsymbol{r}_{h\omega}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \forall n = 1, \ldots, N_t - 1, \tag{43}$$

其中：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_m(t)), \\ &\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \ldots, \omega_m(t)), \\ &\boldsymbol{r}_{h\omega}(t) = (r_{h\omega 1}(t), r_{h\omega 2}(t), \ldots, r_{h\omega m}(t)), \\ &\boldsymbol{r}_{h\lambda}(t) = (r_{h\lambda 1}(t), r_{h\lambda 2}(t), \ldots, r_{h\lambda m}(t)), \end{aligned}$$

and:

$$\begin{aligned} K_{hx} &= \left[U_{h\mu_i}^T K U_{h\mu_j}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}, \\ M_{hx} &= \left[U_{h\nu_i}^T \bar{M} U_{h\nu_j}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}, \\ C_{hx} &= \left[U_{h\mu_i}^T \bar{M} U_{h\nu_j}\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}. \end{aligned}$$

4.3.3 格拉姆-施密特过程

由此产生一个问题：在格拉姆-施密特过程中，应相对于哪种度量将空间基正交化？应相对于 K、M，还是任意其他¯对称正定矩阵进行正交化？上一节引入的矩阵 $K_{\ell x}$、$M_{\ell x}$、$M_{\ell x}$、K_{hx} 和 M_{hx} 具有特殊性质，称为格拉姆矩阵。它们的系数_¯ ¯由相对于与矩阵 K、M、M 或 M 相关联的离散度量的标量积得出。

设 $A \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ 为一个对称正定矩阵，且 $(u_1, \ldots, u_m)$ 是 $\mathbb{R}^{N_x}$中的一组向量。由此可定义一个与 A 相关联的标量积，使得 $\langle u_i, u_j \rangle_A = u_i^T A u_j$；还可定义一个范数，使得 $\|u_i\|_A = \sqrt{\langle u_i, u_i \rangle_A}$。设 $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 满足 $G = \left[\langle u_i, u_j \rangle_A\right]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$，它是与 A 和 $(u_1, \ldots, u_m)$ 相关联的格拉姆矩阵。根据标量积的性质，G 是对称半正定的，并且当且仅当向量 $(u_1, \ldots, u_m)$ 线性无关时可逆。

上述更新过程高度依赖于这样一个事实：计算得到的格拉姆矩阵具有良好的条件数。然而，鉴于格拉姆矩阵的性质，在格拉姆-施密特过程中，某些度量选择比其他选择更合适。为确保矩阵的条件数保持较小，格拉姆-施密特过程按如下方式执行：

- 对于拉格朗日更新：构造一个空间基 $(U_{\ell\mu_k})_{1 \leqslant k \leqslant m}$，并相对于 K 对其进行正交化，然后归一化。换言之，按照格拉姆-施密特过程，_$K_{\ell x}$ 应等于 I_m，其中 I_m 是大小为 m的单位矩阵。$M_{\ell x}$ 和 $M_{\ell x}$ 不会具有特定形式，但只要基向量保持线性无关，它们的条件数就应保持较低；

- 对于哈密顿更新：分别为q 和 p构建两个空间基 $(U_{h\mu_k})_{1 \leqslant k \leqslant m}$和 $(U_{h\nu_k})_{1 \leqslant k \leqslant m}$。据我们所知，一种最优选择是一个新结果：分别对 $(U_{h\mu_k})_{1 \leqslant k \leqslant m}$和 $(U_{h\nu_k})_{1 \leqslant k \leqslant m}$关于 K和 M进行正交化，然后将向量归一化。按照格拉姆-施密特过程，$K_{hx} = M_{hx} = I_m$ 且其条件数仍保持最优。

4.4 自适应不动点算法

本节简要介绍 PGD 方法的拉格朗日形式和哈密顿形式所对应的不动点算法。特别是，对于哈密顿形式，我们提出了一种算法，可加速与广义坐标和共轭场相关的富集模态的收敛。

4.4.1 拉格朗日不动点

为简化符号表示，这里我们将直接用 μ 和 λ 分别指有限元解 μ_h（或自由度向量 $U_{\ell\mu}$）和离散解（λ^0，λ^1，……，λ^{N_t}）。此外，我们引入：

- $\mathcal{S}_\ell$： $\lambda \mapsto \mu$，求解系统（34）中 μ 且 λ 已知时的算子；
- $\mathcal{T}_\ell$： $\mu \mapsto \lambda$，求解系统（35）中 λ 且 μ 已知时的算子。

令 $j_{\max}$ 和 ϵ 分别表示用户定义的最大迭代次数和容差。拉格朗日方法的不动点算法以伪代码形式描述于算法 1中。注意，对于平方可积函数，下标为 L^2 的范数定义如下：

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathcal{I}} \int_{\Omega} f(x,t)^2 \, dxdt$$

Algorithm 1 Fixed point algorithm for the Lagrangian formulation

Initialize λ_0 and μ_0, $j \leftarrow 0$, $s \leftarrow \epsilon + 1$
while $j < j_{\max}$ and $s > \epsilon$ **do**
  Increment the iteration counter: $j \leftarrow j + 1$
  Compute new spatial mode: $\mu_j \leftarrow \mathcal{S}_\ell(\lambda_{j-1})$
  Normalize: $\mu_j \leftarrow \mu_j / \|\mu_j\|_K$
  Compute new temporal mode: $\lambda_j \leftarrow \mathcal{T}_\ell(\mu_j)$
  Calculate the PGD difference $\Delta \leftarrow \mu_j\lambda_j - \mu_{j-1}\lambda_{j-1}$ and average $\Sigma \leftarrow \frac{1}{2}(\mu_j\lambda_j + \mu_{j-1}\lambda_{j-1})$
  Evaluate the stagnation coefficient: $s \leftarrow \|\Delta\|_{L^2} / \|\Sigma\|_{L^2}$
end while
Return the modes $\lambda \leftarrow \lambda_j$ and $\mu \leftarrow \mu_j$

4.4.2 哈密顿定点

与前文相同，记号 $\mu, \nu, \lambda, \omega$ 将用于表示有限元解 μ_h 和 ν_h，以及离散解 (λ^0，λ^1、……、λ^{N_t}) 和 (ω^0，ω^1、……、ω^{N_t})。此外，我们考虑以下算子：

- $\mathcal{S}_h$：（λ，ω）$\mapsto$（μ，ν），该算子在给定（40）中的（μ，ν）和（λ，ω）时，求解该系统；
- $\mathcal{T}_h$：（μ，ν）$\mapsto$（λ，ω），给定（41）中的（λ，ω）和（μ，ν）时，用于求解系统的算子。

我们在数值实验中观察到，数对（μ, λ）和（ν, ω）不一定会同时收敛。因此，我们建议将迭代过程解耦如下：

- 若模态 $\mu\lambda$达到收敛，则固定 μ 和 λ 的值，然后求解 (44) 和 (45)，以求得 ν 和 ω，直至收敛：

$$M_{ht}\nu = C_{ht}\mu + R_{h\nu} \tag{44}$$
$$h_t m_{hx}\omega^{n+1} = -h_t m_{hx}\omega^{n} + 2c_{hx}\left(\lambda^{n+1} - \lambda^{n}\right) + h_t\left(r_{h\omega}^{n} + r_{h\omega}^{n+1}\right), \quad \forall n = 0, \ldots, N_t - 1. \tag{45}$$

  与 (44) 和 (45) 相关的算子分别记为 $\mathcal{S}_{h\nu}$： $\omega \mapsto \nu$、 $\mathcal{T}_{h\omega}$： $\nu \mapsto \omega$。

- 若模态 $\nu\omega$达到收敛，则固定 ν 和 ω 的值，然后求解 和 (47)，以求得 μ 和 λ，直至收敛: (46)

$$K_{ht}\mu = -D_{ht}\nu + R_{h\mu} \tag{46}$$
$$h_t k_{hx}\lambda^{n+1} = -h_t k_{hx}\lambda^{n} + 2c_{hx}\left(\omega^{n} - \omega^{n+1}\right) + h_t\left(r_{h\lambda}^{n} + r_{h\lambda}^{n+1}\right), \quad \forall n = 0, \ldots, N_t - 1. \tag{47}$$

  与 (46) 和 (47) 相关的算子分别记为 $\mathcal{S}_{h\mu}$： $\lambda \mapsto \mu$ 和 $\mathcal{T}_{h\lambda}$： $\mu \mapsto \lambda$。

哈密顿方法的不动点算法以伪代码形式详见算法 2。需要注意的是，使用 H-PGD 求解的系统维数是使用 L-PGD 求解的系统维数的两倍。这种实现有两方面的优势：一方面，它可以分别控制各个场的收敛情况；另一方面，该不动点算法会停止对已收敛的场进行迭代，因此迭代所涉及的系统规模减半，即与 L-PGD 的维数相同。

5 数值结果与讨论

5.1 测试案例

本节旨在给出若干数值示例，以比较采用拉格朗日形式和哈密顿形式得到的 PGD 解。在所有实验中，我们将考虑一根长度为 $\ell = 0.2$ m 的一维杆，其材料属性为$E = 220$ GPa、 $\rho = 7000$ kg/m^3, 和 $A = 10^{-3}$ m^2。除非另有说明，我们将求解微分方程 (1)，其中 $f(x,t) = 0, \forall x \in \Omega$, $\forall t \in \mathcal{I}$，且 $T = 1.15$ ms。此外，我们假设杆始终固定于 $x = 0$，即 $u(0,t) = 0, \forall t \in \mathcal{I}$。我们将考虑五种情形，它们可能在初始条件 $u_0(x)$ 和 $v_0(x)$ 的选取或端点 $x = \ell$ 处的边界条件类型方面有所不同：

1. 在第一个案例中，我们将考虑均匀的初始位移和速度，即 $u_0(x)$ =0 且 $v_0(x) = 0$, $\forall t \in \mathcal{I}$ 并在 5 处满足诺伊曼条件 ($x = \ell$ 其中 $g(t)$ 在$t \leqslant T/2$ 时振荡，在 $t > T/2$时为零。在这些实验中，计算 PGD 解时不会执行第 4.3 节所述的更新过程；

2. 在此情形下，我们将重复上述实验，但使用第（4.3）节的更新过程来计算 PGD 解；

3. 在第三种情形下，我们保留齐次初始条件，并将 $x = \ell$ 处的诺伊曼条件替换为振荡狄利克雷条件；4. 本实验将模拟（6）中提出的问题，该问题具有解析解（9）；不过，为避免解中不连续性导致的伪振荡，我们将时间区间限制为 $T = 0.14$ 毫秒 [27, 39]；5. 最后一种情形将考虑与情形2完全相同的情况，但波动方程中额外加入了线性阻尼项。

下文中，通过拉格朗日形式和哈密顿形式得到的 PGD 解分别称为“L-PGD”和“H-PGD”。此外，我们考虑拉格朗日形式的两个版本：“L-PGD1”采用论文中介绍的克兰克-尼科尔森格式（也称为隐式梯形法则）进行时间积分，而“L-PGD2”则用纽马克方法替代克兰克-尼科尔森格式，其中参数为 $\gamma = 1/2$ 和 $\beta = 1/4$ [32, 28]。空间解将用连续分段线性多项式函数近似，总计有 $N_x = 224$ 个自由度；也就是说，区域 Ω 被划分为 $N_x = 224$ 个大小相等的单元。同样，时间区间 $\mathcal{I}$ 被划分为 $N_t = 1025$ 个大小相等的子区间（案例 4 中除外，此时取 $N_t = 1300$）。选择这些数值是为了使空间和时间上的离散误差相对于 PGD 形式产生的截断误差足够小。

5.2 比较方法与性能标准

为了评估 PGD 解的准确性，我们将采用第 3.2.2 节或第 3.3.2 节中所述、并使用相同离散参数 $N_x = 224$ 和 $N_t = 1025$得到的有限元解作为参考解。对于定义在 Ω $u = u(x, t)$ 上的场 $\times \mathcal{I}$，我们将 ϵ_u 定义为其在 L^2 范数下的相对误差：

$$\epsilon_u = \frac{\|u_m - u_{ref}\|_{L^2}}{\|u_{ref}\|_{L^2}}$$

其中，u_m 是 u 的秩为 m 的 PGD近似，u_{ref} 是一个非常精确的参考解。

我们将研究 PGD 解中的误差随模态数 m 的变化，并将其与对参考解进行后验 奇异值分解所得的误差进行比较，但案例 4 除外；对于案例 4，我们将直接把 PGD 解与问题（9）的解析解进行比较。我们尤其会考察杆的能量随时间变化的误差，因为当外部载荷消失时，离散PGD解中的能量（哈密顿量）应保持不变。

此外，我们将研究时间更新过程中计算得到的格拉姆矩阵的条件数。这类矩阵的条件数可以间接反映格拉姆-施密特过程的效果。一旦空间基的线性无关性受到破坏，该过程的效果就会变差，条件数也可能显著增大。事实上，空间基中的向量线性无关，当且仅当格拉姆矩阵可逆。更具体地说，格拉姆矩阵应等于单位矩阵（因为此处的基向量已正交归一化）。因此，在 1^{st} 增广（$m = 1$）之后，条件数等于 1。

算法 2 哈密顿形式的不动点算法

初始化 λ_0, ω_0, μ_0, 以及 ν_0, $j \leftarrow 0$, $s_q \leftarrow \epsilon + 1$, $s_p \leftarrow \epsilon + 1$

当 $j < j_{\max}$ 且（$s_q > \epsilon$ 或 $s_p > \epsilon$）**执行**

递增迭代计数器: $j \leftarrow j + 1$

if $s_q < \epsilon$ **然后**

计算新的空间模态: $\nu_j \leftarrow \mathcal{S}_{h\nu}(\omega_{j-1})$

归一化: $\nu_j \leftarrow \nu_j / \|\nu_j\|_M$

计算新的时间模态: $\omega_j \leftarrow \mathcal{T}_{h\omega}(\nu_j)$

计算 PGD 差值 $\Delta_p \leftarrow \nu_j\omega_j - \nu_{j-1}\omega_{j-1}$

并对 $\Sigma_p \leftarrow \frac{1}{2}(\nu_j\omega_j + \nu_{j-1}\omega_{j-1})$ 取平均

评估停滞系数: $s_p \leftarrow \|\Delta_p\|_{L^2} / \|\Sigma_p\|_{L^2}$

更新 $\mu_j \leftarrow \mu_{j-1}$ 和 $\lambda_j \leftarrow \lambda_{j-1}$（固定模态）

否则如果 $s_p < \epsilon$ **则**

计算新的空间模态: $\mu_j \leftarrow \mathcal{S}_{h\mu}(\lambda_{j-1})$

归一化: $\mu_j \leftarrow \mu_j / \|\mu_j\|_K$

计算新的时间模态: $\lambda_j \leftarrow \mathcal{T}_{h\lambda}(\mu_j)$

计算 PGD差值 $\Delta_q \leftarrow \mu_j\lambda_j - \mu_{j-1}\lambda_{j-1}$

和平均值 $\Sigma_q \leftarrow \frac{1}{2}(\mu_j\lambda_j + \mu_{j-1}\lambda_{j-1})$

计算停滞系数: $s_q \leftarrow \|\Delta_q\|_{L^2} / \|\Sigma_q\|_{L^2}$

更新 $\nu_j \leftarrow \nu_{j-1}$ 和 $\omega_j \leftarrow \omega_{j-1}$（固定模态）

else

计算新的空间模态: $(\mu_j, \nu_j) \leftarrow \mathcal{S}_h(\lambda_{j-1}, \omega_{j-1})$

归一化: $\mu_j \leftarrow \mu_j / \|\mu_j\|_K$ 和 $\nu_j \leftarrow \nu_j / \|\nu_j\|_M$

计算新的时间模态: $(\lambda_j, \omega_j) \leftarrow \mathcal{T}_h(\mu_j, \nu_j)$

计算 PGD 差值 $\Delta_q \leftarrow \mu_j\lambda_j - \mu_{j-1}\lambda_{j-1}$ 和 $\Delta_p \leftarrow \nu_j\omega_j - \nu_{j-1}\omega_{j-1}$

以及平均值 $\Sigma_q \leftarrow \frac{1}{2}(\mu_j\lambda_j + \mu_{j-1}\lambda_{j-1})$ 和 $\Sigma_p \leftarrow \frac{1}{2}(\nu_j\omega_j + \nu_{j-1}\omega_{j-1})$

评估停滞系数: $s_q \leftarrow \|\Delta_q\|_{L^2} / \|\Sigma_q\|_{L^2}$ 和 $s_p \leftarrow \|\Delta_p\|_{L^2} / \|\Sigma_p\|_{L^2}$

结束 if

结束 while

返回 模态 $\lambda = \lambda_j$、$\omega = \omega_j$、$\mu = \mu_j$ 和 $\nu = \nu_j$

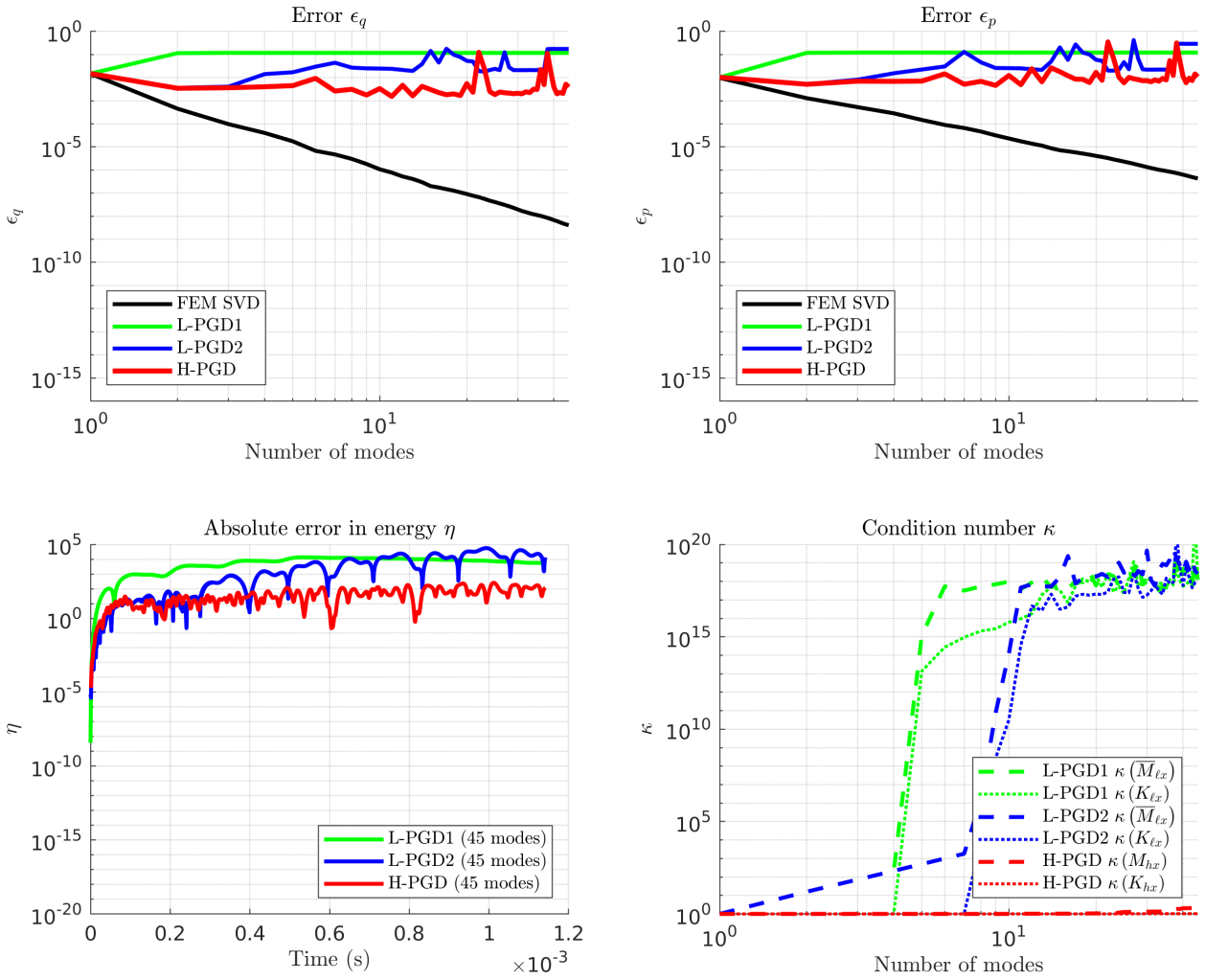


图 1：案例1。（左上）参考位移场与 SVD 或 PGD 位移场之间的误差。（右上）参考共轭动量场与 SVD 或 PGD 共轭动量场之间的误差。（左下）参考系统与降阶系统的能量随时间变化的误差。（左下）第 4.3.1 节和 4.3.2节中引入的矩阵的条件数。

然后，在考虑额外增广时，可能出现两种情况：

1. 格拉姆-施密特过程表现良好，格拉姆矩阵保持为 I_m （大小为 m 的单位矩阵），且条件数保持为 1；

2. 线性无关性遭到破坏，不仅格拉姆矩阵的一些非对角系数变为非零，而且格拉姆矩阵也不再可逆。因此，条件数会急剧增大。

5.3 案例1：不更新过程的诺伊曼边界条件

在这种情况下，我们用1）-（5）中的问题来近似，并采用 $u_0 = 0$， $v_0 = 0$以及诺伊曼边界条件：

$$EA\frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = g(t) = \begin{cases} F_0\left(1 - \cos\left(\omega t\right)\right), & \forall t \in (0, T/2], \\ 0, & \forall t \in (T/2, T). \end{cases}$$

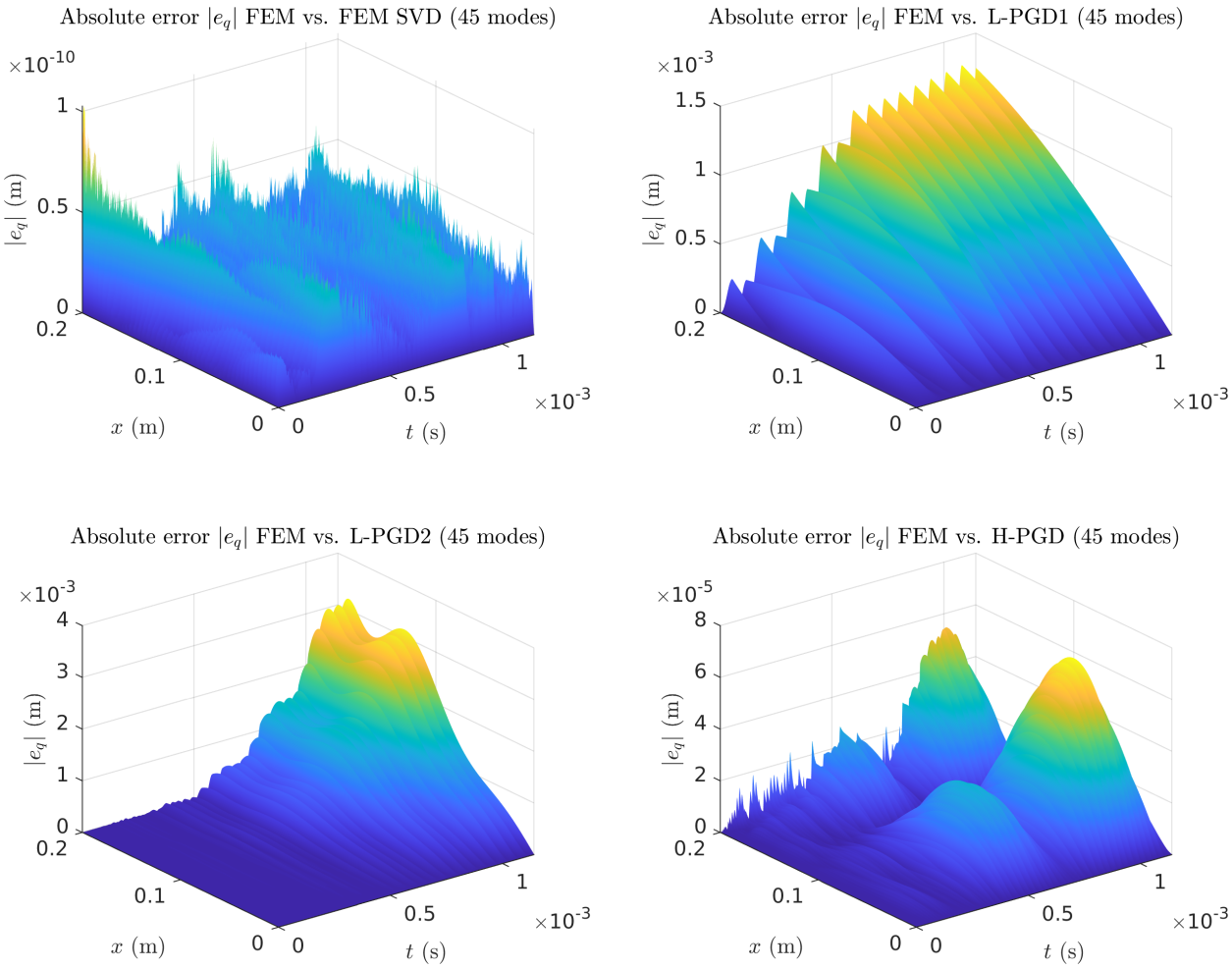


图 2：案例1。参考位移场与 SVD 或 PGD 位移场在空间和时间上的绝对误差。

其中 $F_0 = 10^6\,\mathrm{N}$ 和 $\omega = 4.4 \times 10^4\,\mathrm{rad/s}$。

我们在图 1 中观察到，L^2 PGD 解的广义坐标和动量误差几乎没有降低（如果确实有所降低的话），且其演化并不单调。然而，H-PGD 解的表现似乎略优于 L-PGD 解，尤其是在能量绝对误差方面，其误差始终较小。我们还观察到，与矩阵 $\kappa(K_{\ell x})$ 和 $\kappa(\bar{M}_{\ell x})$ 相关的条件数 $K_{\ell x}$ 和 $\bar{M}_{\ell x}$ 分别在 L-PGD1 的 5^{th} 之后以及 L-PGD2 的 8^{th} 增广之后开始增加。这表明 Gram-Schmidt 算法无法将空间基正交化。这并非由数值不稳定性导致，因此无法通过改进的 Gram-Schmidt 算法加以纠正。条件数的增加是与空间模态相关的基退化的结果：新增模态破坏了模态之间的线性无关性。换言之，新模态并未提供先前分解中已经包含的新信息。

图 2 展示了 PGD 解在空间和时间上的误差分布，而图 3则说明了有限元法解和不同 PGD 解的位移场随时间的变化以及总能量的演化。

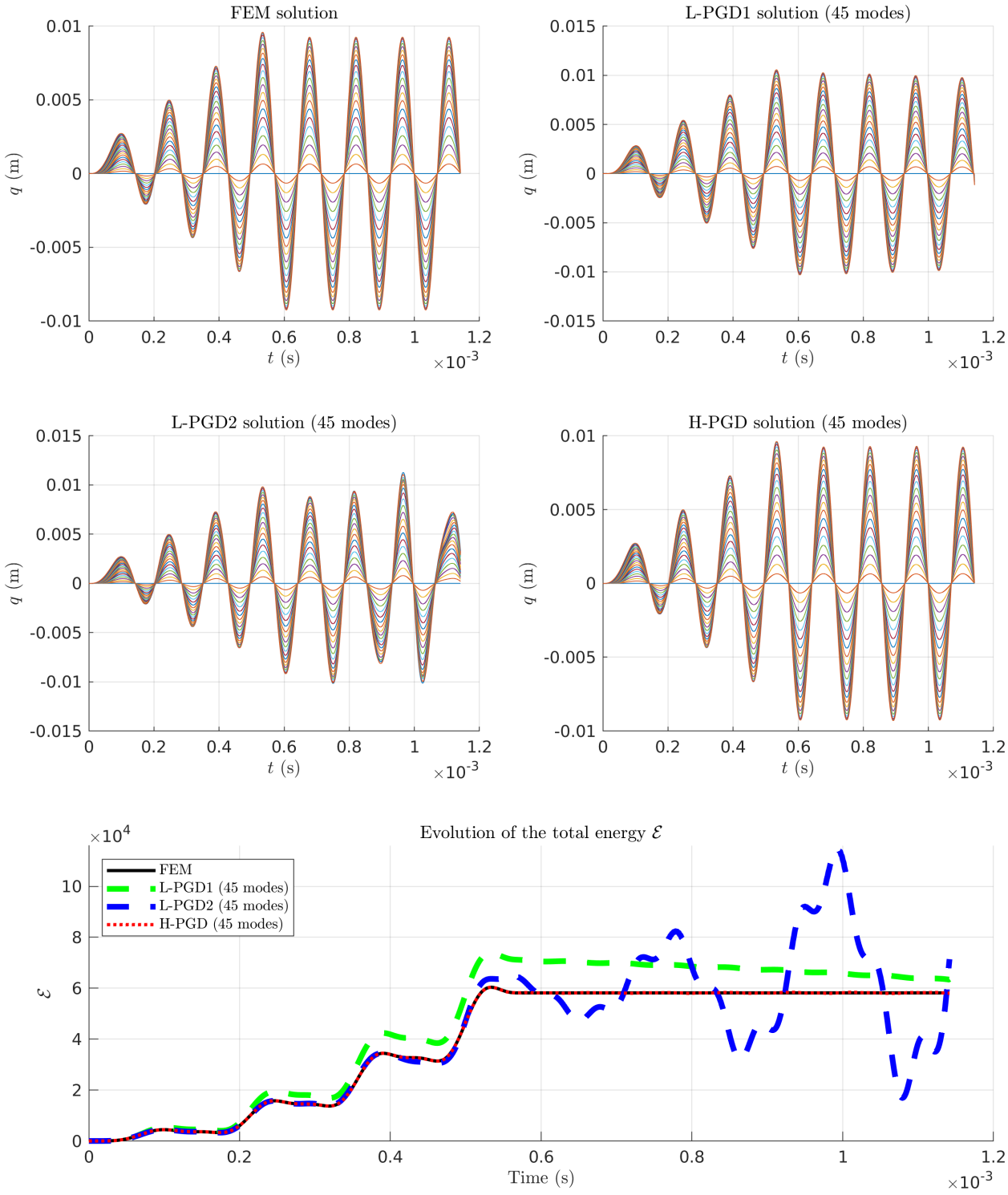


图 3：案例1。（上方四图）不同降阶方法下位移场随时间的演化；图中展示了沿杆均匀分布的 23 个节点处的位移。（下方）参考系统和降阶系统的总能量随时间的演化。

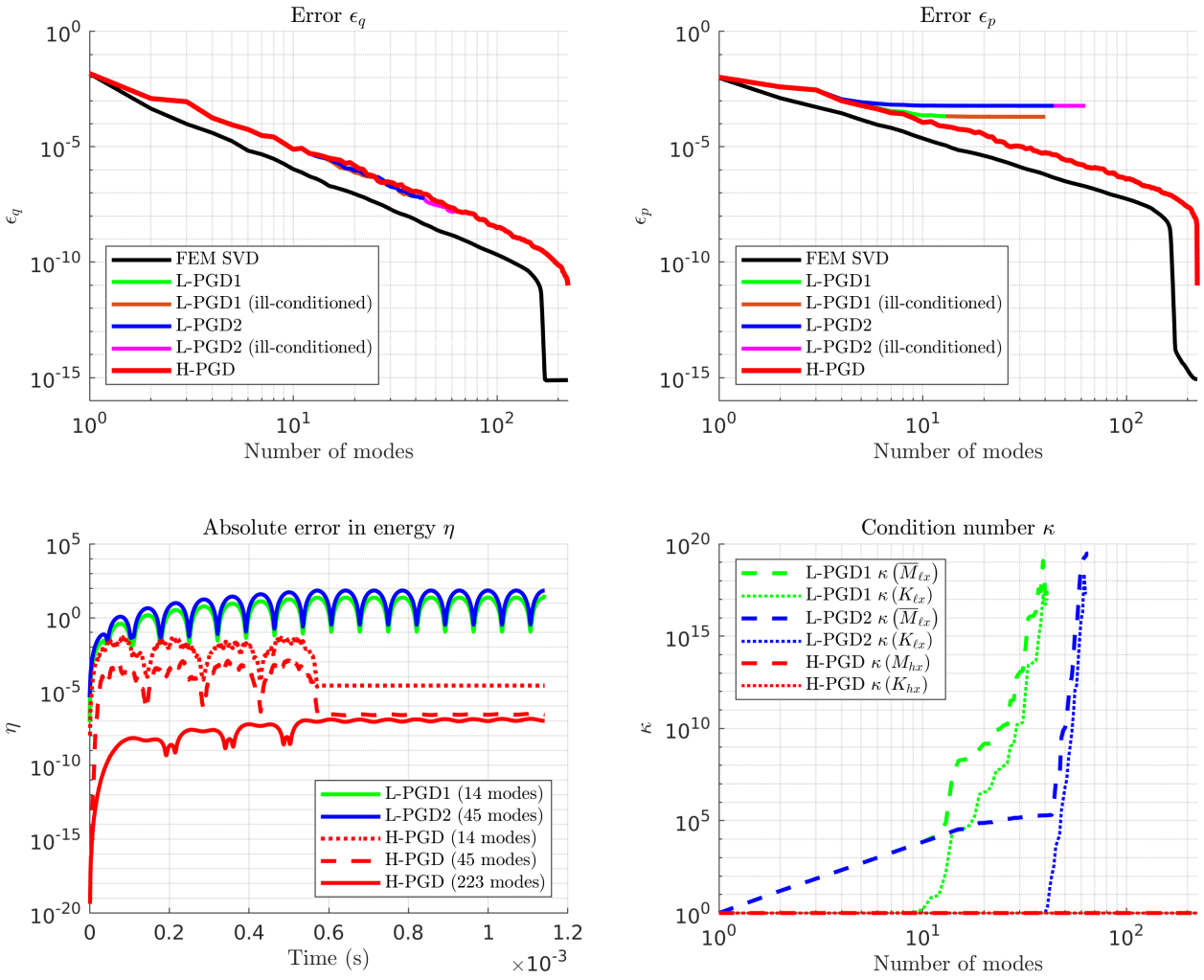


图4：情形2。（左上）参考位移场与 SVD 或 PGD 位移场之间的误差。（右上）参考共轭动量场与 SVD 或 PGD 共轭动量场之间的误差。（左下）参考系统与降阶系统的能量随时间变化的误差。（左下）第 4.3.1 节和 4.3.2节中引入的矩阵的条件数。

5.4 情形2：带更新过程的Neumann边界条件

这里我们重复案例1中的实验，但这次使用第（4.3）节的更新过程来计算 PGD 解。图4 展示了 L^2 范数和能量误差，以及第 4.3.1 节和 4.3.2节中引入的矩阵的条件数。首先要指出，更新过程显著改善了收敛性。然而，我们观察到，对于拉格朗日PGD解，L-PGD1 和 L-PGD2 的矩阵分别在达到 14 个和 45 个模态时便变得病态。对于 L-PGD1 和 L-PGD2，空间模态 μ_k 均相对于矩阵 K进行正交化和归一化。因此，当模态数达到十几个时（只要 $K_{\ell x} = I_m$），¯的条件数 $M_{\ell x}$ 仍然较低，而 $K_{\ell x}$ 的条件数从一开始就不断增大。因此，L-PGD1 和 L-PGD2 的条件数分别在约 40 个和 60 个模态时发散。

另一方面，值得注意的是，H-PGD 解对应的矩阵始终保持良态。这是因为在每个增丰步骤中，H-PGD 都能计算出一个新模态，其信息尚未包含在旧的空间

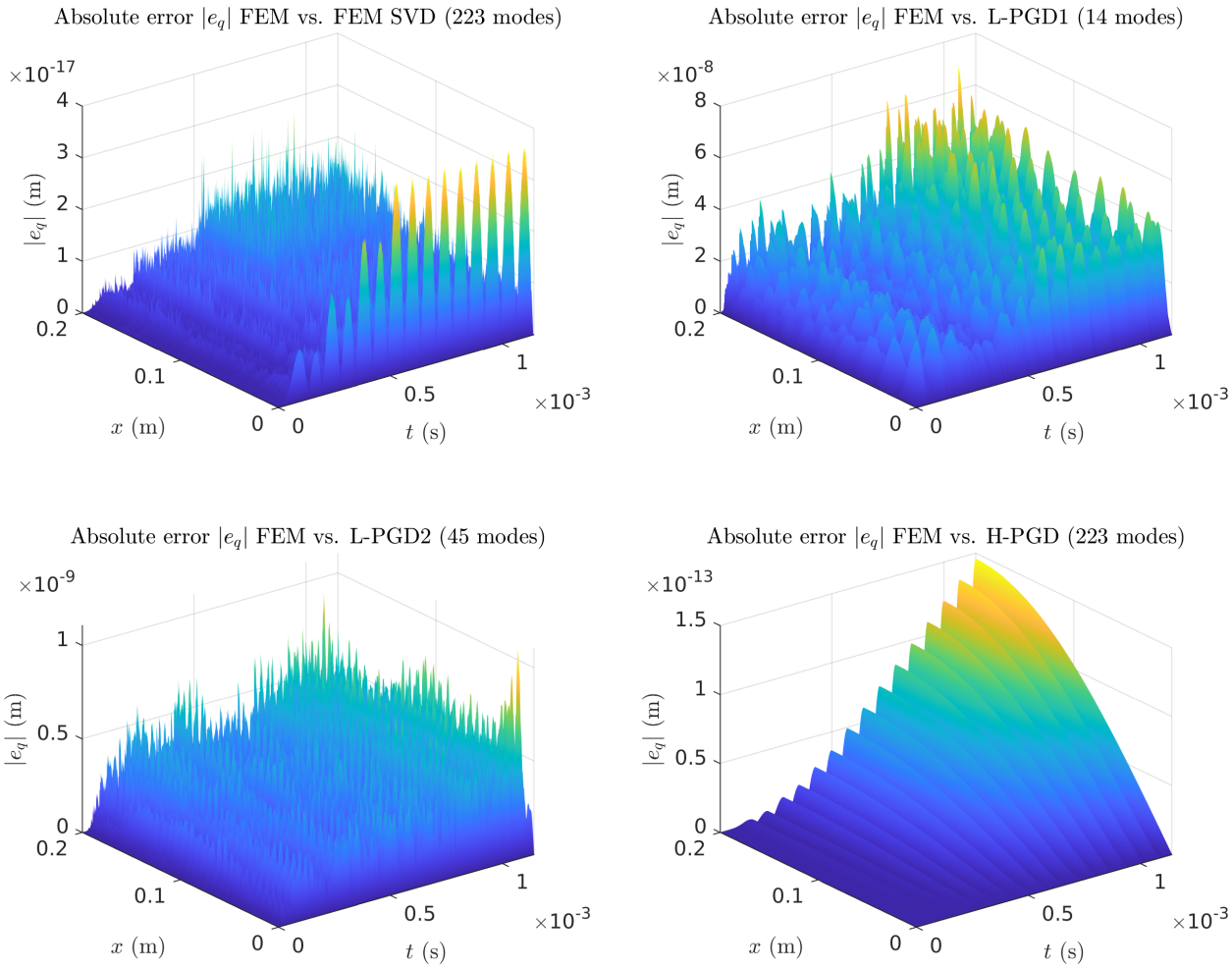


图5：情形2。参考位移场与 SVD 或 PGD 位移场在空间和时间上的绝对误差。

模态中。换言之，Gram-Schmidt 算法能够确保 $M_{hx} = I_m$ 和 $K_{hx} = I_m$。在 L-PGD 解发散之前，我们观察到，三种 PGD 的位移场ϵ_q 范数误差 L^2 表现出相同的变化趋势。然而，对于 L-PGD，共轭动量的误差 ϵ_p 在计算出前十几个模态后便迅速达到平台，这是因为矩阵变得病态。由此可见，L-PGD 方法无法识别 p的相关模态。对于 H-PGD 方法，我们看到 ϵ_p 持续减小，因为该方法专门用于分别计算 q和 p的分解。这也意味着，对于 H-PGD 解的 223 个模态，系统的总能量得到了良好近似，而 L-PGD 解则不同。实际上，从图 5可以看出，即使在计算出 223 个模态后，H-PGD 解在空间和时间上的误差分布仍比 L-PGD 解低几个数量级。

最后，我们在图6 中展示有限元法解和不同 PGD 解的位移场随时间的演变以及总能量。需要指出的是，在这些图中，我们仅使用了 L-PGD1 的前 14 个模态、L-PGD2 的 45 个模态，以及 H-PGD 的全部 223 个模态。正如预期，当施加在梁末端的力不为零时，系统的能量会增加；而梁末端变为自由端后，能量保持不变。换言之，当系统为保守系统时，系统的哈密顿量，即总能量，保持不变。

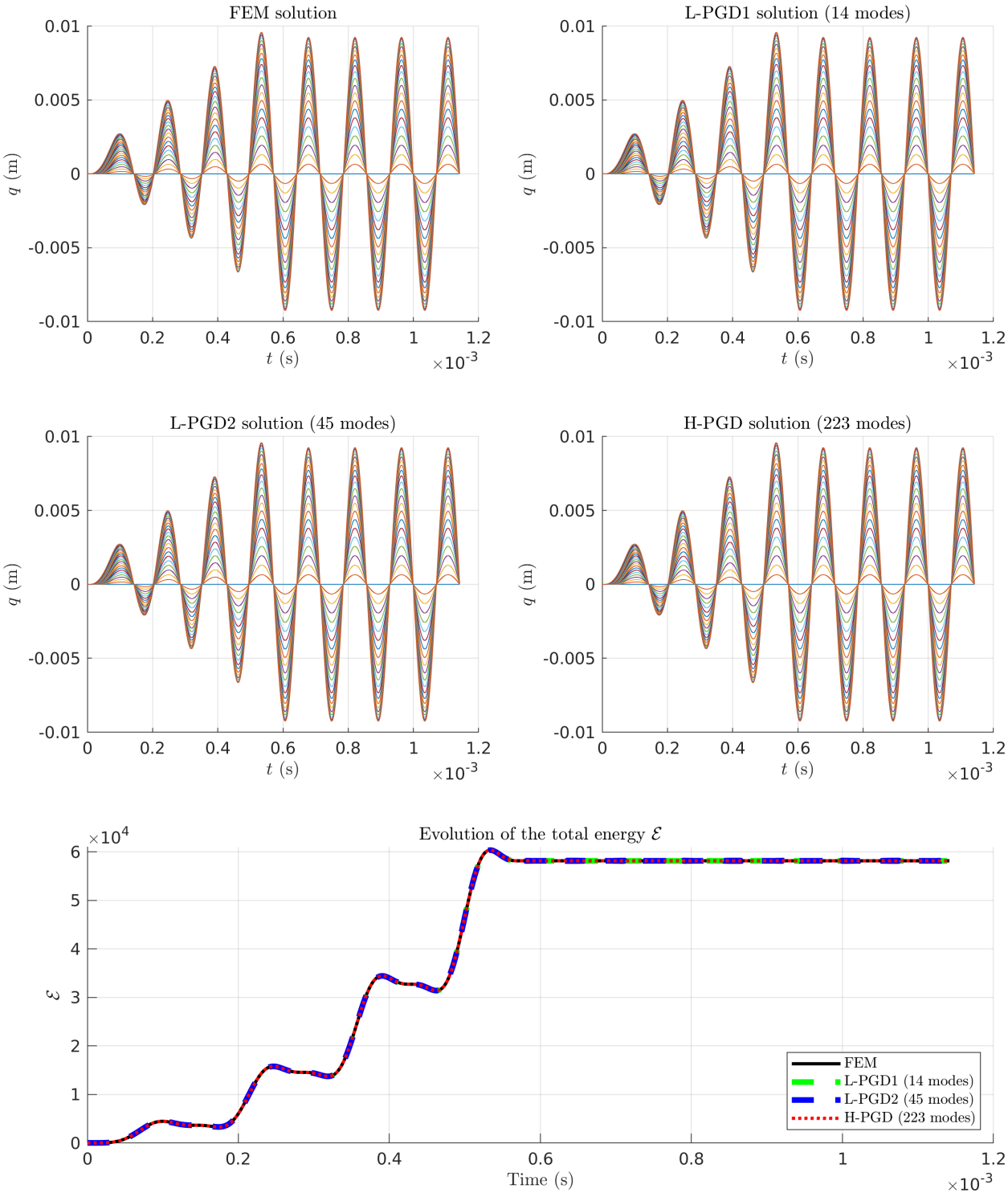


图6：情形2。（上方四幅图）不同降阶方法下位移场随时间的演变；图中显示了沿杆均匀分布的23个节点处的位移。（下方）参考系统和降阶系统的总能量随时间的变化。

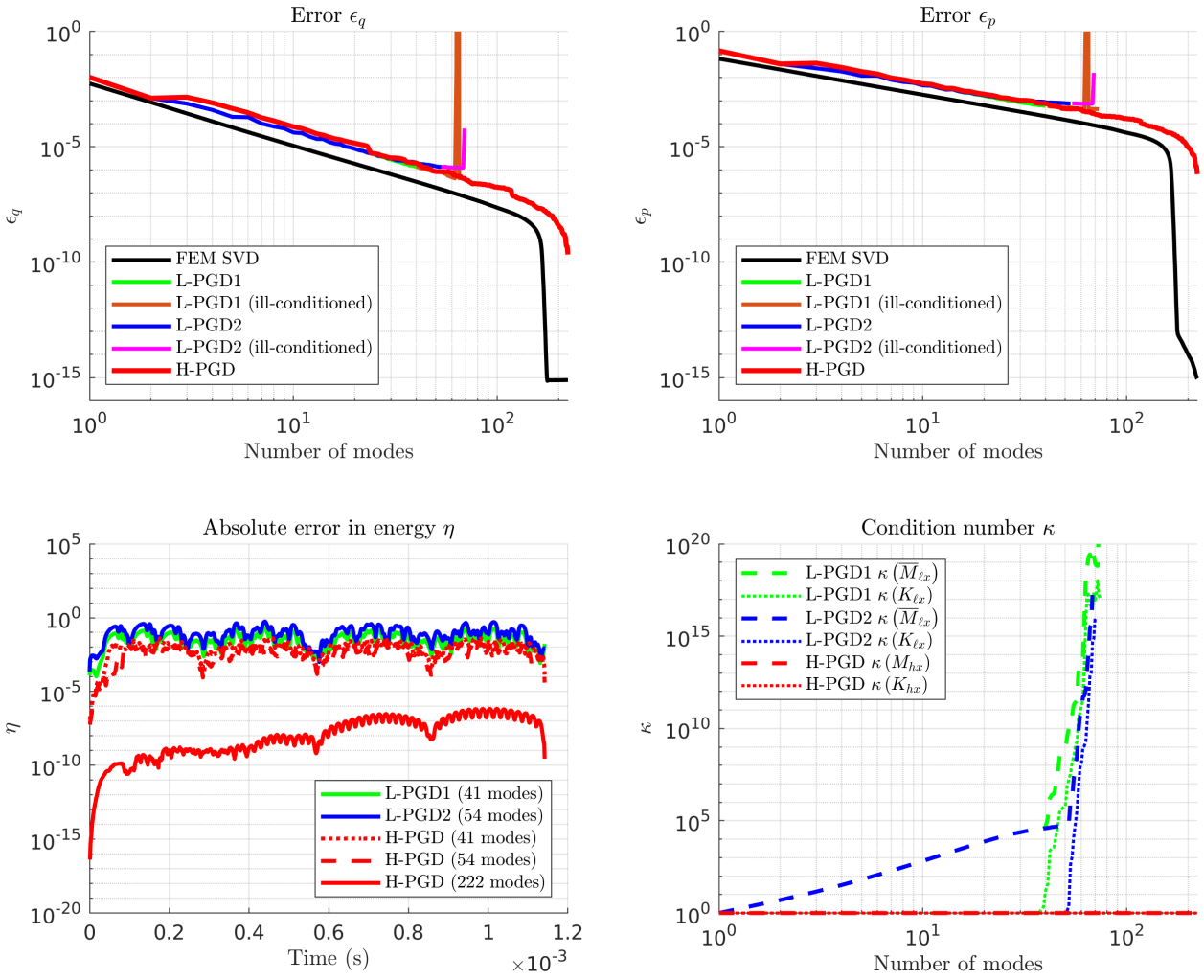


图7：案例3。（左上）参考位移场与 SVD 或 PGD 位移场之间的误差。（右上）参考共轭动量场与 SVD 或 PGD 共轭动量场之间的误差。（左下）参考系统与降阶系统的能量随时间变化的误差。（左下）第 4.3.1 节和 4.3.2 节中引入的矩阵的条件数。

5.5 案例3：振荡狄利克雷边界条件

在本节中，我们将前述问题中端点 $x = \ell$ 处的诺伊曼边界条件替换为振荡狄利克雷边界条件：

$$u(\ell, t) = U_0 \left(1 - \cos\left(\omega t\right)\right), \qquad \forall t \in \mathcal{I},$$

其中 $U_0 = 5$ 毫米，$\omega = 1.1 \times 10^4$ 弧度/秒。

我们将数值结果汇总于图7、8 和9中。我们观察到的行为与前一个测试案例基本相同，不同之处在于，拉格朗日方法对应的矩阵在计算模态数量增加到比之前更多时才变得病态，并且位移中的相对误差ϵ_q 以及共轭动量中的相对误差ϵ_p 会迅速发散，而不是趋于稳定平台。这些结果也清楚地表明，H-PGD 公式在收敛性和准确性方面表现更优。

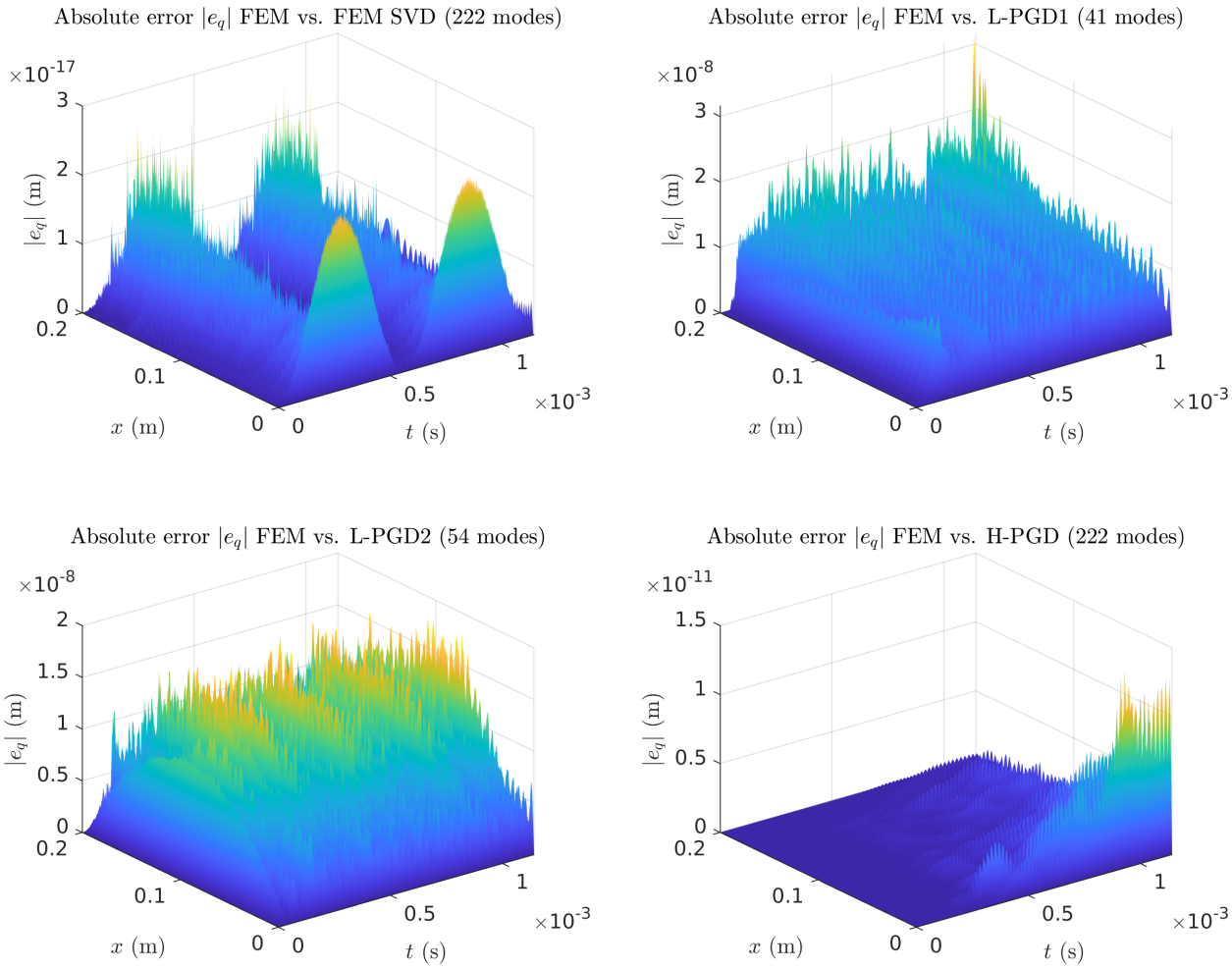


图 8：案例3。参考位移场与奇异值分解或 PGD 位移场在空间和时间上的绝对误差。

5.6 案例4：与解析解的比较

本节求解式（6）所表述的问题，其中初始位移为u_0（x） $= Fx/$（EA），$\forall x \in \Omega$，其中 $F/$（EA） $= 0.05$。该测试案例描述了一种激波型波，其一阶导数存在不连续性，见图12。

此测试案例的误差和条件数如图 10所示。我们观察到，L-PGD 方法的矩阵最终再次变得病态。尽管如此，三种 PGD 的误差似乎以相同的速率下降。对于式（9）给出的解析解，仅保留前 m 个模态的截断位移，其误差量级为$\mathcal{O}(1/m^2)$。相比之下，计算得到的 PGD 的误差量级似乎约为$\mathcal{O}(1/m^{\frac{3}{2}})$。

图 11展示了有限元奇异值分解解、L-PGD1 和 L-PGD2 解以及 H-PGD 解在空间和时间上的绝对误差分布。我们观察到，一方面，有限元奇异值分解解的误差可以忽略不计；另一方面，后三种解的误差量级相同，并局部集中在波前附近。

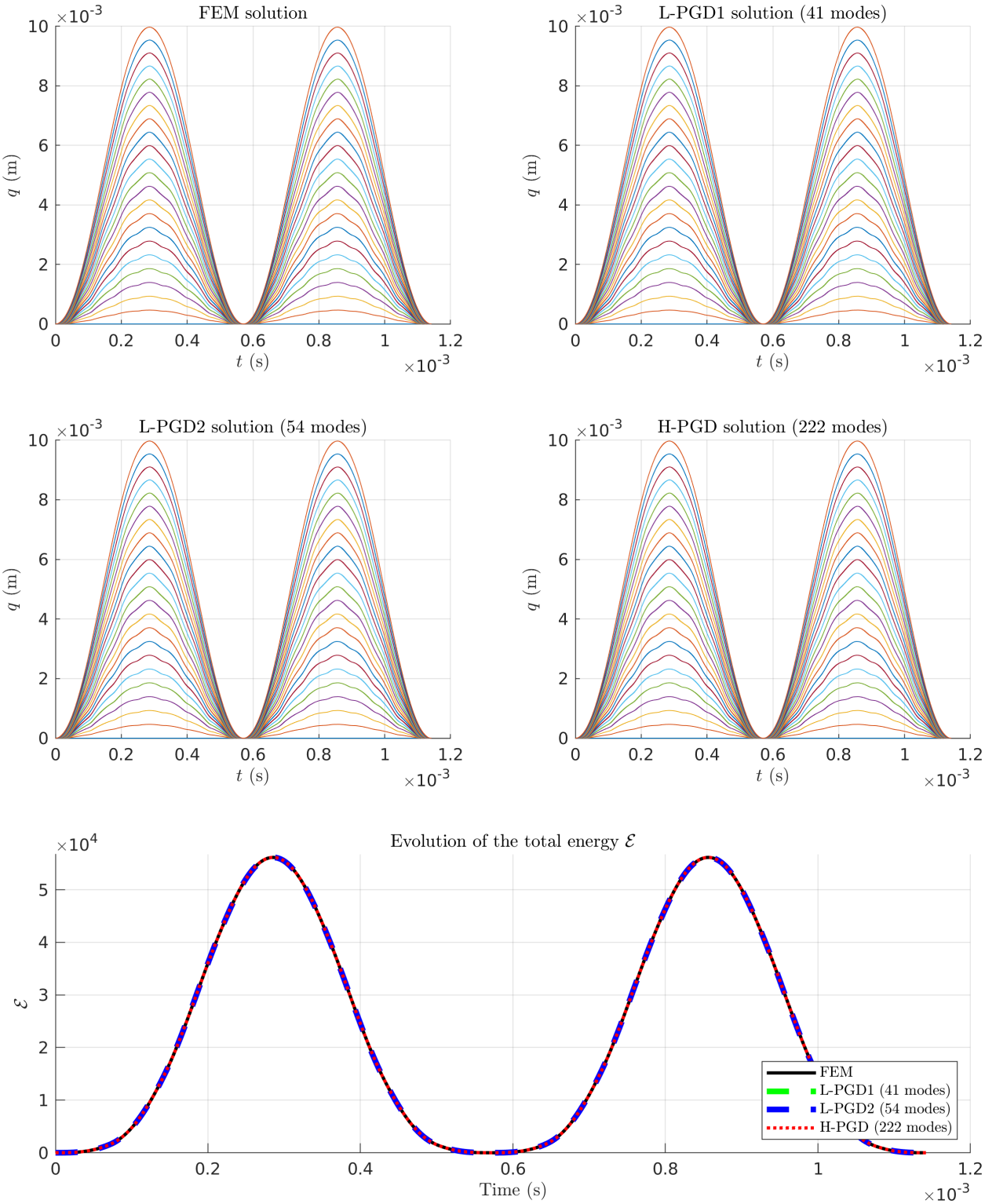


图9：案例3。（上方四幅图）不同降阶方法下位移场随时间的演变；图中显示了沿杆均匀分布的23个节点处的位移。（下方）参考系统和降阶系统的总能量随时间的演变。

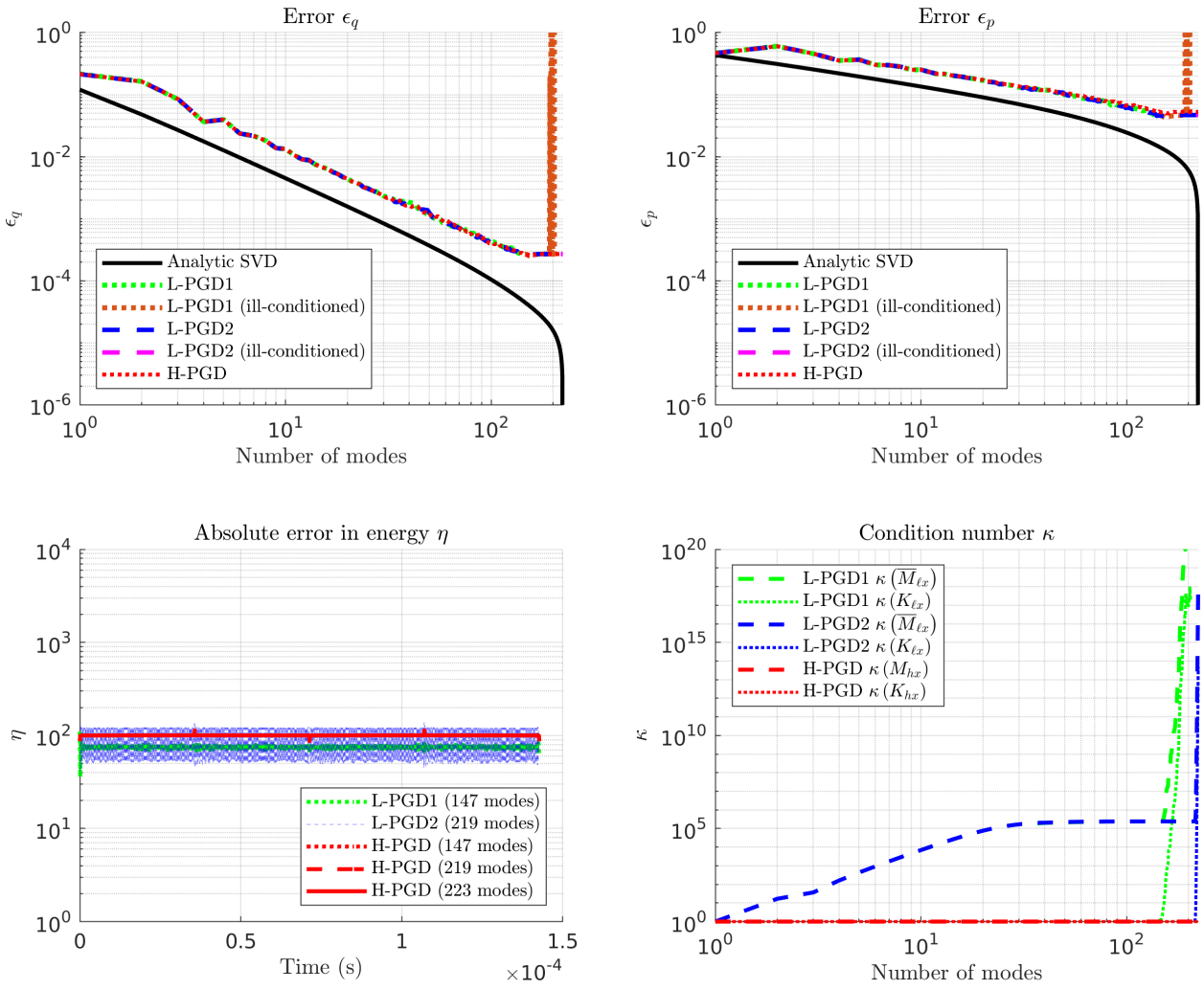


图 10：案例 4。（左上）参考位移场与奇异值分解或 PGD 位移场之间的误差。（右上）参考共轭动量场与奇异值分解或 PGD 共轭动量场之间的误差。（左下）参考系统的能量与降阶系统的能量随时间变化的误差。（左下）第 4.3.1 节和 4.3.2 节中引入的矩阵的条件数。

这些误差主要是由于解中存在不连续性，这使得它们难以被捕捉。该问题超出了本研究的范围，但我们指出，采用时间不连续 Galerkin（TGD）积分数值格式可能可以解决这一问题 [7, 27]。最后需要指出的是，与 L-PGD 解相比，远离不连续位置的 H-PGD 解似乎受到大误差污染的程度较低，尤其是在端点附近 $x = \ell$。

5.7 案例5：具有诺伊曼边界条件的阻尼杆

最后一个案例考虑的是第 5.4 节所述的完全相同情形，但波动方程中额外加入了一个线性阻尼项，即

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \zeta \frac{\partial u}{\partial t} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathcal{I},$$

其中 $\zeta = 15 \times 10^3$ Pl（1 泊肃叶 $= 1$ kg/m/s）即所谓的阻尼系数 .

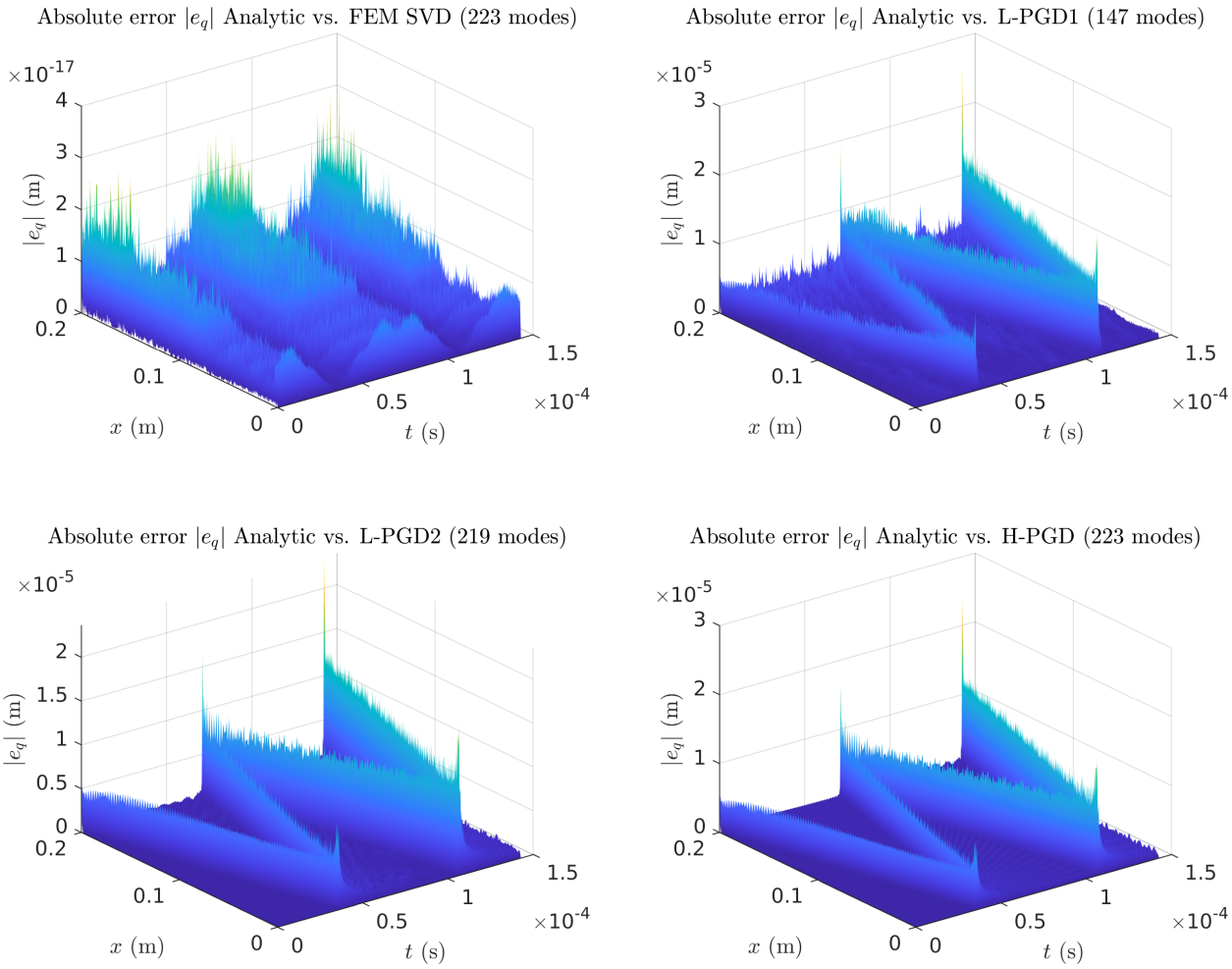


图 11：案例 4。参考位移场与奇异值分解或 PGD 位移场在空间和时间上的绝对误差。

结果见图13、14和15。这些结果与第5.4节所示结果在定性上非常相似，不同之处在于，正如预期，杆的总能量在 $t \geq T/2$之后有所下降。本例的主要目的是说明，H-PGD 框架也适用于研究考虑能量耗散的线弹性问题。首先，与 L-PGD 方法相比，H-PGD 模型降阶能更好地保持原系统的稳定性和能量守恒。此外，基于模态分解的阻尼问题降阶建模方法 [28] 会导致一个需要更复杂处理的特征值问题 [40, 41]，其处理比无阻尼时得到的特征值问题更为繁琐。瑞利假设常用于规避阻尼矩阵引发的问题 [40]。然而，该假设并无明确无误的物理意义 [42, 43]，并且在某些频率范围内可能产生欠阻尼或过阻尼行为 [40]（尽管在某些情况下这可能很方便）。与模态分解不同，在 PGD 框架中，无需采用特殊处理来考虑波动方程中的阻尼项。

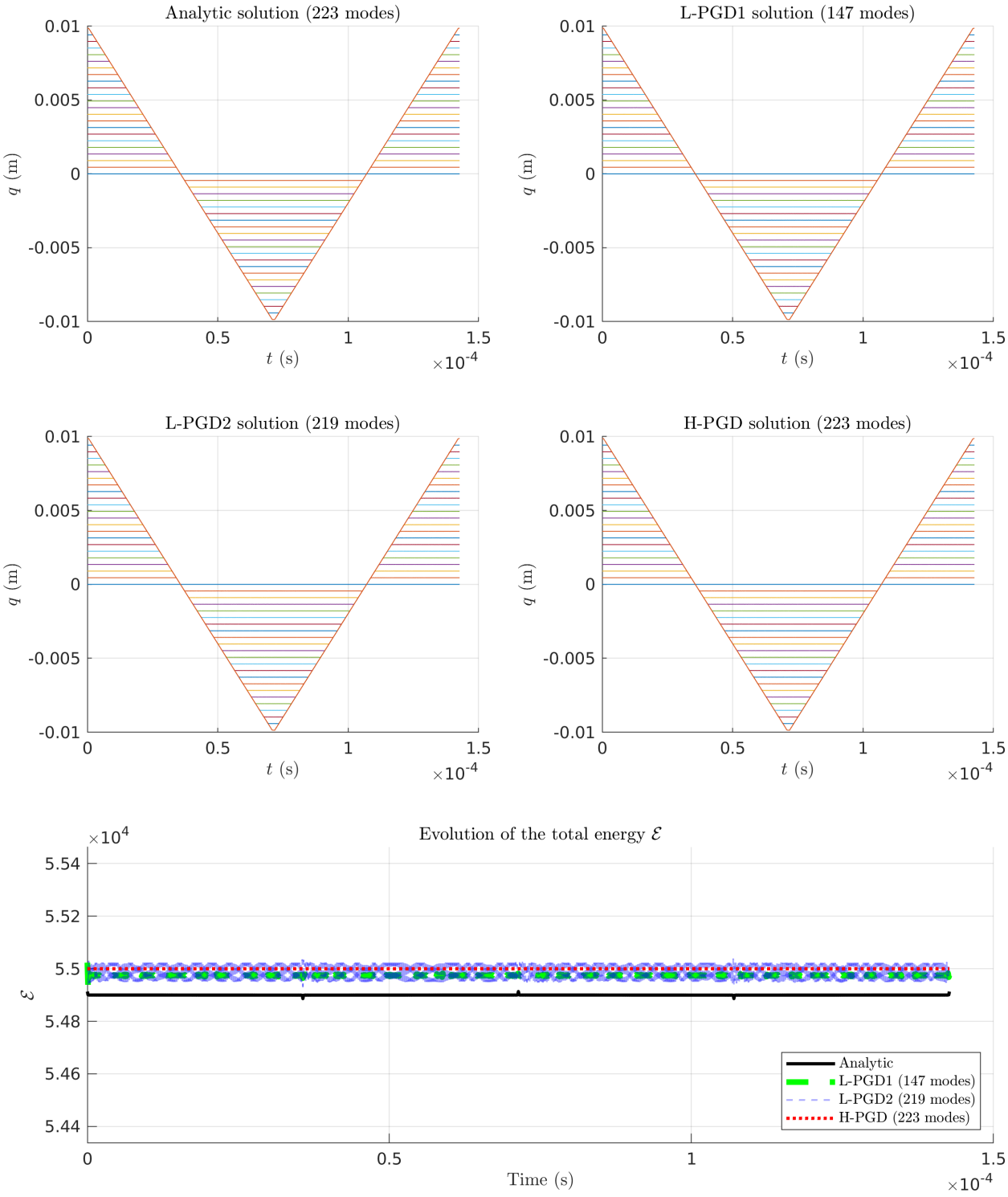


图 12：案例 4。（上方四幅图）不同降阶方法下位移场随时间的演变；图中显示了沿杆均匀分布的 23 个节点处的位移。（下方）参考系统和降阶系统的总能量随时间的变化。

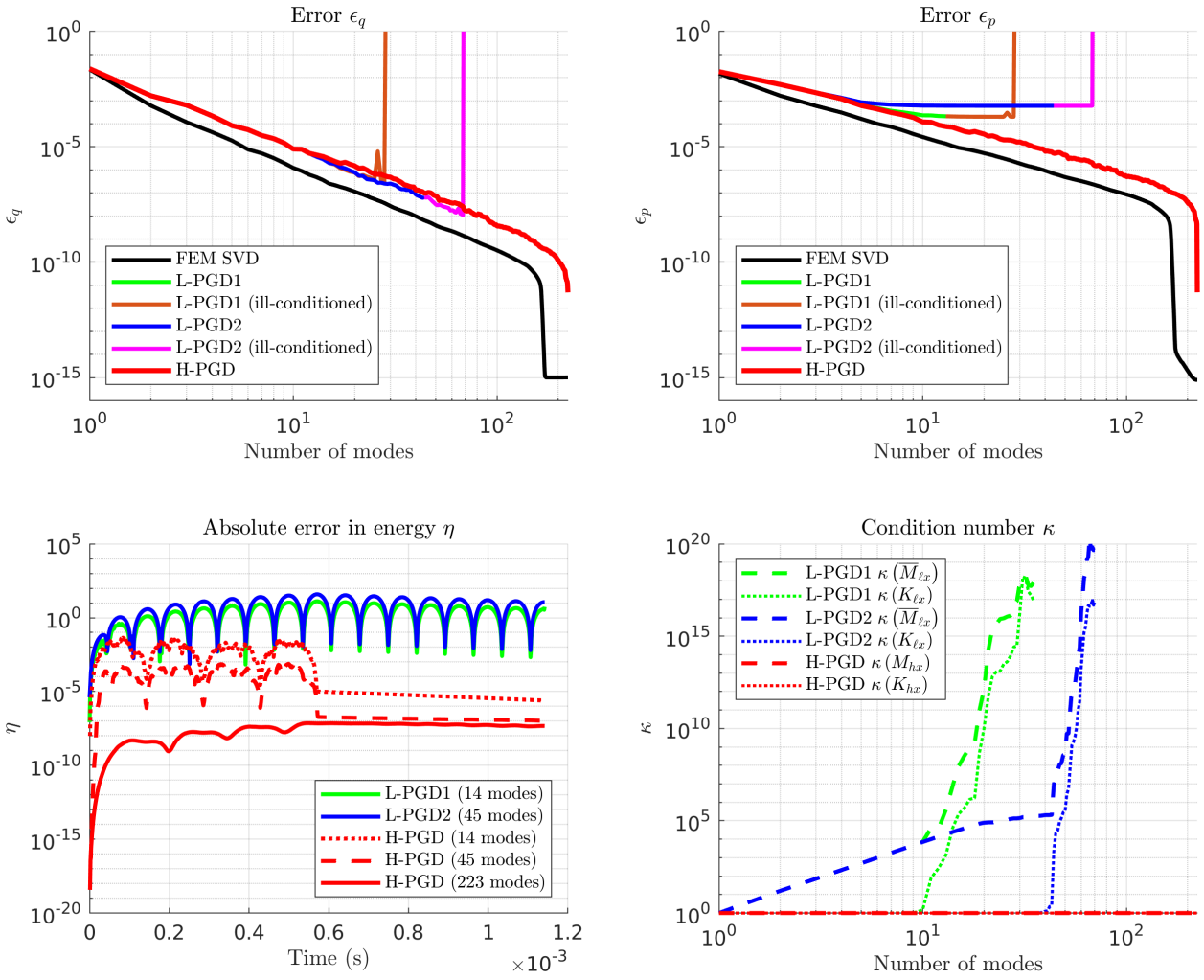


图 13：案例5。（左上）参考位移场与奇异值分解或 PGD 位移场之间的误差。（右上）参考共轭动量场与奇异值分解或 PGD 共轭动量场之间的误差。（左下）参考系统与降阶系统的能量随时间变化的误差。（左下）第 4.3.1 节和4.3.2节中引入的矩阵的条件数。

5.8 进一步讨论

矩阵的非对称性和病态性也是 [8, 第 4 页和 15]中提到的问题。作者简要讨论了算子$\mathbf{A}$ （非对称）的潜在病态性，该算子表示问题的时空双线性型的离散化。该算子是常数，其条件数取决于时空离散化的精细程度以及问题的力学性质（E、 ρ等）。在我们的情况中，矩阵 $K_{\ell x}$、 $M_{\ell x}$、$\overline{M}_{\ell x}$、 K_{hx} 和 M_{hx} （格拉姆矩阵）不仅取决于离散化和力学性质，而且也是非恒定的。事实上，它们的大小会随着增广 m的数量而增大。其病态性主要源于基向量可能变得线性相关。总之，我们研究的矩阵与$\mathbf{A}$ 的性质不同，导致其条件数不佳的原因也不同。

从数值角度来看，我们想强调，拉格朗日更新（42）与哈密顿更新（43）之间唯一的数值差异是缩放因子 ρA。人们可能会想知道这一因子是否会影响 H-PGD 求解器的收敛性以及

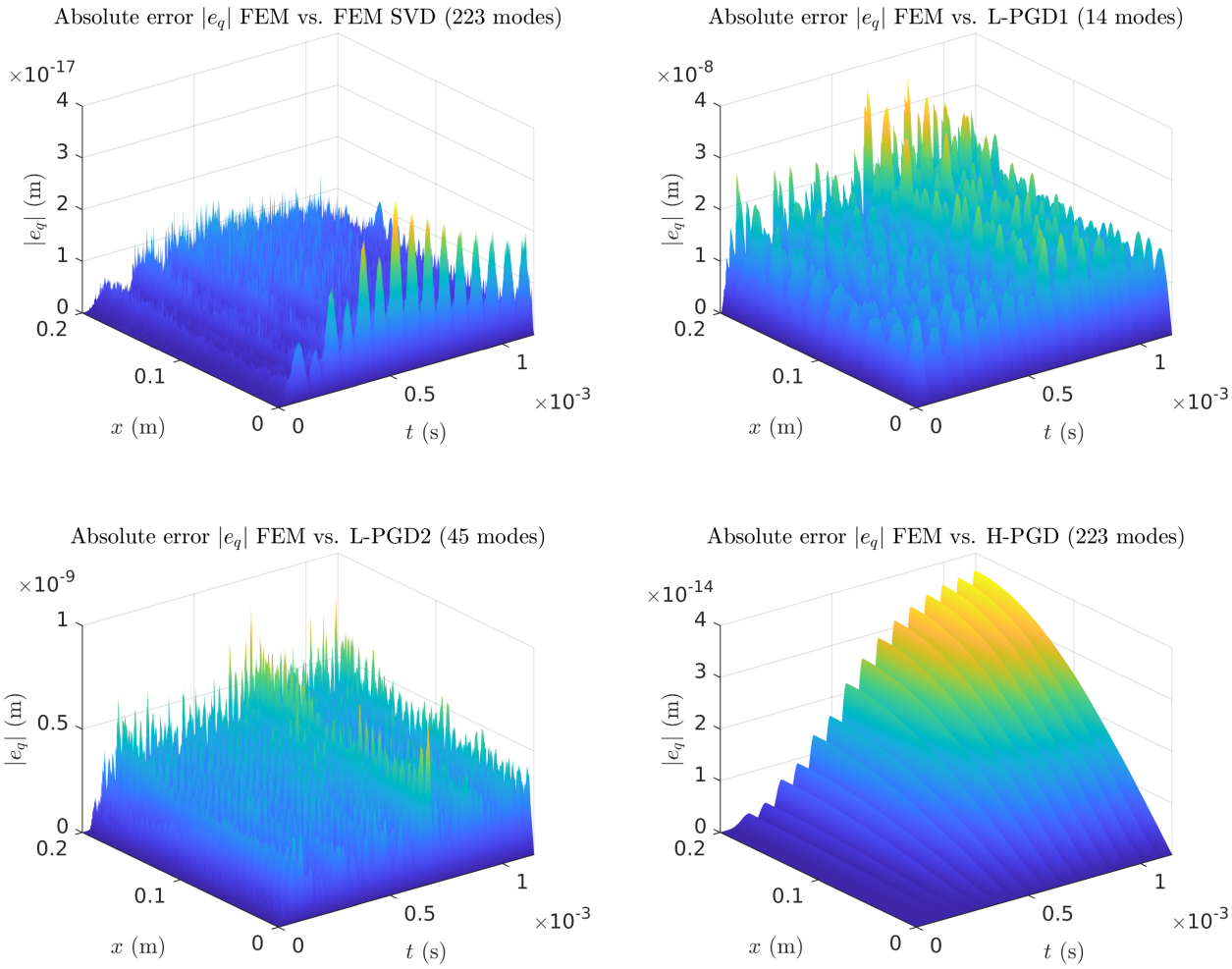


图14：案例5。参考位移场与 SVD 或 PGD 位移场在空间和时间上的绝对误差。

系统的条件数。在问题的所有参数均设为 1 的情况下，我们进行了多次测试： $E = \rho = A = \ell = 1$。

在此案例中，缩放因子等于 1，系统 (42) 和 (43) 在数值上完全相同。然而，H-PGD 仍保持数值稳定，并且仍能提供比 L-PGD 更准确的解。因此，能够改进拉格朗日方法的，不仅是哈密顿形式这一独立形式体系，还有它在算法设计方面带来的新可能性。

此外，值得注意的是，杨氏模量的数值 E 和密度 ρ 对非对称性有重要影响。非对称性源于时间导数。换言之，当惯性效应占主导时，即当$\rho > E$ 或者同样地，当速度 $c = \sqrt{E/\rho}$ 较小时，非对称性会占主导。在热方程及其热扩散率方面，也可以找到同样的推理 [3] （第 68 页）。然而，在结构动力学中， $E \gg \rho$通常如此。例如，在我们的测试案例中，材料属性选取为钢的属性，其中$E = 220$ GPa， $\rho = 7000\ \mathrm{kg/m^3}$, , 与 [8]类似。这些数值实际上有利于避免非对称性。因此，参数取单位值的案例也使我们能够在矩阵变为非对称的示例中测试算法，并验证其稳健性。

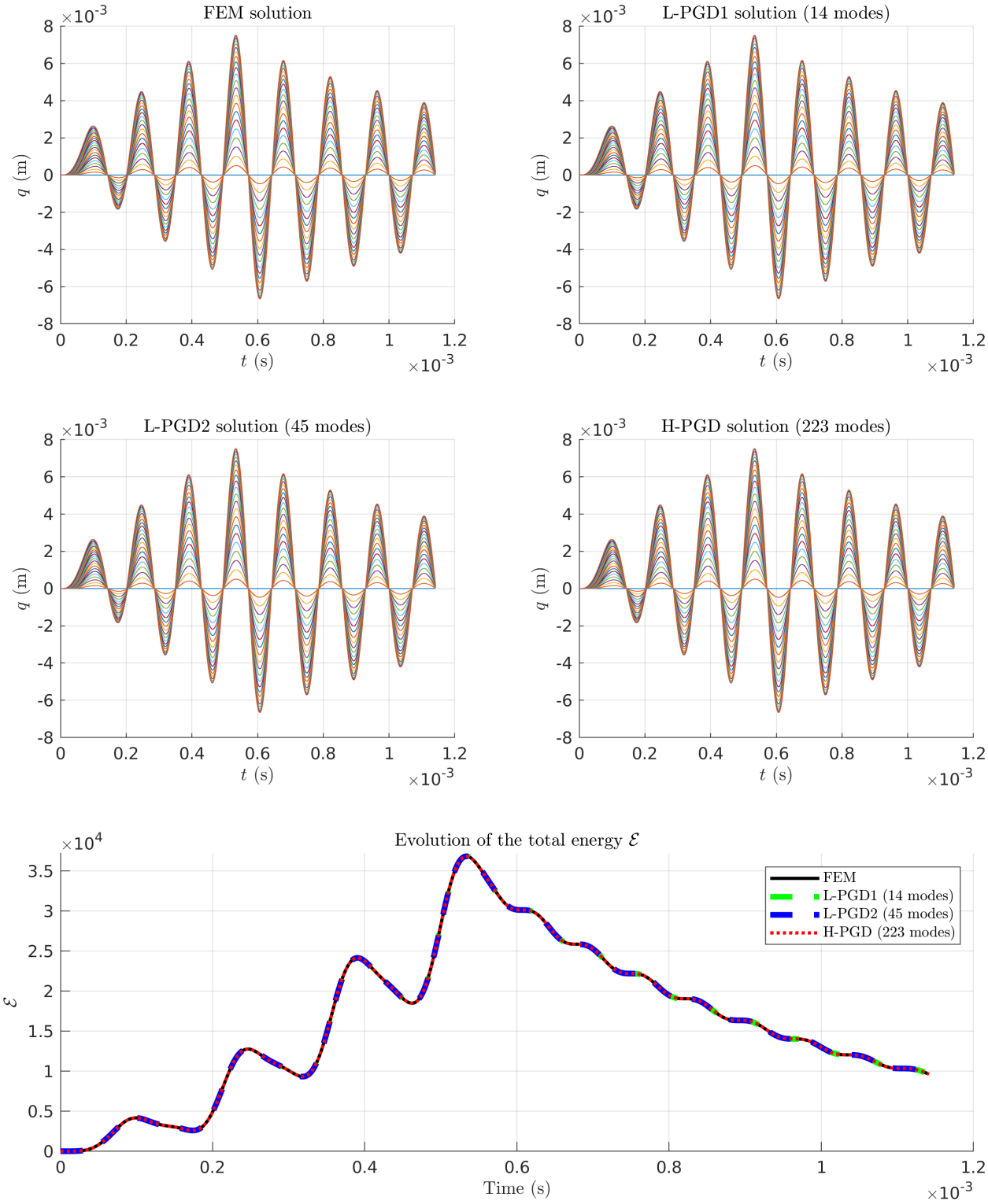


图15：案例5。（上方四幅图）不同降阶方法下位移场随时间的演变；图中显示了沿杆均匀分布的 23 个节点处的位移。（下方）参考系统和降阶系统的总能量随时间的变化。

能量守恒与时间积分器有关。不过，计算得到的 PGD 模态也起着重要作用。诺伊曼边界条件问题（见图 4 和 13）最能说明这一点。具体而言，从右上图可以看出，经过 5^{th} 增广后，L-PGD 无法恢复与动量场相关的模态（即误差 ϵ_p）。这导致能量守恒效果不佳。从这些结果可以得出结论：能量守恒也受到 PGD 形式的影响，并且 H-PGD 的表现比 L-PGD 好几个数量级（如图左下图所示）。

6 结论

本文基于哈密顿弱原理，构建了基于Galerkin的 PGD 形式，用于推导二阶双曲系统的降阶模型。研究目标之一是借助稳定的能量守恒积分格式，计算能够保持系统能量的降阶模型。本文考察了两种方法，即 L-PDG 和 H-PGD。前者基于拉格朗日形式，后者则源自哈密顿形式。H-PGD 方法以广义坐标和广义动量描述系统动力学。随后，可将这两个场表示为两个不同的展开，其模态是耦合问题的解。这一过程具有一定的灵活性，尤其是能够设计正交化和更新过程，以确保计算稳定性。此外，我们为 H-PGD 方法设计了一种自适应不动点算法，分别控制两个场的收敛。结合这些过程，可以改善收敛性，并消除 H-PDG 方法增广模态中的冗余。因此，对于本文考察的测试案例，与 L-PGD 形式相比，H-PGD 形式在稳定性和能量保持方面表现得更好。最后，哈密顿框架使我们能够将问题重新表述为关于系统总能量（即哈密顿量）的最小化问题，因此适用于自适应构造目标导向的 PGD 模型，如 [44]中所述。这将是未来工作的研究主题。

利益冲突声明

作者声明，他们不存在可能影响本文所报告研究工作的已知经济利益冲突或个人关系。

致谢

Serge Prudhomme感谢加拿大自然科学与工程研究委员会探索研究资助的支持 [资助编号 RGPIN-2019-7154]。

参考文献

[1] D. Amsallem 和 C. Farhat。用于调整降阶模型的插值方法及其在气动弹性中的应用。《*AIAA*期刊》，46(7):1803–1813，2008年。[2]M. D. Gunzburger、J. S. Peterson 和 J. N. Shadid。边界数据含多个参数的时间依赖偏微分方程降阶建模。《计算力学与工程方法》，196(4):1030–1047，2007年。[3] Francisco Chinesta、Roland Keunings 和 Adrien Leygue。《高级数值模拟的适当广义分解：入门指南》。Springer，2014年。[4] Anthony Nouy。通过适当广义分解进行先验模型降阶，以求解时间依赖偏微分方程。《计算力学与工程方法》，199(23):1603–1626，2010年。[5] S. Boyaval、C. Le Bris、T. Leli`evre、Y. Maday、N. C. Nguyen 和 A. T. Patera。随机问题的降阶基技术。《计算方法工程档案》，17(4):435–454，2010年。[6] G. Rozza、D. B. P. Huynh 和 A. T. Patera。仿射参数化椭圆强制偏微分方程的降阶基近似与后验误差估计。《计算方法工程档案》，15(3):229–275，2008年。[7] L. Boucinha、A. Gravouil 和 A. Ammar。用于求解瞬态弹性动力学模型的时空适当广义分解。《计算力学与工程方法》，255:67–88，2013年。[8] L. Boucinha、A. Ammar、A. Gravouil 和 A. Nouy。用于非对称多场模型的理想最小残差适当广义分解——在时空域瞬态弹性动力学中的应用。《计算力学与工程方法》，273:56–76，2014年。[9] Pierre Ladev`eze。线性与非线性计算固体力学中的 PGD。载于课程与讲座，第91–152页。CISM 国际力学科学中心，1999年。[10] Amine A mmar。适当广义分解：一种强大的模型降阶工具。《国际材料成形杂志》，3:89–102，2010年。[11] Amine Ammar、Francisco Chinesta 和 Antonio Falc´ão。关于一类线性系统的贪心秩一更新算法的收敛性。《计算方法工程档案》，17:473–486，2010年。[12]Franz Bamer、Nima Shirafkan、Xiaodan Cao、Abdelbacet Oueslati、Marcus Stoffel、G´éry de Saxc´e 和 Bernd Markert。结构动力学中的 Newmark 时空格式。《计算力学》，第1–18页，2021年。[13] Dimitri Goutaudier、Laurent Berthe 和 Francisco Chinesta。针对可分离区域中瞬态波传播问题的时间自适应空间分离适当广义分解。《计算力学与工程方法》，380:113755，2021年。

[14] Andrea Barbarulo、Herv´e Riou、Louis Kovalevsky 和 Pierre Ladev`eze。PGD-VTCR：一种用于求解复杂声学系统中中频宽带问题的降阶模型技术。《Strojniˇski Vestnik – Journal of Mechanical Engineering》，60：307–313，2015年。[15] Philippe De Brabander、Olivier Allix、Pierre Lad`eveze、Pascal Hubert 和 Pascal Th´evenet。关于一种用于瞬态效应计算（包括中频）的基于波的降阶模型。《计算力学与工程方法》，395：114990，2022年。[16] Claudia Germoso、Jose V. Aguado、Alberto Fraile、Enrique Alarcon 和 Francisco Chinesta。高效的基于PGD的非线性土壤行为动力计算。《Comptes Rendus M´ecanique》，344(1)：24–41，2016年。[17]Muhammad Haris Malik、Domenico Borzacchiello、Jose Vicente Aguado 和 Francisco Chinesta。结构动力学中的先进参数化时频分离表示：一种谐波-模态混合方法。《Comptes Rendus M´ecanique》，346(7)：590–602，2018年。[18] Giacomo Quaranta、Clara Argerich Martin、Ruben Ibaˆnez、Jean Louis Duval、Elias Cueto 和 Francisco Chinesta。从线性到非线性的基于PGD的参数化结构动力学。《Comptes Rendus M´ecanique》，347(5)：445–454，2019年。[19] Muhammad Haris Malik、Domenico Borzacchiello、Francisco Chinesta 和 Pedro Diez。利用谐波分析与适当广义分解，将频率相关参数纳入输电线路仿真。《国际数值建模杂志：电子网络、器件与场》，31(5)：e2331，2018年。[20] Fabiola Cavaliere、Sergio Zlotnik、Ruben Sevilla、Xabier Larr´ayoz 和 Pedro D´ıez。用于惯性释放问题参数化解的非侵入式降阶模型。《国际工程数值方法杂志》，122(16)：4270–4291，2021年。[21] F. Cavaliere、S. Zlotnik、R. Sevilla、X. Larrayoz 和 P. D´ıez。结构动力学中的非侵入式参数化解。《计算力学与工程方法》，389：114336，2022年。[22] Dewey H. Hodges 和 Robert R. Bless。用于最优控制问题的弱哈密顿有限元法。《制导、控制与动力学杂志》，14(1)：148–156，1991年。[23] J. L. Lagrange。《M´echanique Analitique》。Chez la Veuve Dessaint，1788年。[24] William Rowan Hamilton。论动力学中的一种通用方法。《伦敦皇家学会哲学汇刊》，124：247–308，1834年。[25] William Rowan Hamilton。论动力学中的一种通用方法（第二篇）。《伦敦皇家学会哲学汇刊》，125：95–144，1835年。[26] Thomas J. R. Hughes。《有限元法：线性静力与动力有限元分析》。Prentice-Hall, Inc.，1987年。[27]Gregory M. Hulbert 和 Thomas J.R. Hughes。用于二阶双曲型方程的时空有限元方法。《计算力学与工程方法》，84(3)：327–348，1990年。

[28] Michel G´eradin 和 Daniel Jean Rixen。《机械振动：理论及其在结构动力学中的应用》。Wiley，1994年。[29] Kenneth Eriksson、Donald Estep、Peter Hansbo 和 Claes Johnson。《计算微分方程》。剑桥大学出版社，1996年1月。[30] C. S. Jog 和 Arup Nandy。声学与结构线性时域分析中梯形法则的守恒性质。《振动与声学杂志》，137(2)，2015年。021010。[31] Felice Iavernaro 和 Donato Trigiante。梯形法应用于哈密顿系统时的一些守恒性质。载于*ICNAAM 2005*：*2005*年国际数值分析与应用数学会议，欧洲科学与工程计算方法学会（*ESCMSE*）官方会议，希腊罗得岛，*2005*年*9*月*16*日至*20*日。，第254–257页。魏因海姆：Wiley-VCH，2005年。[32] Nathan M. Newmark。结构动力学的一种计算方法。《工程力学分部杂志》，85(3)：67–94，1959年。[33] Shadi Alameddin、Am´elie Fau、David N´eron、Pierre Ladev`eze 和 Udo Nackenhorst。迈向适定广义分解基的最优性。《数学与计算应用》，24(1)：30，2019年3月。[34] Menahem Baruch 和 Richard Riff。哈密顿原理、哈密顿定律——六次方的正确公式。《AIAA期刊》，20(5)：687–692，1982年。[35] Marie Billaud-Friess、Anthony Nouy 和 Olivier Zahm。一种基于理想最小残差公式的张量近似方法，用于求解高维问题。《数学建模与数值分析》，48：1777–1806，2014年。[36] J.-Y. Cognard 和 P. Ladev`eze。大时间增量法在循环载荷中的应用。˙载于Micha·l Zyczkowski（编），《结构蠕变》，第555–562页。Springer Berlin Heidelberg，1991年。[37] Ph. Boisse、P. Bussy 和 P. Ladev`eze。非线性力学的新方法：大时间增量法。《国际工程数值方法杂志》，29(3)：647–663，1990年。[38] Ga¨el Bonithon 和 Anthony Nouy。用于高维问题数值求解的先验张量近似：替代定义。载于第*28*届莱比锡高维分析与数值方法*GAMM*研讨会，德国莱比锡，2012年1月。[39] Sobhan Rostami 和 Reza Kamgar。深入探讨用于求解波传播问题的Newmark隐式时间积分法。《伊朗科学与技术杂志：土木工程辑》，46：679–697，2021年。[40] O.C. Zienkiewicz、R.L. Taylor 和 J.Z. Zhu。《有限元法：基础与原理（第七版）》。Butterworth-Heinemann，2013年。[41] Adnan Ibrahimbegovic、Harn C. Chen、Edward L. Wilson 和 Robert L. Taylor。采用里兹法对具有非比例阻尼的大型离散线性系统进行动力分析。《Earth- quake Engineering & Structural Dynamics》，19(6)：877–889，1990年。

[42] J. F. Semblat。瑞利阻尼的流变学解释。《声学与振动杂志》，206(5):741–744，1997年。[43] A. Kareem 和 W.-J. Sun。不确定阻尼下结构的动态响应。《工程结构》，12(1):2–8，1990年。[44] Kenan Kergrene、Ludovic Chamoin、Marc Laforest 和 Serge Prudhomme。关于适定广义分解法的目标导向版本。《科学计算杂志》，81:92–111，2019年。