arXiv:2301.10645v1 [physics.optics] 25 Jan 2023

使用维纳滤波器准确评估自外差激光线宽测量

Markus Kantner[a)] 和 Lutz Mertensk¨otter[b)]
Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (WIAS),Mohrenstr. 39, 10117 Berlin, Germany

（日期：2023年1月26日）

自外差拍频测量广泛用于实验表征激光器的频率噪声功率谱密度（频率噪声功率谱密度）和光谱线宽。然而，必须在后处理程序中根据实验装置的传递函数校正测量数据。标准方法忽略了探测器噪声，从而在重建的频率噪声功率谱密度中引入重建伪影，即伪尖峰。我们提出了一种改进的后处理程序，该程序基于参数化维纳滤波器；只要提供良好的信噪比估计，就能避免重建伪影。在此潜在精确的重建方法基础上，我们开发了一种新的激光器本征线宽估计方法，旨在有意抑制不符合物理规律的重建伪影。即使存在强探测器噪声，该方法也能取得出色结果；而在这种情况下，使用标准方法甚至无法观察到本征线宽平台。我们通过随机激光器模型生成的模拟时间序列验证了该方法，其中包含 $1/f$ 型噪声。

关键词：窄线宽激光器、激光噪声、有色噪声、朗之万方程

I. 引言

具有低相位噪声的窄线宽激光器是相干光通信系统[1–3]、引力波干涉仪[4–7] 以及新兴量子技术的核心组件，其中包括光学原子钟[8–10]、物质波干涉仪[11–13] 和离子阱量子计算机[14–16]。对于其中许多应用而言，性能在很大程度上取决于激光器的本征（洛伦兹）线宽[17,18], ，而该线宽通常会被额外的 $1/f$ 类噪声[19–24]所掩盖。由于这种所谓的闪烁噪声，单独的激光线宽并非定义明确的量，需要针对特定测量时间加以说明。要详细表征激光器表现出的相位噪声，需要测量相应的功率谱密度（PSD）。

频率噪声功率谱密度（FN–PSD）的实验测量颇具挑战，因为常规光电探测器无法直接分辨激光器光场的快速振荡。广泛用于表征 FN–PSD 的一种标准方法是延迟自外差（DSH）拍频技术[19, 25–30]，该技术能够从射频（RF）范围内的低频拍频信号中提取相位涨落动力学。然而，该方法需要对测量数据进行一定的后处理，以去除干涉仪带来的影响，从而重建激光器的 FN–PSD。本文介绍了一种基于参数化维纳滤波器的改进后处理程序，可避免标准方法中常见的重建伪影。

本文结构安排如下：第II节介绍实验装置，并给出一个考虑探测器噪声的测量模型。第III节回顾维纳反卷积方法，重点介绍其在延迟自外差测量中的应用。我们将讨论一系列频域滤波函数及其

a)电子邮件：kantner@wias-berlin.deb)电子邮件：mertenskoetter@wias-berlin.de

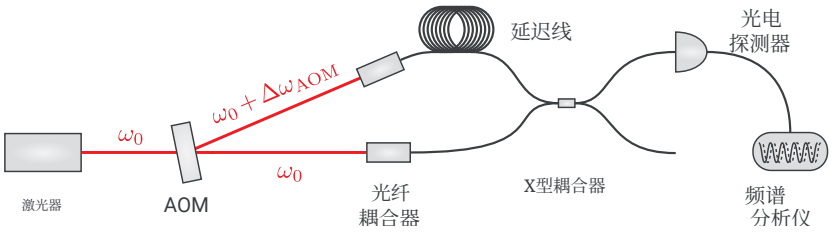


图1. 用于延迟自外差拍频测量的实验装置。激光束经声光调制器分开，其中一路信号的频率发生偏移，并通过一根长光纤产生延迟。两束光在光电探测器处叠加，光电探测器仅捕获低频拍频信号。

恢复激光器频率噪声功率谱密度的能力。第IV节提出一种新方法，即使在低信噪比（SNR）下，当测量噪声掩盖本征线宽平台的起始位置时，也能精确估计本征线宽。第V节将通过模拟时间序列展示该方法。最后，我们在第VI节讨论该方法。

II. 延迟自外差拍频测量

在延迟自外差测量方法中，见图1，激光器发出的光与来自同一光源、经过频移（外差）和时间延迟的光叠加。频移 $\Delta\omega_{\mathrm{AOM}}$ （通常为几十兆赫兹）由声光调制器（AOM）实现，而延迟 τ_d 则通过长光纤（通常为数千米）实现。如果延迟大于激光器的相干时间，则可以将延迟光视为具有相同频率和噪声特性的、统计独立的第二台激光器。DSH方法能够将光学信号下变频为射频域中的拍频信号，并可由相应的频谱分析仪进行分辨。与其他方法不同，DSH方法无需将激光器稳定到光学参考（例如，频率稳定的第二台激光器）上。此外，还可以在较宽的频率带宽内测量频率噪声特性。有关实验装置和后处理流程的详细说明，请参阅参考文献31。

经过下变频后，频谱分析仪执行 I–Q 解调（希尔伯特变换），得到检测到的同相和正交信号 [31]

$$I(t) = \eta_{\mathrm{det}}\sqrt{P(t)\,P(t-\tau_d)}\,\cos\left(\phi(t) - \phi(t-\tau_d) - \Delta\Omega\, t\right) + \xi_I(t)\,, \tag{1a}$$

$$Q(t) = \eta_{\mathrm{det}}\sqrt{P(t)\,P(t-\tau_d)}\,\sin\left(\phi(t) - \phi(t-\tau_d) - \Delta\Omega\, t\right) + \xi_Q(t)\,, \tag{1b}$$

其中， η_{det} 为探测器效率， P 为光子数， ϕ 为光学相位，$\Delta\Omega$ 为信号在干涉仪和射频分析仪中拍频时累积的最终差频，和频分量则被滤除。我们假设高斯白测量噪声的相关函数为 $\langle\xi_I(t)\,\xi_I(t')\rangle = \langle\xi_Q(t)\,\xi_Q(t')\rangle = \sigma^2_{\mathrm{meas}}\delta(t-t')$。

根据测得的时间序列 $I(t)$、 $Q(t)$，很容易得到相位起伏差

$$\Delta\phi(t) = \delta\phi(t) - \delta\phi(t-\tau_d) = \arctan\left(\frac{Q(t)}{I(t)}\right) - \overline{\Omega}\tau_d + \Delta\Omega\, t + \xi_\phi(t) \tag{2}$$

其中 $\overline{\Omega}$为标称连续波频率，且 $\delta\phi(t) = \phi(t) - \overline{\Omega}t$。有效测量噪声 $\xi_\phi(t)$（源自 $\xi_I(t)$ 和 $\xi_Q(t)$）近似为白噪声

$$\langle\xi_\phi(t)\,\xi_\phi(t')\rangle \approx \left(\frac{\sigma_{\mathrm{meas}}}{\eta_{\mathrm{det}}\overline{P}}\right)^2 \delta(t-t')\,, \tag{3}$$

如果平均功率 P 远大于测量噪声水平 σ_{meas}，请参阅附录 A。式（2）的评估需要估算 τ_d 和 $\Delta\Omega$（去趋势），详情请参阅[31]。

在频域中，相位涨落 $\delta\phi(t)$ 与 $\Delta\phi(t)$ 之间的关系为

$$\Delta\tilde{\phi}(\omega) = H(\omega)\,\delta\tilde{\phi}(\omega), \qquad H(\omega) = 1 - \mathrm{e}^{i\omega\tau_d}, \tag{4}$$

由此可得相应相位噪声功率谱密度之间的简单关系

$$S_{\Delta\phi,\Delta\phi}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{\delta\phi,\delta\phi}(\omega). \tag{5}$$

在标准后处理程序中[19,31]，，通过除以 $|H(\omega)|^2 = 2(1-\cos(\omega\tau_d))$，可求解式（5）以得到 $S_{\delta\phi,\ \delta\phi}(\omega)$。这种方法有两个明显的缺点：首先，该过程未考虑探测器噪声，因此在测量噪声水平升高时会失效。其次，传递函数在 $\omega_n = 2\pi n/\tau_d$, $n \in \mathbb{Z}$ 处有零点，这些零点在其逆函数 $|G(\omega)|^2 = |H(\omega)|^{-2}$ 中变成极点。因此，重建功率谱密度会出现一系列等间距的伪尖峰[32–34]，这是测量噪声受到不可控放大的结果。

III. 参数化维纳滤波器

本节介绍维纳反卷积方法，用于从含噪时间序列数据中重建隐藏信号。除了广为人知的维纳滤波器，我们还介绍功率谱均衡 (PSE)，这是参数化维纳滤波器中的一个重要代表[35]。

设 $x(t)$ 表示感兴趣的隐藏信号的时间序列，该信号由一个特征为卷积核 $h(t)$ 的实验装置测量。对于上文所述的延迟自外差测量，该卷积核为 $h(t) = \delta(t) - \delta(t-\tau_d)$。此外，设 $\xi(t)$ 表示加性高斯白测量噪声。于是，实验得到一个观测时间序列

$$z(t) = (h * x)(t) + \xi(t). \tag{6a}$$

假设过程噪声与测量噪声不相关 $\langle x(t)\,\xi(t')\rangle = 0$。目标是求得隐藏信号的一个最优估计 $\hat{x}(t)$

$$\hat{x}(t) = (g * z)(t), \tag{6b}$$

其中，(反)卷积核 $g(t)$ 使重建误差最小。

本文主要关注频域中隐藏信号功率谱密度的重建，为此我们引入式（6）的傅里叶空间表示

$$Z(\omega) = H(\omega)\,X(\omega) + \Xi(\omega), \tag{7a}$$

$$\hat{X}(\omega) = G(\omega)\,Z(\omega). \tag{7b}$$

根据式（7b），我们得到隐藏信号的估计功率谱密度 $S_{\hat{x},\ \hat{x}}(\omega)$ 与测得的时间序列 $S_{z,\ z}(\omega)$ 的功率谱密度之间的关系

$$S_{\hat{x},\hat{x}}(\omega) = |G(\omega)|^2 S_{z,z}(\omega). \tag{8}$$

下面我们将讨论滤波函数 $G(\omega)$ 的不同候选形式，并根据其从延迟自外差测量中重建半导体激光器[20,22,23] 频率噪声功率谱密度的表现来评估它们。干涉仪的传递函数为

$$H(\omega) = 1 - \mathrm{e}^{i\omega\tau_d}$$

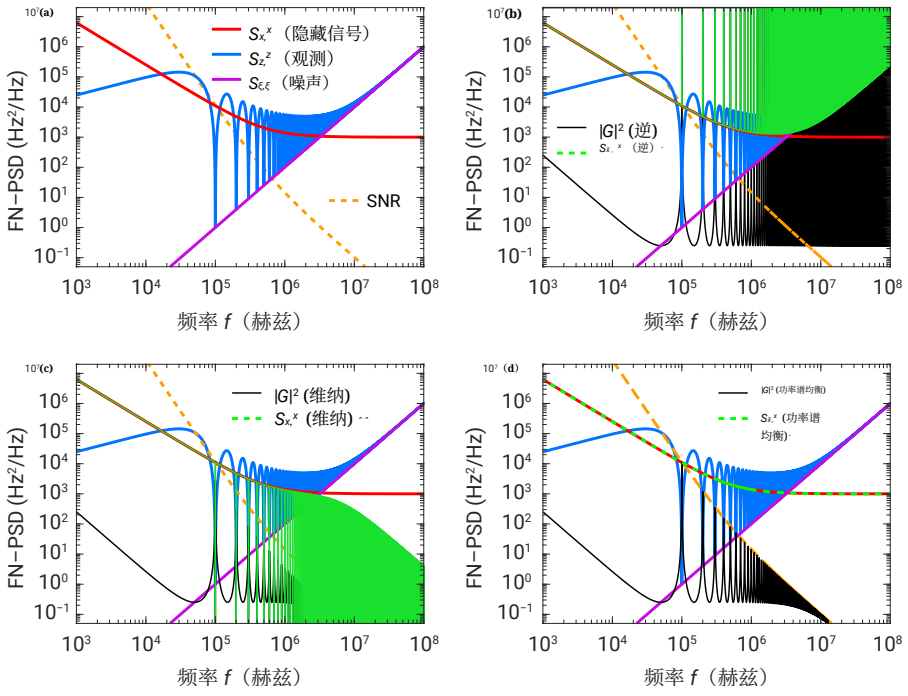


图2. 不同滤波器对 $G(\omega)$ FN–PSD 重建的比较。**(a)** 解析信号方程（9）和测量噪声功率谱密度（10），以及观测频谱和精确信噪比。图中参数为 $\nu = 1.4$, $C = 10^{11}$ 赫兹$^{\nu+1}$, $S_\infty = 10^3$ 赫兹, $\sigma = 10^{-10}/\tau_d$赫兹和 10 12 μs。**(b)** 逆滤波器方程（ ）得到的重建功率谱密度在极点频率 $f_n = n/\tau_d$, $n \in \mathbb{Z}$ 处出现伪峰。本征线宽平台被探测器噪声遮蔽，无法通过逆滤波器恢复（只能提取上限）。**(c)** 维纳滤波器方程（13）针对时间序列重建进行了优化，但无法有效重建功率谱密度。重建功率谱密度在极点频率处出现急剧凹陷，并且在低信噪比 < 1 下无法跟随隐藏信号。**(d)** 功率谱均衡方程（14）在提供精确信噪比时，可精确重建隐藏信号的功率谱密度。此处，极点频率处的奇点受信噪比上限约束，从而能够精确补偿观测信号中的探测器噪声和干涉仪效应 $S_{z,\ z}$。

并假设隐藏信号和噪声功率谱密度分别为

$$S_{x,x}(\omega) = \frac{C}{\omega^\nu} + S_\infty, \tag{9}$$

$$S_{\xi,\xi}(\omega) = \sigma\omega^2. \tag{10}$$

在式（9）中， S_∞ 决定了本征激光线宽，但它会被额外的幂律型有色噪声所掩盖，其参数为 $0.8 \lesssim \nu \lesssim 1.6$ （闪烁噪声）。式（9）的函数形式与弛豫振荡（RO）峰（通常位于数 GHz）远低于该峰时的理论模型和实验观测结果一致。相位测量噪声的大小（参见式（3））由 σ 指定，相应的频率测量噪声功率谱密度是频率的二次函数。模型功率谱密度（9）–（10）意味着信噪比为

$$\mathrm{SNR}(\omega) = S_{x,x}(\omega)/S_{\xi,\xi}(\omega). \tag{11}$$

图2 表明，不同的滤波器 $G(\omega)$ 会导致 $S_{\hat{x},\hat{x}}(\omega)$ 得出截然不同的结果。下一节将更详细地讨论它们的行为。

A. 逆滤波器

在探测器噪声可忽略的情况下，滤波器 $G(\omega)$ 由传递函数的逆函数给出

$$G_{\mathrm{inv}}(\omega) = H^{-1}(\omega). \tag{12}$$

隐藏信号的功率谱密度相应估计为

$$S_{\hat{x},\hat{x}}(\omega) = |G_{\mathrm{inv}}(\omega)|^2 S_{z,z}(\omega), \qquad |G_{\mathrm{inv}}(\omega)|^2 = |H(\omega)|^{-2},$$

这与延迟自外差测量的标准后处理方法一致[19,29,33]，参见式（5）。逆滤波器最显著的特征 $|G_{\mathrm{inv}}(\omega)|^2$ 是在极点 $\omega_n^{\mathrm{pole}} = 2\pi n/\tau_d$，$n \in \mathbb{Z}$处出现奇点，此时功率谱密度重建会失效，见图2（b）。只要信噪比较大（SNR > 1），在远离这些极点的区域，重建频谱就与隐藏信号相符。如果测量噪声掩盖了本征线宽平台，则通过逆滤波只能提取出一个上限。

B. 维纳滤波器

维纳滤波在逆滤波与噪声去除之间实现了最优权衡。它同时消除加性噪声并逆转干涉仪的影响。维纳滤波器通过最小化任意时刻时域信号的均方误差获得，见附录B1。在频域中，维纳滤波器为

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{Wiener}}(\omega) &= \frac{H^*(\omega) S_{x,x}(\omega)}{|H(\omega)|^2 S_{x,x}(\omega) + S_{\xi,\xi}(\omega)} \\ &= \frac{1}{H(\omega)} \left(1 + \frac{1}{|H(\omega)|^2 \,\mathrm{SNR}(\omega)}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{13}$$

尽管维纳滤波器能够对时域信号进行最优重建，但在信噪比较低的区域，相应的功率谱密度重建与真实频谱显著偏离，见图2(c)。此外，我们注意到，维纳滤波器在极点 ω_n^{pole} 处过度强调噪声抑制；由于 $\left|G_{\mathrm{Wiener}}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)\right|^2 = 0$，重建功率谱密度在这些位置为零，因此 $S_{\hat{x},\,\hat{x}}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right) = 0$ 也成立。远离这些极点且信噪比较高时，维纳滤波器渐近趋近于逆滤波器的行为：$\left|G_{\mathrm{Wiener}}\left(\omega \neq \omega_n^{\mathrm{pole}}\right)\right|^2 \overset{\text{信噪比}\to\infty}{\sim} |H(\omega)|^{-2}$。

C. 功率频谱均衡

除了标准维纳滤波器之外，该方法还有若干变体，统称为参数化维纳滤波器[35]。其中一种重要变体是功率谱均衡 (PSE)，其设计旨在使重建功率谱密度的二次误差最小化，见附录 B2。相应的滤波函数为

$$\begin{aligned} \left|G_{\mathrm{PSE}}(\omega)\right|^2 &= \frac{S_{x,x}(\omega)}{|H(\omega)|^2 S_{x,x}(\omega) + S_{\xi,\xi}(\omega)} \\ &= \frac{1}{|H(\omega)|^2} \left(1 + \frac{1}{|H(\omega)|^2 \,\mathrm{SNR}(\omega)}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

当提供真实的频率相关信噪比时，PSE滤波器可准确重建隐藏信号，见图 2(d)。

最值得注意的是，重建频谱在逆滤波函数的极点处没有重建伪影。这一结果可通过以下分析轻松理解。简单计算可知，在 ω_n^{pole}处，滤波器趋近于信噪比$\left|G_{\mathrm{PSE}}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)\right|^2$ = 信噪比$\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)$。由于干涉仪无法检测这些频率分量（即，传递函数为零 $H\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)=0$），观测信号仅包含测量噪声$S_{z,\ z}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)=S_{\xi,\ \xi}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)$，见式（7b）。最后，将其代入式（8）可见，PSE滤波器恰好抵消测量噪声，并恢复真实信号

$$S_{\hat{x},\hat{x}}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)=\left|G_{\mathrm{PSE}}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)\right|^2 S_{z,z}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)=\mathrm{SNR}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right) S_{\xi,\xi}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)=S_{x,x}\left(\omega_n^{\mathrm{pole}}\right)$$

如果提供了正确的信噪比。此外，我们观察到，即使在信噪比较低的区域，PSE滤波器也能恢复隐藏信号。这一结果与上述推导思路相同，从 $\left|G_{\mathrm{PSE}}(\omega)\right|^2 \overset{\text{信噪比}}{\sim}{}^{\to 0}$信噪比 (ω) 出发。在相反的情况下，即信噪比非常高时 $(\omega)\gg 1$，PSE滤波器再次趋近于逆滤波器（与维纳滤波器一样）$\left|G_{\mathrm{PSE}}(\omega)\right|^2 \overset{\text{信噪比}}{\sim}{}^{\to\infty} |H(\omega)|^{-2}$.

最后，我们指出，本节讨论的所有候选滤波器都可以统一写成如下形式的参数化维纳滤波器：

$$\left|G(\omega)\right|^2=\frac{1}{|H(\omega)|^2}\left(1+\frac{1}{|H(\omega)|^2\,\mathrm{SNR}(\omega)}\right)^{-m}=\begin{cases}\left|G_{\mathrm{inv}}(\omega)\right|^2 & \text{for } m=0,\\ \left|G_{\mathrm{Wiener}}(\omega)\right|^2 & \text{for } m=1,\\ \left|G_{\mathrm{PSE}}(\omega)\right|^2 & \text{for } m=2.\end{cases}$$

IV. 低信噪比下的本征线宽估计

上一节已经表明，如果提供精确的信噪比，PSE滤波器就能很好地重建隐藏信号的功率谱密度。乍一看，这种方法似乎不太实用，因为指定精确的信噪比在一定程度上预先知道了实际测量结果。因此，人们可能会担心由此生成的重建结果会很随意。然而，事实证明，当指定的信噪比不正确时，PSE滤波方法会引入特征性的重建伪影，见图3。这些伪尖峰很容易被识别为不符合物理实际，因此可以据此排除错误的信噪比估计。基于这一观察，我们提出一种方法，通过最小化这些重建伪影，同时重建隐藏信号的功率谱密度并估计正确的信噪比。

下文中，我们再次采用解析模型功率谱密度（9）–（10）。为简单起见，我们假设可以根据数据准确估计参数 C 和 ν，因为信号的低频部分几乎不受测量噪声影响。同样，我们假设噪声水平 σ 可通过独立的噪声底测量，或通过分析相对强度噪声（RIN）功率谱密度来确定；在较高功率下，相对强度噪声通常由测量噪声主导。因此，唯一需要估计的自由参数是 S_∞。

图3(a)–(b)展示了在解析模型中对 S_∞ 高估和低估的影响。由于滤波函数 $|G_{\mathrm{PSE}}(\omega)|^2$ 与观测频谱$S_{z,\ z}(\omega)\approx 0$不匹配，重建频谱$S_{\hat{x},\hat{x}}(\omega)$中会在某些频率处出现伪尖峰（重建伪影）。在较高频率处，这些尖峰在 $|G_{\mathrm{PSE}}(\omega)|^2$ 和$S_{z,z}(\omega)$中都会衰减，但二者的乘积会导致本征线宽平台的值错误。我们引入目标函数 $D(S_\infty)$，以惩罚重建信号$S_{\hat{x},\hat{x}}(\omega;S_\infty)$与隐式假定的信号之间的偏差（即“不一致性”）。（前者取决于

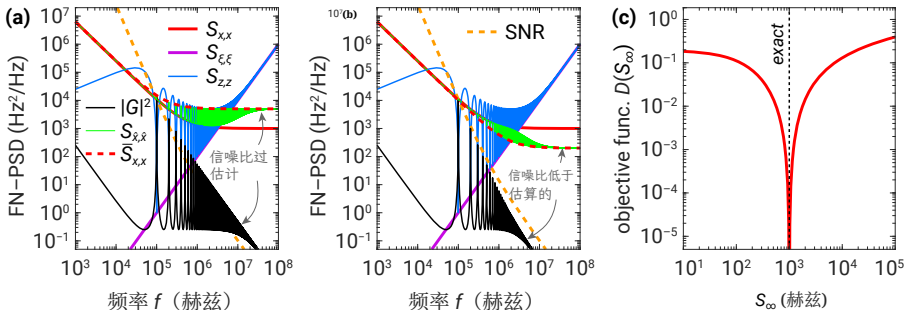


图 3. 信噪比估计不正确时，PSE滤波方法中的重建伪影。**(a)** 高估（$S_\infty^{\mathrm{est}} = 5S_\infty$）和**(b)** 低估（$S_\infty^{\mathrm{est}} = 0.2S_\infty$本征线宽$S_\infty$ 会在重建频谱中导致虚假的振荡和尖峰$S_{\hat{x},\ \hat{x}}$。当信噪比设定错误时，$|G_{\mathrm{PSE}}|^2$ 的最大值不再受精确信噪比的限制。假定的$S_{x,\ x}$（其函数形式为（9），并用于信噪比估计）以红色虚线表示。第IV 节所述方法旨在最小化$S_{x,\ x}$ 与$S_{\hat{x},\ \hat{x}}$ 之间的偏差，以估计本征线宽参数 S_∞的真实值。**(c)** 相应的目标函数（15）在精确值处呈现尖锐的极小值。

假定的信噪比作为估计的 S_∞函数）后者$S_{x,x}\left(\omega; S_\infty\right)$满足函数形式（9），即

$$D\left(S_\infty\right) = \left(\int \mathrm{d}\omega \, \frac{S_{\hat{x},\hat{x}}\left(\omega; S_\infty\right) - \overline{S}_{x,x}\left(\omega; S_\infty\right)}{\overline{S}_{x,x}\left(\omega; S_\infty\right)} \right)^2 \tag{15}$$

其中$S_{\hat{x},\ \hat{x}}\left(\omega; S_\infty\right) = \left|G_{\mathrm{PSE}}\left(\omega; S_\infty\right)\right|^2 S_{z,\ z}\left(\omega\right)$。 ω积分在合适的频率范围内进行。如图3(c)所示，目标函数（15）在精确值处呈现尖锐的极小值，参见图2(c)。因此， S_∞ 可通过最小化 $D(S_\infty)$进行估计。

V. 随机激光器动力学的应用

在本节中，我们将展示第IV节所述方法在模拟时间序列中的应用。在第VA节中，我们介绍一种包含非马尔可夫有色噪声的随机激光器模型，该模型能够生成具有频率漂移的逼真时间序列，这类漂移在二极管激光器中十分常见。在第VB节中，我们将线宽估计方法应用于模拟的 DSH测量数据。

A. 随机激光器速率方程

我们考虑一个适用于通用单模半导体激光器的朗之万方程模型

$$\dot{P} = -\gamma\left(P - P_{\mathrm{th}}\right) + \Gamma v_g g\left(P, N\right) P + \Gamma v_g g_{\mathrm{sp}}\left(P, N\right) + F_P, \tag{16a}$$

$$\dot{\phi} = \Omega_0 + \frac{\alpha_H}{2}\Gamma v_g g\left(P, N\right) + F_\phi, \tag{16b}$$

$$\dot{N} = \frac{\eta I}{q} - R\left(N\right) - \Gamma v_g g\left(P, N\right) P - \Gamma v_g g_{\mathrm{sp}}\left(P, N\right) + F_N, \tag{16c}$$

其中， P 为光子数， ϕ 为光学相位， N 为有源区中的电荷载流子数。此外， γ 为光子寿命倒数， P_{th} 为热光子数（玻色–爱因斯坦因子）， Γ 为光学限制因子， v_g 为群速度， Ω_0 为相对于连续波参考频率的失谐， α_H 为线宽增强因子， I 为泵浦电流， η 为注入效率， q 为元电

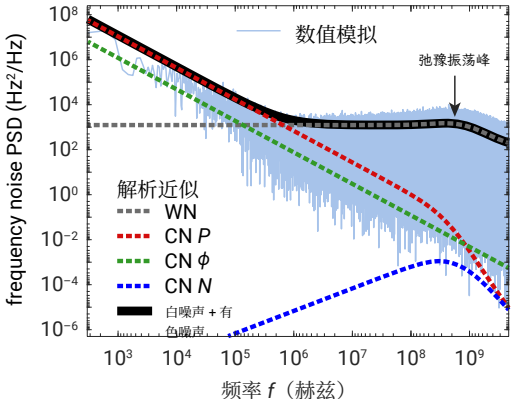


图 4. 使用随机激光速率方程（16）根据模拟时间序列数值计算得到的频率噪声功率谱密度。解析近似由无噪声稳态下模型的线性化推导得出。分别标示了白噪声（WN）和不同有色噪声（CN）的贡献。

荷。净增益建模为

$$g\left(P,N\right)=\frac{g_0}{1+\varepsilon P}\log\left(\frac{N}{N_{\mathrm{tr}}}\right), \tag{17}$$

其中， g_0 是增益系数， N_{tr} 是透明时的载流子数， ε 是增益压缩系数。根据[18], , 自发发射系数表示为

$$g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)=\frac{1}{2}\frac{g_0}{1+\varepsilon P}\log\left(1+\left(\frac{N}{N_{\mathrm{tr}}}\right)^2\right), \tag{18}$$

该方法无需任何额外参数，并避免引入粒子数反转因子[17,18]。受激吸收系数可由方程（17）–（18）隐式表示为 $g_{\mathrm{abs}}(P,\ N)=g_{\mathrm{sp}}(P,\ N)-g(P,\ N)$。非辐射复合以及向废弃模式中的自发发射可表示为

$$R\left(N\right)=AN+\frac{B}{V}N^2+\frac{C}{V^2}N^3, \tag{19}$$

其中， A 是肖克利–里德–霍尔复合速率， B 是双分子复合系数， C 是俄歇复合系数， V 是有源区的体积。

朗之万力描述均值为零的高斯有色噪声，其频域相关函数中非零的项如下：

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{F}_P\left(\omega\right)\tilde{F}_P\left(\omega'\right)\rangle&=\left(2\left(\Gamma v_g g_{\mathrm{sp}}\left(\overline{P},\overline{N}\right)+\gamma P_{\mathrm{th}}\right)\overline{P}\left(1+\frac{1}{\overline{P}}\right)+\sigma_P^2\left(\overline{P}\right)\frac{1}{\omega^{\nu_P}}\right)\delta\left(\omega-\omega'\right),\\
\langle\tilde{F}_\phi\left(\omega\right)\tilde{F}_\phi\left(\omega'\right)\rangle&=\left(\left(\Gamma v_g g_{\mathrm{sp}}\left(\overline{P},\overline{N}\right)+\gamma P_{\mathrm{th}}\right)\left(1+\frac{1}{\overline{P}}\right)+\left(\frac{\sigma_P\left(\overline{P}\right)}{2\overline{P}}\right)^2\frac{1}{\omega^{\nu_P}}\right)\delta\left(\omega-\omega'\right),\\
\langle\tilde{F}_N\left(\omega\right)\tilde{F}_N\left(\omega'\right)\rangle&=\left(2R\left(\overline{N}\right)+2\Gamma v_g g_{\mathrm{sp}}\left(\overline{P},\overline{N}\right)\overline{P}\left(1+\frac{1}{\overline{P}}\right)+\frac{\sigma_N^2\left(\overline{N}\right)}{\omega^{\nu_N}}\right)\delta\left(\omega-\omega'\right),\\
\langle\tilde{F}_P\left(\omega\right)\tilde{F}_N\left(\omega'\right)\rangle&=-\left(\Gamma v_g g_{\mathrm{sp}}\left(\overline{P},\overline{N}\right)\left(2\overline{P}+1\right)-\Gamma v_g g\left(\overline{P},\overline{N}\right)\overline{P}\right)\delta\left(\omega-\omega'\right),
\end{aligned} \tag{20}$$

模型中的白噪声部分包含对光与物质相互作用涨落的量子力学一致描述[36]。此外，我们还纳入了三种相互独立的

符号	说明	值
γ	光子寿命倒数	$5 \cdot 10^{11}\mathrm{s}^{-1}$
P_{th}	热光子数	$2.7 \cdot 10^{-20}$
Γ	光学限制因子	0.01
g_0	增益系数	$3.54 \cdot 10^{5}$米$^{-1}$
n_g	群折射率	3.9
v_g	群速度，$v_g = n_g/c_0$	$7.69 \cdot 10^{7}$毫秒$^{-1}$
N_{tr}	透明载流子数	$2.5 \cdot 10^{9}$
ε	增益压缩系数	10^{-8}
Ω_0	相对于连续波参考频率的失谐	0 Hz
α_H	线宽增强因子	3.0
I	泵浦电流	200 毫安
η	注入效率	0.9
A	肖克利–里德–霍尔复合速率	$1 \cdot 10^{8}\mathrm{s}^{-1}$
B	双分子复合系数	$1 \cdot 10^{16}\mathrm{m}^{3}\mathrm{s}^{-1}$
C	俄歇复合系数	$4 \cdot 10^{-42}$米^{6}秒$^{-1}$
V	有源区体积	$1.25 \cdot 10^{-15}$米^{3}
ν_P	有色噪声指数	1.4
$\sigma_{P,0}$	有色噪声幅度	$5 \cdot 10^{5}$ 秒$^{-(1+\nu_P)/2}$
ν_N	有色噪声指数	1.0
$\sigma_{N,0}$	有色噪声幅度	10^{9} s$^{-(1+\nu_N)/2}$
σ_{meas}	探测器噪声底水平	$2 \cdot 10^{3}\mathrm{s}^{1/2}\,\eta_{\mathrm{det}}$
τ_d	干涉仪延迟	$10 \cdot 10^{-6}$s

表 I. 随机时间序列仿真中使用的参数值列表。

$1/f$型噪声源，其幂律指数分别为 ν_P和 ν_N。有色噪声振幅取为 $\sigma_P(P) = 2P\sigma_{P,0}$和 $\sigma_N(N) = \sqrt{N}\sigma_{N,0}$(用于模拟霍格定律[37,38])。噪声相关函数（20）是在唯一的无噪声稳态(P, N)下构建的。用于仿真的完整非线性 Itˆo 型随机微分方程组见附录 C。数值模拟得到的频率噪声功率谱密度见图4，图中还给出了（半）解析近似。仿真中使用的所有参数值均列于表 I。

B. 本征线宽估计

我们将第IV 节所述的方法应用于模拟的延迟自外差测量。模拟分两步进行：首先，使用欧拉–丸山方法（时间步长 $\Delta t = 50$皮秒）对随机激光器速率方程（16）进行模拟。第二步，通过计算式（1）模拟延迟自外差测量，其中加入了高斯白测量噪声。模拟得到的 I–Q 数据用于根据式（ $\Delta\phi$2）生成时间序列。根据$S_{z,z}(\omega) = \omega^2 S_{\Delta\phi,\Delta\phi}(\omega)$计算观测频谱，并将其显示于图5(a)中。为恢复原始频率噪声功率谱密度，对模拟的频率噪声功率谱密度$S_{z,z}(\omega)$应用PSE滤波方法。在估计过程中，将频率范围限制在弛豫振荡峰以下，以确保解析模型（9）的有效性。

隐藏的频率噪声功率谱密度的最优重建结果如图 5(c) 所示，同时还展示了相应的信噪比估计和测量噪声功率谱密度。与逆滤波器方法相比，PSE滤波器得出的重建结果显著更好；逆滤波器方法存在典型的重建伪影，并且在测量噪声增大时明显偏离隐藏信号，见图5(b)。对模拟随机数据评估得到的目标函数（15）如图 5(d) 所示。与第 IV 节一样，目标函数在精确值附近呈现一个尖锐的极小值。

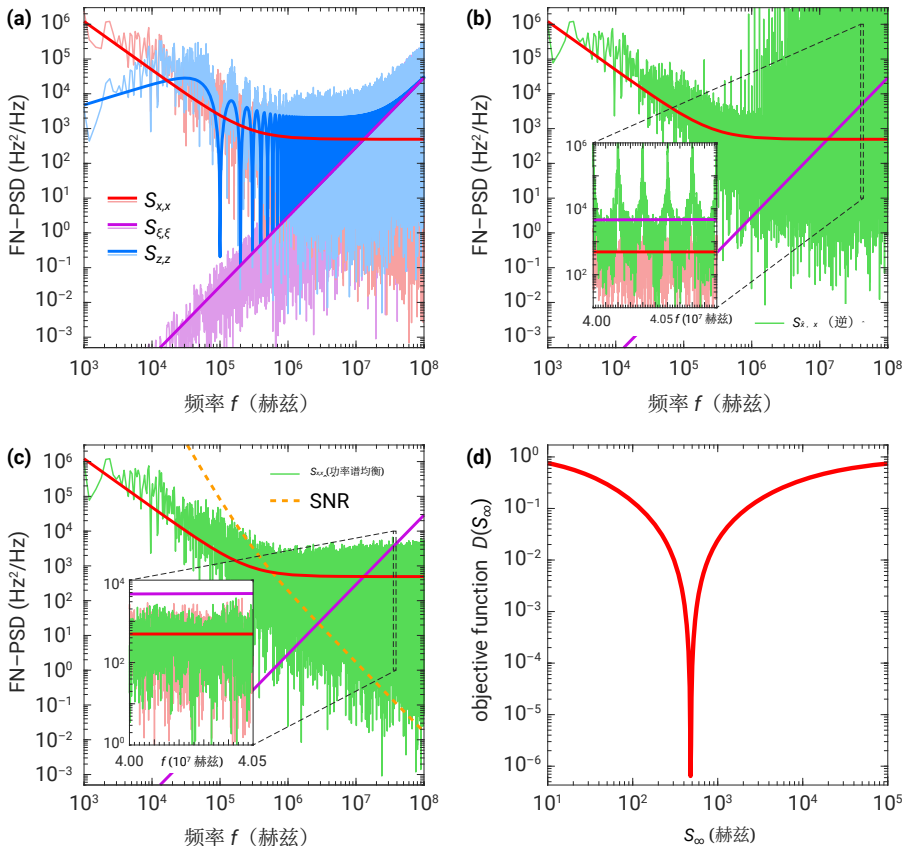


图 5. 将线宽估计方法应用于模拟时间序列数据。**(a)** 隐藏信号、测量噪声和测量数据的功率谱密度及其解析值。**(b)** 使用逆滤波器重建的功率谱密度。插图放大显示了一个低信噪比区域，在该区域中，重建信号与真实信号相差约一个数量级。此外，我们在极点频率处观察到重建伪影。**(c)** PSE滤波方法即使在低信噪比下也能准确重建隐藏信号，且不产生重建伪影。此处，根据第IV节所述的方法，将解析模型功率谱密度拟合到功率谱密度，以得到信噪比。**(d)** 最小化目标函数（15）可在 $S_\infty \approx 480$ 赫兹处得到本征线宽参数的精确估计。

VI. 讨论

第 IV 节提出的方法不仅能无伪影地重建隐藏的频率噪声功率谱密度，还能在本征线宽被测量噪声掩盖时将其提取出来。然而，该过程依赖于以解析模型（9）–（10）的形式指定随频率变化的信噪比。正如图 3 所示，错误的信噪比估计会导致重建误差；通过与隐藏功率谱密度所假设的函数形式（9）不一致，可以识别出这些误差。然而，这一关于函数形式的 先验 假设得到了充分验证[20,22,23]，，因此不会引入虚假偏差。相反，我们的方法利用对问题物理学的这一额外先验知识，从测量数据中提取额外信息（测量功率谱密度中的微弱调制），而逆滤波器方法并未利用这些信息。

尽管我们在第 IV 和 VB 节将参数估计问题限制为单个未知变量，但将该方法扩展到多变量（非线性）最小化问题并不困难，在该问题中，同时估计表征信噪比的所有参数。此外，采用类似的方法重建相对强度噪声也会很有意义，而相对强度噪声通常更

容易受到探测器噪声的影响。

原则上，也可以采用其他估计方法，从含噪时间序列数据中重建频率噪声功率谱密度。例如，Zibar 等人[39] 采用扩展卡尔曼滤波器，估计放大器噪声对激光器相位噪声功率谱密度的影响。然而，这种方法的缺点是需要对待测动力系统建立（全面的）数学模型，因此会带来显著的额外工作。此外，将卡尔曼滤波器用于具有较大延迟的问题（例如延迟自外差测量）众所周知十分困难，且计算量很大[40,41]。相比之下，参数化维纳滤波器的优势在于不依赖对底层状态空间模型的假设。此外，由于该方法在频域中进行表述，因此不会因延迟较大而承受沉重的计算负担。最后，该方法易于实现，因为它本质上是对标准逆滤波器方法的直接扩展（后者仍包含在其中，作为一种极限情况）。

VII. 总结

我们提出了一种基于参数化维纳滤波器的改进后处理程序，可从延迟自外差拍频测量中重建频率噪声功率谱密度（FN–PSD），且重建结果有望达到精确无误（不含任何重建伪影）。不过，该方法需要准确估计频率相关信噪比，而通过有意抑制特征性重建伪影，可以一致地获得这一估计。这样一来，干涉仪的影响和探测器噪声都能被高精度地消除。值得注意的是，即使本征线宽（白噪声）平台完全被测量噪声掩盖，该方法仍可重建这一平台。我们基于包含非马尔可夫型 $1/f$ 噪声的随机激光速率方程模型生成模拟时间序列，并据此验证了这一方法。

附录

附录 A：有效相位测量噪声

我们旨在近似求得有效相位测量噪声及其双时刻相关函数。从式（1）出发，对小噪声进行展开

$$\arctan\left(\frac{Q\left(t\right)}{I\left(t\right)}\right)\approx\arctan\left(\tan\left(\Phi(t)\right)+\frac{\tan\left(\Phi\left(t\right)\right)}{\eta_{\mathrm{det}}\sqrt{P\left(t\right)P\left(t-\tau_{d}\right)}}\left(\frac{\xi_{Q}\left(t\right)}{\sin\left(\Phi(t)\right)}-\frac{\xi_{I}\left(t\right)}{\cos\left(\Phi(t)\right)}\right)\right)$$

其中 $\Phi\left(t\right)=\phi\left(t\right)-\phi(t-\tau_{d})-\Delta\Omega\ t$。展开至一阶后得到

$$\arctan\left(\frac{Q\left(t\right)}{I\left(t\right)}\right)\approx\Phi\left(t\right)+\frac{1}{\eta_{\mathrm{det}}\sqrt{P\left(t\right)P\left(t-\tau_{d}\right)}}\left(\cos\left(\Phi\left(t\right)\right)\xi_{Q}\left(t\right)-\sin\left(\Phi\left(t\right)\right)\xi_{I}\left(t\right)\right).$$

在连续波状态下，对 $P(t)=P+\delta P(t)$ 和 $\phi(t)=\Omega t+\delta\phi\left(t\right)$ 进行展开，可得

$$\Delta\phi\left(t\right)=\delta\phi\left(t\right)-\delta\phi\left(t-\tau_{d}\right)\approx\arctan\left(\frac{Q\left(t\right)}{I\left(t\right)}\right)-\overline{\Omega}\tau_{d}+\Delta\Omega\,t+\xi_{\phi}$$

具有有效相位测量噪声 e

$$\xi_{\phi}\left(t\right)=\frac{1}{\eta_{\mathrm{det}}\sqrt{P\left(t\right)P\left(t-\tau_{d}\right)}}\left(\sin\left(\Phi\left(t\right)\right)\xi_{I}\left(t\right)-\cos\left(\Phi\left(t\right)\right)\xi_{Q}\left(t\right)\right).$$

我们近似表示双时刻相关函数

$$\begin{aligned}\left\langle \xi_\phi\left(t\right)\xi_\phi\left(t'\right)\right\rangle \approx \frac{1}{\eta_{\mathrm{det}}^2\overline{P}^2}\Big(&\left\langle \sin\left(\Phi\left(t\right)\right)\sin\left(\Phi\left(t'\right)\right)\right\rangle \left\langle \xi_I\left(t\right)\xi_I\left(t'\right)\right\rangle \\ &-\left\langle \cos\left(\Phi\left(t\right)\right)\sin\left(\Phi\left(t'\right)\right)\right\rangle \left\langle \xi_Q\left(t\right)\xi_I\left(t'\right)\right\rangle \\ &-\left\langle \sin\left(\Phi\left(t\right)\right)\cos\left(\Phi\left(t'\right)\right)\right\rangle \left\langle \xi_I\left(t\right)\xi_Q\left(t'\right)\right\rangle \\ &+\left\langle \cos\left(\Phi\left(t\right)\right)\cos\left(\Phi\left(t'\right)\right)\right\rangle \left\langle \xi_Q\left(t\right)\xi_Q\left(t'\right)\right\rangle \Big),\end{aligned}$$

其中我们忽略了光子数涨落，并将相位噪声与探测器噪声因式分解。利用 $\langle\xi_I(t)\,\xi_I(t')\rangle = \langle\xi_Q(t)\,\xi_Q(t')\rangle = \sigma_{\mathrm{meas}}^2\delta(t-t')$ 和平稳性$\langle\xi_I(t)\,\xi_Q(t')\rangle = \langle\xi_I(t')\,\xi_Q(t)\rangle$，可得

$$\left\langle \xi_\phi\left(t\right)\xi_\phi\left(t'\right)\right\rangle \approx \frac{1}{\eta_{\mathrm{det}}^2\overline{P}^2}\left(\sigma_{\mathrm{meas}}^2\delta\left(t-t'\right)-\left\langle \sin\left(\Phi\left(t\right)+\Phi\left(t'\right)\right)\right\rangle \left\langle \xi_I\left(t'\right)\xi_Q\left(t\right)\right\rangle \right).$$

忽略快速振荡的互相关项后，可得式（3）。

附录B：频域滤波函数的推导

1. 维纳滤波器

我们考虑隐藏信号 $x(t)$ 与其重建结果（式6b）之间的均方误差

$$E\left(t\right)=\left\langle \left(\hat{x}\left(t\right)-x\left(t\right)\right)^2\right\rangle .$$

进行傅里叶变换并代入式（7）可得

$$\begin{aligned}E\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-i\left(\omega-\omega'\right)t}\Big(&\left[G^*(\omega')H^*(\omega')-1\right]\left[G(\omega)H(\omega)-1\right]\left\langle X(\omega)X^*(\omega')\right\rangle \\ &+2\mathrm{Re}\left(G^*\left(\omega'\right)\left[G\left(\omega\right)H\left(\omega\right)-1\right]\left\langle X\left(\omega\right)\Xi^*\left(\omega'\right)\right\rangle\right)+G^*\left(\omega'\right)G\left(\omega\right)\left\langle \Xi\left(\omega\right)\Xi^*\left(\omega'\right)\right\rangle \Big).\end{aligned}$$

接下来，我们代入信号和噪声功率谱密度的表达式

$$\frac{1}{2\pi}\left\langle X\left(\omega\right)X^*\left(\omega'\right)\right\rangle = S_{x,x}\left(\omega\right)\delta\left(\omega-\omega'\right),\qquad \frac{1}{2\pi}\left\langle \Xi\left(\omega\right)\Xi^*\left(\omega'\right)\right\rangle = S_{\xi,\xi}\left(\omega\right)\delta\left(\omega-\omega'\right),$$

an并假设过程噪声与测量噪声 $\langle X(\omega)\,\Xi^*(\omega')\rangle = 0$ 不相关。由此得到

$$E\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\left(\left|G\left(\omega\right)H\left(\omega\right)-1\right|^2S_{x,x}\left(\omega\right)+\left|G\left(\omega\right)\right|^2S_{\xi,\xi}\left(\omega\right)\right),$$

它完全独立于时间 t。通过对 $G(\omega)\to G(\omega)+\varepsilon\delta G(\omega)$ 求 Gâteaux 导数，可使重建误差 $E(t)$ 最小化

$$\begin{aligned}0\overset{!}{=}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{E\left[G+\varepsilon\delta G\right]-E\left[G\right]}{\varepsilon}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\Big(&\left(G\left(\omega\right)H\left(\omega\right)-1\right)H^*\left(\omega\right)S_{x,x}\left(\omega\right) \\ &+G\left(\omega\right)S_{\xi,\xi}\left(\omega\right)\Big)\delta G^*\left(\omega\right)+\mathrm{c.c.}\end{aligned}$$

其中变化量 $\delta G(\omega)$ 是任意的。由此，我们最终得出维纳滤波器方程（13）。

2. 功率频谱均衡

我们寻求 PSD 的最优重建 $S_{\hat{x},\hat{x}}(\omega)$，使二次误差最小

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ \left(S_{\hat{x},\hat{x}}\left(\omega\right)-S_{x,x}\left(\omega\right)\right)^{2}.$$

从 $\left\langle \hat{X}\left(\omega\right)\hat{X}^{*}\left(\omega'\right)\right\rangle = 2\pi S_{\hat{x},\ \hat{x}}\left(\omega\right)\delta\left(\omega-\omega'\right)$，我们代入式（7）。假设$\langle X\left(\omega\right)\Xi^{*}\left(\omega'\right)\rangle=0$, 得到

$$S_{\hat{x},\hat{x}}\left(\omega\right)\delta\left(\omega-\omega'\right)=\left|G\left(\omega\right)\right|^{2}\left(\left|H\left(\omega\right)\right|^{2}S_{x,x}\left(\omega\right)+S_{\xi,\xi}\left(\omega\right)\right)\delta\left(\omega-\omega'\right).$$

最后一行可以将重建误差的表达式改写为

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ \left(\left(\left|G\left(\omega\right)H\left(\omega\right)\right|^{2}-1\right)S_{x,x}\left(\omega\right)+\left|G\left(\omega\right)\right|^{2}S_{\xi,\xi}\left(\omega\right)\right)^{2}.$$

通过改变滤波器 $G\left(\omega\right)\ \rightarrow G\left(\omega\right)\ +\varepsilon\delta G(\omega)$ 使误差最小，得到

$$\begin{aligned}0\overset{!}{=}\lim_{\varepsilon\rightarrow0}\frac{E\left[G+\varepsilon\delta G\right]-E\left[G\right]}{\varepsilon}=2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\ &\left(\left|H\left(\omega\right)\right|^{2}S_{x,x}\left(\omega\right)+S_{\xi,\xi}\left(\omega\right)\right)\times\\&\times\left(\left(\left|G\left(\omega\right)H\left(\omega\right)\right|^{2}-1\right)S_{x,x}\left(\omega\right)+\left|G(\omega)\right|^{2}S_{\xi,\xi}(\omega)\right)\\&\times\left(G\left(\omega\right)\delta G^{*}\left(\omega\right)+G^{*}\left(\omega\right)\delta G\left(\omega\right)\right),\end{aligned}$$

由此可知，式（14）给出了最优滤波器。

附录 C：Itˆo 型随机微分方程

朗之万方程（16）可写成一组 Itˆo 型随机微分方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P=&\left(-\gamma\left(P-P_{\mathrm{th}}\right)+\Gamma v_{g}g\left(P,N\right)P+\Gamma v_{g}g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)+\sigma_{P}\left(P\right)\mathcal{F}_{P}\right)\mathrm{d}t &\text{(C1a)}\\&+\sqrt{\gamma\left(1+P_{\mathrm{th}}\right)P}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{out}}^{P}+\sqrt{\gamma P_{\mathrm{th}}\left(1+P\right)}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{in}}^{P}+\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)P}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{st-em}}^{P}\\&+\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{abs}}\left(P,N\right)P}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{st-abs}}^{P}+\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{sp}}^{P},\\\mathrm{d}\phi=&\left(\Omega_{0}+\frac{\alpha_{H}}{2}\Gamma v_{g}g\left(P,N\right)+\frac{\sigma_{P}\left(P\right)}{2P}\mathcal{F}_{\phi}\right)\mathrm{d}t &\text{(C1b)}\\&+\frac{1}{2P}\left(\sqrt{\gamma\left(1+P_{\mathrm{th}}\right)P}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{out}}^{\phi}+\sqrt{\gamma P_{\mathrm{th}}\left(1+P\right)}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{in}}^{\phi}+\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)P}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{st-em}}^{\phi}\right.\\&\qquad\left.+\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{abs}}\left(P,N\right)P}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{st-abs}}^{\phi}+\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{sp}}^{\phi}\right),\\\mathrm{d}N=&\left(\frac{\eta I}{q}-R\left(N\right)-\Gamma v_{g}g\left(P,N\right)P-\Gamma v_{g}g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)+\sigma_{N}\left(N\right)\mathcal{F}_{N}\right)\mathrm{d}t &\text{(C1c)}\\&+\sqrt{\frac{\eta I}{q}}\,\mathrm{d}W_{I}+\sqrt{R\left(N\right)}\,\mathrm{d}W_{R}-\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)P}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{st-em}}^{P}\\&-\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{abs}}\left(P,N\right)P}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{st-abs}}^{P}-\sqrt{\Gamma v_{g}g_{\mathrm{sp}}\left(P,N\right)}\,\mathrm{d}W_{\mathrm{sp}}^{P}.\end{aligned}$$

这里，$\mathrm{d}W\sim\mathrm{Normal}\left(0,\mathrm{d}t\right)$ 表示标准维纳过程（高斯白噪声）的增量[42]。具有不同上下标的维纳过程在统计上相互独立。有色噪声源 $\mathcal{F}_{P,\phi,N}$ 的构造见附录 D。

附录 D：有色噪声

有色噪声源$\mathcal{F}_{P,\phi,N}$（下文省略下标）建模为若干相互独立的奥恩斯坦–乌伦贝克（OU）涨落子的叠加（马尔可夫嵌入）[43]

$$\mathcal{F}(t)=\sqrt{\frac{A}{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i(t),$$

其中，A 是归一化常数（见下文），n 是 OU 涨落子的数量，并且

$$\mathrm{d}X_i(t)=-\gamma_i X_i(t)\,\mathrm{d}t+\sqrt{2\gamma_i}\,\mathrm{d}W_i(t). \tag{D1}$$

这些涨落子统计独立，即，$\mathrm{d}W_i(t)\,\mathrm{d}W_j(t)=\delta_{i,\,j}\,\mathrm{d}t$。根据平稳协方差 $C_{X_i,\;X_j}(\tau)=\langle X_i(t+\tau)\;X_j(t)\rangle=\delta_{i,\;j}\exp(-\gamma_i|\tau|)$，我们得到有色噪声的自相关函数

$$C_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(\tau)=\frac{A}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}^{-\gamma_j|\tau|}.$$

根据维纳–辛钦定理[44]，相应的功率谱密度为

$$S_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{i\omega\tau}C_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(\tau)=A\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{2\gamma_j}{\omega^2+\gamma_j^2}=A\int_0^{\infty}\mathrm{d}\gamma\,\rho(\gamma)\,\frac{2\gamma}{\omega^2+\gamma^2},$$

其中我们引入了弛豫率的连续分布

$$\rho(\gamma)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta(\gamma-\gamma_j). \tag{D2}$$

以下我们考虑一种幂律分布

$$\rho(\gamma)=\frac{C_\nu}{\gamma^\nu}\Theta(\gamma-\gamma_0)\,\Theta(\gamma_\infty-\gamma),\qquad 0<\nu<2, \tag{D3}$$

带有较低和较高的截断值 γ_0 和 γ_∞。归一化常数 $C_\nu=(1-\nu)/\left(\gamma_\infty^{1-\nu}-\gamma_0^{1-\nu}\right)$ 确保归一化 $\int_0^\infty\mathrm{d}\gamma\,\rho(\gamma)=1$。由方程（D3），可得

$$S_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(\omega)=2AC_\nu\int_{\gamma_0}^{\gamma_\infty}\mathrm{d}\gamma\,\frac{\gamma^{1-\nu}}{\omega^2+\gamma^2}=\frac{2AC_\nu}{\omega^\nu}\int_{\gamma_0/\omega}^{\gamma_\infty/\omega}\mathrm{d}x\,\frac{x^{1-\nu}}{1+x^2}.$$

该积分形式上可用超几何函数求解。然而，考察渐近极限 $\gamma_0\to 0$ 和 $\gamma_\infty\to\infty$，可以获得更多洞见，从而得到

$$\int_0^\infty\mathrm{d}x\,\frac{x^{1-\nu}}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)}.$$

因此，功率谱密度呈现幂律型频率依赖性

$$S_{\mathcal{F},\mathcal{F}}\left(\gamma_\infty^{-1}\ll\omega\ll\gamma_0^{-1}\right)\approx\frac{1}{\omega^\nu},$$

在任意大的频率窗口内。这里，我们选择归一化常数为 $A=\sin\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)/(C_\nu\pi)$。为了实际生成符合所需功率谱密度的时间序列，需要用有限个 D3 来近似相应的弛豫率分布（γ_i。弛豫率的 n 最优选取通过逆变换抽样获得。

致谢

本研究由德国研究联合会（Deutsche Forschungsge- meinschaft，DFG）通过德国卓越战略资助，项目为 EXC 2046：MATH+ （柏林数学研究中心，项目 AA2-13）。

[1]K. Kikuchi，《相干光纤通信基础》，《光波技术杂志》34，157–179（2016）。[2]K. Zhou、Q. Zhao、X. Huang、C. Yang、C. Li、E. Zhou、X. Xu、K. K. Wong、H. Cheng、J. Gan、Z. Feng、M. Peng、Z. Yang 和 S. Xu，《用于相干光通信的千赫兹量级线宽可控 1550 nm 单频光纤激光器》，《光学快报》25，19752（2017）。[3]H. Guan、A. Novack、T. Galfsky、Y. Ma、S. Fathololoumi、A. Horth、T. N. Huynh、J. Roman、R. Shi、M. Caverley、Y. Liu、T. Baehr-Jones、K. Bergman 和 M. Hochberg，《用于相干通信的宽调谐窄线宽 III-V/硅混合外腔激光器》，《光学快报》26，7920（2018）。[4]B. Willke、K. Danzmann、M. Frede、P. King、D. Kracht、P. Kwee、O. Puncken、R. L. Savage、B. Schulz、F. Seifert、C. Veltkamp、S. Wagner、P. Weßels 和 L. Winkelmann，《用于先进引力波探测器的稳频激光器》，《经典与量子引力》25，114040（2008）。[5]B. P. Abbott *et al.*，《LIGO：激光干涉引力波天文台》，《物理学进展报告》72，076901（2009）。[6]K. Dahl、P. Cebeci、O. Fitzau、M. Giesberts、C. Greve、M. Krutzik、A. Peters、S. A. Pyka、J. Sanjuan、M. Schiemangk、T. Schuldt、K. Voss 和 A. Wicht，《面向 LISA 的新型激光技术》，载于 *International Conference on Space Optics (ICSO 2018)* 2019，

N. Karafolas、Z. Sodnik 和 B. Cugny 编（国际光学工程学会，）第 111800C 页。[7]D. Kapasi、J. Eichholz、T. McRae、R. Ward、B. Slagmolen、S. Legge、K. Hardman、P. Altin 和 D. Mc- Clelland，《用于引力波探测器研究的 2 μm 波长可调谐窄线宽激光器》，《光学快报》28，3280–3288（2020）。[8]J. Camparo，《铷原子钟与基础研究》，Phys. Today 60，33–39（2007）。[9]A. D. Ludlow、M. M. Boyd、J. Ye、E. Peik 和 P. O. Schmidt，《光学原子钟》，Rev. Modern Phys. 87，637–701（2015）。[10]Z. L. Newman、V. Maurice、C. Fredrick、T. Fortier、H. Leopardi、L. Hollberg、S. A. Diddams、J. Kitching 和 M. T. Hummon，《高性能紧凑型光学标准》，《光学快报》46，4702（2021）。[11]A. Peters、K. Y. Chung 和 S. Chu，《利用原子干涉测量进行高精度重力测量》，Metrologia 38，25–61（2001）。[12]P. Cheinet、B. Canuel、F. P. D. Santos、A. Gauguet、F. Yver-Leduc 和 A. Landragin，《时域原子干涉仪中灵敏度函数的测量》，IEEE Trans. Instru m. Meas. 57，1141 1148 2008–（）。[13]O. Carraz、F. Lienhart、R. Charri`ere、M. Cadoret、N. Zahzam、Y. Bidel 和 A. Bresson，《用于机载原子干涉测量的紧凑稳健激光系统》，Appl. Phys. B 97，405–411（2009）。[14]N. Akerman、N. Navon、S. Kotler、Y. Glickman 和 R. Ozeri，《利用窄线宽二极管激光器实现囚禁离子量子比特的通用门集》，New. J. Phys. 17，113060（2015）。[15]C. D. Bruzewicz、J. Chiaverini、R. McConnell 和 J. M. Sage，《囚禁离子量子计算：进展与挑战》，Appl. Phys. Rev. 6，021314（2019）。[16]I. Pogorelov、T. Feldker、C. D. Marciniak、L. Postler、G. Jacob、O. Krieglsteiner、V. Podlesnic、M. Meth、V. Negnevitsky、M. Stadler、B. H¨ofer、C. W¨achter、K. Lakhmanskiy、R. Blatt、P. Schindler 和 T. Monz，《紧凑型离子阱量子计算演示装置》，《PRX Quantum》2，020343（2021）。[17]C. Henry，《半导体激光器中的相位噪声》，《光波技术杂志》4，298–311（1986）。[18]H. Wenzel、M. Kantner、M. Radziunas 和 U. Bandelow，《重新审视半导体激光器线宽理论》，Appl. Sci. 11，6004（2021）。[19]K. Kikuchi 和 T. Okoshi，《半导体激光器线宽对测量时间的依赖性：1/f噪声占主导地位的证据》，Electron. Lett. 21，1011（1985）。[20]K. Kikuchi，《高功率极限下 1/f 型调频噪声对半导体激光器线宽残余的影响》，IEEE J. Quant. Electron. 25，684–688（1989）。[21]L. B. Mercer，《1/f频率噪声对自外差线宽测量的影响》，《光波技术杂志》9，485–493（1991）。[22]Y. Salvad´e 和 R. D¨andliker，《激光二极管闪烁噪声导致的干涉测量局限》，J. Opt. Soc. Amer. A 17，927–932（2000）。[23]G. M. St´ephan、T. T. Tam、S. Blin、P. Besnard 和 M. Tˆetu，《激光线型与频率噪声谱密度》，Phys. Rev. A 71，043809（2005）。[24]S. Spießberger、M. Schiemangk、A. Wicht、H. Wenzel、G. Erbert 和 G. Tr¨ankle，《发射波长接近 1064 nm、本征线宽仅 2 kHz 的分布布拉格反射激光二极管》，Appl. Phys. B 104，813–818（2011）。[25]T. Okoshi、K. Kikuchi 和 A. Nakayama，《一种高分辨率测量激光输出光谱的新方法》，Electron. Lett. 16，630（1980）。[26]J. Dawson、N. Park 和 K. Vahala，《一种改进的线宽测量延迟自外差干涉仪》，IEEE Photonics Technology Letters 4，1063–1066（1992）。[27]P. Horak 和 W. H. Loh，《关于测定光纤激光器线宽的延迟自外差干涉技术》，《光学快报》14，3923（2006）。

[28]H. Tsuchida, 《利用循环延迟自外差法测量激光频率调制噪声》, 《光学快报》**36**, 681（2011）。[29]M. Schiemangk、S. Spießberger、A. Wicht、G. Erbert、G. Tr¨ankle 和 A. Peters, 《自由运行激光器的精确频率噪声测量》, 《应用光学》**53**, 7138（2014）。[30]Z. Bai、Z. Zhao、Y. Qi、J. Ding、S. Li、X. Yan、Y. Wang 和 Z. Lu, 《窄线宽激光器线宽测量技术》, 《前沿物理》**9**, 768165（2021）。[31]M. Schiemangk, *Ein Lasersystem für Experimente mit Quantengasen unter Schwerelosigkeit*, 博士论文, 柏林洪堡大学（2019）。[32]W. Lewoczko-Adamczyk、C. Pyrlik、J. H¨ager、S. Schwertfeger、A. Wicht、A. Peters、G. Erbert 和 G. Tr¨ankle, 《利用单片共焦法布里–珀罗腔光学反馈的超窄线宽分布反馈激光器》, 《光学快报》**23**, 9705–9709（2015）。[33]S. Wenzel、O. Brox、P. D. Casa、H. Wenzel、B. Arar、S. Kreutzmann、M. Weyers、A. Knigge、A. Wicht 和 G. Tr¨ankle, 《单片集成扩展腔二极管激光器, 发射波长为 1064 nm, 3 dB线宽为 32 kHz》, 《激光与光子学评论》, 2200442（2022）。[34]R. R. Kumar、A. H¨ansel、M. F. Brusatori、L. Nielsen、L. M. Augustin、N. Volet 和 M. J. R. Heck, 《在磷化铟平台上单片集成、本征线宽为 10 kHz 的耦合式扩展腔分布布拉格反射激光器》, 《光学快报》**47**, 2346（2022）。[35]J. S. Lim, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*（普伦蒂斯·霍尔, 1990）。[36]L. A. Coldren、S. W. Corzine 和 M. L. Ma˘sanovi´c, *Diode Lasers and Photonic Integrated Circuits*（威利, 霍博肯（新泽西州）, 2012）。[37]F. N. Hooge, 《1/f噪声源》, 《IEEE电子器件汇刊》**41**, 1926–1935（1994）。[38]I. A. Garmash、M. V. Zverkov、N. B. Kornilova、V. N. Morozov、R. F. Nabiev、A. T. Semenov、M. A. Sumarokov 和 V. R. Shidlovskii, 《注入式激光器辐射功率低频涨落的分析》, 《苏联激光研究杂志》**10**, 459–476（1989）。[39]D. Zibar、J. E. Pedersen、P. Varming、G. Brajato 和 F. D. Ros, 《存在放大器噪声时实现接近最优的相位测量》, 《光学》**8**, 1262（2021）。[40]H. L. Alexander, 《具有传感延迟的分布式系统状态估计》, *SPIE Proceedings*, SPIE《数据结构与目标分类论文集》**1470**, 103–111（1991）。[41]A. Gopalakrishnan、N. S. Kaisare 和 S. Narasimhan, 《在基于扩展卡尔曼滤波器的非线性状态估计中纳入延迟且不频繁的测量》, 《过程控制杂志》**21**, 119–129（2011）。[42]K. Jacobs, *Stochastic Processes for Physicists*（剑桥大学出版社, 剑桥, 2010）。[43]S. M. Kogan, *Electronic Noise and Fluctuations in Solids*（剑桥大学出版社, 剑桥, 1996）。[44]R. Kubo、M. Toda 和 N. Hashitsume, *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics*, 第 2 版, 施普林格固态科学丛书, 第 31 卷（施普林格, 柏林, 海德堡, 1991）。