arXiv:2301.10683v1 [math.GR] 25 Jan 2023

关于两个群的自由积中元素的共轭类及其中心化子的注记

Dan Burghelea *

摘要

我们描述了两个群的自由积中元素的共轭类及其中心化子，并据此修正了先前论文中给出的两个群的自由积的群环的循环同调和周期循环同调的计算。

1 引言

本文缘起于 Markus Land 指出的一处错误，该错误涉及自由积的群环的循环同调和周期循环同调，具体来说，是发表于 Comment. Math. Helv. 60 (1985年) 第 3 期，354–365 页的论文《群环的循环同调》中的命题 II 和 IIp。这个错误源于对两个群的自由积中元素的共轭类的中心化子计算有误。本文将对它们作出正确描述，并据此修正 [1]中的命题 II 和 IIp。

为与 [1] 中的记号保持一致，对于群 G和元素 $x \in G$ ，记 $G_x :=\{y \in G \mid y \cdot x = x \cdot y\}$ 为 x 的中心化子，记 $\{x\}$ 为由元素 x 生成的子群，并记 N_x为商群 $N_x := G_x/\{x\}.$ 。对于同一共轭类中的所有 x ，这些群都同构。记 $\langle G\rangle$ 为 G 中元素的共轭类集合；对于 $x \in G$ ，用$\hat{}x$表示 x的共轭类。对于群 H 和 G，分别用 h 和 g 表示非零元素，用 e_H和 e_G.表示中性元素。

考虑自由积 $P = H * G.$ 。 $x \in P$中的任意元素都可以用一个字$s_1 s_2 \cdots s_r$ 表示（但表示不唯一），其中 $s_i \in H \sqcup G.$ 。由字 $s_1 s_2 \cdots s_r$ 和$s'_1 s'_2 \cdots s'_{r'}$ 表示的元素 x 与 x'的乘积，可以用串接 $s_1 s_2 \cdots s_r s'_1 s'_2 \cdots s'_{r'}.$ 表示。通过以下方式修改元素 $x \in P$ 的一个字表示:

i) 移除所有形如 e_H 和 e_G 的元素 s_i ，

ii) 当连续元素 $\cdots s_i s_{i+1} \cdots$ 属于 H 或 G时，用它们的乘积替换这些元素，从而得到 $x \in P$ 的更短字表示，即约化字表示，并且该表示是唯一的。（空字是 e_P的约化表示。）

元素 $x \in P$的约化字表示 $s_1 s_2 \cdots s_r$ 具有如下特征:

a) $s_i \in (H \setminus e_H) \sqcup (G \setminus e_G)$

b) 连续的 s_i 和 s_{i+1} 属于不同的群。

因此， $x \in P$的一个非平凡元素具有以下七种类型之一的唯一约化字表示:

类型 1: $w = h_1 g_1 h_2 g_2 \cdots h_k g_k$, $k \geq 1$,

类型 2: $w = h_1 g_1 h_2 g_2 \cdots h_k g_k\, h$, $k \geq 1$,

*数学系，俄亥俄州立大学，美国俄亥俄州哥伦布市，邮编 43210。电子邮箱：burghele@math.ohio-state.edu

类型 3: $w = g\,h_1g_1h_2g_2\cdots h_kg_k,\quad k\geq 1,$
类型 4: $w = g\,h_1g_1h_2g_2\cdots h_kg_k\,h,\ k\geq 1,$
类型 5: $w = g,$ 类型 6: $w = h,$ 类型 7:
$w = gh.$

由于约化字表示的唯一性，以下事实成立: e:

1. 若两个非平凡元素可交换，则它们属于同一类型；因此，若 x由类型 5 或类型 6 的约化字表示，则 $P_x = G_x$ 或 $P_x = H_x.$

2. 任何类型不同于类型 5 和类型 6 的非平凡元素 $x\in P$，都与类型 1 的某个元素共轭。

3. 以下命题成立:

命题 1.1 设 $w' = h_1\,g_1\,h_2\,g_2\cdots h_r\,g_r$和 $w' = h'_1\,g'_1\,h'_2\,g'_2\cdots h'_r\,g'_{r'}$是两个类型 1 的约化字，分别表示 P 中的元素 x和 x'，使得 $x\cdot x' = x'\cdot x$，并设 c是 r和 $r'.$的最大公约数。那么存在一个类型 1 的约化字 $w_0 = h''_1\,g''_1\,h''_2\,g''_2\cdots h''_c\,g''_c$，使得 w是 w_0的 r/c 个副本串接而成，且 w'是 w_0的 r'/c 个副本串接而成。

观察 1.2
上述第 1 和第 2 项意味着 $\langle P\rangle = e_P\sqcup(\langle H\rangle\setminus e_H)\sqcup(\langle G\rangle\setminus e_G)\sqcup U$，其中 $U = \{\hat{}x\in\langle P\rangle\mid\hat{}x\cap(e_H * G) = \emptyset,\ \hat{}x\cap(H * e_G) = \emptyset\}$，而 P 中元素的中心化子（分别是 $e_H * G\subset P$ 中元素的中心化子）与 G 和 H 中的中心化子（分别）保持相同。

第 3 项（即命题 (1.1)）表明，对于 $x\in\hat{}x\in U$，群-子群对 $(P_x,\{x\})$ 同构于对 $(\mathbb{Z},k(x)\mathbb{Z})$，因此 $N_x\simeq\mathbb{Z}_{k(x)}.$。这里 $k(x)$ 是满足 $x = y^k.$的最大整数 k

2 命题 1.1 的证明

设 $\mathbb{S}$ 为一个符号集。设 $\mathcal{S}:=\{s_1,s_2,\cdots,s_r\cdots,s_n\}$ 为一个有序符号集，其中 $s_i\in\mathbb{S}$（即一个字，其字母取自 $\mathbb{S}$）、 $p<n$ 和 $d = n-p.$

引理 2.1 假设集合 $\mathcal{S}$ 满足:

(i) $s_i = s_{d+i}$ 对于 $i\leq p$, (ii) $s_i = s_{i+p}$ 对于 $i\leq d.$

1. 若 n和 p 互素，则所有 s_i 都相等。
2. 若 c 是 n 和 p 的最大公约数，且 $\mathcal{S}' = s_1$、 s_2、 $\cdots s_c$ 是 $\mathcal{S}$ 中前 c 个符号组成的有序集，则 $\mathcal{S}$ 是由 n/c 个 $\mathcal{S}'.$串接而成的

证明: 对于任意 $r = 1,2,\cdots,d$，定义 $\mathcal{S}(r)\subset\mathcal{S}$ 的子集，它由所有由 $r+kd$ 为 $k = 0,1,\cdots$ 编号的 $\mathcal{S}$ 元素组成，即

$$\mathcal{S}(r) := \{s_r, s_{r+d}, s_{r+2d},\cdots s_{r+kd}\cdots\}.$$

注意，集合 $\mathcal{S}(r)$ 两两不相交，且其并集为 $\mathcal{S}.$

第 1 项的证明: 对于每个 $\mathcal{S}(r)$，令 k_r 为满足 $r+(k_r-1)d\leq p<r+k_rd.$ 的唯一整数。第一个不等式保证

$$r+k_rd-p\leq d. \tag{1}$$

根据假设 (i)， $\mathcal{S}(r)$ 的所有元素都相等；根据假设 (ii)，集合族 $S(r)$ 和 $\mathcal{S}(r+k_rd-p)$ 中的元素相等；

考虑满足以下归纳定义的整数对 (r_i,κ_i):

a) $r_1=1$和 $\kappa_1:=k_1$

b) $r_{i+1}=1+(\kappa_1+\kappa_2+\cdots\kappa_i)d-ip$和 $\kappa_{i+1}=k_{r_{i+1}}$

注意，由不等式 (1) 可知，所有 $r_i\leq d.$

令 $\mathcal{S}_i=:\mathcal{S}(r_i)$。由于 p和 d 互素， $\mathcal{S}_i$ 和 $\mathcal{S}_j$ 对于 $i\neq j$ 不可能相同，因为 d不能整除 $i-j.$。于是，集合 $\mathcal{S}_i,i=1,2,\cdots d$ 构成集合 $\mathcal{S}(r)$ $r=1,2,\cdots d.$的一个排列。假设 (ii) 意味着，对于任意 i， $\mathcal{S}_i$ 和 $\mathcal{S}_{i+1}$ 的元素都相等；因此， $\mathcal{S}$ 的所有元素都相等。

第 2 项的证明：考虑符号集 $\mathbb{S}'=\mathbb{S}\times\mathbb{S}\times\cdots\mathbb{S}$，即 $\mathbb{S}$的 $c-$ 重笛卡尔积；显然 $\mathcal{S}'\in\mathbb{S}'.$。将 $\mathcal{S}$ 视为由 $\mathbb{S}'.$ 个符号构成的有序集 n/c。显然，第 1 项推出第 2 项。

■

为证明命题 1.1，考虑符号集 $\mathbb{S}=(H\backslash e_H)\times(G\backslash e_G)$，并记 $w=s_1\,s_2\,\cdots\,s_n$，以及 $w'=s'_1\,s'_2\,\cdots\,s'_p$。由于串接 ww' 和 $w'w$ 相同，因此有

1. $s'_i=s_i$ 当 $i\leq p$2.

$s'_i=s_{d+i}$ 当 $i\leq p$3. $s_i=s_{i+p}$

当 $i\leq n-p=d$

这意味着

对所有 $i\leq p$都有 $s_i=s_{d+i}$，

且对 $i\leq d$有$s_i=s_{p+i}$，

由引理（2.1）可知， w 恰好是 $w_0=s_1s_2\cdots$的 n/c次串接；又由等式 $s_i=s'_i$（对 $i\leq d$）可知， w' 恰好是 w_0.的 p/c 个副本的串接

3 群环 $R[P]$的循环同调及周期循环同调

，

设 R 为含幺交换环， G为群。回顾一下，群环 $R[G]$ 的约化循环同调（分别为周期循环同调） $HC_*(R[G])$（分别为 $PHC_*(R[G])$）是由平凡子群 e_G 到 G.的包含映射诱导的分裂单射 $HC_*(R[e_g])=HC_*(R)\to HC_*(R[G])$（分别为 $PHC_*(R[e_G])=PHC_*(R)\to PHC_*(R[G])$）的余核。群环 $R[G]$ 的循环同调（分别为周期循环同调）被称为这些同调的未约化版本。显然，未约化版本是约化版本与 R.的循环同调（分别为周期循环同调）的一份拷贝的直和

如 [1] 所示，所有这些同调（无论约化或未约化），记作 $\mathcal{H}_*(R[G])$，都是分次 $R-$模，其为分次 $R-$模 $\mathcal{H}_*(R[G])_{\hat{x}}$ 的直和，这些模按共轭类 $\hat{}x\in\langle G\rangle$索引，并称为 $\hat{}x$的贡献，

$$\mathcal{H}_*(R[G])=\oplus_{\hat{x}\in\langle G\rangle}\mathcal{H}(R[G])_{\hat{x}}.$$

对于每个 $\hat{}x\neq e_G$，约化版本和未约化版本中的贡献相同；但对于 e_G，未约化版本等于约化版本直和 $\mathcal{H}_*(R)$。

对于每个共轭类 $\hat{}x$，定义 $n(\hat{}x):=n(x)$ 为该元素 x的阶，并定义 $k(\hat{}x):=\kappa(x)$ 为满足 $x=y^k$的最大 k；显然，对于同一共轭类中的所有 x， $n(x)$ 和 $\kappa(x)$ 都相同。

回顾一下 [1]中的记号：

1.

$$K_*(R[G]) := \begin{cases} \oplus_{n\geq 0} H_{2n}(BG;R) \text{ if } * = \text{even} \\ \oplus_{n\geq 0} H_{2n+1}(BG;R) \text{ if } * = \text{odd} \end{cases} \qquad \tilde{K}_*(R[G]) := \begin{cases} \oplus_{n> 0} H_{2n}(BG;R) \text{ if } * = \text{even} \\ \oplus_{n\geq 0} H_{2n+1}(BG;R) \text{ if } * = \text{odd} \end{cases}$$

2. 对于 $x \in G$，其中 $n(x) = \infty$

$$T_*(\hat{x};R) = T_*(x;R) := \lim(\cdots \longrightarrow H_{*+2n}(BN_x : r) \xrightarrow{S} H_{*+2n-2}(BN_x;R) \longrightarrow \cdots$$

其中 S 为纤维化 $B\{x\} = S^1 \to BG_x \to BN_x$ 的 Gysin 同态，其中 $N_x = G_x/\{x\}$。该同态在同构意义下仅取决于 x 的共轭类，记作 $T(\hat{}x;\ R)$。

回顾 [1]，当 $0 \neq n(\hat{}x) < \infty$ 时，$\hat{}x$ 的贡献为

$$HC_*(R[G])_{\hat{x}} = H_*(B(N_{\hat{x}}) \times BS^1 \times K(\mathbb{Z}_{n(\hat{x})}, 1); R), \quad PHC_*(R[G])_{\hat{x}} = K_*(R[N_{\hat{x}}])$$

而当 $n(\hat{}x) = \infty$时，其值为

$$HC_*(R[G])_{\hat{x}} = H_*(B(N_x); R), \quad PHC_*(R[G])_{\hat{x}} = T_*(\hat{x};R)$$

而对于 $n(\hat{}x) = 0$，因此 $\hat{}x = e_G$为

$$HC_*(R[G])_{e_G} = H_*(B(G) \times BS^1; R), \quad PHC_*(R[G])_{e_G} = K_*(R[G])$$

and

$$\tilde{HC}_*(R[G])_{e_G} = H_*(B(G) \times BS^1/* \times BS^1; R). \quad P\tilde{HC}_*(R[G])_{e_G} = \tilde{K}_*(R[G])$$

特别地，有

命题 3.1

$$P\tilde{HC}_*(R[G]) = \tilde{K}_*(R[G]) \bigoplus (\oplus_{\hat{x}\in(\langle G\rangle'\setminus e_G)} K_*(BN_{\hat{x}};R)) \bigoplus (\oplus_{\hat{x}\in\langle G\rangle''} T_*(\hat{x};R))$$

where $\langle G\rangle' := \{\hat{x} \in \langle G\rangle \mid n(\hat{x}) < \infty\}$ *and* $\langle G\rangle'' = \{\hat{x} \in \langle G\rangle \mid n(\hat{x}) = \infty\}$.

一个等价的 形式在 [1] 中针对特征零域表述为定理 1'。

设 H 和 G 为两个群，$P = H * G$ 为它们的自由积。回忆一下，$B(H * G) = BH \vee BG$ 是空间 BH 和 BG.的基点并

由上一节的观察 (1.2)（对 P的元素的共轭类及其中心化子的描述）可立即得出

命题 3.2

$$\tilde{HC}_*(R[H * G]) = \tilde{HC}_*(R[H]) \bigoplus \tilde{HC}_*(R[G]) \bigoplus (\oplus_{\hat{x}\in U} H_*(B\mathbb{Z}_{k(\hat{x})};R))$$

$$P\tilde{HC}_*(R[H * G]) = P\tilde{HC}_*(R[H]) \bigoplus P\tilde{HC}_*(R[G]) \bigoplus (\oplus_{\hat{x}\in U} T_*(\hat{x};R))$$

其中

$$H_*(B(\mathbb{Z}_k);R) = \begin{cases} R \text{ for } * = 0 \\ H_1(B(\mathbb{Z}_k);R) \text{ for } * \text{odd} \\ H_2(B(\mathbb{Z}_k);R) \text{ for} * \text{ even} \neq 0 \end{cases}$$

and

$$T_*(\hat{x};R) = \begin{cases} H_1(B(\mathbb{Z}_{k(x)});R) \text{ for } * \text{odd} \\ H_2(B(\mathbb{Z}_{k(x)});R) \text{ for} * \text{ even} \end{cases}$$

注意，若 R 是特征零域上的代数，则 $H_*(B(\mathbb{Z}_k);R)$ 集中于零次，并与 R 同构；对于任意 $\hat{}x \in U$，$T_*(\hat{}x;R)$ 均为零。

为更正 [1] 中的所有错误，我们对 [1] 添加以下勘误

4 群环的循环同调一文的勘误，Comment. Math. Helv., 60, 1985年，第 3 期，354-365

发表于 Comment. Math. Helv., 60 (1985) 第 3 期，354-365 的论文《群环的循环同调》中，作为主要结果定理 I 的直接推论，命题 II 和 IIp 按照原文表述并不成立。若将循环同调和周期循环同调分别替换为其约化版本，并且环 R 是一个 $\mathbb{Q}-$代数（例如特征零域），则这些表述便成立。$R[G]$ 的约化循环同调和约化周期循环同调分别是显然的分裂单射映射 $i_G:\ HC_*(R) \to HC_*(R[G])$ 和 $i_G:\ PHC_*(R) \to PHC(R[G])$ 的商，这些映射由包含映射 $e_G \in G.$ 诱导。此外，为使第 363 页第 1 行的表述正确，应将“$P_x \neq \{x\}$”替换为“$N_x \neq \mathbb{Z}_{k(x)}$，其中 $\mathbb{Z}_k$ 表示阶为 k 的有限循环群，而 $k(x)$ 表示满足 k 的最大整数，且 $x = y^k$.

感谢 Markus Land 提醒我注意到这一点，并建议对群环使用约化循环同调和约化周期循环同调。

对于任意含幺交换环 R，命题 II 和 IIp 应作如下修正

~1. 在命题 II 中，HC_* 应替换为约化版本 HC_*，句子“$R_{\hat{\alpha}} = R$被视为集中于零次的分次模”应替换为“$R_{\hat{\alpha}} = H_*(B(\mathbb{Z}_{k(x)});R)\ x \in \hat{}\alpha$.”

~2. 在命题 IIp 中，PHC_*应替换为其约化版本 PHC_*，并在等式右侧加上 $\oplus_{\hat{x}\in U} T_*(\hat{}x;\ R)$，其中 $U = \{\hat{}x \in \langle H*G\rangle \mid \hat{}x \cap (e_H*G) = \emptyset,\ \hat{}x \cap (H*e_G) = \emptyset\}$，这里 $\langle\Gamma\rangle$ 表示群 Γ中元素的共轭类集合，而 e_Γ 表示 Γ.的单位元

注意到

$$H_*(B(\mathbb{Z}_k);R) = \begin{cases} R \text{ for } * = 0 \\ H_1(B(\mathbb{Z}_k);R) \text{ for } *\text{odd} \\ H_2(B(\mathbb{Z}_k);R) \text{ for } *\ \text{ even} \neq 0 \end{cases}$$

并且对于 $\hat{}x \in U$，以及 $x \in \hat{}x$，群一子群对（G_x，$\{x\}$）与对（$\mathbb{Z}$，$k(x)\mathbb{Z}$）同构，因此 $N_x = \mathbb{Z}_{k(x)}$，并且

$$T_*(\hat{x};R) = \begin{cases} H_1(B(\mathbb{Z}_{k(x)});R) \text{ for } *\text{odd} \\ H_2(B(\mathbb{Z}_{k(x)});R) \text{ for } *\ \text{ even} \end{cases}$$ [1].

参考文献

[1] Dan Burghelea，《群环的循环同调》，Comment. Math. Helv.，60（1985年）第 3 期，354-365

[1]回忆一下，$T_*(\hat{x};\ R) \simeq T_*(x;R) := \lim\leftarrow_n(\ \cdots \longrightarrow H_{*+2n}(B(\mathbb{Z}_{k(x)});\ R) \xrightarrow{\Sigma} H_{*+2n-2}(B(\mathbb{Z}_{k(x)});\ R) \to \cdots)$，其中 Σ 是纤维化 $S^1 = B(k\mathbb{Z}) \to B(Z) \to B(Z_k)$ 的同调 Gysin 序列中的同构；当 R 是一个 $\mathbb{Q}-$ 代数时，它为零。