arXiv:2301.10686v2 [math.RT] 8 Feb 2023

在 Borel 量子环代数的范畴 $\mathcal{O}$ 中构造 R-矩阵的函子

THEO PINET

ABSTRACT. 我们研究如何为任意非扭量子环代数 $U_q(\mathfrak{g})$的 Borel 子代数所对应的范畴 $\mathcal{O}$ 构造 R-矩阵。为此，我们定义一个正合函子 $\mathcal{F}_q$，它将与 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 相关联的范畴 $\mathcal{O}$ 映至与 $U_q(\mathfrak{g})$ 相关联的范畴。此函子 $\mathcal{F}_q$ 与张量积相容，保持不可约性，并交换子范畴 $\mathcal{O}^+$ 和 $\mathcal{O}^-$（D. Hernandez、B. Leclerc，《代数与数论》，2016年）。我们将已有的 $\mathcal{O}^-$ 编织（D. Hernandez，《表示论》，2022年）通过 $\mathcal{F}_q$ 应用于 $\mathcal{O}^+$，从而构造 R-矩阵。我们还利用后者交织算子关于稳定映射的分解，推导出新编织的类似分解。最后，我们还得到格罗滕迪克环 $K_0(\mathcal{O})$ 的新关系，以及 Hernandez–Leclerc 的一个重要环同构 $K_0(\mathcal{O}^+) \simeq K_0(\mathcal{O}^-)$ 的函子性诠释。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 量子环代数与范畴 $\mathcal{O}$ 5 2.1. 代数的定义 5 2.2. 表示论与范畴 $\mathcal{O}$ 7 2.3. q-特征与预基本表示 10 3. 函子 $\mathcal{F}_q$ 13 3.1. 首要性质 14 3.2. 简单模的像 15 3.3. 格罗滕迪克环中的诱导关系 19 3.4. Hernandez–Leclerc 对偶性的函子性解释 22 4. 范畴 $\mathcal{O}$ 25 中的 R-矩阵 4.1. 有限维表示的 R-矩阵 25 4.2. 仿射 R-矩阵 27 4.3. 通过稳定映射进行分解 30 附录 A. Hernandez–Leclerc 对偶性的扩展 33

1. 引言

设 $q \in \mathbb{C}^\times$ 不是单位根，且 $U_q(\mathfrak{g})$ 是一个非扭量子环代数（即某个非扭量子仿射代数在零级处的商）。众所周知（例如参见 [D1]），有限维 $U_q(\mathfrak{g})$-模构成的范畴 $\mathcal{C}$ 对一般简单对象 V 和 W 存在同构 $V \otimes W \simeq W \otimes V$。这些一般编织称为 R-矩阵，它们给出了杨–巴克斯特方程的解，通常借助 $U_q(\mathfrak{g})$ 的普适 R-矩阵构造。

为了在无限维模上得到这样的编织，一个自然的途径是将范畴 $\mathcal{C}$ 替换为与 $U_q(\mathfrak{g})$ 的 Borel 子代数 $U_q(\mathfrak{b})$ 相关联的范畴 $\mathcal{O}$。后一个范畴由 [HJ], 引入，但一般而言并不具有编织结构（例如参见 [BJMST, H5]），因此我们

需要限制所考虑的简单模的类别，以便定义新的 R-矩阵。Hernandez 最近在 [H5] 中完成了这项工作，他找到了在 $\mathcal{O}$ 的一个重要幺半子范畴 $\mathcal{O}^-$ 上获得编织结构的方法。他的方法关键依赖于这样一个事实：对于 $\mathcal{O}^-$ 中的每个单模 V，都存在一个有限维简单 $U_q(\mathfrak{g})$-模序列 $(V_k)_{k\geq 1}$，使得归一化 q-特征序列 $\chi_q(V_k)$（它们是刻画与 $U_q(\mathfrak{b})$ 的某个交换子代数作用相关的特征子空间维数的生成函数）趋于归一化 q-特征 $\chi_q(V)$（在某个形式级数环中，见命题 2.17）。

—

范畴 $\mathcal{O}$ 包含所有有限维 $U_q(\mathfrak{b})$-模，以及 [HJ] 的预基本表示 $L_{i,a}^{\pm}$。后者由一个符号 $\pm$、一个标量$a \in \mathbb{C}^\times$ 以及集合 $I = \{1, ..., n\}$ 中的一个元素 i 来参数化，其中 n 是作为 $U_q(\mathfrak{g})$ 底层代数的有限维单李代数 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的秩。这些表示在 Baxter Q-算子的研究中发挥着核心作用，Frenkel–Hernandez [FH1] 曾利用它们证明了 Frenkel–Reshitikhin [FR] 关于量子可积系统谱的猜想。

子范畴 $\mathcal{O}^-$ 由负预基本表示 $L_{i,a}^{-}$ 以及有限维 $U_q(\mathfrak{b})$-模生成。另有一个类似的子范畴 $\mathcal{O}^+$，其中负预基本表示被正预基本表示取代。子范畴$\mathcal{O}^{\pm}$ 在簇代数的幺半范畴化研究中至关重要（例如参见 [HL2, KKOP1, KKOP2]），并且通过格罗滕迪克环的同构 $D\colon K_0(\mathcal{O}^-) \simeq K_0(\mathcal{O}^+)$ 联系起来，该同构将简单模的类映到简单模的类。我们将这一同构称为 *Hernandez–Leclerc* 对偶。

可以提出以下自然问题：

1. 我们能否为正子范畴 $\mathcal{O}^+$ 中的单模显式构造 R-矩阵？这些显式的 R-矩阵是否与 Hernandez 为负子范畴 $\mathcal{O}^-$ 构造的矩阵有关？2. 我们能否通过某种关于模的张量积表现良好的可逆正合函子，将 $\mathcal{O}^-$ 与 $\mathcal{O}^+$ 联系起来？子范畴 $\mathcal{O}^{\pm}$ 之间是否存在比 Hernandez–Leclerc 对偶 D 更深层的联系：$K_0(\mathcal{O}^-) \simeq K_0(\mathcal{O}^+)$?

在 $\mathcal{O}^+$ 中简单对象的归一化 q-特征与有限维 $U_q(\mathfrak{g})$-模的归一化特征之间的关系，比负子范畴 $\mathcal{O}^-$ 中的情形更为复杂（见第 2.3 节），因此 [H5] 中采用的方法无法直接用于问题 1。此外，归一化 q-特征方面的这种差异并非子范畴 $\mathcal{O}^{\pm}$ 之间的唯一差异，所以乍看之下，正面回答问题 2 似乎毫无希望。例如，[H5] 中定义的稳定映射（它们是 $U_q(\mathfrak{b})$-模张量积上的特殊自同构）在底层模是 $\mathcal{O}^-$ 的简单对象时具有唯一确定性，但对于 $\mathcal{O}^+$ 中的简单模，其定义可能不唯一（见第 4.3 节）。此外，范畴 $\mathcal{O}^{\pm}$ 与移位量子仿射代数表示之间的联系也有所不同。

移位量子仿射代数 $U_q^{\mu}(\mathfrak{g})$ 是量子环代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 的一种变体。它起源于 3 维 $N = 4$ SUSY 箭图规范理论的量子化 K-理论库仑分支背景（参见 [FT]），并由有限维李代数 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的余权 μ 参数化，其中 $\dot{\mathfrak{g}}$ 是 $U_q(\mathfrak{g})$ 的底层李代数。在 [H4], Hernandez 为$U_q^{\mu}(\mathfrak{g})$ 定义了一个范畴 $\mathcal{O}$（记作 $\mathcal{O}_\mu$），并在 $\mu = \omega_i^\vee$（分别在 $\mu = -\omega_i^\vee$）时，为该代数构造了正（负）预基本表示的类似物，其中 $\omega_i^\vee$ 是 $\dot{\mathfrak{g}}$的第 i 个基本余权（另见 [Z1]，其中为移位杨氏代数给出了类似的构造）。如此构造的负预基本表示是无限维简单模，而正预基本表示的维数均为 1。这种不对称性源于：当余权 μ 为反主导时，移位代数 $U_q^{\mu}(\mathfrak{g})$ 包含 Borel 子代数 $U_q(\mathfrak{b}) \subseteq U_q(\mathfrak{g})$ 的一个副本

（而当 μ 为主导时则不成立）。因此， $\mathcal{O}^-$ 的 $U_q(\mathfrak{b})$-模 $L_{i,\,a}^-$ 可以实现为一个简单 $U_q^\mu(\mathfrak{g})$-模（对于 $\mu=-\omega_i^\vee$）的限制；而对于 $\mathcal{O}^+$ 中 $U_q(\mathfrak{b})$ 的正预基本表示，则无法如此实现。

然而，即使存在这些技术上的差异，我们仍可将对应于不同量子参数 q 的子范畴 $\mathcal{O}^\pm$ 联系起来。 [HJ] 中已部分实现了这一点，其中给出了一种从 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$ 的负预基本表示构造 $U_q(\mathfrak{b})$ 的正预基本表示的方法。遗憾的是，所给的方法不具有函子性，且原则上 无法将其推广到 $\mathcal{O}^+$ 的所有对象。

本文解决了这一问题，并定义了一个函子 $\mathcal{F}_q$ ，将与 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 相关联的范畴 $\mathcal{O}$ 映到与 $U_q(\mathfrak{g})$ 相关联的范畴。该函子将 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$ 的负（正）预基本表示映到 $U_q(\mathfrak{b})$ 的正（分别为负）预基本表示，并满足问题 2 中给出的条件。它自然地源自代数同构 $\sigma_q\colon U_q(\mathfrak{g})\to U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 的拉回；该同构在 $U_q(\mathfrak{g})$ 的通常 Drinfeld–Jimbo 生成集 $\{e_i,f_i,k_i^{\pm1}\}_{i=0}^n$ 上定义如下：

$$\sigma_q(e_i)=-k_i^{-1}e_i,\quad \sigma_q(f_i)=-f_ik_i\ \text{ and }\ \sigma_q(k_i^{\pm1})=k_i^{\mp1}.$$

显然，σ_q 限制为同构 $U_q(\mathfrak{b})\simeq U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$，而沿 σ_q 拉回 σ_q^* 给出一个正合可逆函子，该函子保持模的维数和不可约性。此外，这个拉回与范畴 $\mathcal{O}$ 的概念相容，因此诱导出一个函子$\mathcal{F}_q\colon \mathcal{O}_{q^{-1}}\to\mathcal{O}_q$，其中 $\mathcal{O}_{q^{\pm1}}$ 是与 $U_{q^{\pm1}}(\mathfrak{g})$ 相关联的范畴 $\mathcal{O}$ 。我们的首要结果如下：

定理 1.1. 取 $V,W\in\mathcal{O}_{q^{-1}}$。则 $\mathcal{F}_q(V\otimes W)\simeq\mathcal{F}_q(W)\otimes\mathcal{F}_q(V)$ 作为 $U_q(\mathfrak{b})$-模 .

定理 1.2. 函子 $\mathcal{F}_q$ 将 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 的全子范畴 $\mathcal{O}_{q^{-1}}^\pm$ 映到 $\mathcal{O}_q$ 的子范畴 $\mathcal{O}_q^\mp$。此外，存在一个 $\gamma\in\mathbb{C}^\times$，使得对所有 $i\in I$ 和 $a\in\mathbb{C}^\times$，都有 $\mathcal{F}_q(L^{\pm}_{,i\,a^{q^{-1}}},)\simeq L^{\mp}_{,i\,a^{q},a\gamma}$（其中 $L^{\pm}_{,i\,a^{q^{-1}}}$，和 $L^{\pm}_{,i\,a^{q}}$，分别是 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$ 和 $U_q(\mathfrak{b})$ 的预基本表示）。

除了肯定地回答（略作修改后的）问题 2 外，这些结果也回答了问题 1，因为借助 $\mathcal{F}_q$ 以及 [H5] 中给出的 $\mathcal{O}_{q^{-1}}^-$ 的编织，我们可以为 $\mathcal{O}_q^+$ 中的正子范畴$\mathcal{O}_q^+$找到显式编织。下面来具体说明。

众所周知（例如参见 [H5]），$U_q(\mathfrak{b})$-模 V 可以变形为 $U_{q,u}(\mathfrak{b})=U_q(\mathfrak{b})\otimes\mathbb{C}(u)$ 上的模 $V(u)$，其中 u 是一个称为谱参数的形式变量。（这是通过 $U_{q,u}(\mathfrak{b})$ 的自同构 τ_u 实现的，参见第 2.1 节。）在这一形式体系下， [H5] 中给出的、针对 $\mathcal{O}_{q^{-1}}^-$ 的简单对象 V,W 的仿射R-矩阵，是一个 $U_{q,u}(\mathfrak{b})$-线性同构

$$R_{V,W}(u):V(u)\otimes W\to W\otimes V(u)$$

它关于 u 是亚纯的；当 $u=1$ 既不是 $R_{V,W}(u)$ 的奇点，也不是其逆的奇点时，它特化为一个 $U_q(\mathfrak{b})$-线性编织 $V\otimes W\simeq W\otimes V$。

现在取 V和 W作为 $\mathcal{O}_q^+$中的简单对象。令 V'和 W'为 $\mathcal{O}_{q^{-1}}^-$中的单模，其中$V=\mathcal{F}_q(V')$ 和 $W=\mathcal{F}_q(W')$（见定理 1.2）。再令

$$R'(u):W'(u)\otimes V'\to V'\otimes W'(u)$$

为 [H5]中给出的仿射 R-矩阵。那么可以应用定理 1 得到一个可逆映射

$$V\otimes W(u^{-1})\simeq\mathcal{F}_q(W'(u^{-1})\otimes V')\xrightarrow{R'(u^{-1})}\mathcal{F}_q(V'\otimes W'(u^{-1}))\simeq W(u^{-1})\otimes V$$

由此通过谱变形诱导出一个亚纯的$U_{q,u}(\mathfrak{b})$-线性同构 $R_{V,W}(u)\colon V(u)\otimes W\to W\otimes V(u)$。后一个同构就是所需的 R-矩阵，适用于 V,W。它

与上述映射 $R'(u^{-1})$的极点集合完全相同；当 $u=1$ 既不是 $R'(u)$ 的极点，也不是其逆的极点时，它特化为一个 $U_q(\mathfrak{b})$-线性编织。

函子 $\mathcal{F}_q$ 还可用于对 Hernandez–Leclerc 对偶性 D 在一个有趣的子范畴$\mathcal{O}_{\mathbb{Z},\,q}$ 上的函子性解释 $\mathcal{O}_q$（见第 3.4 节）。更确切地说，（假设 q 是一个形式变量并改变基域），我们可以将函子 $\mathcal{F}_q$ 与一个典范函子 $\mathcal{B}_{q^{-1},\,q}$ 复合，从而得到 $\mathcal{O}_q$的一个自函子 $\mathcal{D}_q$。这引出了我们的第三个主要结果：

定理 1.3。 自函子 $\mathcal{D}_q$ 保持不可约性，并在 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 上诱导出一个环自同构；该环自同构在 $\mathcal{O}_q^{\pm}$与 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z},\,q}$交集的格罗滕迪克环上等于 $D^{\pm 1}$ 。

这给出了对偶性 D 在 $K_0(\mathcal{O}_{\mathbb{Z},\,q})$上的一个部分扩张。然而，我们还可以更进一步~，在完整的格罗滕迪克环 $K_0(\mathcal{O}_q)$上构造 D 的一个扩张 D_q （从而回答 Hernandez–Leclerc 提出的一个问题）。这在附录 A 中完成（当 $q\in\mathbb{C}^\times$ 不是单位根或 q 形式变量时），再次利用 $\mathcal{F}_q$ 与 $K_0(\mathcal{O}_q)$的内在结构。尽管如此，所得到的扩张并非由 $\mathcal{O}_q$ 的自函子诱导，而且目前尚不清楚它是否将简单模映射为简单模。

我们以介绍函子 $\mathcal{F}_q$ 的另外两种用途作为本引言的结尾。其他应用将在第 4 节末尾给出，但其研究留待未来工作。

首先，格罗滕迪克环的同构 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})\simeq K_0(\mathcal{O}_q)$ 由 $[V]\mapsto[\mathcal{F}_q(V)]$ 在模的等价类上给出，可用于根据 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})$ 中已知的关系，为 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 导出新的关系。本文在第 3.3 节沿着这一思路展开，并将上述同构应用于 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})$ 中两个引人注目的关系系统，即：

~1. [FH2] 的 QQ-系统（与 Bethe Ansatz 方程密切相关）；以及 2. [HL2] 的 QQ^*-系统（描述了 $K_0(\mathcal{O}_q^+)$ 上的簇代数结构）。

只有第一个应用为 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 导出了新的关系。最后一个应用（结合 [H5] 的结果）则通过一个简单端项构成的非分裂短正合列，给出了 QQ^*-系统的一种新颖的“范畴化版本”。

另一方面，Hernandez 证明了，范畴 $\mathcal{O}_q^-$ 的仿射 R-矩阵可以用稳定映射来分解。将函子 $\mathcal{F}_q$ 应用于相应的分解，使我们能够用我们称为修正稳定映射的映射，分解上述得到的 $\mathcal{O}_q^+$ 的 R-矩阵。与 Hernandez 的稳定映射（针对 $\mathcal{O}_q^-$ 的简单对象）不同，这些修正映射并非关于 Cartan–Drinfeld 子代数 $U_q(\mathfrak{h}^+)$ 在 $U_q(\mathfrak{b})$ 上的作用的态射，而是关于子代数$\sigma_q(U_{q^{-1}}(\mathfrak{h}^+))\subseteq U_q(\mathfrak{b})$ 作用的态射。这是针对 $\mathcal{O}_q^-$ 的简单对象的稳定映射与其修正类比之间唯一实质性的区别。

注 1.4。 在完成本工作的第一个版本后，我们得知，我们的一些结果与 [Z2, Lemma 1.9] 中针对李超代数 $\dot{\mathfrak{g}}=\mathfrak{gl}(M|N)$ 的结果相似（其中 $M,N\geq 0$）。事实上，在 [Z2], 中，张运用一个精心选择的代数态射，定义了一个函子，将与 $\dot{\mathfrak{g}}=\mathfrak{gl}(M|N)$ 相关的范畴 $\mathcal{O}$ 和与 $\dot{\mathfrak{g}}=\mathfrak{gl}(N|M)$ 相关的范畴联系起来（量子参数 q 相同）。随后，张利用 $\mathfrak{g}$ 为 A 型 $U_q(\mathfrak{g})$ 的所谓 RTT（或 RLL）实现（参见例如 [DF, FRT, Z4]），证明由此定义的函子会颠倒张量积并反转预基本表示的符号。他还认为，其结果可以理解为 Hernandez–Leclerc 对偶性 D （即 $K_0(\mathcal{O}^+)$ 与 $K_0(\mathcal{O}^-)$ 之间的对偶性）的范畴化。这与我们的定理 1.1、1.2 和 1.3 相似。然而， [Z2] 中给出的代数态射不同于我们的同构 σ_q，且无法用于 A 型以外的李代数 $\mathfrak{g}$。因此，我们的结果统一处理所有李代数 $\mathfrak{g}$ 的情形，即使在 A 型情形下也颇有意义（而且一般而言尚无已知的类似结果）。

本文组织如下。第 2 节回顾量子环代数、其 Borel 子代数以及范畴 $\mathcal{O}$ 的相关事实，并回顾范畴 $\mathcal{O}^{\pm}$ 的定义以及 Hernandez–Leclerc 对偶性 $D : K_0(\mathcal{O}^-) \simeq K_0(\mathcal{O}^+)$ 的定义。在第 3 节中，我们定义函子 $\mathcal{F}_q : \mathcal{O}_{q^{-1}} \to \mathcal{O}_q$ 并证明定理1.1和1.2。此外，我们将函子 $\mathcal{F}_q$ 应用于 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})$ 的关系，并研究由此得到的 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 的关系。本节最后给出对偶性 D 的函子性诠释。最后，第 4 节致力于为范畴 $\mathcal{O}^+$ 显式构造（并分解）编织。为保持完整性，文中还回顾了有限维模及负范畴 $\mathcal{O}^-$ 中对象的相关构造（及分解）。附录以证明映射 D 可扩张为整个 $K_0(\mathcal{O})$ 的环自同构作结。

致谢。 若没有 David Hernandez 的指导，本研究便不可能完成，我们谨此向他致以诚挚谢意。我们也感谢 Ryo Fujita、Yvan Saint-Aubin 和 Huafeng Zhang 提供有益的讨论。最后，作者感谢 Alexis Langlois-R´emillard 阅读本文初稿。本项目获得欧盟 Horizon 2020 研究与创新计划资助，资助依据为 Marie Sk-lodowska-Curie 资助协议（编号 945332）。本研究还获得加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）颁发的奖学金（ CGS-D）资助。对此项资助，我们深表感谢。

2. Quantum loop algebras and the category $\mathcal{O}$

我们在此回顾关于量子环代数及其 Borel 子代数表示论的一些已知定义和结果。特别地，我们重述范畴 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{O}^{\pm}$的定义。有关细节请参阅 [HJ、FH1] ，量子仿射代数的恰当入门介绍请参阅 [CP1] 。关于量子环代数表示论的应用，请参阅 [H3、K、MO] 。

本文中， $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 以及所有向量空间、代数和张量积均定义在$\mathbb{C}$ 上，除非另有说明。

2.1. 代数的定义。设 $C = (C_{i,\ j})_{0 \leq i,\ j \leq n}$ 是一个非扭曲仿射型不可分解 Cartan矩阵，并设 $\mathfrak{g}$ 为相应的仿射Kac-Moody代数。令 D为唯一的对角矩阵，其对角元素 $d_0, \ldots\ldots, d_n \in \mathbb{N}_{>0}$ 互素，且满足 DC是对称矩阵。存在唯一的向量 $\vec{a}$，其元素 $a_0, \ldots\ldots, a_n \in \mathbb{N}$互素，且满足 $a_0 = 1$ 和 $C\vec{a} = 0$ （参见 [Kac，第 4]章）。

设 $I = \{1, \ldots, n\}$，并用 $\dot{\mathfrak{g}}$ 表示 Cartan矩阵为 $(C_{i,\ j})_{\ i,\ j \in I}$的有限维单李代数。令 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ 和 $\{\omega_i\}_{i \in I}$ 分别为 $\dot{\mathfrak{g}}$的单根和基本权，其中 $\mathfrak{h}$ 是其 Cartan子代数。令 $\alpha_0 = -(a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n)$，其中

$$Q = \oplus_{i \in I}\mathbb{Z}\alpha_i,\ Q^+ = \oplus_{i \in I}\mathbb{N}\alpha_i \text{ and } P = \oplus_{i \in I}\mathbb{Z}\omega_i.$$

我们还定义 $P_{\mathbb{Q}} = P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$，其偏序定义为：当且仅当 $\omega - \omega' \in Q^+$ 时，$P_{\mathbb{Q}} = P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$。 .

固定一个不是单位根的量子参数 $q \in \mathbb{C}^{\times}$，并假设对于某个 $h \in \mathbb{C}$， $q = e^h$，使得对任意 $r \in \mathbb{C}$， q^r 都有定义。对于满足以下条件的 $i \in I$，我们将使用 $q_i = q^{d_i}$

$$[m]_x = \frac{x^m - x^{-m}}{x - x^{-1}},\ [m]_x! = \prod_{r=1}^{m}[r]_x \text{ and } \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix}_x = \frac{[m]_x!}{[p]_x![m-p]_x!}$$

对于 $x \in \mathbb{C}^{\times}$ 不是单位根且 $m,\ p \in \mathbb{N}$ 满足 $m \geq p$的情况。若 $m < p$，我们令 $\begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix}_x = 0$。

量子 m 环代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 是由 $\{e_i, f_i, k_i^{\pm 1}\}_{i=0}^n$ 生成的（含幺） $\mathbb{C}$-代数，其满足

$$k_ik_j = k_jk_i, \quad k_i^{\pm 1}k_i^{\mp 1} = 1 = k_0^{a_0}k_1^{a_1}\dots k_n^{a_n}, \quad k_ie_jk_i^{-1} = q_i^{C_{i,j}}e_j, \quad k_if_jk_i^{-1} = q_i^{-C_{i,j}}f_j,$$
$$[e_i, f_j] = \delta_{i,j}\frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad \sum_{r=0}^{1-C_{i,j}}(-1)^r e_i^{(1-C_{i,j}-r)}e_je_i^{(r)} = \sum_{r=0}^{1-C_{i,j}}(-1)^r f_i^{(1-C_{i,j}-r)}f_jf_i^{(r)} = 0$$

对于 $0 \le i, j \le n$，并且其中，对于最后一个关系， $i \ne j$ 和 $x_i^{(r)} = x_i^r/[r]_{q_i}!$ （对于 $x_i = e_i, f_i$）。它是一个关于余乘法和反 antipode 的霍普夫代数（反 antipode 是 $U_q(\mathfrak{g})$ 的反自同构），由下式给出（对于 $0 \le i \le n$）

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + k_i \otimes e_i, \quad \Delta(f_i) = f_i \otimes k_i^{-1} + 1 \otimes f_i, \quad \Delta(k_i) = k_i \otimes k_i$$
$$S(e_i) = -k_i^{-1}e_i, \quad S(f_i) = -f_ik_i, \quad S(k_i) = k_i^{-1}.$$

自 Drinfeld、Beck 和 Damiani 的开创性工作以来（参见 [D1、B、Da1、Da2]），人们已知$U_q(\mathfrak{g})$还有另一组生成元 $\{x_{i,r}^{\pm}, \phi_{i,r}^{\pm} \,|\, i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$，满足 $\phi_{i,0}^{\pm} = k_i^{\pm 1}$以及 $\phi_{i,\pm m}^{\pm} = 0$，若 $m < 0$。这些生成元的定义关系为 $k_i^{\pm 1}k_i^{\mp 1} = 1 = k_0^{a_0}k_1^{a_1}\dots k_n^{a_n}$，并附加关系（$i, j \in I$和 $r, s, m \in \mathbb{Z}$，其中 $m \ne 0$）

$$[\phi_{i,r}^{\pm}, \phi_{j,s}^{\pm}] = [\phi_{i,r}^{\pm}, \phi_{j,s}^{\mp}] = 0, \quad k_ix_{j,r}^{\pm}k_i^{-1} = q_i^{\pm C_{i,j}}x_{j,r}^{\pm}, \quad [h_{i,m}, x_{j,r}^{\pm}] = \pm\tfrac{1}{m}[mC_{i,j}]_{q_i}x_{j,r+m}^{\pm},$$
$$[x_{i,r}^{+}, x_{j,s}^{-}] = \delta_{i,j}\frac{\phi_{i,r+s}^{+} - \phi_{i,r+s}^{-}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad x_{i,r+1}^{\pm}x_{j,s}^{\pm} - q_i^{\pm C_{i,j}}x_{j,s}^{\pm}x_{i,r+1}^{\pm} = q_i^{\pm C_{i,j}}x_{i,r}^{\pm}x_{j,s+1}^{\pm} - x_{j,s+1}^{\pm}x_{i,r}^{\pm}$$

以及，对于 r'， r_1，……， $r_p \in \mathbb{Z}$和 $i \ne j$，其中 $p = 1 - C_{i,\ j}$，

$$\sum_{\pi\in\Sigma_p}\sum_{0\le l\le p}(-1)^l \begin{bmatrix} p \\ l \end{bmatrix}_{q_i} x_{i,r_{\pi(1)}}^{\pm}\dots x_{i,r_{\pi(l)}}^{\pm}x_{j,r'}^{\pm}x_{i,r_{\pi(l+1)}}^{\pm}\dots x_{i,r_{\pi(p)}}^{\pm} = 0$$

其中 Σ_p 是作用在 p 个字母上的对称群。这些关系中出现的元素 $h_{i,\ m}$ 由生成函数相等这一条件定义

$$\phi_i^{\pm}(z) = \sum_{m\ge 0}\phi_{i,\pm m}^{\pm}z^{\pm m} = k_i^{\pm 1}\exp\left(\pm(q_i - q_i^{-1})\sum_{m>0}h_{i,\pm m}z^{\pm m}\right).$$

例 2.1 （例如参见 [FH1，例 2。1]）。对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$，两个生成集之间的对应关系如下

$$e_0 = k_1^{-1}x_{1,1}^{-}, \quad e_1 = x_{1,0}^{+}, \quad f_0 = x_{1,-1}^{+}k_1 \quad and \quad f_1 = x_{1,0}^{-}.$$

一般而言，对于 $i \in I$，我们仍有 $e_i = x_{i,\ 0}^{+}$ 和 $f_i = x_{i,\ 0}^{-}$，但 e_0和 f_0 的可能表达式要复杂一些（且不唯一；详情见 [CP2]）。

代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 按照 $\deg x_{i,r}^{\pm} = \pm\alpha_i$ and $\deg\phi_{i,r}^{\pm} = 0$ for $r \in \mathbb{Z}$ 赋予了 Q-分次。它还具有由 $\deg e_0 = -\deg f_0 = 1$ with $\deg e_i = \deg f_i = \deg k_i^{\pm 1} = 0$ for $i \in I$ 给出的$\mathbb{Z}$-分次。后者的 $\mathbb{Z}$-分次满足：对于任意 $i \in I$ 和 $m \in \mathbb{Z}$，$\deg x_{i,r}^{\pm} = \deg\phi_{i,r}^{\pm} = r$。固定 $a \in \mathbb{C}^\times$后，我们有一个霍普夫代数自同构 τ_a of $U_q(\mathfrak{g})$，使得当 x 是齐次的，且其 $\mathbb{Z}$-次数为 m时， $\tau_a(x) = a^m x$。我们还可以将 a 替换为形式变量 u，从而得到代数$U_{q,u}(\mathfrak{g}) = U_q(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}(u)$的一个自同构。（使用变量 u时，我们总是假定基域为 $\mathbb{C}(u)$。因此，特别地，当考虑 $\mathbb{C}(u)$-向量空间的张量积时，我们将 $\otimes$ 写作 $\otimes_{\mathbb{C}(u)}$。这是本节开头所述规则的唯一例外。）关于 τ_a 和 τ_u 的模 V 的拉回分别记为 $V(a)$和 $V(u)$。

本文关注 Borel 子代数 $U_q(\mathfrak{b}) \subseteq U_q(\mathfrak{g})$ 的表示论，它定义为由集合 $\{e_i, k_i^{\pm 1}\}_{i=0}^n$ 生成的子代数。它包含元素 $\phi_{i,r}^+, x_{i,r}^+$ 和 $x_{i,m}^-$，其中 $i \in I, r \geq 0$ 和 $m > 0$，并具有由 $\{k_i^{\pm 1}, h_{i,m} \mid i \in I, m > 0\}$ 生成的交换子代数 $U_q(\mathfrak{h}^+) \subseteq U_q(\mathfrak{g})$（参见 [HJ]）。代数 $U_q(\mathfrak{b})$ 也是 $U_q(\mathfrak{g})$ 的 Hopf 子代数，并继承了上文定义的两种分次。特别地，给定一个 $U_q(\mathfrak{b})$-模 V，相对于 $a \in \mathbb{C}^\times$ 的平移 $V(a)$ 是一个定义良好的 $U_q(\mathfrak{b})$-模。

我们有一个向量空间同构 [B, BCP]

$$U_q(\mathfrak{g}) \simeq U_q^-(\mathfrak{g}) \otimes U_q^0(\mathfrak{g}) \otimes U_q^+(\mathfrak{g})$$

其中，$U_q^\pm(\mathfrak{g})$ 和 $U_q^0(\mathfrak{g})$ 分别是由 $\{x_{i,r}^\pm \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$ 和 $\{\phi_{i,r}^+, \phi_{i,-r}^- \mid i \in I, r \in \mathbb{N}\}$ 生成的子代数。此外，还有一个三角分解 [B, HJ]

$$U_q(\mathfrak{b}) \simeq U_q^-(\mathfrak{b}) \otimes U_q^0(\mathfrak{b}) \otimes U_q^+(\mathfrak{b})$$

其中 $U_q^\pm(\mathfrak{b}) = U_q(\mathfrak{b}) \cap U_q^\pm(\mathfrak{g})$ 且 $U_q^0(\mathfrak{b}) = U_q(\mathfrak{b}) \cap U_q^0(\mathfrak{g})$。根据 [HJ], 的结果，我们有

$$U_q^+(\mathfrak{b}) = \langle x_{i,m}^+ \rangle_{i \in I, m \geq 0} \text{ and } U_q^0(\mathfrak{b}) = \langle \phi_{i,m}^+, k_i^{\pm 1} \rangle_{i \in I, m > 0}$$

但是，子代数 $U_q^-(\mathfrak{b})$ 无法用 Drinfeld 生成元^作出如此简单的描述（除非 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$，因为此时 $U_q^-(\mathfrak{b}) = \langle x_{1,m}^- \rangle_{m>0}$）。

2.2. 表示论与范畴 $\mathcal{O}$。 </style}将由 $\{k_i^{\pm 1}\}_{i \in I}$ 生成的交换子代数记为 $\mathfrak{t} \subseteq U_q(\mathfrak{b})$，并考虑带有逐点乘法所诱导群结构的 $\mathfrak{t}^\times = (\mathbb{C}^\times)^I$。对于一个 $U_q(\mathfrak{b})$-模 V 以及 $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \mathfrak{t}^\times$，$V$ 中与 μ 相关联的权空间 V_μ 是 $\mathfrak{t}$-特征空间

$$V_\mu = \{v \in V \mid k_i v = \mu_i v \text{ for any } i \in I\}.$$

若 $V_\mu \neq 0$，则称 μ 是 V 的一个权，并将 V 的权集记为 $P(V)$。

存在群的单射态射 $: P_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{t}^\times$，其在基本权上的定义为 $\omega_i = (\omega_i(j))_{j \in I}$，其中 $\omega_i(j) = q_i^{\delta_{ij}}$。我们利用此态射将 $P_{\mathbb{Q}}$ 上的自然序传递到 $\mathfrak{t}^\times$。换言之，若 $\nu\mu^{-1} \in Q_+$，我们就记 $\mu \leq \nu$ 属于 $\mathfrak{t}^\times$。显然，

$$\phi_{i,r}^\pm V_\mu \subseteq V_\mu \text{ and } x_{i,r}^\pm V_\mu \subseteq V_{\mu \overline{\alpha_i}^{\pm 1}}.$$

我们有通常李代数理论中 BGG 类的如下类似物 $\mathcal{O}$。

定义 2.2 ([HJ，定义 3.8])。范畴 $\mathcal{O}$ 是所有 $U_q(\mathfrak{b})$-模所成范畴的全幺半子范畴，其对象为满足以下条件的模 V

(i) V 是 $\mathfrak{t}$-可对角化的，即 $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{t}^\times} V_\mu$；(ii) 对所有 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$，$\dim V_\mu < \infty$，且 (iii) 对某些 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathfrak{t}^\times$，$P(V) \subseteq \bigcup_{i=1}^s D(\lambda_i)$，其中 $D(\lambda) = \{\mu \in \mathfrak{t}^\times \mid \mu \leq \lambda\}$。

换言之，$(\mathfrak{b})$-模 V 属于 $\mathcal{O}$，当且仅当它分解为有限维权空间的直和，且权有适当的上界（对 $\leq$ 而言）。

研究范畴 $\mathcal{O}$ 时，一个重要概念是 ℓ-权空间（其中 ℓ 表示环）。这些是模 V 关于交换代数 $U_q(\mathfrak{h}^+)$ 的（同时）广义特征空间。更准确地说，记满足 $\Psi_{i,0} \neq 0$（对每个 $i \in I$）的序列 $\Psi \in (\Psi_{i,r})_{i \in I, r \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ 所成的集合为 $\mathfrak{t}_\ell^\times$。那么，对这样的 $\Psi \in \mathfrak{t}_\ell^\times$ 以及一个固定的 $U_q(\mathfrak{b})$-模 V，我们称子空间

$V_\Psi = \{v \in V \mid$存在 $p \in \mathbb{N}$，使得对所有 $i \in I$ 和 $r \geq 0\}$，均有 $(\phi_{i,r}^+ - \Psi_{i,r})^p v = 0$

ℓ的权空间 V，与 Ψ 相关联。若 $V_\Psi \neq 0$，我们称 Ψ 是 V 的一个 ℓ-权。

我们将给定序列 $\Psi = (\Psi_{i,\,r})_{i\in I,\ r\geq 0} \in \mathfrak{t}_\ell^\times$ 与相应的生成函数序列 $(\Psi_i(z))_{i\in I}$ $\Psi_i(z) = \sum_{r\geq 0} \Psi_{i,\,r} z^r$相关联。此外，我们利用形式幂级数的标准乘法赋予 $\mathfrak{t}_\ell^\times$ 群结构。于是，存在一个自然的满射群态射 $\varpi\colon \mathfrak{t}_\ell^\times \to \mathfrak{t}^\times$，它由在 $z = 0$ 处求值得到

$$\varpi((\Psi_i(z))_{i\in I}) = (\Psi_i(0))_{i\in I} = (\Psi_{i,0})_{i\in I}$$

并且，对于每个 $\Psi \in \mathfrak{t}_\ell^\times$，我们都有一个分解 $\Psi = \varpi(\Psi)\Psi_{\mathrm{norm}}$，其中 Ψ_{norm} 满足 $\varpi(\Psi_{\mathrm{norm}})$ 是平凡的。我们称 Ψ 的常数部分为 $\varpi(\Psi)$。

在我们的研究中使用 ℓ-权的一个首要理由是，$\mathcal{O}$ 中的每个对象 V 都是其 ℓ-权空间之和（例如参见 [H5, FR]）。此外，对任意 $\Psi \in \mathfrak{t}_\ell^\times$，这些空间也都是有限维的$V_\Psi \subseteq V_{\varpi(\Psi)}$。然而，关于 ℓ-权，最重要的一点是，它们可用于参数化范畴 $\mathcal{O}$的简单对象。

定义 2.3 ([HJ，定义 3.2])。设 $\Psi = (\Psi_{i,r})_{i\in I, r\geq 0} \in \mathfrak{t}_\ell^\times$ 并固定一个 $U_q(\mathfrak{b})$-模 V。若存在非零的 $v \in V$满足 $V = U_q(\mathfrak{b})v$，且 $e_i v = 0$满足 $\phi_{i,r}^+ v = \Psi_{i,r} v$ 对所有 $i \in I$ 和 $r \geq 0$均成立，则称 V具有最高 ℓ-权 Ψ。此时称该 v 为最高 ℓ-权向量。

最高 ℓ-权 $\Psi \in \mathfrak{t}_\ell^\times$ 由最高 ℓ-权模 V唯一确定，且对应的 ℓ-权空间 V_Ψ 的维数为 1。特别地，最高 ℓ-权向量 $v \in V$在相差一个标量因子的意义下唯一确定。这样的向量 v 还满足 $U_q^+(\mathfrak{b})v = 0$，因此$V = U_q(\mathfrak{b})v = U_q^-(\mathfrak{b})v$ 由前一小节给出的三角分解可得。

我们可以针对 ℓ-权的概念定义 Verma 模，并证明如下结果，这与通常的 Kac-Moody 理论（及其相应的权概念）中的情形相同。

定理 2.4（[HJ，命题 3。4]）。设 $\Psi \in \mathfrak{t}_\ell^\times$。则存在唯一的（在同构意义下）单 U_q（$\mathfrak{b}$）模 L（Ψ），其最高 ℓ-权为 Ψ。

V 的 $\mathcal{O}$ 中的简单对象必然具有最高 ℓ-权。事实上，我们可以在 $P(V)$中选取极大的 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$，并利用 V的 ℓ-权空间分解，找到满足 $V_\Psi \neq 0$且 $\varpi(\Psi) = \mu$的 $\Psi \in \mathfrak{t}_\ell^\times$。由于 $\dim V_\Psi < \infty$，存在一个 $v \in V_\Psi$，它是所有$\phi_{i,\,r}^+$、的共同特征向量，并满足 $i \in I$ 和 $r \geq 0$。（注意，只需找到对有限多个$\phi_{i,\,m}^+$均为特征向量的向量，因为 $\dim V_\Psi < \infty$。这很容易做到，因为算子$\phi_{i,\,r}^+ - \Psi_{i,\,r}$在 $\Psi = (\Psi_{i,r})_{i\in I, r\geq 0}$时都在 V_Ψ上幂零。）于是，这样的向量 $v \in V_\Psi$ 就是 V的最高 ℓ-权向量，因为$e_i v \in V_{\mu\alpha_i} = 0$ 且 $U_q(\mathfrak{b})v = V$（因为 V是简单的，且 μ 在 $P(V)$中极大）。

Th上述事实以及 [HJ] 的结果推出以下重要定理。Se t

$$\mathfrak{r} = \{\Psi = (\Psi_i(z))_{i\in I} \in \mathfrak{t}_\ell^\times \mid \Psi_i(z) \text{ is a rational function for all } i \in I\}.$$

定理 2.5 ([HJ，命题 3.10 和定理 3。11])。$\mathcal{O}$ 的非同构简单对象的完整列表为 $\{L(\Psi)\}_{\Psi\in\mathfrak{r}}$。此外，若 V 属于 $\mathcal{O}$，且对于某个 $\Psi \in \mathfrak{t}_\ell^\times$ 有 $V_\Psi \neq 0$，则 $\Psi \in \mathfrak{r}$。

注 2.6。对于 $\Psi = (\Psi_i(z))_{i\in I} \in \mathfrak{r}$，其中 $a \in \mathbb{C}^\times$，我们定义 $\Psi(a) = (\Psi_i(az))_{i\in I}$。$L(\Psi)$ 经第 2.1 节的自同构 τ_a 拉回后，与 $L(\Psi(a))$ 同构。

例 2.7 ([HJ，第 4 节及 5])。对于 $a \in \mathbb{C}^\times$ 和 $i \in I$，令 $\Psi_{i,a} \in \mathfrak{r}$ 表示由下式定义的 ℓ-权：

$$(\Psi_{i,a})_j(z) = \begin{cases} 1 - az & \text{if } i = j, \\ 1 & \text{else.} \end{cases}$$

模 $L_{i,a}^{+}=L(\Psi_{i,a})$ 和 $L_{i,a}^{-}=L(\Psi_{i,a}^{-1})$ 分别称为正、负预基本表示。它们在研究 *BaxterQ*-算子和量子可积系统时至关重要（见 [FH1]）。

对于 $\mathfrak{g}=\widehat{\mathfrak{sl}}_2$，$L_{1,a}^{+}$ 在以 $\{w_j\}_{j\geq 0}$ 为基的向量空间上的一个实现由下式给出：

$$k_1w_j=q^{-2j}w_j,\ e_1w_j=w_{j-1}\ and\ (q-q^{-1})e_0w_j=-aq^{2+j}[j+1]_qw_{j+1}$$

其中 $w_{-1}=0$。此作用验证了 $x_{1,r}^{+}w_j=\delta_{r,0}w_{j-1}$、$(q-q^{-1})x_{1,m}^{-}w_j=-aq^{-j}[j+1]_q\delta_{r,1}w_{j+1}$（对于 $r\geq 0$ 和 $m>0$），以及 $\phi_1^{+}(z)w_j=q^{-2j}(1-az)^{w_j}$。

对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$，负预基本表示 $L_{1,a}^{-}$ 在以 $\{z_j\}_{j\geq 0}$ 为基的空间上的一个显式实现也由下式给出：

$$k_1z_j=q^{-2j}z_j,\ e_1z_j=z_{j-1}\ and\ (q-q^{-1})e_0z_j=aq^{2-j}[j+1]_qz_{j+1}$$

其中 $z_{-1}=0$。我们有 $x_{1,r}^{+}z_j=a^rq^{2r(1-j)}z_{j-1}$，并且 $(q-q^{-1})x_{1,m}^{-}z_j=a^mq^{-(2m+1)j}[j+1]_qz_{j+1}$（对于 $r\geq 0$ 和 $m>0$），其中

$$\phi_1^{+}(z)z_j=q^{-2j}\frac{(1-q^2az)}{(1-q^{2(1-j)}az)(1-q^{-2j}az)}z_j.$$

关于模 $L_{i,a}^{\pm}$ 的一般构造的更多细节见第 *2.3* 节。

除了引人注目的预基本表示外，范畴 $\mathcal{O}$ 还包含所有有限维 $U_q(\mathfrak{b})$-模（参见 [HJ]）。特别地，对于所有 $\mu\in\mathfrak{t}^{\times}$，具有最高 ℓ-权 μ 的单模$[\mu]$ 都属于 $\mathcal{O}$。（我们将 $\mu=(\mu_i)_{i\in I}\in\mathfrak{t}^{\times}$ 与由 $\mu_{i,r}=\mu_i\delta_{r,0}$ 定义的元素$\mu=(\mu_{i,r})_{i\in I,r\geq 0}\in\mathfrak{t}_{\ell}^{\times}$ 对应起来。这种对应也用于常数部分 $\varpi(\Psi)$ 的定义，之后还会再次使用而不另行说明。）模 $[\mu]$ 是一维的，其中元素 e_i、e_0、$x_{i,r}^{+}$ 和 $x_{i,m}^{-}$ 对 $i\in I$、$r\geq 0$ 和 $m>0$的作用均为平凡作用。我们将这些表示称为可逆，因为它们满足

$$[\mu]\otimes[\mu^{-1}]\simeq[\mathbb{1}]$$

其中 $\mathbb{1}\in\mathfrak{t}^{\times}$ 由 $\mathbb{1}=(1)_{i\in I}$定义。

设 $a\in\mathbb{C}^{\times}$ 和 $i\in I$。我们定义 ℓ-权 $Y_{i,a}\in\mathfrak{r}$ 为 $Y_{i,a}=\omega_i\Psi_{i,aq_i^{-1}}\Psi_{i,aq_i}^{-1}$，即

$$(Y_{i,a})_j(z)=\begin{cases}q_i\frac{1-azq_i^{-1}}{1-azq_i} & \text{if } i=j,\\ 1 & \text{else.}\end{cases}$$

简单 $L(\Psi)$ 在 Ψ 是 $Y_{i,a}$ 的单项式时为有限维，并且此类模上的 $U_q(\mathfrak{b})$-作用可以唯一延拓为 $U_q(\mathfrak{g})$-作用。事实上，任意（I 型）有限维简单 $U_q(\mathfrak{g})$-模都可以这样实现（这些结论参见例如 [H5、CP1、CP2] ）。对于简单有限维 $U_q(\mathfrak{b})$-模，我们也有类似的刻画：

命题 2.8 ([FH1，注 3。11]). 固定一个简单有限维 $U_q(\mathfrak{b})$-模 $L(\Psi)$。则存在 $\mu\in\mathfrak{t}^{\times}$，以及一个由 $Y_{i,a}$ 构成的单项式 Ψ'，使得 $\Psi=\mu\Psi'$。

以下有限维模在研究 $U_q(\mathfrak{g})$ 时至关重要。

例 2.9 （例如参见 [FH1，第 3 个例子。12]）。对于固定的 $k\in\mathbb{N}_{>0}$、$i\in I$ 和 $a\in\mathbb{C}^{\times}$，我们有 *Kirillov–Reshitikhin* 模

$$W_{k,a}^{(i)}=L(Y_{i,a}Y_{i,aq_i^2}\dots Y_{i,aq_i^{2(k-1)}})$$

以及基本表示 $V_i(a)=W_{1,a}^{(i)}=L(Y_{i,a})$。

这些 $U_q(\mathfrak{b})$ 上的简单模（以及 $U_q(\mathfrak{g})$上的简单模）推广了 [CP1] 的求值表示。在以 $\{v_j\}_{j=0}^k$ 为基的空间上， $W_k^{(1)}{}_{,\ aq^{1-2k}}$ 的一种实现由下式给出，其中 $\mathfrak{g}=\widehat{\mathfrak{sl}}_2$

$$k_1v_j=q^{k-2j}v_j,\quad e_1v_j=v_{j-1},\quad e_0v_j=aq^{2-k}[j+1]_q[k-j]_qv_{j+1},$$

$$f_1v_j=[j+1]_q[k-j]_qv_{j+1}\quad and\quad af_0v_j=q^{k-2}v_{j-1}$$

与 $v_{-1}=v_{k+1}=0$。我们得到 $x_{1,\ r}^+v_j=a^rq^{2r(1-j)}v_{j-1}$ 以及 $x_{1,\ r}^-v_j=a^rq^{-2jr}[j+1]_q[k-j]_qv_{j+1}$，对于 $r\in\mathbb{Z}$ 也同样成立

$$\phi_1^{\pm}(z)v_j=q^{k-2j}\frac{(1-azq^{-2k})(1-azq^2)}{(1-azq^{2(1-j)})(1-azq^{-2j})}v_j.$$

注意，目前尚无对一般类型 $\mathfrak{g}$ 的模 $W_{k\ a}^{(i)}$ 的已知显式描述。

注 2.10（[HJ，注 3.6]）。对于 $\Psi,\ \Psi'\in\mathfrak{t}_\ell^\times$，由最高 ℓ-权向量的张量积生成的 $L(\Psi)\otimes L(\Psi')$ 的子模具有最高 ℓ-权 $\Psi\Psi'$。因此，单模$L(\Psi\Psi')$ 是 $L(\Psi)\otimes L(\Psi')$ 的一个子商。下一节将用到这一事实。

2.3. q-特征与预基本表示。 研究范畴 $\mathcal{O}$ 的主要工具之一是 q-特征映射。为定义它，令 $\mathcal{E}_\ell$ 为函数环$c\colon\mathfrak{r}\to\mathbb{Z}$，其满足以下两个条件

(i) $\{\varpi(\Psi)\,|\,\Psi\in\mathfrak{r},\,c(\Psi)\neq0\}$ is contained in $\bigcup_{i=1}^r D(\lambda_i)$ for some $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in\mathfrak{t}^\times$ and
(ii) $\{\Psi\in\mathfrak{r}\,|\,c(\Psi)\neq0,\,\varpi(\Psi)=\mu\}$ is a finite set for any $\mu\in\mathfrak{t}^\times$

其中，集合 $D(\lambda)$ 即定义 2.2 中的集合。我们还令 $\mathcal{E}$ 为映射环 $d\colon\mathfrak{t}^\times\to\mathbb{Z}$，满足若 $\mu\in\mathfrak{t}^\times$ 取在有限个集合 $D(\lambda)$ 的并集之外，则 $d(\mu)=0$。$\mathcal{E}_\ell$ 和 $\mathcal{E}$ 上的环结构通过卷积得到，即

$$(c_1\cdot c_2)(\Psi)=\sum_{\Psi_1\Psi_2=\Psi}c_1(\Psi_1)c_2(\Psi_2)\text{ and }(d_1\cdot d_2)(\mu)=\sum_{\mu_1\mu_2=\mu}d_1(\mu_1)d_2(\mu_2).$$

固定 V in $\mathcal{O}$。则 q-特征 $\chi_q(V)$ 是 $\mathcal{E}_\ell$ 中的元素，其定义如下（参见 [FR，HJ]）

$$\chi_q(V)=\sum_{\Psi\in\mathfrak{r}}\dim(V_\Psi)[\Psi]$$

其中，对 $\Psi\in\mathfrak{r}$，我们将 $\mathcal{E}_\ell$ 中由 $[\Psi](\Psi')=\delta_{\Psi,\ \Psi'}$给出的映射记为 $[\Psi]$。这个 q-特征可视为生成函数，其系数为 V的 ℓ-权空间的维数。我们还可以定义普通特征 $\chi(V)$，作为 V的（普通）权空间维数的生成函数，即

$$\chi(V)=\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^\times}\dim(V_\mu)[\mu]\in\mathcal{E}$$

其中，对于$\mu\in\mathfrak{t}^\times$，我们通过 $[\mu](\mu')=\delta_{\mu,\mu'}$定义了 $[\mu]\in\mathcal{E}$。注意， $U_q(\mathfrak{b})$的可逆表示$[\mu]$ 满足 $\chi([\mu])=[\mu]\in\mathcal{E}$，因此最后这个记号不会引起混淆。

如果 V 具有最高 ℓ-权 Ψ （或者更一般地，如果 V 具有唯一的 ℓ-权 Ψ，且 $\varpi(\Psi)$在 $P(V)$中取最大值），我们也可以考虑其归一化的 q-特征$\chi_q(V)$，定义如下：

$$\overline{\chi}_q(V)=[\Psi^{-1}]\chi_q(V).$$

对于任意 $V,\ V'$，$\chi_q(V\otimes V')=\chi_q(V)\chi_q(V')$ 中均有 $\chi_q(V\oplus V')=\chi_q(V)+\chi_q(V')$。事实上，这是 [HJ] 提出的另一结果的一部分。

定理 2.11 ([HJ，命题 3。12] 和 [FR，定理 3])。 取 q-特征可诱导出一个单射环同态 χ_q：$K_0(\mathcal{O}) \to \mathcal{E}_\ell$。特别地，由于 $\mathcal{E}_\ell$ 的卷积乘积具有交换性， $K_0(\mathcal{O})$ 是一个交换环。

有限维 $U_q(\mathfrak{g})$-模的 ℓ-权是变量 $(Y_{i,\,a})^{\pm 1}$ 的单项式（参见 [FR]），因此此类模的 q-特征可视为环 $\mathcal{Y} = \mathbb{Z}[(Y_{i,\,a})^{\pm 1}]_{i\in I,\ a\in\mathbb{C}^\times}$ 的一个元素。因此，我们将遵循 [HJ、FH1、HL2] 的惯例，在书写 q-特征中的 $\mathcal{Y}$ 元素时省略括号 $[\cdot]$。（换言之，对于任意 $\Psi \in \mathcal{Y}$，我们将 Ψ 与 $[\Psi] = \delta_{\Psi,\,\Psi'}$ 视为 q-特征映射像中的元素。）

此外，我们还将使用

$$A_{i,a} = Y_{i,aq_i^{-1}} Y_{i,aq_i} \left(\prod_{\{j\in I | C_{ji}=-1\}} Y_{j,a} \prod_{\{j\in I | C_{ji}=-2\}} Y_{j,aq^{-1}} Y_{j,aq} \prod_{\{j\in I | C_{ji}=-3\}} Y_{j,aq^{-2}} Y_{j,a} Y_{j,aq^2} \right)^{-1}.$$

我们有 $\varpi(A_{i,\,a}) = \overline{\alpha_i}$，并且 $\varpi(Y_{i,\,a}) = \omega_i$。因此，$A_{i,\,a}$ 可视为 $\mathcal{Y}$ 中简单根的类比。我们还有以下结果（该结果在下文的命题 2.17 中被隐式使用）。

命题 2.12 ([FR, 命题 3])。 对于 V 一个简单的有限维 $U_q(\mathfrak{g})$-模

$$\overline{\chi}_q(V) \in \mathbb{Z}[A_{i,a}^{-1}]_{i\in I, a\in\mathbb{C}^\times}.$$

例 2.13。 固定 $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 并考虑 $V = W_k^{(1)}{}_{,\,aq^{1-2k}}$ 其中 $a \in \mathbb{C}^\times$ 且 $k \geq 0$。于是，利用例 *2.9* 及上述约定，我们得到 $\chi_q(V) = Y_{1,\,aq^{1-2k}} \dots Y_{1,\,aq^{-1}} \chi_q(V)$ 其中

$$\overline{\chi}_q(V) = 1 + A_{1,a}^{-1} + A_{1,a}^{-1} A_{1,aq^{-2}}^{-1} + \dots + A_{1,a}^{-1} A_{1,aq^{-2}}^{-1} \dots A_{1,aq^{2(1-k)}}^{-1}.$$

定理 2.14 ([FH1, 定理 4.1], [HL2, 定理 5.3])。 固定 $a \in \mathbb{C}^\times$ 和 $i \in I$。于是

$$\chi_q(L_{i,a}^+) = [\Psi_{i,a}]\chi(L_{i,a}^+) \text{ and } \chi_q(L_{i,a}^-) \in [\Psi_{i,a}^{-1}](1 + A_{i,a}^{-1}\mathbb{Z}[[A_{j,b}^{-1}]]_{j\in I, b\in\mathbb{C}^\times})$$

其中特征 $\chi(L_{i\,,\,a}^+)$ （通过显然的包含映射 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_\ell$视为 $\mathcal{E}_\ell$ 的元素）等于特征 $\chi(L_{i\,,\,a}^-)$，且不依赖于参数 a。

例 2.15。 对于 $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$，例 *2.7* 给出 $\chi_q(L_{1\,,\,a}^+) = [\Psi_{1,a}](1-[\alpha_1]^{-1})^{-1} = [\Psi_{1,a}]\chi(L_{1\,,\,a}^+)$以及 $\chi_q(L_{1\,,\,a}^-) = [\Psi_{1,a}^{-1}](1 + A_{1\,a,}^{-1}(1 + \sum_{j\geq 1} A_{1\,,\,aq^{-2}}^{-1} \dots A_{1\,,\,aq^{-2j}}^{-1}))$。这与定理 *2.14* 一致。

现在我们回顾本文所关注的主要范畴的定义。

定义 2.16 （[HL2，定义 3.9]）。 若对象 V 的任一简单成分在 $K_0(\mathcal{O})$中的像包含于由有限维表示和正（分别为负）预基本表示的类生成的子环内，则 $\mathcal{O}$ 属于 $\mathcal{O}^+$ （分别为 $\mathcal{O}^-$）。

换言之，如果某个模 V 属于 $\mathcal{O}$，那么它（分别地）属于 $\mathcal{O}^+$ （或 $\mathcal{O}^-$），当且仅当其简单成分的最高 ℓ-权全是下列 ℓ-权中的单项式：

(i) 带有 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$的 $Y_{i,\,a}$；(ii) 带有 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$ 的 $\Psi_{i,\,a}$（分别地，带有 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$的 $(\Psi_{i\,a,}^{-1})$）；(iii) 带有 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$的 μ。

如此定义的范畴 $\mathcal{O}^\pm$ 是 $\mathcal{O}$ 的满幺半子范畴，从簇代数的角度来看尤其有趣（例如参见 [HL2、Bi] 以及即将出现的注 3.38）。 q-特征映射在负子范畴 $\mathcal{O}^-$上的表现也非常良好。

命题 2.17（例如参见 [HL2，定理 7。6]）。取 V 为 $\mathcal{O}^-$中的一个简单对象。那么，存在简单有限维 $U_q(\mathfrak{g})$-模 $(V_k)_{k\geq 1}$，使得 $\lim^{k\to\infty} \chi_q(V_k) = \chi_q(V)$ 作为关于 $\mathbb{Z}[[A_{i,a}^{-1}]]_{i\in I,\ a\in\mathbb{C}^\times}$的形式幂级数成立。

事实上，采用上述记号，我们可以定义一个归纳线性系统

$$F_{k',k} : V_k \to V_{k'} \quad (\text{with } k \leq k')$$

使得由集合 $\{x_{i,r}^+, k_i^{-1}x_{i,r}^-, k_i^{-1}\phi_{i,r}^\pm, k_i^{-1} \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$ 生成的子代数 $U_q(\mathfrak{g}) \subseteq U_q(\mathfrak{g})$ 的作用收敛。（这个子代数 $\widetilde{U}_q(\mathfrak{g})$ 在 [HJ], 中定义，称为渐近代数，并且与第 1 节中提到的移位量子仿射代数密切相关。）将该系统的归纳极限与 V 等同后，除去对 V 的最高 ℓ-权向量上 $k_1, \dots, k_n$ 的特征值的选择，我们便得到相应的 $U_q(\mathfrak{b})$- 作用。（这是由 $e_0, \dots, e_n \in U_q(\mathfrak{g})$ 这一事实得出的，见 [HJ]。）换言之，$\mathcal{O}^-$ 的每个简单对象都是由一系列简单有限维 $U_q(\mathfrak{g})$-模组成的系统的归纳极限。

定义上述归纳系统的映射 $F_{k',\ k}$ 由 [HJ] 引入（另见 [HL2]）。回顾其构造，设 Ψ_k 为简单有限维模 V_k的最高 ℓ-权。于是，对于 $k \leq k'$, $F_{k',\ k}$ 可由以下映射的复合得到

$$V_k = L(\Psi_k) \to L(\Psi_k) \otimes L(\Psi_{k'}\Psi_k^{-1}) \to L(\Psi_{k'}) = V_{k'}$$

其中，第一个映射针对固定的最高 ℓ-权向量 $v_0 \in L(\Psi_{k'}\Psi_k^{-1})$ 定义为 $v \mapsto v\otimes v_0$。第二个映射则由注 2.10 以及有限维基本表示的张量积所具有的一项显著循环性得出（例如参见 [HJ，公式 3.21]及其中的参考文献）。

注 2.18。[HJ] 中研究了上述归纳系统，其中 $V = L_{i,\ a}^-$ 且 $V_k = W_k^{(i)}{}_{,\ aq_i^{1-2k}}$。当 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ 时，该系统尤为简单，因此命题 2.17 可由例 2.13 和例 2.15 得出。

尽管子范畴 $\mathcal{O}^+$ 和 $\mathcal{O}^-$ 的定义方式相似，但（如第 1 节所述）从表示论视角来看，它们本质上有所不同。例如，定理 2.14 表明，负预基本表示 L_i^- 的归一化 特征a 取决于参数 $a \in \mathbb{C}^\times$，而 L_i^+ 的归一化 特征a 则不受参数影响。这个看似无关紧要的事实对上述分析有着深远影响，尤其使得将定理 2.14 推广到范畴 $\mathcal{O}^+$ 变得困难。（在一定技术条件下，模 $L_{i\ a}^+$ 也与 Kirillov–Reshetikhin 模的一个极限有关，见 [HJ]。然而，后者模的归一化 q 特征取决于谱参数 a，因此，若要为 $\mathcal{O}^+$ 构造定理 2.14 的类似结果，其背后的极限就必须消除这种依赖关系。因而，这种极限不可能像用于 $\mathcal{O}^-$ 的极限那样简单。)

研究第 1 节中提到的移位量子仿射代数 时，可以观察到子范畴 $\mathcal{O}^+$ 和 $\mathcal{O}^-$ 之间差异的另一种表现。事实上，$U_q(\mathfrak{b})$在$L_{i,a}^-$ 上的作用可以扩展为这类移位代数的作用，但$L_{i,a}^+$ 却无法做到这一点（参见 [H4，第 4] 节）。事实上，正如我们在第 1 节中所述，移位代数对应的正预基本表示是一维的，因此与无限维的 $U_q(\mathfrak{b})$-模$L_{i,a}^+$相比，复杂程度相去甚远。

尽管存在这些差异，子范畴 $\mathcal{O}^\pm$ 仍然可以在格罗滕迪克环层面上建立联系。事实上，[HL2 第 5-7] 节证明了存在一个环同构

$$D : K_0(\mathcal{O}^+) \simeq K_0(\mathcal{O}^-)$$

th它将单模的类映射为单模的类，其定义为

$$D[V_i(a)] = [V_i(a^{-1})] \quad \text{and} \quad D[L^+_{i,a}] = [L^-_{i,a^{-1}}]$$

在有限维基本表示和正预基本表示的类上（分别如此）。更确切地说，设 $V = L(\Psi_1)$ 是有限维简单 $U_q(\mathfrak{b})$-模。那么

$$\Psi_1 = \mu \prod_{i\in I} \prod_{k=1}^{s_i} Y_{i,a_k^{(i)}}$$

由命题 2.8 可知，对于某个 $\mu \in \mathbb{C}^\times$，有 $D[L(\Psi_1)] = [L(\Psi_2)]$，其中

$$\Psi_2 = \mu \prod_{i\in I} \prod_{k=1}^{s_i} Y_{i,(a_k^{(i)})^{-1}}$$

可由 Ψ_1 通过将每个变量 $Y_{i,a}$ 映射到 $Y_{i,a^{-1}}$ 得到。特别地， D 将 **有限维** $U_q(\mathfrak{b})$-模的类映射到 **有限维** $U_q(\mathfrak{b})$-模的类。我们将此映射称为 $D\colon K_0(\mathcal{O}^+) \simeq K_0(\mathcal{O}^-)$ *Hernandez–Leclerc* 对偶。

注 2.19. 关于同构 D，一个自然的问题是，这种对偶性是否能扩展为整个范畴 $\mathcal{O}$ 的格罗滕迪克环 $K_0(\mathcal{O})$ 的自同构。更具体地说，可以问是否存在 $\mathcal{O}$ 上的自函子 $\mathcal{D}_q$，使得对任意 $M \in \mathcal{O}$，都有 $D[M] = [\mathcal{D}_q(M)]$。这些问题将在后文中得到部分解答。实际上，我们在第 3 节中定义一个函子 $\mathcal{F}_q$，将对应于 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 的范畴 $\mathcal{O}$ 与对应于 $U_q(\mathfrak{g})$ 的范畴联系起来，并考虑（假设 q 是形式变量，见第 3.4 节）将 $\mathcal{F}_q$ 与一个自然函子 $\mathcal{B}_{q^{-1},q}$ 复合。所得复合函子 $\mathcal{D}_q$ 是 $\mathcal{O}$ 上的正合自函子，并在 $K_0(\mathcal{O})$ 上诱导出一个环自同构；该自同构在 $K_0(\mathcal{O}^+)$ 的一个有趣子环上重现了对偶性 D （见定理 3.37）。此外，暂且不论 Hernandez–Leclerc 对偶的函子性解释，我们在附录 A 中证明，映射 D 可以扩展为整个格罗滕迪克环 $K_0(\mathcal{O})$ 的环自同构。然而，这一结果并未说明扩展后的自同构是否会将简单模的类映射为简单模的类（正如 D 以及由函子 $\mathcal{D}_q$ 诱导的映射所做的那样）。我们的结果也没有说明，扩展后的映射是否能由 $\mathcal{O}_q$ 上一个恰当选取的自函子诱导。

现在 我们以陈述关于张量积的一些重要结果来结束本节，这些结果适用于 $\mathcal{O}$.

定理 2.20 ([FH1, 定理 4.11])。 任意具有相同符号（即正或负）的预基本表示的张量积都是单的。

下面的定理广为人知（见 [CH, 定理 3] 或 [EFK, 命题 9.2.4 和 9.5.3]）。注意，为了对 $U_q(\mathfrak{b})$-模陈述该定理，我们本质上使用了命题 2.8。

定理 2.21 (例如见 [CH,EFK])。 设 V 和 W 是 $U_q(\mathfrak{b})$ （或 $U_q(\mathfrak{g})$）上的不可约有限维模。那么，对于至多有限多个 $a \in \mathbb{C}^\times$， $V(a) \otimes W$ 是可约的。

单有限维 $U_q(\mathfrak{b})$-模的张量积因而“泛型地”是单的。然而，对于整个范畴 $\mathcal{O}$，相应的说法并不成立；例如，不存在 $a \in \mathbb{C}^\times$ 使得当 $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 时，$L^+_{1,\,1}(a) \otimes L^-_{1,\,1}$ 是单的（例如见 [H5, 例 5.1],[BJMST]，或下文的引理 4.2）。

3. 函子 Fq

本节旨在研究第 1 节中提到的协变函子 $\mathcal{F}_q : \mathcal{O}_{q^{-1}} \to \mathcal{O}_q$，其中 $\mathcal{O}_{q^{\pm 1}}$ 是与量子环代数 $U_{q^{\pm 1}}(\mathfrak{g})$ 相对应的范畴 $\mathcal{O}$。我们特别证明，该函子会反转张量积，并且会改变

预基本表示的符号。我们还推导出任意对象 $V \in \mathcal{O}_{q^{-1}}$ 的像 $\mathcal{F}_q(V)$，以及环 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 中的新关系，并对对偶性 D 给出函子性的解释。

由于我们将同时使用量子环代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 和 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$，因此需要通过不同的记号来区分与这两个代数分别相关的概念。具体而言，我们在上文中为第 2.2 节的范畴$\mathcal{O}_{q^{\pm 1}}$ 标注下标 $q^{\pm 1}$ 时，就采用了这种做法。我们约定，除非另有明确说明（通过记号或注释），某个概念始终指 $U_q(\mathfrak{g})$。以下是这些“新”记号的示例。

我们用 $\overline{\ \ }: P_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}^\times$ 表示由第 2.2 节中的 $\overline{\ \ }$ 将量子参数改为 q^{-1}后得到的群的单射态射。与第 2.2 节中一样，该映射在 $\mathfrak{t}^\times$ 上诱导一个偏序 $\trianglelefteq$，其中 $\mu \trianglelefteq \nu$ 当且仅当 $\nu\mu^{-1} \in Q_+$。显然，对所有 $\omega \in P_{\mathbb{Q}}$都有 $\omega = \omega^{-1}$，由此可知偏序 $\leq$ 和 $\trianglelefteq$ 互为对偶（即 $\mu \leq \nu$ 当且仅当 $\overline{\nu} \trianglelefteq \overline{\mu}$）。

3.1. 基本性质。 $U_{q^{\pm 1}}(\mathfrak{g})$ 的定义关系意味着如下对应

$$e_i \mapsto e_i, \qquad f_i \mapsto f_i, \quad \text{and} \quad k_i^{\pm 1} \mapsto k_i^{\pm 1} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

诱导出一个代数反同构 $\Xi_q : U_q(\mathfrak{g}) \to U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$。定义

$$\sigma_q = S_{q^{-1}} \circ \Xi_q : U_q(\mathfrak{g}) \to U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$$

其中 $S_{q^{-1}}$ 是 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 的反 antipode，如第 2.1 节所给出。于是 σ_q 是一个代数同构（因为 $S_{q^{-1}}$ 是一个代数反同构），并且满足

$$\sigma_q(e_i) = -k_i^{-1} e_i, \quad \sigma_q(f_i) = -f_i k_i \ \text{ and } \ \sigma_q(k_i) = k_i^{-1}$$

对 $0 \leq i \leq n$ 成立。这就是第 1 节中出现的映射。

注意，$\sigma_q(U_q(\mathfrak{b})) \subseteq U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$。因此，拉回 σ_q^* 诱导出一个协变函子，将所有 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$-模的范畴映至所有 $U_q(\mathfrak{b})$-模的范畴。将此函子在范畴 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 上的限制记为 $\mathcal{F}_q$。那么，对于所有 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 中的 V，作为向量空间有 $\mathcal{F}_q(V) = V$。我们用符号 $\star$ 来区分 V 上的 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$-作用与 $\mathcal{F}_q(V)$ 上的$U_q(\mathfrak{b})$-作用（后者通常用连写表示）。

命题 3.1. 设 V 属于 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$。则 $\mathcal{F}_q(V)$ 属于 $\mathcal{O}_q$。

证明。注意，对于 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$，权空间 $V_{\mu^{-1}}$ 和 $\mathcal{F}_q(V)_\mu$ 在 $\sigma_q(k_i) = k_i^{-1}$ 下自然地等同。因此，模 $\mathcal{F}_q(V)$ 是 $\mathfrak{t}$-可对角化的，并且当 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$ 时，$\dim \mathcal{F}_q(V)_\mu = \dim V_{\mu^{-1}} < \infty$。因此，只需证明 $\mathcal{F}_q(V)$ 的权相对于 $\mathfrak{t}^\times$ 上的序 $\leq$ 有适当的上界。

为此，注意到 V 属于 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 这一事实，迫使集合 $P(V) \subseteq \mathfrak{t}^\times$ 相对于倒数序 $\trianglelefteq$ 有适当的上界。因此，我们可以找到一些 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathfrak{t}^\times$，使得

$$P(V) \subseteq \bigcup_{i=1}^s \{\mu \in \mathfrak{t}^\times \mid \mu \trianglelefteq \lambda_i\} = \bigcup_{i=1}^s \{\mu \in \mathfrak{t}^\times \mid \lambda_i \leq \mu\}$$

由上述推理可得

$$P(\mathcal{F}_q(V)) = \{\mu \in \mathfrak{t}^\times \mid \mu^{-1} \in P(V)\} \subseteq \bigcup_{i=1}^s \{\mu \in \mathfrak{t}^\times \mid \mu \leq \lambda_i^{-1}\} = \bigcup_{i=1}^s D(\lambda_i^{-1})$$

如所需。 □

因此，我们可以将 $\mathcal{F}_q$ 视为从 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 到 $\mathcal{O}_q$的函子。由于它定义为拉回的限制，因此显然是正合的，并且保持模的维数不变。此外，由于$\sigma_q^{-1} = \sigma_{q^{-1}}$，我们有 $\mathcal{F}_q$ 可逆，其逆为$\mathcal{F}_{q^{-1}} : \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{q^{-1}}$。由此特别可知，$\mathcal{F}_q$ 保持模的不可约性。它还与谱参数平移和张量积相容，具体体现在以下两个结果中。

Pr命题 3.2. 固定 $a \in \mathbb{C}^\times$，并令 V 属于 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$。那么 $\mathcal{F}_q(V(a)) \simeq (\mathcal{F}_q(V))(a \qquad)$.

证明。这是由以下事实得出的：σ_q 与 $U_{q^{\pm 1}}(\mathfrak{g})$ 的 $\mathbb{Z}$-分次相容（即 $\tau_{a,\ q^{-1}} \circ \sigma_q = \sigma_q \circ \tau_{a,\ q}$，其中 $U_{q^{\pm 1}}(\mathfrak{g})$ 的自同构 $_{q^{\pm 1}}$ 由第 2.1 节给出）。□

注 3.3。上述命题特别给出 $\mathcal{F}_q(V(q)) \simeq (\mathcal{F}_q(V))(q)$，这多少有些违反直觉，因为对于代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 和 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$，q 并没有“扮演相同的角色”。

定理 3.4。设 V, W 属于 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$，并考虑通常的“交换映射” τ：$V \otimes W \to W \otimes V$，其定义为 $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$。则 τ 诱导出一个 $U_q(\mathfrak{b})$-线性同构 $\mathcal{F}_q(V) \otimes \mathcal{F}_q(W) \to \mathcal{F}_q(W \otimes V)$。

证明。只需注意，本节开头引入的 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 的反 antipode $S_{q^{-1}}$ 和映射 $\Xi_q : U_q(\mathfrak{g}) \to U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 分别是余代数反同构和余代数同构。□

记 $L_{q^{\pm 1}}(\Psi)$ 为最高 ℓ-权为 $\Psi \in \mathfrak{t}_\ell^\times$ 的 $U_{q^{\pm 1}}(\mathfrak{b})$-不可约模，并记 $Y^{(q^{\pm 1})}{}_{i,a}$ 为 $U_{q^{\pm 1}}(\mathfrak{b})$ 的基本表示 $V_i^{q^{\pm 1}}(a)$ 的最高 ℓ-权（参见例 2.9）。

3.2. **简单模的像**。固定 $\Psi \in \mathfrak{r}$。则简单对象 $L_{q^{-1}}(\Psi)$ 在 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 中经函子 $\mathcal{F}_q$ 映射后是 $\mathcal{O}_q$ 中的简单对象。因此我们有

$$\mathcal{F}_q(L_{q^{-1}}(\Psi)) \simeq L_q(\Psi^{\mathcal{F}_q})$$

对某个（唯一的）$\Psi^{\mathcal{F}_q} \in \mathfrak{r}$。本小节的目标是刻画映射 $\Psi \mapsto \Psi^{\mathcal{F}_q}$。一种天真的做法是计算元素 $\sigma_q(\phi_{i,\ r}^+)$（对于 $i \in I$ 和 $r \geq 0$）作用在 $L_{q^{-1}}(\Psi)$ 的一个固定最高 ℓ 权向量 v 上的结果。（注意，v 是一个很好的候选者，可作为 $\mathcal{F}_q(L_{q^{-1}}(\Psi)) \simeq L_q(\Psi^{\mathcal{F}_q})$ 的最高 ℓ 权向量，因为对于所有 $i \in I$，都有 $\sigma_q(e_i) \star v = -k_i^{-1} e_i \star v = 0$。）然而，要是想用 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 的 Drinfeld 生成元来表示这些 $\sigma_q(\phi_{i,\ r}^+)$，似乎很困难（如果可能的话），因此我们的天真做法几乎难以实施。我们换一种思路，首先证明映射 $\Psi \mapsto \Psi^{\mathcal{F}_q}$ 与子群 $\mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{t}_\ell^\times$ 的结构相容。

我们将使用以下引理，该引理将 Ψ 和 $\Psi^{\mathcal{F}_q}$ 的常数部分联系起来。此引理依据以下事实：对于具有最高 ℓ-权 Ψ 的模的任意权 $\mu \neq \varpi(\Psi)$，有 $\mu < \varpi(\Psi)$。后一个事实可以利用 $U_q(\mathfrak{b})$ 的三角分解加以证明（见第 2.1 节）。

引理 3.5。令 $\Psi \in \mathfrak{r}$。则 $\varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q}) = (\varpi(\Psi))^{-1}$。特别地，对于 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$，$\mu^{\mathcal{F}_q} = \mu^{-1}$。

证明。由于 $\varpi(\Psi) \in P(L_{q^{-1}}(\Psi)) \subseteq \{\mu \in \mathfrak{t}^\times \mid \mu \trianglelefteq \varpi(\Psi)\}$，命题 3.1 的证明给出

$$(\varpi(\Psi))^{-1} \in P(L_q(\Psi^{\mathcal{F}_q})) = \{\mu \in \mathfrak{t}^\times \mid \mu^{-1} \in P(L_{q^{-1}}(\Psi))\} \subseteq D((\varpi(\Psi))^{-1}).$$

然而 $\varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q}) \in P(L_q(\Psi^{\mathcal{F}_q})) \subseteq D(\varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q}))$，引理由上述事实得证 $\mathfrak{t}$. □

注 3.6。设 $\Psi \in \mathfrak{r}$ 满足 $\varpi(\Psi) = \omega$ 且 $\omega \in P_{\mathbb{Q}}$。则 $\varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q}) = (\varpi(\Psi))^{-1} = \omega^{-1} = \omega$，并且映射 $\Psi \mapsto \Psi^{\mathcal{F}_q}$ 固定权格 $P_{\mathbb{Q}}$（即使它反转 $\mathfrak{t}^\times$中的元素）。

命题 3.7。映射 $\Psi \mapsto \Psi^{\mathcal{F}_q}$ 是 $\mathfrak{r}$的群自同构。

证明。取 $\Psi, \Psi' \in \mathfrak{r}$，其中 $V = L_{q^{-1}}(\Psi)$ 和 $W = L_{q^{-1}}(\Psi')$ 属于 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$。另设 $\Phi = \Psi^{\mathcal{F}_q}(\Psi')^{\mathcal{F}_q}$，并记 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_q$，其中 $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{q^{-1}} : \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{q^{-1}}$。根据先前的结果，$\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的逆，也是一个反转张量积的正合函子。因此，我们可以利用注 2.10 推出，$L_{q^{-1}}(\Phi^{\mathcal{G}}) = \mathcal{G}(L_q(\Phi))$ 是 $\mathcal{G}(L_q((\Psi')^{\mathcal{F}}) \otimes L_q(\Psi^{\mathcal{F}})) \simeq V \otimes W$ 的一个合成因子。

由此可知， $\Phi^{\mathcal{G}}$ 出现在 q-特征 $\chi_q(V\otimes W) = \chi_q(V)\chi_q(W)$ 中，因此必定具有如下形式：$\Phi^{\mathcal{G}} = \Psi_1\Psi_2$，其中 ℓ 是 V 的权， Ψ_2 是 W 的权。引理 3.5 还给出

$$\varpi(\Psi_1)\varpi(\Psi_2) = \varpi(\Phi^{\mathcal{G}}) = (\varpi(\Phi))^{-1} = (\varpi(\Psi^{\mathcal{F}})\varpi((\Psi')^{\mathcal{F}}))^{-1} = \varpi(\Psi)\varpi(\Psi'). \tag{3.1}$$

假设 $\Psi_1 \neq \Psi$。那么，上文讨论的事实给出 $\varpi(\Psi_1) < \varpi(\Psi)$，其中 $\varpi(\Psi_2) \leq \varpi(\Psi')$，而由此得到的不等式 $\varpi(\Psi_1)\varpi(\Psi_2) < \varpi(\Psi)\varpi(\Psi')$ 与 (3.1) 矛盾。因此 $\Psi_1 = \Psi$。类似地， $\Psi_2 = \Psi'$ and $\Psi^{\mathcal{F}}(\Psi')^{\mathcal{F}} = \Phi = (\Phi^{\mathcal{G}})^{\mathcal{F}} = (\Psi_1\Psi_2)^{\mathcal{F}} = (\Psi\Psi')^{\mathcal{F}}$，正如所需。□

由于群 $\mathfrak{r}$ 由 $\mathfrak{t}^\times$ 以及预基本表示的最高 ℓ-权生成，引理 3.5 和命题 3.7 表明，为了刻画 $\mathcal{F}_q$ 在 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 上的作用，只需刻画 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$ 的 ℓ-权 $(\Psi_{i\,a,}^{\pm 1})^{\mathcal{F}_q}$。为此，首先研究 V 作为 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$ 的一个（有限维）基本表示时的像 $\mathcal{F}_q(V)$ 是有用的（见例 2.9）。这依赖于最低 ℓ-权的概念。

定义 3.8 ([HJ，第 3 节.6])。固定 $\Psi = (\Psi_{i,r})_{i\in I, r\geq 0} \in \mathfrak{t}_\ell^\times$，其中 V 是一个 $U_q(\mathfrak{b})$-模。若存在非零的 $v \in V$ 满足 $V = U_q(\mathfrak{b})v$，且 $U_q^-(\mathfrak{b})v = 0$，并且 $\phi_{i,r}^+ v = \Psi_{i,r}v$ 对所有 $i \in I$ 和 $r \geq 0$ 均成立（其中 $U_q^-(\mathfrak{b})$如第 2.1 节末尾所述），则称V具有最低 ℓ-权 Ψ。

最高 ℓ-权模 $L_q(\Psi)$的结论通常也适用于其最低ℓ-权对应情形。特别地，对于任意权 $\mu \neq \varpi(\Psi)$，若它是简单$U_q(\mathfrak{b})$-模 V的**最低 ℓ-权** Ψ，则有 $\mu > \varpi(\Psi)$。这可应用于 $U_q(\mathfrak{b})$的有限维不可约表示。事实上，此类表示的最高 ℓ-权具有如下形式

$$\Psi = \mu \prod_{i\in I}\prod_{k=1}^{s_i} Y_{i,a_k^{(i)}}^{(q)}$$

根据 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$（参见命题 2.8）以及 [FM] 的结果可知， $L_q(\Psi)$ 是最低 ℓ-权

$$\Psi' = \mu \prod_{i\in I}\prod_{k=1}^{s_i} \left(Y_{i^*,a_k^{(i)}q^{r^\vee h^\vee}}^{(q)}\right)^{-1}$$

其中
– $h^\vee$ 是有限维单李代数 $\dot{\mathfrak{g}}$（它是 $\mathfrak{g}$ 的底层李代数）的对偶考克斯特数，– $r^\vee$ 是 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的 Dynkin 图中连接两个顶点的边数的最大值，– $i^* \in I$ 定义为 $w_0(\alpha_i) = -\alpha_{i^*}$，其中 w_0 是 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的 Weyl 群中的最长元。
我们还需要另一个引理（注意它与定理 2.14 的相似之处）。

引理 3.9. 设 $i \in I$。那么 $\omega_i - \alpha_i \in \mathfrak{t}^\times$ 是基本表示$V = V_i^q(1)$ 的一个权，该表示属于 $U_q(\mathfrak{b})$，且 V 的权集 $P(V)$ 包含于 $\{\omega_i\} \cup \omega_i - \alpha_i - Q^+$。

证明。设 $\omega_i - \alpha_i \notin P(V)$，取 $v \in V$为一个最高 ℓ-权向量。则 $e_i v = 0$ 和$k_i v = q_i v$ 作为 $\varpi(Y_{i\,1}^{(q)}) = \omega_i$。诱导的 $U_q(\mathfrak{g})$-作用在 V上也验证了 $f_i v \in V_{\omega_i - \alpha_i}$，因此根据假设$f_i v = 0$。于是，由 $U_q(\mathfrak{g})$ 的定义关系，

$$v = \left(\frac{k_i - k_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}\right) v = [e_i, f_i]v = 0$$

但这意味着 v 不是一个最高 ℓ-权向量。因此 $\omega_i - \alpha_i \in P(V)$。第二个断言直接由 [H1，推论 2.13] 得出。□

定理 3.10。固定 $i \in I$，并令 $\Psi = Y_{(q^{-1})\,i,1}$。那么存在 $\gamma_i \in \mathbb{C}^\times$，使得 $\Psi^{\mathcal{F}_q} = Y_{(q)\,i,\gamma_i}$。

注 3.11。这与引理 3.5 相容，因为 $\varpi(Y_{(q)\,i,\,\gamma_i}) = \omega_i = (\omega_i)^{-1} = (\varpi(Y_{(q^{-1})\,i,\,1}))^{-1}$。

证明。固定 $V = L_{q^{-1}}(\Psi)$ 于 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$，并注意到，由于 $\dim \mathcal{F}_q(V) = \dim V < \infty$，$\mathcal{F}_q(V)$ 的最高和最低 ℓ-权必分别具有如下形式

$$\Psi^{\mathcal{F}_q} = \mu \prod_{j\in I} \prod_{k=1}^{s_j} Y^{(q)}_{j,a_k^{(j)}} \quad \text{and} \quad (\Psi^{\mathcal{F}_q})' = \mu \prod_{j\in I} \prod_{k=1}^{s_j} \left(Y^{(q)}_{j^*,a_k^{(j)} q^{r^\vee h^\vee}}\right)^{-1}$$

对于某个 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$。根据引理 3.5（以及关于简单最低 ℓ-权模的类似结果），这些 ℓ-权必须满足关系 $\varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q}) = (\varpi(\Psi))^{-1}$ 和 $\varpi((\Psi^{\mathcal{F}_q})') = (\varpi(\Psi'))^{-1}$其中 $\Psi' = \left(Y_{(q^{-1})\, i^*, q^{-r^\vee h^\vee}}\right)$ 是 V 的最低 ℓ-权。因此，由于 $\varpi(Y_{(q^{\pm 1})\, j,a}) = \pm\omega_j$，我们有

$$\frac{\varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q})}{\varpi((\Psi^{\mathcal{F}_q})')} = \overline{\omega} = \overline{\omega_i + \omega_{i^*}} = \frac{\varpi(\Psi')}{\varpi(\Psi)}$$

对于 $\omega = \sum_{j\in I} s_j(\omega_j + \omega_{j^*})$。然而，群态射 $\quad : P_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{t}^\times$ 是单射，且基本权在 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的权格中线性无关。因此只剩下两种情形。

（情形 1）假设对所有 $j \in I$，$s_j = \delta_{i,j}$。则对于 $\gamma_i = a_1^{(i)} \in \mathbb{C}^\times$，$\Psi^{\mathcal{F}_q} = \mu Y_i^{(q)}{}_{,\gamma_i}$，结论由关系 $\varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q}) = \varpi(\mu Y_{(q)\, i,\gamma_i}) = \mu\omega_i = \omega_i = (\varpi(\Psi))^{-1}$ 得出。 —

（情形 2）假设 $i \neq i^*$，其中对所有 $j \in I$，$s_j = \delta_{i^*,j}$。则对于某个 $a \in \mathbb{C}^\times$，$\Psi^{\mathcal{F}_q} = \mu Y^{(q)}_{i^*\, a}{}_{,}$，且$\varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q}) = \mu\omega_{i^*} = \omega_i = \varpi(\Psi)^{-1}$ 推出 $\mu = \omega_i - \omega_{i^*}$。此外，引理 3.9（参数为 q^{-1}）表明 $\omega_i - \alpha_i = \alpha_i - \omega_i \in P(V)$。因此，逆权 $\omega_i - \alpha_i$ 属于 $P(\mathcal{F}_q(V))$（见命题 3.1 的证明），但是，根据引理 3.9,

$$P(\mathcal{F}_q(V)) = P(L_q(\Psi^{\mathcal{F}_q})) = \mu P(L_q(Y^{(q)}_{i^*,a})) \subseteq \{\overline{\omega_i}\} \cup \overline{\omega_i - \alpha_{i^*} - Q^+}$$

这里我们用到了关系 $\mu = \omega_i - \omega_{i^*}$。李群态射 $\quad : P_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{t}^\times$ 的单射性由此给出 $\overline{\alpha}_i - \alpha_{i^*} \in Q^+$，但根据假设，$i \neq i^*$，这是不可能的。

由于只剩下第一种情形，这就完成了证明。 □

下面的定理再次使用了命题 3.10 中出现的平移 $\gamma_i \in \mathbb{C}^\times$。注意，这个平移先验上可能取决于 $i \in I$的选择。

定理 3.12。固定 $i \in I$ 并令 $\Psi = \Psi_{i,\ 1}$。那么 $\Psi^{\mathcal{F}_q} = \Psi_i^{-1}{}_{,\ \gamma_i}$。

证明。将 $\mathcal{F}_q$ 作用于 $\mathfrak{r}$ 的关系 $\Psi = \omega_i Y^{(q^{-1})}_{i,\ q_i^{-1}}(\Psi(q_i^{-2}))$，并结合定理 3.10、命题 3.2、命题 3.7 和引理 3.5，得到

$$\Psi^{\mathcal{F}_q} = \overline{-\omega_i} Y^{(q)}_{i,q_i^{-1}\gamma_i}(\Psi^{\mathcal{F}_q}(q_i^{-2})). \tag{3.2}$$

特别地，对于 $j \in I$，有理函数 $\Psi_j^{\mathcal{F}_q}(z)$ 满足 $\Psi_j^{\mathcal{F}_q}(z) = \Psi_j^{\mathcal{F}_q}(zq_i^{-2})$，因此必为常数。此外，$j = i$ 处的方程 (3.2) 给出

$$(1 - \gamma_i z)\Psi_i^{\mathcal{F}_q}(z) = (1 - \gamma_i z q_i^{-2})\Psi_i^{\mathcal{F}_q}(zq_i^{-2})$$

因此，有理函数 $(1 - \gamma_i z)\Psi_i^{\mathcal{F}_q}(z)$ 也必为常数。由此可得$\Psi^{\mathcal{F}_q} = \mu\Psi_i^{-1}{}_{,\ \gamma_i}$ 对于某个 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$ 成立，但根据引理 3.5，$\mu = \varpi(\Psi^{\mathcal{F}_q}) = (\varpi(\Psi))^{-1} = 1$。□

推论 3。 **13.** 函子 $\mathcal{F}_q$ 将 $\mathcal{O}^+_{q^{-1}}$（分别为 $\mathcal{O}^-_{q^{-1}}$）的对象映射到 $\mathcal{O}^-_q$（分别为 $\mathcal{O}^+_q$）的对象 .

证明。这直接由定义 2.16、引理 3.5、命题 3.7、定理 3.10 和定理 3.12 得出（注意到 $\mathcal{F}_q$ 是正合的，并保持模的不可约性）。□

现在我们证明，$\Psi_i^{\mathcal{F}_q},_1 = \Psi_i^{-1},_{\gamma_i}$ 中出现的平移 $\gamma_i \in \mathbb{C}^\times$ 与 $i \in I$ 无关。为此，注意到 $[V] \mapsto [\mathcal{F}_q(V)]$ 给出了良定义的环同构 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}}) \simeq K_0(\mathcal{O}_q)$（也记作 $\mathcal{F}_q$），它将 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})$ 的子环 $K_0(\mathcal{O}^-_{q^{-1}})$ 映到 $K_0(\mathcal{O}^+_q)$。另回顾第 2.3 节中的环同构 $D_q : K_0(\mathcal{O}^+_q) \simeq K_0(\mathcal{O}^-_q)$，它作用于基本表示的等价类，其作用如下

$$D_q[V_i^q(a)] = [V_i^q(a^{-1})].$$

最后，考虑 $\mathcal{H}_q = \mathcal{F}_q \circ D_{q^{-1}} \circ \mathcal{F}_{q^{-1}} \circ D_q$ 在 $K_0(\mathcal{O}^+_q)$ 上的环自同构。

引理 3.14。设 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$。则 $\mathcal{H}_q[V_i^q(a)] = [V_i^q(a\gamma_i^2)]$。

证明。由于 $\mathcal{F}_{q^{-1}}$ 是 $\mathcal{F}_q$ 的逆，定理 3.10 蕴含

$$\mathcal{F}_{q^{-1}}(V_i^q(a^{-1})) \simeq (\mathcal{F}_{q^{-1}} \circ \mathcal{F}_q)(V_i^{q^{-1}}((a\gamma_i)^{-1})) = V_i^{q^{-1}}((a\gamma_i)^{-1})$$

由此可得 $\mathcal{H}_q[V_i^q(a)] = (\mathcal{F}_q \circ D_{q^{-1}})[V_i^{q^{-1}}((a\gamma_i)^{-1})] = [V_i^q(a\gamma_i^2)]$，如所求。 □

现在固定 $i \in I$。下一个引理基本上由 [FM] 得出。

Lemma 3.15. 存在 $a \in \mathbb{C}^\times$，使得张量积 $V_1^q(1) \otimes V_i^q(a)$ 可约 $e.$

证明。由 [FM 定理 4.1],, $V_1^q(1)$ 的最低 ℓ-权 Ψ' 分解为

$$\Psi' = Y_{1,1}^{(q)} \prod_{j \in I, b \in \mathbb{C}^\times} A_{j,b}^{-u_{j,b}}$$

其中 $\{u_{j,b}\}_{j \in I,\ b \in \mathbb{C}^\times} \subseteq \mathbb{N}$ 具有有限支集，且 $A_{j,\ b}$ 是定理 2.11 后面的讨论中引入的 ℓ-权。因此，定理 3.10 前的说明意味着

$$Y_{1,1}^{(q)} Y_{1^*,q^r\vee h^\vee}^{(q)} = \prod_{j \in I, b \in \mathbb{C}^\times} A_{j,b}^{u_{j,b}}.$$

我们想要证明，对于某个 $b \in \mathbb{C}^\times$，有 $u_{i,\ b} > 0$。为此，令 $u_j = \sum_{b \in \mathbb{C}^\times} u_{j,\ b} \in \mathbb{N}$（对于 $j \in I$），并注意到上述等式的常数部分给出

$$\overline{\omega_1 + \omega_{1^*}} = \overline{\textstyle\sum_{j \in I} u_j \alpha_j}. \tag{3.3}$$

逆 Cartan 矩阵还给出一个分解

$$\omega_1 + \omega_{1^*} = \textstyle\sum_{j \in I} ((C^{-1})_{j,1} + (C^{-1})_{j,1^*})\alpha_j.$$

于是，群态射 $\quad : P_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{t}^\times$ 的单射性结合 (3.3) 可推出

$$u_i = (C^{-1})_{i,1} + (C^{-1})_{i,1^*}$$

（因为单根 $\{\alpha_j\}_{j \in I}$ 在 $\mathfrak{g}$的根格中线性无关）。特别地，有限型简单李代数的逆 Cartan 矩阵严格为正（例如参见 [WZ]），这意味着$u_i > 0$，由此可得，对于某个 $b \in \mathbb{C}^\times$，有 $u_{i,\ b} > 0$，如所述。该引理随即直接由 [FM 的引理 2.6 和定理 6 得出。7]。□

定理 3.16. 谱移位 γ_1 和 γ_i 相等。

证明。根据引理 3.15，$K_0(\mathcal{O}^+_q)$中存在如下形式的非平凡分解

$$[V_1^q(1) \otimes V_i^q(a)] = [M_1] + [M_2]$$

where M_1, M_2 是非零有限维 $U_q(\mathfrak{b})$-模。引理 3.14 随即给出 s

$$\mathcal{H}_q[V_1^q(1) \otimes V_i^q(a)] = [V_1^q(\gamma_1^2) \otimes V_i^q(a\gamma_i^2)] = \mathcal{H}_q[M_1] + \mathcal{H}_q[M_2]$$

因此，通过归纳，

$$\mathcal{H}_q^m[V_1^q(1)\otimes V_i^q(a)] = [V_1^q(\gamma_1^{2m})\otimes V_i^q(a\gamma_i^{2m})] = \mathcal{H}_q^m[M_1]+\mathcal{H}_q^m[M_2] \tag{3.4}$$

每当 $m\in\mathbb{N}$ 时。固定这样一个整数 m，并注意到 $\mathcal{H}_q^m[M_1]$ 和 $\mathcal{H}_q^m[M_2]$ 是有限维 $U_q(\mathfrak{b})$-模的等价类。（事实上，D_q 和由 $\mathcal{F}_q$ 诱导的映射都会将有限维模的等价类映到有限维模的等价类，见第 2.3 节。）因此，方程 (3.4) 表明（经过谱参数平移）

$$V_1^q(a_m)\otimes V_i^q(a)\simeq (V_1^q(\gamma_1^{2m})\otimes V_i^q(a\gamma_i^{2m}))((\gamma_i^{2m})^{-1})$$

对于 $a_m=(\frac{\gamma_1}{\gamma_i})^{2m}$ 是可约的，由 [FM 命题 6.15] 可得，对于某个 $r_m\in\mathbb{Z}$，有 $a_m=q^{r_m}$。特别地，若 $\gamma_i\neq\gamma_1$，则量

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_i}=\sqrt{a_1}=q^{\frac{r_1}{2}}$$

不是单位根，而当 $m\in\mathbb{N}$ 时，张量积 $V_1^q(a_m)\otimes V_i^q(a)$ 的可约性与定理 2.21 矛盾。这意味着 $\gamma_i=\gamma_1$，从而完成证明。□

下一个推论由命题 3.2、引理 3.5、命题 3.7、定理 3.12 和定理 3.16 得出（所用符号另见注 2.6）。

推论 3.17. 存在 $\gamma\in\mathbb{C}^\times$，使得 $\Psi^{\mathcal{F}_q}=(\Psi^{-1})(\gamma)$ 对所有 $\Psi\in\mathfrak{r}$ 均成立。 □

注 3.18. 关系式 $\Psi^{\mathcal{F}_q}=(\Psi^{-1})(\gamma)$ 与定理 3.10 一致，其中 $(Y^{(q^{-1})}{}_{i,1})^{-1}=Y_{i\,1}^{(q)}$,.

例 3.19. 取 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$。使用例 *2.7* 中给出的负预基本表示 $L^-{}_{,1\,a}{}^{q^{-1}}$,的基 $\{z_j\}_{j\geq 0}$，其中该表示为 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$，可得

$$\sigma_q(k_1)\star z_j=k_1^{-1}\star z_j=q^{-2j}z_j,\quad \sigma_q(e_1)\star z_j=-k_1^{-1}e_1\star z_j=-q^{2(1-j)}z_{j-1}\ \ and$$

$$\sigma_q(e_0)\star z_j=-k_1e_0\star z_j=q^{2(j+1)}a(q-q^{-1})^{-1}q^{j-2}[j+1]_qz_{j+1}=a(q-q^{-1})^{-1}q^{3j}[j+1]_qz_{j+1}.$$

改用由 $w_j=(-1)^jq^{j(j-1)}z_j$定义的基 $\{w_j\}_{j\geq 0}$，得到

$$\sigma_q(k_1)\star w_j=q^{-2j}w_j,\quad \sigma_q(e_1)\star w_j=w_{j-1},\quad \sigma_q(e_0)\star w_j=a(q^{-1}-q)^{-1}q^j[j+1]_qw_{j+1}$$

因此，$\mathcal{F}_q$（$L^-{}_{,1\,a}{}^{q^{-1}}$,）同构于 U_q（$\mathfrak{b}$）的正预基本表示 $L^+{}_{,1}{}^{q}{}_{,aq^{-2}}$（再次参见例 *2.7*）。因此，若 $\mathfrak{g}=\widehat{\mathfrak{sl}}_2$，则 $\gamma=q^{-2}$。

注 3.20。 推论 3.17 中隐含的平移 γ 对其他李代数（$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ 除外）的显式计算颇为困难，其确切取值可能取决于 Drinfeld–Jimbo 生成集与 $U_q(\mathfrak{g})$ 的 Drinfeld 生成集之间所选定的对应关系。

现在考虑函子 $\mathcal{G}_q$：$\mathcal{O}_{q^{-1}}\to\mathcal{O}_q$，其定义为$\mathcal{G}_q=\tau^*_{\gamma^{-1},\,q}\circ\mathcal{F}_q$，其中$\tau^*_{\gamma^{-1},\,q}$是由 $U_q(\mathfrak{g})$ 的自同构 $\tau_{\gamma^{-1},\,q}$ 拉回得到的。该函子同样是正合的，并且会反转张量积。其在范畴 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 上的作用也完全由以下推论确定。

推论 3.21. 设 $\Psi\in\mathfrak{r}$。则 $\mathcal{G}_q(L_{q^{-1}}(\Psi))\simeq L_q(\Psi^{-1})$。

证明。 该推论可通过将拉回 $\tau^*_{\gamma^{-1},\,q}$ 应用于推论 3.17 得出。 □

3.3. **格罗滕迪克环中的诱导关系**。 上文定义的函子 $\mathcal{G}_q$ 可用于推导格罗滕迪克环 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 的新关系。下面我们以著名的 [FH2] 系统为例说明这一过程，该系统将在下文回顾。

定理 3.22 ([FH2，第 3.1] 节)。对于 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$，定义

$$\tilde{\Psi}_{i,a}^{(q)} = \Psi_{i,a}^{-1} \prod_{\{j \in I | C_{i,j}=-1\}} \Psi_{j,aq_i} \prod_{\{j \in I | C_{i,j}=-2\}} \Psi_{j,a}\Psi_{j,aq_i^2} \prod_{\{j \in I | C_{i,j}=-3\}} \Psi_{j,aq_i^{-1}}\Psi_{j,aq_i}\Psi_{j,aq_i^3} \tag{3.5}$$

并令 $X_{i,a}^{(q)} = L_q(\tilde{\Psi}_{i,a}^{(q)})$ 为 $\mathcal{O}_q$ 中对应的简单对象。

将 $\chi_i^{(q)} = \chi(L^{+,i,1^q})$ 记为预基本表示 $L^{+,i,1^q}$ 在 $\mathfrak{b}$ 中的特征。通过将第 *2.3* 节的映射 $[\mu] \in \mathcal{E}$ 与 $U_q(\mathfrak{b})$ 的可逆表示 $[\mu]$ 的类等同起来，我们将此特征和 $X_{i,a}^{(q)}$ 的特征视为 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 中的元素。

最后定义

$$\check{\chi}_{i,a}^{(q)} = \chi(X_{i,a}^{(q)}) \left(\left[\tfrac{\alpha_i}{2}\right] - \left[\tfrac{\alpha_i}{2}\right]^{-1} \right)$$

并考虑

$$Q_{i,a}^{(q)} = (\chi_i^{(q)})^{-1}[L_{i,a}^{+,q}] \quad \textit{and} \quad \tilde{Q}_{i,a}^{(q)} = (\check{\chi}_{i,a}^{(q)})^{-1}[X_{i,aq_i^{-2}}^{(q)}].$$

则有以下关系成立

$$\left[\tfrac{\alpha_i}{2}\right] Q_{i,aq_i^{-1}}^{(q)} \tilde{Q}_{i,aq_i}^{(q)} - \left[\tfrac{\alpha_i}{2}\right]^{-1} Q_{i,aq_i}^{(q)} \tilde{Q}_{i,aq_i^{-1}}^{(q)} = \prod_{\{j \in I | C_{i,j}=-1\}} Q_{j,a}^{(q)} \prod_{\{j \in I | C_{i,j}=-2\}} Q_{j,aq^{-1}}^{(q)} Q_{j,aq}^{(q)} \prod_{\{j \in I | C_{i,j}=-3\}} Q_{j,aq^{-2}}^{(q)} Q_{j,a}^{(q)} Q_{j,aq^2}^{(q)}. \tag{3.6}$$

~注 3.23. 如 [FHR 第 5 节7], 所述， [FH2] 中关于 QQ-系统的证明并不完整，其中使用的变量 $Q_{i,a}^{(q)}$ 和 $\tilde{Q}_{i,a}^{(q)}$ 必须经过重整化。定理 3.22 中已完成适当的重整化。

注 3.24. 方程 (3.6) 最初见于 [MRV1, MRV2]，源于对仿射 ${}^L\mathfrak{g}$-opers 的研究（其中 ${}^L\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的朗兰兹对偶；另见 [MV1, MV2]中该方程的杨代数版本），并且与关联于 $\mathfrak{g}$ 的 Bethe Ansatz 方程有着密切联系。

对于单边 Kac-Moody 代数 $\mathfrak{g}$，该方程化简为

$$\left[\tfrac{\alpha_i}{2}\right] Q_{i,aq_i^{-1}}^{(q)} \tilde{Q}_{i,aq_i}^{(q)} - \left[\tfrac{\alpha_i}{2}\right]^{-1} Q_{i,aq_i}^{(q)} \tilde{Q}_{i,aq_i^{-1}}^{(q)} = \prod_{j \sim i \text{ in } I} Q_{j,a}^{(q)}.$$

特别地，对于 $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$，有 $X_{i,a}^{(q)} = L^{-,i,aq}$，因此 $\chi(X_{i,a}^{(q)}) = \chi_i^{(q)} = (1 - [\alpha_1]^{-1})^{-1}$，由例 2.7 和定理 2.14 可得。于是，该方程在此情形下等价于 [BLZ], 的量子朗斯基关系，即

$$[L_{1,aq^{-1}}^{+,q}][L_{1,aq^{-1}}^{-,q}] - [\overline{\alpha_1}]^{-1}[L_{1,aq}^{+,q}][L_{1,aq^{-3}}^{-,q}] = \chi(L_{1,1}^{+,q}).$$

考虑由 $[V] \mapsto [\mathcal{G}_q(V)]$ 给出的环同构 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}}) \to K_0(\mathcal{O}_q)$。

推论 3.25. 对于 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$，令 $\mathfrak{X}_{i,a}^{(q)}$，为 $\mathcal{O}_q$ 中的简单对象 $\mathcal{G}_q(X^{(q^{-1})}_{i,a})$

$$\mathfrak{Q}_{i,a}^{(q)} = (\chi_i^{(q)})^{-1}[L_{i,a}^{-,q}] \quad \textit{and} \quad \tilde{\mathfrak{Q}}_{i,a}^{(q)} = (\tilde{\chi}_{i,a}^{(q)})^{-1}[\mathfrak{X}_{i,aq_i^2}^{(q)}] \left(\left[\tfrac{\alpha_i}{2}\right] - \left[\tfrac{\alpha_i}{2}\right]^{-1} \right)$$

其中 $\chi_i^{(q)} = \chi(L^{+,i,1^q})$ 以及 $\tilde{\chi}_{i,a}^{(q)} = \chi(\mathfrak{X}_{i,a}^{(q)})$ 同样视为 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 中的元素。

则有如下关系成立

$$\left[\frac{\alpha_i}{2}\right]\mathfrak{Q}_{i,aq_i}^{(q)}\tilde{\mathfrak{Q}}_{i,aq_i^{-1}}^{(q)}-\left[\frac{\alpha_i}{2}\right]^{-1}\mathfrak{Q}_{i,aq_i^{-1}}^{(q)}\tilde{\mathfrak{Q}}_{i,aq_i}^{(q)} = \prod_{\{j\in I|C_{i,j}=-1\}}\mathfrak{Q}_{j,a}^{(q)}\prod_{\{j\in I|C_{i,j}=-2\}}\mathfrak{Q}_{j,aq^{-1}}^{(q)}\mathfrak{Q}_{j,aq}^{(q)}\prod_{\{j\in I|C_{i,j}=-3\}}\mathfrak{Q}_{j,aq^{-2}}^{(q)}\mathfrak{Q}_{j,a}^{(q)}\mathfrak{Q}_{j,aq^2}^{(q)}. \tag{3.7}$$

证明。设 V 属于 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$。由命题 3.1 的证明和函子$\mathcal{G}_q$的定义可得 $\dim V_\mu=\dim \mathcal{F}_q(V)^{\mu^{-1}}=\dim \mathcal{G}_q(V)^{\mu^{-1}}$。因此，由推论 3.21 可知，映射 $[V]\mapsto[\mathcal{G}_q(V)]$ 将 $\chi(V)\in K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})$ 送至

$$\textstyle\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^\times}\dim(V_\mu)[\mu^{-1}]=\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^\times}\dim(\mathcal{G}_q(V)_{\mu^{-1}})[\mu^{-1}]=\chi(\mathcal{G}_q(V))\in K_0(\mathcal{O}_q).$$

因此，使用定理 3.22 对参数 q^{-1} 定义的元素 $\chi^{(q^{-1})}{}_{i}$ 和 $\check{}\chi^{(q^{-1})}{}_{i,\,a}$ 分别被送至（参见定理 2.14、推论 3.21 及第 3 节开头）

$$\chi(L_{i,1}^{-,q})=\chi_i^{(q)}\quad\text{ and }\quad\chi(\mathfrak{X}_{i,a}^{(q)})\left(\left[\frac{\alpha_i}{2}\right]^{-1}-\left[\frac{\alpha_i}{2}\right]\right)=\tilde{\chi}_{i,a}^{(q)}.$$

因此，关系 (3.6) 对于 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})$ 映射为 (3.7)，因为定理 3.22 中的等价类 $Q^{(q^{-1})}{}_{i,\,a}$ 和 $\tilde{Q}^{(q^{-1})}{}_{i,\,a}$ 分别映射为 $\mathfrak{Q}_{i\,a}^{(q)}$，和 $\tilde{\mathfrak{Q}}_{i\,a}^{(q)}$，（同样由推论 3.21 得出）。□

$\widehat{}$对于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$，可以证明 (3.7) 等价于

$$[L_{1,aq}^{-,q}][L_{1,aq}^{+,q}]-[\overline{\alpha_1}]^{-1}[L_{1,aq^{-1}}^{-,q}][L_{1,aq^3}^{+,q}]=\chi(L_{1,1}^{+,q})$$

这就是上文给出的量子朗斯基关系，只是参数 a 平移了一下。然而，这种巧合纯属偶然；当 $\mathfrak{g}\neq\mathfrak{sl}_2$ 时，定理 3.22 和推论 3.25$\widehat{}$ $\widehat{}$中给出的关系通常并不等价。例如，若 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$，推论 3.21 推出

$$\mathfrak{X}_{1,a}^{(q)}=\mathcal{G}_q(X_{1,a}^{(q^{-1})})\simeq L(\Psi_{1,a}\Psi_{2,aq^{-1}}^{-1})=X_{2,aq^{-1}}^{(q)}$$

而 (3.7) 给出关系

$$(\chi(X_{2,aq^{-2}}^{(q)}))^{-1}[L_{1,aq}^{-,q}][X_{2,a}^{(q)}]-[\overline{\alpha_1}]^{-1}(\chi(X_{2,a}^{(q)}))^{-1}[L_{1,aq^{-1}}^{-,q}][X_{2,aq^2}^{(q)}]=\frac{\chi_1^{(q)}}{\chi_2^{(q)}}(1-[\overline{\alpha_1}]^{-1})[L_{2,a}^{-,q}]$$

但由定理 3.22 得到的关系具有如下形式

$$(\chi(X_{1,aq}^{(q)}))^{-1}[L_{1,aq^{-1}}^{+,q}][X_{1,aq^{-1}}^{(q)}]-[\overline{\alpha_1}]^{-1}(\chi(X_{1,aq^{-1}}^{(q)}))^{-1}[L_{1,aq}^{+,q}][X_{1,aq^{-3}}^{(q)}]=\frac{\chi_1^{(q)}}{\chi_2^{(q)}}(1-[\overline{\alpha_1}]^{-1})[L_{2,a}^{+,q}]$$

对于 $i=1$，并且

$$(\chi(X_{2,aq}^{(q)}))^{-1}[L_{2,aq^{-1}}^{+,q}][X_{2,aq^{-1}}^{(q)}]-[\overline{\alpha_2}]^{-1}(\chi(X_{2,aq^{-1}}^{(q)}))^{-1}[L_{2,aq}^{+,q}][X_{2,aq^{-3}}^{(q)}]=\frac{\chi_2^{(q)}}{\chi_1^{(q)}}(1-[\overline{\alpha_2}]^{-1})[L_{1,a}^{+,q}]$$

对于 $i=2$。最后两个关系显然与第一个不同。

现在，我们希望将 $\mathcal{G}_q$ 应用于 [HL2 第 6]节中的 QQ^*-系统。该系统还依赖于参数 $i\in I$，其中 $a\in\mathbb{C}^\times$，并自然地描述了与 $K_0(\mathcal{O}_q^+)$相关的一个非凡簇代数的变异（参见后文的注 3.38）。它可以写作

$$[L_{i,a}^{\circ,q}][L_{i,a}^{+,q}]=[\overline{\omega_i}]\prod_{\{j\in I|C_{j,i}\neq0\}}[L^{+,q}_{j,aq_j^{-C_{j,i}}}]+[\overline{\omega_i-\alpha_i}]\prod_{\{j\in I|C_{j,i}\neq0\}}[L^{+,q}_{j,aq_j^{C_{j,i}}}] \tag{3.8}$$

其中，$L^{\circ,\,q}_{i\,a}$，$\mathcal{O}_q^+$的具有最高 ℓ-权 $\Psi_1=Y_{(q)\ i,\ aq_i^{-1}}\prod_{\{j\in I|C_{j,i}<0\}}\Psi_{j,\ aq^{-C_{j,i}}_{\cdot,\ j}\ \ i}$.

类似地（见 [HL2，第 7]节），

$$[L_{i,a}^{*,q}][L_{i,a}^{-,q}] = [\overline{\omega_i}] \prod_{\{j\in I|C_{j,i}\neq 0\}} [L^{-,q}_{j,aq_j^{C_{j,i}}}] + [\overline{\omega_i - \alpha_i}] \prod_{\{j\in I|C_{j,i}\neq 0\}} [L^{-,q}_{j,aq_j^{-C_{j,i}}}] \tag{3.9}$$

与 $L^{*,q}_{i,a}$，$\mathcal{O}_q^-$ 中最高 ℓ-权为 $\Psi_2 = Y_{i,aq_i} \prod_{\{j\in I|C_{j,i}<0\}} \Psi_j^{-1}$ 的简单对象

注 3.26。 对于 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$，(3.8) 化为 Baxter 的 QT 关系（参见 [FH1]）

$$[V_1^q(aq^{-1})][L_{1,a}^{+,q}] = [\overline{\omega_1}][L_{1,aq^{-2}}^{+,q}] + [\overline{\omega_1}]^{-1}[L_{1,aq^2}^{+,q}].$$

根据推论 3.21，将 (3.9) 中的参数q 取逆后得到的 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}}^-)$ 的关系，可通过环同构 $[V] \mapsto [\mathcal{G}_q(V)]$ 映射到 (3.8)。因此，在此情形下，我们无法为 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 得到新的关系。然而，正如 [H5]，所示，(3.9) 可以由描述模 $L^{*,q}_{i,a} \otimes L^{-,q}_{i,a}$ 分解为简单因子的 $\mathcal{O}_q^-$ 的短正合列推导得出。我们将在下一个定理中对此作出更精确的陈述。

定理 3.27 ([H5，定理 5。16])。 设 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$。那么在 $\mathcal{O}_q^-$中存在一个非分裂短正合列

$$0 \to \Big([\overline{\omega_i - \alpha_i}] \otimes \bigotimes_{\{j\in I|C_{j,i}\neq 0\}} L^{-,q}_{j,aq_j^{-C_{j,i}}}\Big) \to L^{*,q}_{i,a} \otimes L^{-,q}_{i,a} \to \Big([\overline{\omega_i}] \otimes \bigotimes_{\{j\in I|C_{j,i}\neq 0\}} L^{-,q}_{j,aq_j^{C_{j,i}}}\Big) \to 0$$

其中两端的（非零）因子是简单模。

将函子 $\mathcal{G}_q$ 作用于定理 3.27 给出的 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 短正合列（量子参数为 q^{-1}），得到 QQ^*-系统 (3.8) 的 “ 范畴化版本 ”。（回顾一下，根据定理 2.20，同号预基本表示的张量积必为单模，因此在同构意义下可以按任意顺序书写。下文在推导推论 3.28 时隐式地用到了这一点。）

推论 3.28。 设 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$。在 $\mathcal{O}_q^+$中存在一个非分裂短正合列

$$0 \to \Big([\overline{\omega_i - \alpha_i}] \otimes \bigotimes_{\{j\in I|C_{j,i}\neq 0\}} L^{+,q}_{j,aq_j^{C_{j,i}}}\Big) \to L^{\circ,q}_{i,a} \otimes L^{+,q}_{i,a} \to \Big([\overline{\omega_i}] \otimes \bigotimes_{\{j\in I|C_{j,i}\neq 0\}} L^{+,q}_{j,aq_j^{-C_{j,i}}}\Big) \to 0$$

其中极端的（非零）因子是单模。 □

注 3.29。 [H5] 中定理 3.27 的证明在很大程度上依赖于对 $u = 1$ 处 R-矩阵特化的分析（见第 4 节）

$$R_{L^{*,q}_{i,a},L^{-,q}_{i,a}}(u) : L^{*,q}_{i,a}(u) \otimes L^{-,q}_{i,a} \to L^{-,q}_{i,a} \otimes L^{*,q}_{i,a}(u)$$

因此，在获得针对 $\mathcal{O}_q^+$的此类 R-矩阵的一般构造之前，无法将该证明改编用于推论 3.28。

3.4. **Hernandez–Leclerc 对偶性的函子性解释**。 在本小节中，我们将量子参数 q 视为形式变量，并将 $U_q(\mathfrak{g})$ 看作 $\bigcup_{m>0} \mathbb{C}((q^{1/m}))$ 中 $\mathbb{C}(q)$ 的代数闭包 $\Bbbk_q$ 上的代数。对于另一个形式参数 q'，我们有一个自然的 $\mathbb{C}$-代数同构 $\Bbbk_q \simeq \Bbbk_{q'}$，它将 q 映射到 q'（若不假设 q 和 q' 是形式变量，则此映射无法良定义）。该同构诱导出第二个 $\mathbb{C}$-代数同构

$$\varsigma_{q',q} : U_q(\mathfrak{g}) \to U_{q'}(\mathfrak{g})$$

它将 $U_q(\mathfrak{g})$ 的 Drinfeld 生成集中的元素映射到 $U_{q'}(\mathfrak{g})$ 的 Drinfeld 生成集中的相应元素。

注 3.30. 通过适当地选择 $U_q(\mathfrak{g})$ 与 $U_{q'}(\mathfrak{g})$ 的 Drinfeld 生成集和 Drinfeld–Jimbo 生成集之间的对应关系，可以确保同构 $\varsigma_{q',q}$ 也将 $U_q(\mathfrak{g})$ 的 Drinfeld–Jimbo 生成集中的元素映射到 $U_{q'}(\mathfrak{g})$ 的 Drinfeld–Jimbo 生成集中相应的元素。这样的选择总是可能的（详细内容参见例如 [HJ, 第 2 节.2] ），并且在本小节中（仅限本小节）始终假定采用这样的选择。

定义 $\mathcal{B}_{q',q}$ 为协变函子 $U_{q'}(\mathfrak{b})\otimes_{U_q(\mathfrak{b})} -$，它从所有 $U_q(\mathfrak{b})$-模构成的范畴映射到所有 $U_{q'}(\mathfrak{b})$-模构成的范畴，其中 $U_{q'}(\mathfrak{b})$ 上的（右） $U_q(\mathfrak{b})$-作用通过同构 $\varsigma_{q',q}$给出。这是一个可逆函子（因此是正合的），因为

$$\mathcal{B}_{q',q}\circ\mathcal{B}_{q,q'} = U_{q'}(\mathfrak{b})\otimes_{U_q(\mathfrak{b})}(U_q(\mathfrak{b})\otimes_{U_{q'}(\mathfrak{b})} -) \simeq U_{q'}(\mathfrak{b})\otimes_{U_{q'}(\mathfrak{b})} -$$

与所有 $U_q(\mathfrak{b})$-模范畴上的恒等函子典范同构。此外，$\varsigma_{q',q}$ 诱导出一个 $\Bbbk_{q'}$-代数同构 $\Bbbk_{q'}\otimes_{\Bbbk_q} U_q(\mathfrak{b}) \simeq U_{q'}(\mathfrak{b})$，因此我们可以自然地将 $\mathcal{B}_{q',q}(V)$ 的像识别为如下 $U_q(\mathfrak{b})$-模 V：它定义在 $\Bbbk_{q'}\otimes_{\Bbbk_q} V$ 上，其作用为 $x(1\otimes_{\Bbbk_q} v) = 1\otimes_{\Bbbk_q}\varsigma_{q',q}^{-1}(x)v$（对任意 $v\in V$ 和 $x\in U_{q'}(\mathfrak{b})$）。因此，$\mathcal{B}_{q',q}$ 将 $\Bbbk_q$ 上维数为 n 的 $U_q(\mathfrak{b})$-模映为 $\Bbbk_{q'}$ 上维数相同的 $U_{q'}(\mathfrak{b})$-模（对$n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$）。它还保持不可约性，正如任何具有正合逆的正合函子一样。

注 3.31. 考虑一个 $U_q(\mathfrak{b})$-模 V，其具有固定的 $\Bbbk_q$-基 $\{v_j\}_{j\in J}\subseteq V$，以及系数$\{e_{i,j,s}(q)k_{i,j,s}(q)\}_{i\in I,j,s\in J}\subseteq\Bbbk_q$，满足 $e_iv_j=\sum_{s\in J} e_{i,j,s}(q)v_s$ 且 $k_iv_j=\sum_{s\in J}k_{i,j,s}(q)v_s$。那么，$\mathcal{B}_{q',q}(V)$ 上的 $\Bbbk_{q'}$-基 $\{1\otimes_{\Bbbk_q} v_j\}_{j\in J}$上的 $U_{q'}(\mathfrak{b})$-作用为（见注 3.30）

$$e_i(1\otimes_{\Bbbk_q} v_j)=\textstyle\sum_{s\in J} e_{i,j,s}(q')(1\otimes_{\Bbbk_q} v_s) \text{ and } k_iv_j=\sum_{s\in J}k_{i,j,s}(q')(1\otimes_{\Bbbk_q} v_s).$$

命题 3.32. 设 V 是 $\mathcal{O}_q$ 的一个对象。那么 $\mathcal{B}_{q',q}(V)$ 属于 $\mathcal{O}_{q'}$。

证明。固定 $\mu(q)=(\mu_i(q))_{i\in I}\in(\Bbbk_q^\times)^I$。于是 $\Bbbk_{q'}\otimes_{\Bbbk_q} V_{\mu(q)}=(\mathcal{B}_{q',q}(V))_{\mu(q')}$（见注 3.31），由此可知 $\mathcal{B}_{q',q}(V)$ 同构于其权空间的直和，而这些权空间在 $\Bbbk_{q'}$ 上均为有限维。现在考虑 $\lambda_1(q)$ ..., $\lambda_s(q)\in(\Bbbk_q^\times)^I$，其中 $P(V)\subseteq\bigcup_{j=1}^s D(\lambda_j(q))$，并固定一个权 $\omega(q')\in P(\mathcal{B}_{q',q}(V))\subseteq(\Bbbk_{q'}^\times)^I$。由前述论证可知 $\omega(q)\in P(V)$，因此存在 $1\le r\le s$，使得 $\omega(q)\le_q\lambda_r(q)$，其中 $\le_q$ 是第 2.2 节中定义的 $\mathfrak{t}^\times=(\Bbbk_q^\times)^I$上的偏序。将通过把量子参数改为 q'，由 $\le_q$ 在 $(\Bbbk_{q'}^\times)^I$ 上得到的偏序记为$\le_{q'}$。我们要证明 $\omega(q')\le_{q'}\lambda_r(q')$。为此，写作 $\lambda_r(q)(\omega(q))^{-1}=\mu(q)=(\mu_i(q))_{i\in I}$，使得 $\omega(q)\le_q\lambda_r(q)$ 蕴含

$$\mu_i(q)=q^{d_i\sum_{j\in I}m_jC_{ij}}=\overline{\textstyle\sum_{j\in I}m_j\alpha_j}$$

对于某个 $\{m_j\}_{j\in I}\subseteq\mathbb{N}$。因此，$\mu_i(q')=(q')^{d_i\sum_{j\in I}m_jC_{ij}}$和 $\mu(q')=\lambda_r(q')(\omega(q'))^{-1}$是通过将量子参数 q 替换为 q'，由 $:P_{\mathbb{Q}}\to\mathfrak{t}^\times$ 得到的映射作用于$\sum_{j\in I}m_j\alpha_j\in Q_+$ 所得的像。证明至此结束。□

因此，函子$\mathcal{B}_{q',q}$通过限制给出了一个从 $\mathcal{O}_q$ 到 $\mathcal{O}_{q'}$ 的函子。我们将由$\mathfrak{r}_q$ 表示由序列 $\Psi(q)=(\Psi_{i,r}(q))_{i\in I,r\ge0}\subseteq\Bbbk_q$ 组成的集合，其中 $\varpi(\Psi(q))=(\Psi_{i,0}(q))_{i\in I}\in\mathfrak{t}^\times=(\Bbbk_q^\times)^I$，并且对任意 $i\in I$，$\Psi_i(z,q)=\sum_{r\ge0}\Psi_{i,r}(q)z^r$ 都是 z 中的有理函数。我们还用 $L_q(\Psi(q))$ 表示 $\mathcal{O}_q$ 中最高权为 $\Psi(q)\in\mathfrak{r}_q$的简单对象。

命题 3.33。固定 $\Psi(q)=(\Psi_{i,r}(q))_{i\in I,r\ge0}\in\mathfrak{r}_q$。则 $\mathcal{B}_{q',q}(L_q(\Psi(q)))\simeq L_{q'}(\Psi(q'))$。

证明。 取一个最高 ℓ-权向量 v，它属于 $L_q(\Psi(q))$。则对于简单的 $U_{q'}(\mathfrak{b})$-模 $\mathcal{B}_{q',\,q}(L_q(\Psi(q)))$，$1\otimes_{\Bbbk_q} v$ 是一个最高 ℓ-权向量，其最高 ℓ-权为 $\Psi(q')$，因为

$$\phi^+_{i,r}(1\otimes_{\Bbbk_q} v) = 1\otimes_{\Bbbk_q} \phi^+_{i,r}v = 1\otimes_{\Bbbk_q} \Psi_{i,r}(q)v = \Psi_{i,r}(q')(1\otimes_{\Bbbk_q} v)$$

以及 $e_i(1\otimes_{\Bbbk_q} v) = 1\otimes_{\Bbbk_q} e_i v = 0$。证明完毕。 □

引理 3.3 **4.** 设 V, W 是 $U_q(\mathfrak{b})$-模。则 $\mathcal{B}_{q',q}(V\otimes_{\Bbbk_q} W)\simeq \mathcal{B}_{q',q}(V)\otimes_{\Bbbk_{q'}} \mathcal{B}_{q',q}(W)$.

证明。 使用显然的同构 $\Bbbk_{q'}\otimes_{\Bbbk_q}(V\otimes_{\Bbbk_q} W)\simeq(\Bbbk_{q'}\otimes_{\Bbbk_q} V)^{\otimes_{\Bbbk_{q'}}}(\Bbbk_{q'}\otimes_{\Bbbk_q} W)$（容易看出它对于底层作用是 $U_{q'}(\mathfrak{g})$-线性的）。□

考虑函子 $\mathcal{D}_q = \mathcal{G}_q\circ\mathcal{B}_{q^{-1},q}$，它是 $\mathcal{O}_q$ 的协变自函子。由上述结果可知，这是一个可逆正合函子，它反转模的张量积并保持不可约性及维数（在 $\Bbbk_q$ 上）。因此它诱导出 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 的环自同构，该自同构将单模的等价类映射为单模的等价类。此外，由推论 3.21 和命题 3.33，我们有 $\mathcal{D}_q(L_q(\Psi(q)))\simeq L_q((\Psi(q^{-1}))^{-1})$，因此

$$\mathcal{D}_q([\mu(q)])\simeq[(\mu(q^{-1}))^{-1}],\quad \mathcal{D}_q(L^{\pm,q}_{i,a(q)})\simeq L^{\mp,q}_{i,a(q^{-1})} \text{ and } \mathcal{D}_q(V_i^q(a(q)))\simeq V_i^q(a(q^{-1}))$$

对于 $\mu(q)\in\mathfrak{t}^\times=(\Bbbk_q^\times)^I$, $i\in I$ 和 $a(q)\in\Bbbk q$。特别是,

$$\mathcal{D}_q([\varpi])\simeq[\varpi],\quad \mathcal{D}_q(L^{\pm,q}_{i,q^r})\simeq L^{\mp,q}_{i,q^{-r}} \text{ and } \mathcal{D}_q(V_i^q(q^r))\simeq V_i^q(q^{-r})$$

对于 $\omega\in P_{\mathbb{Q}}$, $i\in I$ 和 $r\in\mathbb{Z}$。这一观察引出了以下两个定义。

定义 3.35。 若一个 ℓ-权 $\Psi(q)=(\Psi_{i,\,r}(q))_{i\in I,\ r\geq 0}\in\mathfrak{r}_q$ 满足以下条件，则称其为 ℓ-整 的:

(i) 其常数部分 $\varpi(\Psi(q))$ 属于态射 $:P_{\mathbb{Q}}\to\mathfrak{t}^\times$ 的像；并且 (ii) 对任意 $i\in I$，有理函数 $\Psi_i(z,\ q)$ 的根和极点都包含在 $q^{\mathbb{Z}}$ 中。

定义 3.36 （受 [HL1] 和 [HL2，定义 4.1] 启发）。 范畴 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z},\,q}$ 是 $\mathcal{O}_q$ 的全子范畴，其对象的简单成分具有 ℓ-整最高 ℓ-权。

这是一个幺半子范畴，因为 $\chi_q(V\otimes W)=\chi_q(V)\chi_q(W)$。此外，定义 3.35 和上述结果表明，对于所有 ℓ-整 ℓ-权$\Psi(q)\in\mathfrak{r}_q$，$\mathcal{D}_q(L_q(\Psi(q)))\simeq L_q((\Psi(q^{-1}))^{-1})$ 都属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z},\,q}$。因此，函子 $\mathcal{D}_q$ 限制为范畴 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z},\,q}$ 上的自函子。

现在写作 $\mathcal{O}^{\pm}_{\mathbb{Z}\,,\,q}=\mathcal{O}_{\mathbb{Z},\,q}\cap\mathcal{O}^{\pm}_q$，并回顾第 2.3 节中的 Hernandez–Leclerc 对偶 $D_q\colon K_0(\mathcal{O}^+_q)\simeq K_0(\mathcal{O}^-_q)$。那么，[HL2，定理 7.9] 给出

$$D_q^{\pm1}[L_q(\Psi(q))]=[L_q((\Psi(q^{-1}))^{-1})]=[\mathcal{D}_q(L_q(\Psi(q)))]$$

对于任意属于 $\mathcal{O}^{\pm}_{\mathbb{Z}\,,\,q}$ 的 $L_q(\Psi(q))$。特别地，$D_q^{\pm1}$ 和 $\mathcal{D}_q$ 都与简单模等价类的可数和平凡相容，因此 D_q 限制为一个环同构 $D_q\colon K_0(\mathcal{O}^+_{\mathbb{Z}\,,\,q})\simeq K_0(\mathcal{O}^-_{\mathbb{Z}\,,\,q})$，满足对 $\mathcal{O}^{\pm}_{\mathbb{Z}\,,\,q}$ 中的每个 V，都有 $D_q^{\pm1}[V]=[\mathcal{D}_q(V)]$。我们将这一结果表述为一个正式定理。这是本小节的主要结果。

定理 3.37. 函子 $\mathcal{D}_q$ 是对合的，并限制为 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z},q}$的一个协变自函子；它是正合的，反转张量积，并保持模的不可约性及其维数（在 $\Bbbk q$ 上）。此外，由 $\mathcal{D}_q$诱导的 $K_0(\mathcal{O}_{\mathbb{Z},q})$ 的环自同构，以如下意义扩展环同构 $D_q\colon K_0(\mathcal{O}^+_q)\simeq K_0(\mathcal{O}^-_q)$:

$$[\mathcal{D}_q(V)]=D_q^{\pm1}[V]\ \textit{for any } V\ \textit{in}\ \mathcal{O}^{\pm}_{\mathbb{Z},q}.$$

因此，我们称 $\mathcal{D}_q$ 将 *Hernandez–Leclerc* 对偶 D_q 在 $\mathcal{O}^{\pm}_{\mathbb{Z}}$ 中q范畴化。 □

注 3.38. 上文定义的范畴 $\mathcal{O}^{\pm}_{\mathbb{Z},q}$ 是簇代数的幺半范畴化实例（参见例如 [KKOP1、KKOP2] 以及 [H4，第 8.4] 节及其中的参考文献）。在此背景下，由 Hernandez–Leclerc 对偶 D 诱导的映射 $K_0(\mathcal{O}^{+}_{\mathbb{Z},q}) \simeq K_0(\mathcal{O}^{-}_{\mathbb{Z},q})$ 是一个簇代数同构，而上述定理指出，这个同构也是一个函子 $\mathcal{O}^{+}_{\mathbb{Z},q} \to \mathcal{O}^{-}_{\mathbb{Z},q}$ 在这些范畴化之间的影子。此外，定理 3.37 将这个特别的函子实现为范畴 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z},q}$ 上自函子 $\mathcal{D}_q$ 的限制，并说明映射 $K_0(\mathcal{O}^{+}_{\mathbb{Z},q}) \simeq K_0(\mathcal{O}^{-}_{\mathbb{Z},q})$ 可以扩展为 $K_0(\mathcal{O}_{\mathbb{Z},q})$上的一个环对合。这就是“$\mathcal{D}_q$ 将 D_q 在 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z},q}$中范畴化”的含义。

证明。 剩下唯一要证明的是 $\mathcal{D}_q$ 的对合性。为此，注意到第 3 节的函子 $\mathcal{G}_q$ 在典范意义下同构于函子 $U_q(\mathfrak{b})\otimes_{U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})} -$，其中 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$ 对 $U_q(\mathfrak{b})$ 的（右）作用定义为 $x\cdot y = x(\tau_{\gamma_1,q}\circ\sigma_{q^{-1}}(y))$，其中 $x\in U_q(\mathfrak{b})$ 且 $y\in U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$。于是很容易构造一个函子同构

$$\mathcal{D}_q\circ\mathcal{D}_q(V)\simeq U_q(\mathfrak{b})\otimes_{U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})}U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})\otimes_{U_q(\mathfrak{b})}U_q(\mathfrak{b})\otimes_{U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})}U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})\otimes_{U_q(\mathfrak{b})}V\simeq V$$

对任意 $V\in\mathcal{O}_q$。由上述说明，证明得证。 □

我们在本节末尾陈述以下结果，该结果在附录 A 中得到证明。注意，对于 q 为形式变量或 $q\in\mathbb{C}^\times$ 不是单位根的情形，该结果成立，并且它回答了 Hernandez–Leclerc 关于其对偶性 D 可能扩展形式的问题。

定理3.39。 存在一个环对合自同构 D_q，它满足：对于任意 V，若 V 属于 $\mathcal{O}^{\pm}_q$，则 $\tilde{D}_q([V]) = D_q^{\pm1}([V])$。

注 3.40。 </style}人们或许会想知道， D_q 是否能由 $\mathcal{O}_q$的某个自函子诱导得到。目前也不清楚它是否保持单模的类（见附录 A 末尾）。

4. R-matrices in the category $\mathcal{O}$

本节为 $\mathcal{O}$的子范畴 $\mathcal{O}^+$ 构造 R-矩阵。我们首先回顾有限维简单模对应的构造（通过普适 R-矩阵），以及在 [H5]中针对子范畴 $\mathcal{O}^-$ 得到的（仿射） R-矩阵。然后，我们利用后者论文中的结果以及第 3 节的函子 $\mathcal{F}_q$，为 $\mathcal{O}^+$ 得到 R-矩阵，并给出这些编织的分解及其奇点的部分刻画。

我们将沿用第 2 节的记号，并在需要将某个记号理解为处于 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$ 的表示论中时明确说明。（只有在使用函子 $\mathcal{F}_q$ 时才会出现这种情况。）例如，上面的范畴 $\mathcal{O}$ 就是第 3 节中的范畴 $\mathcal{O}_q$。

4.1. R-有限维表示的矩阵。 万有 R-矩阵 $\mathcal{R}(u)$ 是 $(U_q(\mathfrak{g})\hat{\otimes}U_q(\mathfrak{g}))[[u]]$ 张量积中的一个重要元素（该张量积略作了完备化，见 [H3]）。它由 Drinfeld 在 [D2]中引入，并可分解为四个部分

$$\mathcal{R}(u)=\mathcal{R}^-(u)\mathcal{R}^0(u)\mathcal{R}^+(u)\mathcal{R}^\infty \tag{4.1}$$

其中 $\mathcal{R}^{\pm}(u)\in(U_q^{\pm}(\mathfrak{b})\hat{\otimes}U_q^{\mp}(\mathfrak{b}^-))[[u]]$。这里， $U_q(\mathfrak{b}^-)\subseteq U_q(\mathfrak{g})$ 是由集合 $\{f_i,k_i^{\pm1}\}_{i=0}^n$ 生成的子代数，并且（与第 2.1 节一样）

$$U_q^{\pm}(\mathfrak{b})=U_q(\mathfrak{b})\cap U_q^{\pm}(\mathfrak{g}) \text{ with } U_q^{\pm}(\mathfrak{b}^-)=U_q(\mathfrak{b}^-)\cap U_q^{\pm}(\mathfrak{g}).$$

为描述在式 (4.1) 中出现的分量 $\mathcal{R}^\infty$，令 $(\cdot,\ \cdot)$ 为 $\dot{\mathfrak{g}}$ 的标准不变对称双线性形式（例如参见 [Kac，第 2] 章），其归一化满足 $(\alpha_i,\ \alpha_j)=d_iC_{i,\ j}$ for

$i,\ j\in I$。还记得，$q=e^h$ 对某个 $h\in\mathbb{C}^\times$ 成立（见第 2.1 节）。于是 $\mathcal{R}^\infty=e^{-ht_\infty}$，其中 t_∞ 是 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的张量平方中对应于形式 $(\cdot,\ \cdot)$ 的典范元素，该 Cartan 子代数属于 $\dot{\mathfrak{g}}$（参见 [Da1]）。换言之，对于范畴 $\mathcal{O}$ 中的 $V,\ W$ 个对象，

$$\mathcal{R}^\infty(v\otimes w)=q^{-(\nu,\omega)}v\otimes w$$

如果 $v\in V$ 和 $w\in W$ 分别是权为 $(q^{(\nu,\alpha_i)})_{i\in I}$ 和 $(q^{(\omega,\alpha_i)})_{i\in I}$ 的权向量，其中 $\nu,\omega\in\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}P$。（注意，刚才对 v 和 w 的权所作的假设不失一般性，因为 $q=e^h$。事实上，固定 $\mu=(\mu_i)_{i\in I}\in\mathfrak{t}^\times$ 和 $\omega=\frac{1}{h}\sum_{i\in I}\frac{1}{d_i}\log(\mu_i)\omega_i\in\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}P$，其中我们取对数的主值分支。根据 Kac 第 2] 章中标准形式的定义，对每个 $i\in I$ 都有 $\mu_i=e^{\log(\mu_i)}=q^{(\omega,\alpha_i)}$。）

（4.1）的分量 $\mathcal{R}^0(u)$ 的一个表达式已知（例如参见 [FH1，第 7] 节），但本文不会用到。尽管如此，我们仍需要知道该分量属于子代数 $(U_q(\mathfrak{b})\hat{\otimes}U_q(\mathfrak{b}^-))[[u]]$。我们还将考虑以下显式表达式，它们对 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ 成立

$$\mathcal{R}^+(u)=\prod_{m\geq 0}^{\rightarrow}\exp_q\left((q^{-1}-q)u^m x^+_{1,m}\otimes x^-_{1,-m}\right),$$

$$\mathcal{R}^-(u)=\prod_{m>0}^{\leftarrow}\exp_{q^{-1}}\left((q^{-1}-q)u^m k_1^{-1}x^-_{1,m}\otimes x^+_{1,-m}k_1\right),$$

$$\mathcal{R}^0(u)=\exp\left((q^{-1}-q)\sum_{m>0}\frac{mu^m}{[m]_q(q^m+q^{-m})}h_{1,m}\otimes h_{1,-m}\right)$$

其中 $\exp_{q^{\pm 1}}(x)=\sum_{r\geq 0}q^{\pm\frac{r}{2}(1-r)}\frac{x^r}{[r]_q!}$ 为 q-指数函数。

在可积系统理论中，泛称的 R-矩阵至关重要，因为它给出了杨–巴克斯特方程的一个非平凡（且在某种程度上具有普适性）的解（参见 [H3]及其中的参考文献）。它还可以作用于任意有限维不可约 $U_q(\mathfrak{g})$-模的张量积 $V\otimes W$，从而产生一个定义良好的映射 $\mathcal{R}(u)|_{V\otimes W}\colon V(u)\otimes W\to V(u)\otimes W$，使得对于 $\tau\colon V(u)\otimes W\to W\otimes V(u)$，其中为通常的交换映射（如定理 3.4 中所示），

$$\tau\circ\mathcal{R}(u)|_{V\otimes W}:V(u)\otimes W\to W\otimes V(u) \tag{4.2}$$

相对于代数 $U_{q,u}(\mathfrak{g})=U_q(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}(u)$ 的作用，它是一个线性同构。我们将通过重新归一化 (4.2) 得到的同构 $R_{V,W}(u)$ 称为有理 R-矩阵[1]，使得

$$R_{V,W}(u)(v\otimes w)=w\otimes v \tag{4.3}$$

对于 $v\in V$ 和 $w\in W$ 这两个最高 ℓ-权向量。当 V,W 是简单有限维 $U_q(\mathfrak{g})$-模时，众所周知，恰好存在一个 $U_{q,u}(\mathfrak{g})$-线性同构 $V(u)\otimes W\simeq W\otimes V(u)$ 满足 (4.3)。因此，有理 R-矩阵 $R_{V,W}(u)$ 也可定义为唯一的这类同构。此外，顾名思义，映射 $R_{V,W}(u)$ 关于谱参数 u 是有理的，且只有有限个极点。逆映射也具有这一性质，因为（根据上文提到的唯一性）

$$R^{-1}_{V,W}(u)=R_{W,V}(u^{-1}) \tag{4.4}$$

且映射 $R_{V,W}(u)$ 诱导出一个 $U_q(\mathfrak{g})$-线性同构 $R_{V,W}(a)\colon V(a)\otimes W\to W\otimes V(a)$，对任意一个既不是 $R_{V,W}(u)$ 的极点，也不是 $R^{-1}_{V,W}(u)$ 的极点的 $a\in\mathbb{C}^\times$ 均成立（关于上述诸多事实的更多细节，请参见 [H5] 及其中的参考文献）。

[1]这里使用“有理”一词，是为了将此处描述的 R-矩阵与第 4.2 节中的矩阵区分开来。

例4.1。 取 $\mathfrak{g}=\widehat{\mathfrak{sl}}_2$，其 $V_k=W_k^{(1)}{}_{,aq^{1-2k}}$ 的基为例 *2.9* 中给出的基。则有理 R-矩阵 $R_k(u):V_k(u)\otimes V_k\to V_k\otimes V_k(u)$ 可表示为

$$R_k(u)(v_i\otimes v_j)=\sum_{\mu=\max(-i,j-k)}^{\min(j,k-i)}\left(\sum_{\lambda=\max(0,\mu)}^{\min(j,k-i)}\upsilon_{i,j,k}^{\mu,\lambda}(u)\gamma_{i,j,k}^{\mu,\lambda}(u)\right)v_{j-\mu}\otimes v_{i+\mu}$$

由 $\upsilon^{\mu,\ i\ \lambda}_{\ k,\ j,}(u)=u^\lambda q^{\mu(j-i-\mu)}\begin{bmatrix}i+\lambda\\ \lambda\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}j-\mu\\ \lambda-\mu\end{bmatrix}_q$ 给出，并且由 $\gamma^{\mu,\ i\ \lambda}_{\ k,\ j,}(u)$ 给出

$$\left(\prod_{s=1}^{\lambda}\frac{[k+1-i-s]_q}{[j+1-i-\lambda-s]_{q,u}}\right)\left(\prod_{s=1}^{\lambda-\mu}\frac{[k+\mu-j+s]_q}{[j-i-2\lambda+s]_{q,u}}\right)\left(\prod_{s=1-\lambda}^{\min(i,k-j)}\frac{[j-i-\lambda+s]_{q,u}}{[k+1-\lambda-s]_{q,u}}\right)\left(\prod_{s=1}^{j-\lambda}\frac{[s-k-1]_{q,u}}{[s-i-\lambda-1]_{q,u}}\right)$$

其中 $[x]_{q,\ u}=\frac{q^xu-q^{-x}}{q-q^{-1}}$ 适用于 $x\in\mathbb{Z}$。特别地，对于 $k=1$，我们得到著名矩阵

$$\frac{1}{1-uq^2}\begin{pmatrix}1-uq^2&0&0&0\\0&(1-q^2)u&q(1-u)&0\\0&q(1-u)&1-q^2&0\\0&0&0&1-uq^2\end{pmatrix}$$

在 $V_1(u)\otimes V_1$（以及 $V_1\otimes V_1(u)$）的有序基 $(v_0\otimes v_0, v_0\otimes v_1, v_1\otimes v_0, v_1\otimes v_1)$ 中。

由于分量 $\mathcal{R}^0(u)$ 和 $\mathcal{R}^{\pm}(u)$ 属于 $(U_q(\mathfrak{b})\hat{\otimes}U_q(\mathfrak{b}^-))[[u]]$，因此实际上可以将普适 R-矩阵特化到任意张量积 $V\otimes W$，其中 V 是 $\mathcal{O}$ 的一个简单对象，且 W 是有限维简单 $U_q(\mathfrak{g})$-模。该特化诱导出一个 R-矩阵 $R_{V,\ W}(u)$（它是 $U_{q,\ u}(\mathfrak{b})=U_q(\mathfrak{b})\otimes\mathbb{C}(u)$ 上模之间的同构），而公式（4.4）使我们能够推导出互逆编织

$$R_{W,V}(u):W(u)\otimes V\to V\otimes W(u).$$

然而，当 V 和 W 都是 $\mathcal{O}$ 中的无限维模时，这种方法便无法使用；此时构造一个 $U_{q,u}(\mathfrak{b})$-线性同构 $V(u)\otimes W\simeq W\otimes V(u)$ 极其困难。事实上，这样的同构可能并不存在，正如下一个引理所示。

引理 4.2 ([H5，例 5。2], 另见 [BJMST])。 设 $V=L^+_{1,1}$ 且 $W=L^-_{1,1}$ 属于 $\mathfrak{g}=\widehat{\mathfrak{sl}}_2$。则 $V(u)\otimes W$ 和 $W\otimes V(u)$ 作为 $U_{q,u}(\mathfrak{b})$ 上的模并不同构。

幸运的是，借助 [H5] 的结果以及第 3 节中的函子 $\mathcal{F}_q$，可以将 R-矩阵的构造扩展到 $\mathcal{O}$ 的子范畴 $\mathcal{O}^{\pm}$。这将在下一小节中完成。不过需要注意的是，对于 $\mathcal{O}^{\pm}$，编织的存在是可以预期的，因为（如前所述）同号预基本表示的张量积可以按任意顺序重写（差一个同构）。

4.2. **仿射 R-矩阵**。在 [H5] 中构造 R-矩阵的策略依赖于一个精心选取的归纳系统。为概述这一策略，取 $\mathcal{O}^-$ 的 V 和 W 两个简单对象，使得 $(V_k)_{k\geq1},(W_k)_{k\geq1}$ 是有限维简单 $U_q(\mathfrak{g})$-模，并且 $\lim^{k\to\infty}\chi_q(V_k)=\chi_q(V)$ 且 $\lim^{k\to\infty}\chi_q(W_k)=\chi_q(W)$（见命题 2.17）。

记 Ψ_k 和 Ψ'_k 分别为 V_k 和 W_k的最高 ℓ-权。那么，对于 $k\leq\ell$，我们可以考虑如下复合映射

$$\begin{aligned}V_k(u)\otimes W_k=L(\Psi_k)(u)\otimes L(\Psi'_k)&\to L(\Psi_k)(u)\otimes L(\Psi'_k)\otimes L(\Psi_\ell\Psi_k^{-1})(u)\otimes L(\Psi'_\ell(\Psi'_k)^{-1})\\&\to L(\Psi_k)(u)\otimes L(\Psi_\ell\Psi_k^{-1})(u)\otimes L(\Psi'_k)\otimes L(\Psi'_\ell(\Psi'_k)^{-1})\\&\to L(\Psi_\ell)(u)\otimes L(\Psi'_\ell)=V_\ell(u)\otimes W_\ell\end{aligned}$$

其中，第一个和最后一个箭头类似于定义第 2.3 节的系统$\{F_{\ell,k}\}_{0\le k\le \ell}$ 时所用的映射，而第二个箭头是有理 R-矩阵的逆

$$L(\Psi_\ell\Psi_k^{-1})(u)\otimes L(\Psi'_k)\xrightarrow{\sim} L(\Psi'_k)\otimes L(\Psi_\ell\Psi_k^{-1})(u).$$

我们将此复合记为 $G_{\ell,\,k}(u)$。此外，还有一个类似的映射

$$G'_{\ell,k}(u): W_k\otimes V_k(u)\to W_\ell\otimes V_\ell(u).$$

由 [H5, 第 5], 节，集合 $\{G_{\ell,k}(u)\}_{0\le k\le \ell}$ 和 $\{G'_{\ell,k}(u)\}_{0\le k\le \ell}$ 构成归纳线性系统$\widetilde{\ }$，并使第 2.3 节的（渐近）子代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 在相应直极限上的作用得以收敛。这足以在这些极限上定义一个 $U_q(\mathfrak{b})$-作用，且

$$\lim_{k\to\infty} V_k(u)\otimes W_k\simeq V(u)\otimes W\quad\text{ and }\quad \lim_{k\to\infty} W_k(u)\otimes V_k\simeq W(u)\otimes V.$$

引理 4.3 ([H5, 第 5] 节。 沿用上述记号，设 $R_k(u): V_k(u)\otimes W_k\to W_k\otimes V_k(u)$为第*4.1*节的有理 R-矩阵。那么，对于 $k\le\ell$,

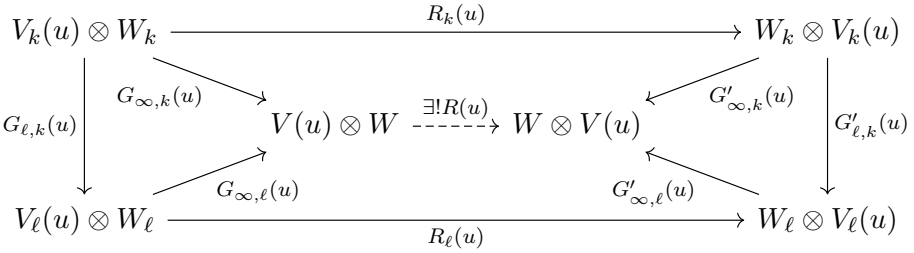
$$G'_{\ell,k}(u)\circ R_k(u)=R_\ell(u)\circ G_{\ell,k}(u).$$

记 $G_{\infty,\,k}(u): V_k(u)\otimes W_k\to V(u)\otimes W$ 和 $G'_{\infty,\,k}(u): W_k\otimes V_k(u)\to W\otimes V(u)$ 为与系统 $\{G_{\ell,k}(u)\}_{0\le k\le \ell}$ 和 $\{G'_{\ell,k}(u)\}_{0\le k\le \ell}$相关联的典范映射。于是，由上述引理和直极限的通常泛性质可得唯一映射

$$R(u): V(u)\otimes W\to W\otimes V(u)$$

使下图成为交换图

(4.5)



我们称这个（唯一的）诱导映射 $R(u)$ 为一个仿射 R-矩阵。它在乘积 $V(u)\otimes W$上按有理方式作用，且极点至多可数无限个。（这由上面的交换图以及以下事实得出：$G_{\ell,k}(u)$ 和 $G'_{\ell,k}(u)$ 都是有理映射。）

定理 *4.4*（[*H5*，第 5]节）。应用 $R(u)$ 对 $U_{\mathfrak{b},u}(\mathfrak{b})=U_q(\mathfrak{b})\otimes\mathbb{C}(u)$ 的作用是一个线性同构。它还诱导出一个 $U_q(\mathfrak{b})$-线性同构 $V(a)\otimes W\simeq W\otimes V(a)$，只要 $a\in\mathbb{C}^\times$ 既不是 $R(u)$ 的极点，也不是其逆的极点。

因此，可以从有限维表示的 R-矩阵得到子范畴 $\mathcal{O}^-$ 的编织。然而，这并非易事，因为定义上述归纳系的映射 $G_{\ell,k}(u)$ 和$G'_{\ell,k}(u)$ 不是 $U_q(\mathfrak{b})$-线性的。不过，它们满足

$$x\cdot(v\otimes w)=\lim_{k\to\infty} G_{\infty,k}(u)(x\cdot G_{\infty,k}^{-1}(u)(v\otimes w))$$

and

$$x\cdot(w\otimes v)=\lim_{k\to\infty} G'_{\infty,k}(u)(x\cdot (G'_{\infty,k}(u))^{-1}(w\otimes v))$$

$\widetilde{\ }$对任意 $v\in V(u)$， $w\in W$ 以及任意属于 $U_q(\mathfrak{b})$ 与第 2.3 节的子代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 交集的 x。特别地，这些等式中出现的极限都是良定义的。

例 4.5。 设 $\mathfrak{g}=\widehat{\mathfrak{sl}}_2$，并回忆例 *2.9* 中描述的 $V_k=W_k=W_k^{(1)}{}_{,aq^{1-2k}}$ 的基 $\{v_{i,k}\}_{i=0}^k$。那么 $v_{i,k}\otimes v_{j,k}$ 在 $G_{\ell,k}(u)\colon V_k(u)\otimes W_k\to V_\ell(u)\otimes W_\ell$ 下的像为

$$\sum_{\nu=0}^{\min(j,\ell-k)} u^\nu q^{\nu(j-i-\nu)}\begin{bmatrix} i+\nu \\ \nu\end{bmatrix}_q \left(\prod_{s=1}^{j-\nu}\frac{[s-k-1]_{q,u}}{[s-\ell-1]_{q,u}}\right)\left(\prod_{s=1}^{\nu}\frac{[s+k-\ell-1]_q}{[j-\ell-s]_{q,u}}\right)(v_{i+\nu,\ell}\otimes v_{j-\nu,\ell})$$

其中仍有 $[x]_{q,\,u}=\frac{q^xu-q^{-x}}{q-q^{-1}}$。此外，系统 $\{G_{\ell,k}(u)\}_{0\le k\le\ell}$ 的极限与 $V(u)\otimes W$ 同构，其中 $V=W=L^-_{1,\,a}$。考虑例 *2.7* 中的基 $\{z_i\}_{i\ge0}\subseteq V$。则 $v_{i,\,k}\otimes v_{j,\,k}$ 在映射 $G_{\infty,\,k}(u)$：$V_k(u)\otimes W_k\to V(u)\otimes W$ 下的像为

$$\sum_{0\le\nu\le j} u^\nu(q^{-1}-q)^{j-\nu}q^{-\nu(i+k)}q^{\frac12(j-\nu)(j+3\nu-1)}\begin{bmatrix} i+\nu \\ \nu\end{bmatrix}_q\left(\prod_{s=1}^{j-\nu}[s-k-1]_{q,u}\right)(z_{i+\nu}\otimes z_{j-\nu}).$$

最后可以验证，使图 (4.5) 交换的唯一映射 $R(u)$ 为

$$R(u)(z_i\otimes z_j)=\sum_{0\le\nu\le i}\tfrac{1}{u^i}(q-q^{-1})^{i-\nu}q^{\frac12(i-\nu)(i-2j+3\nu-1)}\begin{bmatrix} i+j-\nu \\ j\end{bmatrix}_q\left(\prod_{s=\nu-i+1}^{0}[s]_{q,u}\right)(z_\nu\otimes z_{i+j-\nu})$$

并且该映射确实是一个 $U_{q,\,u}(\mathfrak{b})$-线性同构。注意，它在 $\mathbb{C}^\times$ 上没有极点，因此关于谱参数 u 是全纯的。因此，对于任意 $b\in\mathbb{C}^\times$（其中 u 在 b/a 处取值），它给出一个 $U_q(\mathfrak{b})$-线性同构 $L^-_{1,\,a}\otimes L^-_{1,\,b}\simeq L^-_{1,\,b}\otimes L^-_{1,\,a}$。

现在，我们像第 3 节中那样强调量子参数，并假设 V，W 是正子范畴 $\mathcal{O}_q^+$ 中的简单对象。那么，上述小节中的函子 $\mathcal{F}_{q^{-1}}$ 将 V 和 W 映到 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 的负子范畴 $\mathcal{O}^-_{q^{-1}}$ 中的简单对象 $V'=\mathcal{F}_{q^{-1}}(V)$ 和 $W'=\mathcal{F}_{q^{-1}}(W)$。因此存在一个仿射 R-矩阵

$$R'(u)\colon W'(u)\otimes V'\to V'\otimes W'(u)$$

它也可以看作是从模 $\mathcal{F}_q\big(W'(u)\otimes V'\big)$ 到 $\mathcal{F}_q\big(V'\otimes W'(u)\big)$ 的 $U_{q,\,u}(\mathfrak{b})$-线性同构（因为函子 $\mathcal{F}_q$ 在态射上作用为恒等映射）。

此外，由于 $\mathcal{F}_{q^{-1}}$ 是 $\mathcal{F}_q$ 的逆，命题 3.2 和定理 3.4 给出

$$\mathcal{F}_q\big(W'(u)\otimes V'\big)\simeq(\mathcal{F}_q\circ\mathcal{F}_{q^{-1}})(V)\otimes((\mathcal{F}_q\circ\mathcal{F}_{q^{-1}})(W))(u)\simeq V\otimes W(u)$$

并且，类似地，$\mathcal{F}_q\big(V'\otimes W'(u)\big)\simeq W(u)\otimes V$。明确写出上文所用的同构并反转谱参数 u 后，我们推得（采用定理 3.4 的记号）

$$R(u)=\tau\circ R'(u^{-1})\circ\tau: V\otimes W(u^{-1})\to W(u^{-1})\otimes V \tag{4.6}$$

是一个 $U_{q,\,u}(\mathfrak{b})$-线性同构。第 2.1 节的自同构 $\tau_{u,\,q}$ 随后使我们能够将此映射视为从 $V(u)\otimes W$ 到 $W\otimes V(u)$ 的同构。我们将后一个同构称为仿射 R-矩阵，与由 (4.5) 诱导的编织同理。它在 $V(u)\otimes W$ 上有理作用，其极点集合与映射 $R'(u^{-1})$ 相同。因此，根据上述说明，该集合至多可数无限。

让我们将前面几段的结果总结为一个恰当的定理。

定理 4.6。 设 V 和 W 是 $\mathcal{O}_q^+$ 的简单对象。那么 $R(u)=\tau\circ R'(u^{-1})\circ\tau$ 给出一个 $U_{q,\,u}(\mathfrak{b})$-线性同构，将 $V(u)\otimes W$ 映到 $W\otimes V(u)$，其中

$$R'(u)\colon(\mathcal{F}_{q^{-1}}(W))(u)\otimes\mathcal{F}_{q^{-1}}(V)\to\mathcal{F}_{q^{-1}}(V)\otimes(\mathcal{F}_{q^{-1}}(W))(u)$$

是由图 (4.5) 诱导得到的 $\mathcal{O}^-_{q^{-1}}$ 的仿射 R-矩阵。 □

例 4.7。令 $\mathfrak{g}=\widehat{\mathfrak{sl}}_2$，其中 $\{w_i\}_{i\geq 0}$ 是 $V=W=L^+_{1,a^q}$ 的基，如例 *2.7* 所示。由例 *3.19*、例 *4.5* 和定理 *4.6* 可得，仿射 R-矩阵$R(u):V(u)\otimes W\to W\otimes V(u)$ 将 $w_i\otimes w_j$ 映射到

$$\sum_{0\leq\nu\leq j} u^j(q^{-1}-q)^{j-\nu}q^{-\frac{1}{2}(j-\nu)(j-2i+3\nu-1)}\begin{bmatrix}i+j-\nu\\ i\end{bmatrix}_q\left(\prod_{s=\nu-j+1}^{0}[s]_{q^{-1},u^{-1}}\right)\varrho_{i,j,\nu}w_{i+j-\nu}\otimes w_\nu.$$

其中因子 $\varrho_{i,j,\nu}=q^{i(i-1)+j(j-1)-(i+j-\nu)(i+j-\nu-1)-\nu(\nu-1)}=q^{-2(i-\nu)(j-\nu)}$ 来自例 *3.19* 的同构 $V\simeq\mathcal{F}_q(L^-_{1,aq^2},)$。后一个表达式可简化为

$$\sum_{0\leq\nu\leq j} u^\nu(q^{-1}-q)^{j-\nu}q^{-\frac{1}{2}(j-\nu)(j+2i-\nu-1)}\begin{bmatrix}i+j-\nu\\ i\end{bmatrix}_q\left(\prod_{s=\nu-j+1}^{0}[s]_{q,u}\right)w_{i+j-\nu}\otimes w_\nu$$

并且很容易验证，$R(u)$ 是一个$U_{q,u}(\mathfrak{b})$-线性同构。

现在我们通过给出 $\mathcal{O}^\pm$ 的仿射 R-矩阵的一些基本性质来结束本节.

命题4.8。设 V,W 是 $\mathcal{O}_q$ 的简单对象。假设 V 和 W 均属于 $\mathcal{O}_q^-$（或 $\mathcal{O}_q^+$），并令 $R_{V,W}(u):V(u)\otimes W\to W\otimes V(u)$ 为上文定义的仿射 R-矩阵。那么

(i) $R_{V,W}(u)$ 满足归一化条件（4.3）；*(ii)* 仿射 R-矩阵 $R_{W,V}(u)$：$W(u)\otimes V\to V\otimes W(u)$ 等于 $R^{-1}_{V,W}(u^{-1})$。

此外，若 V 和 W 都是有限维的，则 $R_{V,W}(u)$ 也是第*4.1*节中的有理 R-矩阵。

证明。(i) 部分很容易证明。对于 (ii) 部分，假设 V，W 是 $\mathcal{O}_q^-$ 的对象，并记

$$\begin{aligned} &G_{\ell,k}(u):V_k(u)\otimes W_k\to V_\ell(u)\otimes W_\ell, \qquad && G'_{\ell,k}(u):W_k\otimes V_k(u)\to W_\ell\otimes V_\ell(u),\\ &H_{\ell,k}(u):W_k(u)\otimes V_k\to W_\ell(u)\otimes V_\ell, && H'_{\ell,k}(u):V_k\otimes W_k(u)\to V_\ell\otimes W_\ell(u)\end{aligned}$$

为仿射 R-矩阵 $R_{V,W}(u)$ 和 $R_{W,V}(u)$ 定义所依赖的直接系。对这些归纳系作简单比较可得

$$G_{\ell,k}(u^{-1})=H'_{\ell,k}(u)\quad\text{and}\quad G'_{\ell,k}(u^{-1})=H_{\ell,k}(u)$$

因此 $G_{\infty,k}(u^{-1})=H'_{\infty,k}(u)$ 和 $G'_{\infty,k}(u^{-1})=H_{\infty,k}(u)$。(ii) 部分对 $\mathcal{O}_q^-$ 成立，接下来由公式（4.4）以及公式 (4.5) 中仿射 R-矩阵定义所依据的唯一性即可得出。对于 $\mathcal{O}_q^+$，相应结论随后直接由构造 (4.6) 得出。最后，定理的最后一部分由有理 R-矩阵的唯一性得出。□

4.3. 通过稳定映射分解。</style}量子环代数理论中的一个基本问题涉及 ℓ-权向量的张量积。事实上，ℓ-权向量这一概念与 $U_q(\mathfrak{b})$ 的余乘法 Δ 并不相容；对于给定的 $U_q(\mathfrak{b})$ 表示，这类向量的张量积通常并非这些表示的张量积的 ℓ-权向量。这导致了许多技术上的困难，尤其使得研究 $\mathcal{O}=\mathcal{O}_q$ 的幺半结构更加复杂。不过，利用稳定映射这一概念，可以弥补这些困难。

考虑从 $\mathfrak{t}^\times$ 上的序关系诱导出的 $\mathfrak{t}^\times\times\mathfrak{t}^\times$ 上的序关系 $\preceq$：当且仅当 $\omega_1\omega_2=\omega'_1\omega'_2$ 和 $\omega_1\leq\omega'_1$ 时，$(\omega_1,\omega_2)\preceq(\omega'_1,\omega'_2)$。那么，给定 $\mathcal{O}$ 中的 V 和 W 模，以及其 ℓ-权向量 $v\in V$ 和 $w\in W$，可以定义 $V(u)\otimes W$ 的如下子空间：

$$(v\otimes w)_\prec=\sum_{(\omega_1,\omega_2)\prec(\varpi(\Psi),\varpi(\Psi'))} V(u)_{\omega_1}\otimes W_{\omega_2}$$

其中 Ψ 和 Ψ' 分别是 v 和 w 的 ℓ-权。使用这一记法，我们可以仿照 [H5], 将 V 和 W 的稳定映射定义为一个 $\mathbb{C}$-线性同构

$$S_{V,W}(u) : V(u) \otimes W \to V(u) \otimes W$$

它关于谱参数 u 是有理的且满足 $S_{V,\ W}(u)(v \otimes w)$ 属于子空间 $(v \otimes w)_{\preceq} = v \otimes w + (v \otimes w)_{\prec}$ 且是一个 ℓ-权向量，其 ℓ-权为 $\Psi(u)\Psi'$，只要$v \in V(u)$ 和 $w \in W$ 是权向量，其相应的 ℓ-权分别为 $\Psi(u)$ 和 Ψ'。值得注意的是，这些稳定映射被猜想可推广在 [MO]中，利用中岛箭图簇的等变 K-理论定义的（几何）稳定包络（对于 $\mathfrak{g}$ 的 ADE 型）。

这样的映射总是存在，但未必唯一。不过，如果V和 W不可约，且其中至少一个属于子范畴 $\mathcal{O}^-$，那么它便唯一确定。此外，在这种情形下，映射（唯一的）$S_{V,\ W}(u)$ 诱导出一个有理的 $U_q(\mathfrak{h}^+)$-线性同构（参见 [H5]）

$$S_{V,W}(u) : V(u) \otimes_d W \to V(u) \otimes W$$

wh其中 $V(u) \otimes_d W$是通过使用*Drinfeld*余乘法得到的 $U_q(\mathfrak{h}^+)$-模

$$\Delta_d : U_q(\mathfrak{h}^+) \to U_q(\mathfrak{h}^+) \otimes U_q(\mathfrak{h}^+)$$

其定义为 $\Delta_d(k_i) = k_i \otimes k_i$和 $\Delta_d(h_{i,\ r}) = h_{i,\ r} \otimes 1 + 1 \otimes h_{i,\ r}$。

Hernandez 的一个深刻结果是， $\mathcal{O}^-$ 的仿射 R-矩阵具有如下分解。

定理4.9 ([H5，第 5] 节。 取 V、W 为 $\mathcal{O}^-$ 中的简单对象，且满足 $R_{V,\ W}(u)$ 为相应的仿射 R- 矩阵（按第 *4.2* 节中的方法得到）。则

$$R_{V,W}(u) = S_{W,V}(u^{-1}) \circ \tau \circ \alpha(u) \circ S^{-1}_{V,W}(u) \tag{4.7}$$

对于某个（唯一的） $U_q(\mathfrak{h}^+)$-线性自同构 $\alpha(u)$，它作用于模 $V(u) \otimes_d W$.

上面的映射 $\alpha(u)$ 可利用普适 R-矩阵 $\mathcal{R}(u)$ 的阿贝尔分量 $\mathcal{R}^0(u)$ 显式构造。因此，等式 (4.7) 可视为 $R_{V,\ W}(u)$ 的显式分解。这一结果意义重大，因为它极大地简化了 $\mathcal{O}^-$ 的编织计算。（使用 (4.5) 显式计算 $\mathcal{O}^-$ 的仿射 R-矩阵通常非常困难。）它也可用于更抽象的证明（例如，参见 [H5，定理 5.16] 的证明）。

现在，我们通过给出 $\mathcal{O}^+$ 的仿射 R-矩阵的类似分解，来完成本文。为此，我们再次强调量子参数 q，并固定简单对象 V，W，它们属于 $\mathcal{O}^+_q$。于是，定理 4.6 和 4.9 给出了以下 R-矩阵 $R_{V,\ W}(u)$ 的分解

$$\begin{aligned} R_{V,W}(u) &= \tau \circ S_{V',W'}(u) \circ \tau \circ \alpha(u^{-1}) \circ S^{-1}_{W',V'}(u^{-1}) \circ \tau \\ &= (\tau \circ S_{V',W'}(u) \circ \tau) \circ \tau \circ (\tau \circ \alpha(u^{-1}) \circ \tau) \circ (\tau \circ S^{-1}_{W',V'}(u^{-1}) \circ \tau) \end{aligned}$$

其中 $V' = \mathcal{F}_{q^{-1}}(V)$、$W' = \mathcal{F}_{q^{-1}}(W)$ 和 $\alpha(u)$ 是 $W'(u) \otimes_d V'$ 上的 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{h}^+)$-线性自同构。（上述稳定映射也是 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{h}^+)$-线性的，因为 V'，W' 是 $\mathcal{O}_{q^{-1}}$ 中的简单对象。）

记 $\beta(u) = \tau \circ \alpha(u^{-1}) \circ \tau$和 $\mathcal{S}_{V,\ W}(u) = \tau \circ S_{W',\ V'}(u^{-1}) \circ \tau$，使得

$$R_{V,W}(u) = \mathcal{S}_{W,V}(u^{-1}) \circ \tau \circ \beta(u) \circ \mathcal{S}^{-1}_{V,W}(u). \tag{4.8}$$

于是，第 2 节中的自同构 $\tau_{u,q}$ 和第 3 节中的函子 $\mathcal{F}_q$（结合定理 3.4）使我们能够将上面的映射 $\mathcal{S}_{V,W}(u)$ 视为从 $\mathcal{F}_q(V'(u) \otimes_d W')$ 到 $V(u) \otimes W$ 的有理同构；对于 $U_q(\mathfrak{b})$ 的子代数 $\mathfrak{X}_q = \sigma_{q^{-1}}(U_{q^{-1}}(\mathfrak{h}^+))$ 的作用而言，它是线性的[2]。映射 $\beta(u)$ 也可视为 $\mathcal{F}_q(V'(u) \otimes_d W')$ 的 $\mathfrak{X}_q$-线性自同构。

[2]注：根据余乘法 Δ_d 的定义， τ: $V'(u) \otimes_d W' \to W' \otimes_d V'(u)$ 是 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{h}^+)$-线性的。

W我们希望比较分解 (4.7) 和 (4.8)。为此，定义

$$\Delta'_{d,q} = (\sigma_q^{-1} \otimes \sigma_q^{-1}) \circ \Delta_{d,q^{-1}} \circ \sigma_q : \mathfrak{X}_q \to \mathfrak{X}_q \otimes \mathfrak{X}_q$$

其中$\Delta_{d,q^{-1}}$是与代数 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{h}^+)$ 相关联的 Drinfeld余乘法。进一步记 $V(u)\otimes'_d W$和 $W\otimes'_d V(u)$ 为由余乘法 $\Delta'_{d,q}$ 诱导的 $\mathfrak{X}_q$-模。由（平凡的）关系 $(\sigma_q\otimes\sigma_q)\circ\Delta'_{d,q} = \Delta_{d,q^{-1}}\circ\sigma_q$可知， $\mathfrak{X}_q$-模 $V(u)\otimes'_d W$和 $\mathcal{F}_q(V(u) \otimes_d W)$ 自然同构。因此，我们可以将分解 (4.8) 视为

$$V(u)\otimes W \xrightarrow{\mathcal{S}^{-1}_{V,W}(u)} V(u)\otimes'_d W \xrightarrow{\beta(u)} V(u)\otimes'_d W \xrightarrow{\tau} W\otimes'_d V(u) \xrightarrow{\mathcal{S}_{W,V}(u^{-1})} W\otimes V(u) \tag{4.9}$$

注意，(4.9) 中出现的所有映射都是 $\mathfrak{X}_q$-线性的。因此我们有

- $\mathcal{S}_{V,W}(u)$ 是 $V(u) \otimes'_d W$ 到 $V(u) \otimes W$ 的一个有理 $\mathfrak{X}_q$-线性同构，
- $\beta(u)$ 是 $\mathfrak{X}_q$-线性自同构 $V(u) \otimes'_d W$。

此外，映射 $\mathcal{S}_{V,\,W}(u)$ 满足与 $S_{V,\,W}(u)$ 类似的三角性。事实上，设 $v \in V$ 和 $w \in W$ 是 ℓ-权分别为 Ψ 和 Ψ' 的 ℓ-权向量。另请注意， $\mathfrak{t}^\times \times \mathfrak{t}^\times$ 上定义的偏序为：当且仅当 $\omega_1\omega_2 = \omega'_1\omega'_2$且 $\omega_1 \trianglelefteq \omega'_1$ 时，$(\omega_1,\ \omega_2) \preceq' (\omega'_1,\ \omega'_2)$（其中 $\trianglelefteq$ 是第 3 节中的偏序）。于是，稳定映射 $S_{W',\,V'}(u^{-1})$（属于 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$）的三角性给出

$$\mathcal{S}_{V,W}(u)(v\otimes w) \in \tau(w\otimes v + (w\otimes v)_{\prec'})$$

其中，子空间 $(w\otimes v)_{\prec'} \subseteq W\otimes V(u)$ 定义为

$$(w\otimes v)_{\prec'} = \sum_{(\omega_1,\omega_2)\prec'(\varpi(\Psi'),\varpi(\Psi))} W_{\omega_1}\otimes V(u)_{\omega_2}.$$

此外，简单计算（利用 $\leq$ 和 $\trianglelefteq$ 互为倒数这一事实）可得

$$\tau(w\otimes v)_{\prec'} \subseteq (v\otimes w)_{\prec}$$

因此 $\mathcal{S}_{V,\,W}(\ u)(v\otimes w)\ \in v\otimes w + (v\otimes w)_{\prec} = (v\otimes w)_{\trianglelefteq}$。这就是所说的三角性 .

由此我们得出结论，(4.7) 和 (4.8) 中给出的分解完全类似，它们之间唯一实质性的区别在于，(4.8) 使用了 $U_q(\mathfrak{b})$ 的子代数 $\mathfrak{X}_q$ ，而非通常的 Cartan–Drinfeld 子代数 $U_q(\mathfrak{h}^+)$（后者用于 (4.7)）。

例 4.10. 考虑 $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ 和 $V = L^-_{,\,1}{}^{q}_{a}$，取例 *2.7* 中的基 $\{z_i\}_{i\geq 0} \subseteq V$。则在稳定映射 $S_{V,\,V}(u)\colon V(u)\otimes_d V \to V(u)\otimes V$下， $z_i\otimes z_j$ 的像为（参见 [H5]）

$$S_{V,V}(u)(z_i\otimes z_j) = \sum_{0\leq\lambda\leq j} u^\lambda (q^{-1}-q)^{-\lambda} \begin{bmatrix} i+\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}_q \frac{q^{\frac{\lambda}{2}(1-3\lambda)} q^{\lambda(j-2i)}}{\prod_{s=1}^{\lambda}[j-i-s]_{q,u}}\, z_{i+\lambda}\otimes z_{j-\lambda}.$$

逆映射可轻易计算得

$$S^{-1}_{V,V}(u)(z_i\otimes z_j) = \sum_{0\leq\lambda\leq j} u^\lambda (q-q^{-1})^{-\lambda} \begin{bmatrix} i+\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}_q \frac{q^{\frac{\lambda}{2}(1-3\lambda)} q^{\lambda(j-2i)}}{\prod_{s=1}^{\lambda}[j-i-\lambda+1-s]_{q,u}}\, z_{i+\lambda}\otimes z_{j-\lambda}$$

并且可以将例 *4.5* 的仿射 R-矩阵 $R_V(u)\colon V(u)\otimes V \to V\otimes V(u)$ 表示为

$$R_V(u) = S_{V,V}(u^{-1}) \circ \tau \circ \alpha(u) \circ S^{-1}_{V,V}(u)$$

其中 $\alpha(u)$ 是由下式给出的 $U_q(\mathfrak{h}^+)$-线性自同构： $V(u)\otimes_d V$

$$\alpha(u)(z_i\otimes z_j) = \frac{(-1)^j}{u^i} q^{\frac{1}{2}(i-j)(i+j-1)} (q-q^{-1})^{i-j}\, \frac{\prod_{s=1}^{i}[j-s+1]_{q,u}}{\prod_{s=1}^{j}[s-i-1]_{q,u}}\, z_i\otimes z_j.$$

例 *4.7* 中仿射 R-矩阵 $R_W(u)\colon W(u)\otimes W \to W\otimes W(u)$（其中 $W = L^+(1, a^q)$）的相应分解为

$$R_W(u) = \mathcal{S}_{W,W}(u^{-1}) \circ \tau \circ \beta(u) \circ \mathcal{S}_{W,W}(u)$$

其中，映射 $\mathcal{S}_{W,W}(u)$、$\mathcal{S}^{-1}_{W,W}(u)$ 和 $\beta(u)$ 分别由下式给出（在例 *2.7* 的基 $\{w_i\}_{i\ge 0} \subseteq W$ 上）：

$$\mathcal{S}_{W,W}(u)(w_i \otimes w_j) = \sum_{0\le\lambda\le i} (q-q^{-1})^{-\lambda} \begin{bmatrix} j+\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}_q \frac{q^{-\frac{\lambda}{2}(1-2i+\lambda)}}{\prod_{s=1}^{\lambda}[i-j-s]_{q,u}}\, w_{i-\lambda}\otimes w_{j+\lambda},$$

$$\mathcal{S}^{-1}_{W,W}(u)(w_i \otimes w_j) = \sum_{0\le\lambda\le i} (q^{-1}-q)^{-\lambda} \begin{bmatrix} j+\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}_q \frac{q^{-\frac{\lambda}{2}(1-2i+\lambda)}}{\prod_{s=1}^{\lambda}[i-j-\lambda+1-s]_{q,u}}\, w_{i-\lambda}\otimes w_{j+\lambda}$$

最后

$$\beta(u)(w_i \otimes w_j) = (-u)^i q^{-\frac{1}{2}(j-i)(j+i-1)} (q^{-1}-q)^{j-i}\, \frac{\prod_{s=1}^{j}[i-s+1]_{q,u}}{\prod_{s=1}^{i}[s-j-1]_{q,u}}\, w_i\otimes w_j.$$

（注意，我们隐式地使用了例 *3.19* 中的同构 $W \simeq \mathcal{F}_q(L^-(1, aq^{2q^{-1}}))$。）

本文最后指出，在范畴 $\mathcal{O}_q^{\pm}$（本节以及 [H5] 中）得到的编织或许可用于扩展 Kang–Kashiwara–Kim 在 [KKK] 中提出的广义量子仿射 Schur–Weyl 对偶概念（另见 [F]）。事实上，这些对偶的构造所依据的典型方法，是首先利用有限个 $\{R_{i,j}(u)\colon V_i(u)\otimes V_j \to V_j\otimes V_i(u)\}_{i,j\in\mathcal{J}}$ 个有限维单实（即张量平方单）模 $\{V_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ 的 R-矩阵的极点，构造一个 quiver-Hecke（或 Khovanov–Laura–Rouquier）代数。因此，一个自然的问题是：能否用 $\mathcal{O}_q^{\pm}$ 中（足够良好）的对象取代有限维 $\{V_i\}_{i\in\mathcal{J}}$，从而构造类似的对偶和代数？这是一个有趣的问题，因为 Kang–Kashiwara–Kim 的广义对偶在量子仿射代数的有限维表示论研究中极为重要（例如参见 [F, KKO]）。因此，扩展这些对偶或许能为子范畴 $\mathcal{O}_q^{\pm}$ 带来极具实质性的新结果。

最后，我们的工作引出了一个自然的问题：第 3 节中的函子 $\mathcal{F}_q$ 能否扩展到移位量子仿射代数（以及 [H4]中定义的相应截断）的情形。利用 Hernandez 在[H4 第 7] 节中引入的函子，可以轻松做到这一点；这些函子将移位代数 $U_q^{\mu}(\mathfrak{g})$ 上的模范畴 $\mathcal{O}_{\mu}$ 与范畴 $\mathcal{O}_q$ 联系起来（后者与 $U_q(\mathfrak{b})$ 相关联）。不过，由此得到的函子是否为正合函子，或者它对于 $U_q^{\mu}(\mathfrak{g})$ 的融合积（定义见 [H4 第 5] 节）是否具有良好的相容性，目前尚不清楚。

Appendix A. Extension of Hernandez–Leclerc's duality

本附录旨在证明定理3.39。固定一个 $q\in\mathbb{C}^{\times}$，它不是单位根，并采用第 3 节的记号。不过，也可以使用 q 作为形式变量，并如第 3.4 节那样将基域 $\mathbb{C}$ 替换为$\Bbbk_q$。记$\mathcal{E}_{\ell,q^{\pm 1}}$ 为第 2.3 节中针对参数 $q^{\pm 1}$定义的集合。（请回忆，$\mathcal{E}_{\ell,q}$ 的定义涉及阶 $\le$。）

考虑群自同构 ϑ（对合）$\mathfrak{r}$，其在正基本表示和可逆表示的最高 ℓ-权上的作用由 $\Psi_{i,\,a}\mapsto\Psi_{i,\,a^{-1}}$ 和 $\mu\mapsto\mu^{-1}$ ($i\in I$、$a\in\mathbb{C}^{\times}$和 $\mu\in\mathfrak{t}^{\times}$) 给出。固定 $c\colon\mathfrak{r}\to\mathbb{Z}$，其中 $\mathcal{E}_{\ell,\,q^{-1}}$，并将复合映射 $I_q(c) = c\circ\vartheta$ 记为 $I_q(c)$。

命题 A.1。 映射 $I_q(c)\colon\ \mathfrak{r}\to\mathbb{Z}$ 属于 $\mathcal{E}_{\ell,\ q}$。

证明。 由于 c 属于 $\mathcal{E}_{\ell,\ q^{-1}}$，我们可以找到 λ_1，……，$\lambda_r\in\mathfrak{t}^\times$，使得

$$\{\varpi(\Psi)\,|\,\Psi\in\mathfrak{r},\,c(\Psi)\neq 0\}\subseteq\textstyle\bigcup_{i=1}^r\{\mu\in\mathfrak{t}^\times\,|\,\mu\trianglelefteq\lambda_i\}$$

其中 $\trianglelefteq$ 是第 3 节的阶。因此，对某个 $\Psi\in\mathfrak{r}$，$(I_q(c))(\Psi)=(c\circ\vartheta)(\Psi)\neq 0$ 蕴含 $\varpi(\vartheta(\Psi))\trianglelefteq\lambda_i$ 至少对一个 $i\in\{1,...,r\}$成立。然而，$\varpi(\vartheta(\Psi))=(\varpi(\Psi))^{-1}$（正如容易通过正拟基本表示和可逆表示的最高 ℓ-权验证的那样），由此可得 $\varpi(\Psi)\leq\lambda_i^{-1}$（因为阶 $\leq$ 和 $\trianglelefteq$ 互为倒数）。因此，

$$\{\varpi(\Psi)\,|\,\Psi\in\mathfrak{r},\,(I_q(c))(\Psi)\neq 0\}\subseteq\textstyle\bigcup_{i=1}^r\{\mu\in\mathfrak{t}^\times\,|\,\mu\leq\lambda_i^{-1}\}=\bigcup_{i=1}^r D(\lambda_i^{-1})$$

且 $I_q(c)$满足定义 $\mathcal{E}_{\ell,\ q}$所依据的第一个性质。对于第二个性质，固定$\mu\in\mathfrak{t}^\times$ 并利用先前的结果可推得集合

$$\{\Psi\in\mathfrak{r}\,|\,(I_q(c))(\Psi)\neq 0,\,\varpi(\Psi)=\mu\}=\vartheta(\{\Psi\in\mathfrak{r}\,|\,c(\Psi)\neq 0,\,\varpi(\Psi)=\mu^{-1}\})$$

是有限的（因为 c 属于 $\mathcal{E}_{\ell,\ q^{-1}}$）。证明结束。 □

对应关系 $I_q\colon\ c\mapsto c\circ\vartheta$ 由此诱导出一个从 $\mathcal{E}_{\ell,\ q^{-1}}$ 到 $\mathcal{E}_{\ell,\ q}$的映射。这是一个环同构。事实上，由于 $I_{q^{-1}}=I_q^{-1}$是对合的，唯一需要验证的非平凡之处是 I_q 与卷积乘积相容。这可由以下计算得到

$$(I_q(c_1\cdot c_2))(\Psi)=\sum_{\Psi_1\Psi_2=\vartheta(\Psi)}c_1(\Psi_1)c_2(\Psi_2)=\sum_{\Psi_1\Psi_2=\Psi}c_1(\vartheta(\Psi_1))c_2(\vartheta(\Psi_2))=(I_q(c_1)\cdot I_q(c_2))(\Psi)$$

其中，第二个等式使用了代换 $\Psi_1\mapsto\vartheta(\Psi_1)$ 和 $\Psi_2\mapsto\vartheta(\Psi_2)$。

对于由 $[\Psi](\Psi')=\delta_{\Psi,\ \Psi'}$给出的$\mathcal{E}_{\ell,\ q^{-1}}\cap\mathcal{E}_{\ell,\ q}$ 中的元素，将 $[\Psi]$ 写成第 2.3 节中的形式。于是，对于任意 $\Psi\in\mathfrak{r}$，有$I_q([\Psi])=[\vartheta(\Psi)]$。我们将构造一个环同构 $I_q\colon\ K_0(\mathcal{O}_q)\simeq K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})$，使下图交换：

$$(\star)\qquad\begin{array}{ccc}K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}}) & \xrightarrow{\tilde{I}_q} & K_0(\mathcal{O}_q)\\ \downarrow{\scriptstyle\chi_q} & & \downarrow{\scriptstyle\chi_q}\\ \mathcal{E}_{\ell,q^{-1}} & \xrightarrow{I_q} & \mathcal{E}_{\ell,q}\end{array}$$

根据定理 2.11，只需证明 $I_q\circ\chi_q(K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}}))\subseteq\chi_q(K_0(\mathcal{O}_q))$。为此，考虑下面的引理，它是定理 2.14 和 ϑ 的定义的直接推论。

引理 A.2. 设 $\mu\in\mathfrak{t}^\times$、$i\in I$ 和 $a\in\mathbb{C}^\times$。则

$$I_q\circ\chi_q([\mu])=\chi_q([\mu^{-1}])\ and\ I_q\circ\chi_q(L_{i,a}^{+,q^{-1}})=\chi_q(L_{i,a^{-1}}^{+,q}).$$ □

我们将 $W^{(i)}_{,\ k\,a^{q^{\pm1}}}$，记作 $U_{q^{\pm1}}(\mathfrak{g})$ 上参数为 $k\in\mathbb{N}_{>0}$、$i\in I$ 和 $a\in\mathbb{C}^\times$ 的 Kirillov–Reshitikhin 模（见例 2.9）。我们还需要另一个引理。

引理 A.3. 固定 $k\in\mathbb{N}_{>0}$、$i\in I$、$a\in\mathbb{C}^\times$ 和 $W=W^{(i)}_{,\ k\,a^{q^{-1}},}$。则 $I_q\circ\chi_q(W)=\chi_q(W^{(i)}_{,\ k\,a^{q},})$。

证明。 考虑代数同构 $\iota_q\colon\ U_q(\mathfrak{g})\to U_{q^{-1}}(\mathfrak{g})$，其定义为[3] $\iota_q(x_{j,r}^{\pm})=x_{j,-r}^{\pm}$ 以及 $\iota_q(\phi_{j,\pm m}^{\pm})=\phi_{j,\mp m}^{\mp}$，其中 $j\in I$、$r\in\mathbb{Z}$ 和 $m\in\mathbb{N}$。再令 $V=\iota_q^*(W)$ 为 W 在 ι_q下的拉回。对 [H2, 引理 4.10] 中的证明稍作修改即可得到 $\chi_q(V)=I_q\circ\chi_q(W)$。

[3]这是 [HJ 中定义的同构的复合，见命题 2.2] 和 [C 中的命题 1.6]。

写作

$$\Psi = Y_{i,a}^{(q^{-1})} Y_{i,aq_i^{-2}}^{(q^{-1})} \dots Y_{i,aq_i^{2(1-k)}}^{(q^{-1})}$$

对于 W 的最高 ℓ-权，取一个相应的最高 ℓ-权向量 $v \in W$。那么，对于任意 $j \in I$，我们有 $\iota_q(e_j) \star v = e_j \star v = 0$（其中 $\star$ 表示 W 上的 $U_{q^{-1}}(\mathfrak{b})$-作用），并且

$$\iota_q(\phi_j^+(z)) \star v = \phi_j^-(z^{-1}) \star v = \phi_j^+(z^{-1}) \star v = \Psi_j(z^{-1})v = \begin{cases} q_i^k \frac{1-a^{-1}zq_i^{-1}}{1-a^{-1}zq_i^{2k-1}} & \text{if } i = j, \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

其中第二个等号由 [HL4，定理 4.10] 推出。因此可得 $V \simeq W^{(i),q}_{k,a^{-1}}$，因为 ι_q^* 保持不可约性（因为它是正合的，且其逆也正合）。

因此，利用关系 $I_q([Y_i^{(q^{-1})}, a]) = [\omega_i][\Psi_{i,a^{-1}\overline{q_i}^{-1}}][\Psi^{-1}_{i,a^{-1}q_i}] = [Y_{i(q)}, a^{-1}]$，我们得到

$$\overline{\chi}_q(W^{(i),q}_{k,a^{-1}}) = [(Y^{(q)}_{i,a^{-1}} Y^{(q)}_{i,a^{-1}q_i^2} \dots Y^{(q)}_{i,a^{-1}q_i^{2(k-1)}})^{-1}] I_q(\chi_q(W)) = I_q([\Psi^{-1}]\chi_q(W)) = I_q \circ \overline{\chi}_q(W)$$

因此得证。 □

推论 A.4. 固定 $i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$。则 $I_q \circ \chi_q(L^{-,i\,a^{q^{-1}},}) = \chi_q(L^{-,i\quad q,a^{-1}})$。

证明。 回顾在定理 2.11 之后定义的 ℓ-权重 $A_{i,a}$，并注意到 $A'_{i,a}$ 将定义中的参数 q 改为 q^{-1} 后得到的 ℓ-权重 $A_{i,a}$。于是 $I_q(A'_{i,a}) = A_{i,a^{-1}}$，从而可知 I_q 诱导出一个连续函数（形式级数上的通常拓扑），该函数从 $\mathbb{Z}[[(A'_{j,b})^{-1}]]_{j\in I, b\in\mathbb{C}^\times}$ 映射到 $\mathbb{Z}[[(A_{j,b})^{-1}]]_{j\in I, b\in\mathbb{C}^\times}$。由注 2.18，我们因此得到

$$\begin{aligned} I_q \circ \chi_q(L^{-,q^{-1}}_{i,a}) &= I_q([\Psi^{-1}_{i,a}]\lim_{k\to\infty}\overline{\chi}_q(W^{(i),q^{-1}}_{k,aq_i^{2k-1}})) = [\Psi^{-1}_{i,a^{-1}}]\lim_{k\to\infty}(I_q \circ \overline{\chi}_q(W^{(i),q^{-1}}_{k,aq_i^{2k-1}})) \\ &= [\Psi^{-1}_{i,a^{-1}}]\lim_{k\to\infty}\overline{\chi}_q(W^{(i),q}_{k,a^{-1}q_i^{1-2k}}) = [\Psi^{-1}_{i,a^{-1}}]\overline{\chi}_q(L^{-,q}_{i,a^{-1}}) = \chi_q(L^{-,q}_{i,a^{-1}}) \end{aligned}$$

这里我们用到了引理 A.3。证明至此结束。 □

定义 $K_{0,\,q}$ 为由等价类 $[\mu]$, $[V_i(a)]$ 以及 $[L^\pm_{i,a}]$（其中 $\mu \in \mathfrak{t}^\times$、$i \in I$ 和 $a \in \mathbb{C}^\times$）在 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 中生成的子环。于是 $K_{0,\,q}$ 包含在 [HL2, Section 5C] 中引入的子环 $K_0^\pm \subseteq K_0(\mathcal{O}_q^\pm)$。这一观察以及 [HL2]的工作预示了以下结果（该结果本身也很有意思）。

命题 A.5. $K_0(\mathcal{O}_q)$ 中的元素可表示为 $K_{0,q}$ 中元素的至多可数和。

证明。 对每个 $\Omega \in \mathfrak{r}$，我们固定一个分解

$$\Omega = \varpi(\Omega)\left(\prod_{s=1}^{m_\Omega} \Psi_{i_s(\Omega),a_s(\Omega)}\right)\left(\prod_{s=1}^{n_\Omega} \Psi^{-1}_{j_s(\Omega),b_s(\Omega)}\right)\left(\prod_{s=1}^{r_\Omega} Y^{(q)}_{\ell_s(\Omega),c_s(\Omega)}\right).$$

Note $[L_q(\Omega)]$ 恰好出现一次于等价类在 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 中的分解

$$[M_\Omega] = \left(\prod_{s=1}^{m_\Omega}[L^{+,q}_{i_s(\Omega),a_s(\Omega)}]\right)\left(\prod_{s=1}^{n_\Omega}[L^{-,q}_{j_s(\Omega),b_s(\Omega)}]\right)\left(\prod_{s=1}^{r_\Omega}[V^q_{\ell_s(\Omega)}(c_s(\Omega))]\right) \in K_{0,q}$$

用单模的等价类表示。此外，该分解中出现的其他单模等价类 $[L_q(\Psi_1)]$ 均满足 $\varpi(\Psi_1) < \varpi(\Omega)$。因此我们得到如下形式的分解

$$[L_q(\Omega)] = [M_\Omega] - \sum_{\substack{\Psi_1 \in \mathfrak{r} \\ \varpi(\Psi_1)<\varpi(\Omega)}} N_{\Psi_1,\Omega}[L_q(\Psi_1)] \tag{A.1}$$

其中 $N_{\Psi_1,\Omega} \in \mathbb{N}$ 是 $[M_\Omega]$ 中 $[L_q(\Psi_1)]$ 的重数。

重复 对 (A.1) 中出现的所有类 $[L_q(\Psi_1)]$重复上述操作并迭代，我们得到 et

$$[L_q(\Omega)] = [M_\Omega] + \sum_{r\geq 1}(-1)^r \sum_{\substack{\Psi_1,\dots,\Psi_r\in\mathfrak{r}\\ \varpi(\Psi_r)<\cdots<\varpi(\Psi_1)<\varpi(\Omega)}} N_{\Psi_r,\Psi_{r-1}}\dots N_{\Psi_2,\Psi_1}N_{\Psi_1,\Omega}[M_{\Psi_r}]. \tag{A.2}$$

我们要证明，(A.2) 右侧在 $K_{0,q}$ 中给出了良定义的可数和。为此，固定 $\mu_r<\cdots<\mu_1<\varpi(\Omega)$ 中一个严格递增的序列，并注意到（由于 $M_\Omega, M_{\Psi_1},\dots,M_{\Psi_r}$ 的权空间均为有限维），满足以下条件的 $\Psi_1,\dots,\Psi_r\in\mathfrak{t}^\times$ 至多只有有限多个：对每个 $1\leq s\leq r$，都有 $\varpi(\Psi_s)=\mu_s$，且 $N_{\Psi_r,\Psi_{r-1}}\dots N_{\Psi_2,\Psi_1}N_{\Psi_1,\Omega}\neq 0$。特别地，某个满足 $\varpi(\Psi)<\varpi(\Omega)$ 的 $[M_\Psi]$ 对 (A.2) 的贡献是有限的，因为按照 $\mathfrak{t}^\times$ 上的序 $\leq$ 的定义，集合 $\{\mu\in\mathfrak{t}^\times\,|\,\varpi(\Psi)\leq\mu\leq\varpi(\Omega)\}$ 的基数有限（因此其中只包含有限多个形如 $\varpi(\Psi)<\mu_r<\cdots<\mu_1<\varpi(\Omega)$ 的链）。此外，由于 $D(\varpi(\Omega))=\{\mu\in\mathfrak{t}^\times|\,\mu\leq\varpi(\Omega)\}$ 是可数无限的，$\mathfrak{t}^\times$ 中形如 $\mu_r<\cdots<\mu_1<\varpi(\Omega)$ 的序列有可数多个。因此，使得 $[M_\Psi]$ 对 (A.2) 有贡献的 $\Psi\in\mathfrak{r}$ 也至多有可数多个，由此可知，上述分解确实在 $K_{0,q}$ 中给出了良定义的可数和。

因此，该命题对 $\mathcal{O}_q$ 的简单对象类成立。现在固定 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 中的任意元素 X。于是，对于某个 $s\in\mathbb{N}_{>0}$、某个 $r_i\in\mathbb{Z}$ 以及 $\mathcal{O}_q$ 中的某些对象 V_i，X 可以分解为 $X=\sum_{i=1}^s r_i[V_i]$。此外，对于每个 $1\leq i\leq s$，我们都可以将等价类 $[V_i]$ 分解为至多可数个简单类 $[L_q(\Psi)]$ 之和，其系数属于 $\mathbb{N}$。（注意，该和至多可数，因为 V_i 至多有可数多个 ℓ-权。）因此，我们可以利用上述结果，将每个 V_i（最终也将 X）表示为 $K_{0,q}$ 中元素的至多可数和。证明至此完成。□

˜**推论 A.6**。存在一个环同构 $I_q\colon K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})\simeq K_0(\mathcal{O}_q)$，使得$(\star)$ 交换。

证明。注意，由引理 A.2、引理 A.3 和推论 A.4 可得 $I_q\circ\chi_q(K_{0,q^{-1}})\subseteq\chi_q(K_{0,q})$。因此，命题 A.5 以及态射 χ_q 和 $I_q\circ\chi_q$ 与 $K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}})$ 中 $K_{0,q^{-1}}$ 元素的可数和之间显然的相容性，给出 $I_q\circ\chi_q(K_0(\mathcal{O}_{q^{-1}}))\subseteq\chi_q(K_0(\mathcal{O}_q))$。该推论随即由 q-特征映射的单射性推出（见定理 2.11）。□

˜ ˜ ˜令 D_q 为由 $D_q([V])=I_q[S_{q^{-1}}(V)]$ 定义的 $K_0(\mathcal{O}_q)$ 的环自同构，它作用于 $\mathcal{O}_q$ 中对象的等价˜类。于是，由上述结果和推论 3.17 可得 $D_q([\mu])=[\mu]$，其中

$$\tilde{D}_q([V_i^q(a)])=[V_i^q(a^{-1})] \text{ and } \tilde{D}_q[L_{i,a}^{\pm,q}]=[L_{i,a^{-1}}^{\mp,q}].$$

因此，对于 X，在 [HL2, 第 5C 节] 的子环 $K_0^+\subseteq K_0(\mathcal{O}_q^+)$（分别为 $K_0^-\subseteq K_0(\mathcal{O}_q^-)$）中，$\tilde{D}_q(X)=D_q(X)$（且 $\tilde{D}_q(X)=D_q^{-1}(X)$）。这与 [HL2, 命题 5.16]（以及 $\tilde{D}_q$ 和 $D_q^{\pm1}$ 与 $K_0^\pm$ 中元素的可数和的相容性）共同推出以下定理。这是本附录的主要结果。

定理 A.7. $\tilde{D}_q$ 对 $K_0(\mathcal{O}_q^\pm)$ 的限制等于 $D_q^{\pm1}$。□

Hernandez–Leclerc 对偶的一个重要性质（这与其通过簇代数的幺半范畴化来解释有关）是，它将单模的等价类映射为单模的等价类。[HL2, 第 7B 节] 中对这一性质的证明，本质上依赖于命题 2.17，因此难以推广到˜环自同构 D_q的情形。因而，以下问题仍未得到解答。

˜**问题**。D_q 会将单模的类映到单模的类吗？

˜我们在本附录结尾指出，正如定理3.39所述， D_q 是对合。˜ ˜事实上， $D_q \circ D_q$ 保持 $K_0(\mathcal{O}_q)$中可逆表示、基本表示和预基本表示的类不变。因此，它保持子环$K_{0,q} \subseteq K_0(\mathcal{O}_q)$不变；又因为它与可数和相容，根据命题 A.5，它必定等于 $K_0(\mathcal{O}_q)$上的恒等映射。

References

[BLZ] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov and A. B. Zamolodchikov, *Higher-level eigenvalues of Q-operators and Schrödinger equation* **7**, 2003 4, 711 725 ,《高等数学物理》, ( ), 第 - 期。[B] J. Beck, *Braid group action and quantum affine algebras* **165**, 1994 3, ,《数学物理通讯》, 555 568 ( ), 第 - 期。[BCP] J. Beck, V. Chari and A. Pressley, *An algebraic characterization of the affine canonical basis*, Duke Math. J., 99, (1999), 第3期, 455-487.[BJMST] *Hidden Grassmann structure* H. Boos, M. *in the XXZ model II: creation operators* **286**, 2009 3, 875 932 Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov and Y. Takeyama, ,《数学物理通讯》, ( ), 第 - 期。[Bi] L. Bittmann, *Quantum Grothendieck rings as quantum cluster algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2), 103, (2021), 第1期, 161-197。[C] V. Chari, *Minimal affinizations of representations of quantum groups: the rank 2 case*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 31, (1995), 第5期, 873–911。[CH] V. Chari and D. Hernandez, *Beyond Kirillov–Reshetikhin modules*, 载于: 《量子仿射代数、扩展仿射李代数及其应用》, 49-81, 《当代数学》506, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, (2010)。[CP1] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras*,《数学物理通讯》, 142, (1991), 第2期, 261-283。[CP2] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras and their representations*,《群的表示》（Banff, AB, 1994）, 59-78, CMS Conf. Proc., 16, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, (1995)。[Da1] I. Damiani, *La R-matrice pour les algèbres quantiques de type affine non tordu*, Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4), 31, (1998), 第 4 期, 493-523。[Da2] I. Damiani, *From the Drinfeld realization to the Drinfeld-Jimbo presentation of affine quantum algebras : Injectivity* **51**, 2015 1, 131 171 , Publ. Res. Inst. Math. Sci. ( ), 第 – 期。[D1] V.G. Drinfel'd, *A new realization of Yangians and of quantum affine algebras*, Soviet Math. Dokl. 36, (1988), 第2期, 212-216。[D2] V.G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang–Baxter equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 283, (1985), 第5期, 1060-1064[DF] J.T. Ding, I. Frenkel, *Isomorphism of two realizations of quantum affine algebra* $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}\ n}(\ ))$,《数学物理通讯》, 156, (1993), 第2期, 277-300。[EFK] P.I. Etingof, I. Frenkel and A.A. Kirillov, *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations* 58, ,《数学调查与专著》, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, (1998) [F] R. Fujita, *Geometric realization of Dynkin quiver type quantum affine Schur–Weyl duality*,《国际数学研究通知》, (2020), 第22期, 8353-8386。[FH1] E. Frenkel and D. Hernandez, *Baxter's relations and spectra of quantum integrable models*, Duke Math. J., 164, (2015), 第12期, 2407-2460。[FH2] E. Frenkel and D. Hernandez, *Spectra of quantum KdV Hamiltonians Langlands duality and affine , , ,*《数学物理通讯》, *opers* **362**, 2018 2, 361 414 ( ), 第 - 期。[FHR] E. Frenkel, D. Hernandez and N. Reshetikhin, *Poisson quantum integrable models and deformed W-algebras* **112**, 2022 4 ,《数学物理快报》, ( ), 第 期。[FM] E. Frenkel and E. Mukhin, *Combinatorics of q-characters of finite-dimensional representations of quantum affine algebras* **216**, 2001 1, 23 57 ,《数学物理通讯》, ( ), 第 - 期。[FR] E. Frenkel and N. Reshitikhin, *The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of* $\mathcal{W}$*-algebras*, 载于: 量子仿射代数及相关主题新进展（Raleigh, NC, 1998）, 163-205, 《当代数学》248, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, (1999)。[FRT] L.D. Faddeev, N. Reshetikhin and L.A. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*,《代数分析》, 第1卷, 129-139, Academic Press, 波士顿, MA, (1988)。

[FT] M. Finkelberg and A. Tsymbaliuk, *Multiplicative slices relativistic Toda and shifted quantum affine algebras* , , 李代数系统的表示与幂零轨道, -《数学进展》330, Birkh¨auser/Springer, 沙姆, (2019)。[H1] D. Hernandez, *The Kirillov–Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems*,《纯粹与应用数学杂志》, 596, (2006), 63-87。[H2] D. Hernandez, *On minimal affinizations of representations of quantum groups*,《数学物理通讯》, 276, (2007), 第1期, 221-259。[H3] D. Hernandez, *Kang-Kashiwara-Kim-Oh,. . .]* ´ 2016 2017, ´ 1120 1135, ´ ,《布尔巴基研讨会》, 第 / 卷, 报告 –《星丛》2019年, 第407期, 报告第1129号, 297–331。[H4] D. Hernandez, *Representations of shifted quantum affine algebras*, arXiv:2010.06996。[H5] D. Hernandez, *Stable maps, Q-operators and category* O,《表示论》, 26, (2022年), 179-210。[HJ] D. Hernandez and M. Jimbo, *Asymptotic representations and Drinfeld rational fractions*,《综合数学》, 148, (2012), 第5期, 1593-1623。[HL1] D. Hernandez and B. Leclerc, *A cluster algebra approach to q-characters of Kirillov–Reshetikhin modules*,《欧洲数学会杂志》(JEMS), **18**, 2016 5, 1113 1159 , ( ), 第 – 期。[HL2] D. Hernandez and B. Leclerc, *Cluster algebras and category* O *for representations of Borel subalgebras of quantum affine algebras* **10**, 2016 9, 2015 2052 ,《代数与数论》, ( ), 第 - 期。[Kac] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 第三版, 剑桥大学出版社, (1990)。[KKK] S.J. Kang, M. Kashiwara and M. Kim, *Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras* **211**, 2018 2, 591 685 ,《数学创刊》, ( ), 第 - 期。[K] M. Kashiwara, *Crystal bases and categorifications — Chern medal lecture*, 2018年里约热内卢国际数学家大会论文集, 第1卷, 大会报告, 249-258, 世界科学出版社, 哈肯萨克, NJ, (2018)。[KKO] M. Kashiwara, M. Kim and S.J. Oh, *Monoidal categories of modules over quantum affine algebras of type A and B* 3 **118**, 2019 1, 43 77 ,《伦敦数学会会刊》( ), ( ), 第 – 期。[KKOP1] M. Kashiwara, M. Kim, S.J. Oh and E. Park, *Categories over quantum affine algebras and monoidal categorification* **97**, 2021 7, 39 44 ,《日本学士院纪要 A 辑: 数学科学》, ( ), 第 - 期。[KKOP2] M. Kashiwara, M. Kim, S.J. Oh and E. Park, *Monoidal categorification and quantum affine algebras II* 2103 10067 , , arXiv: . 。[MRV1] D. Masoero, A. Raimondo and D. Valeri, *Bethe ansatz and the spectral theory of affine Lie algebra-valued connections I: The simply-laced case* **344**, 2016 3, 719 750 ,《数学物理通讯》, ( ), 第 - 期。[MRV2] D. Masoero, A. Raimondo and D. Valeri, *Bethe ansatz and the spectral theory of affine Lie algebra-valued connections II: The non simply-laced case* **349**, 2017 ,《数学物理通讯》( ), 第3期, 1063 1105–。[MV1] E. Mukhin and A. Varchenko, *Populations of solutions of the XXX Bethe equations associated to Kac–Moody algebras* 95 102, , 载于: 表示论及其应用的无限维方面, –《当代数学》392, 美国数学会, 普罗维登斯, RI, 2005。[MV2] E. Mukhin and A. Varchenko, *Discrete Miura Opers and Solutions of the Bethe Ansatz Equations*,《数学物理通讯》, 256, (2005), 第3期, 565–588。[MO] D. Maulik and A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology*,《星丛》408 (2019)。´WZ[Y. Wei and Y. Zou,] ,《线性代数及其应用》, 521, (2017), 283-297。 *Inverses of Cartan matrices of Lie algebras and Lie superalgebras*Z[H. Zhang, 1] ,《数学物理快报》110, (2020), 第8期, 2113–2141。 *Yangians and Baxter's relations*Z[H. Zhang, 2] ,《数学物理通讯》, 358, (2018), 第2期, 815–862。 *Length-Two Representations of Quantum Affine Superalgebras and Baxter Operators*Z[H. Zhang,3] ,《变换群》, 22, (2017), 第2期, 559–590。 *Fundamental Representations of Quantum Affine Superalgebras and R-matrices*Z[H. Zhang, 4] ,《国际数学研究通知》, (2016), 第4期, 1126–1157。

Université de Paris and Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, F-75006, Paris, France
Université de Montréal DMS Montréal Québec Canada H3C 3J7 „ , , , , tpinet@imj-prg.fr
Email adress: