arXiv:2301.10692v1 [cs.MA] 25 Jan 2023

群体密度对集体跟踪性能的影响

Hian Lee Kwa[1, 2*]，Julien Philippot[3] 和 Roland Bouffanais[3*]

[1]工程产品开发，新加坡科技设计大学，新加坡，新加坡。
[2]泰雷兹研究与技术，泰雷兹亚洲解决方案，新加坡，新加坡。
[3]机械工程系，渥太华大学，渥太华，安大略省，加拿大。

通讯作者。电子邮箱：hianlee kwa@mymail.sutd.edu.sg；roland.bouffanais@uottawa.ca；

摘要

群体规模如何影响其集体行动？尽管这无疑是一个关键参数，但目前还没有系统且令人满意的指导原则，能够帮助人们为特定任务和环境选择所需的单元数量。即使受到实际条件的限制，系统设计者也应努力确定合理的群体规模。本文表明，这个根本问题与如何选择合适的群体密度密切相关。我们对密度如何影响目标跟踪任务的集体性能进行了分析，发现存在不同的“阶段”，各阶段对应着明显不同的群体动力学。我们识别出一个“过渡”阶段，在此阶段会涌现出复杂的集体响应。有趣的是，这一过渡阶段中的集体动力学呈现出探索性行动与利用性行动之间明确的权衡。我们表明，在任何密度下，都可以通过多种方式调整探索-利用平衡，以最大限度地提升系统性能，例如改变智能体之间的连通性。虽然密度是首要考虑因素，但确定系统规模时不应只考虑这一因素。由于物理系统中固有的有限尺寸效应，我们发现，组成单元的数量主要影响系统级属性，例如过渡阶段中的利用程度。这些结果表明，与其

针对一组特定任务参数学习并优化群体行为，不如将后续工作重点放在学习如何适应上，从而赋予群体一项极为理想的特性：能够在各种各样的情境下有效运行。

关键词： 适应性、多智能体系统、群体密度、群体机器人学、目标跟踪

1 引言

近年来，去中心化多机器人系统（多机器人系统）凭借其独特能力，能够应对一系列关键且具有挑战性的问题，因而成为一个备受关注的研究领域；这些问题要求在高度动态的环境中完成任务。面对快速变化的状况，多机器人系统的效能在很大程度上取决于其凭借灵活性和／或适应性改变行为的能力（Dorigo 等人，2021年）。这涵盖了许多不同的问题，例如目标跟踪（Coquet 等，2019年，2021年）、区域防护（Strickland 等，2018年；Shishika 和 Paley，2019年）、动态区域监测（Vallegra 等，2018年；Zoss 等，2018年）、区域建图（Kit 等，2019年；Crosscombe 和 Lawry，2021；Liu 等，2021）以及环境分类（Ebert 等，2018年，2020年）。除灵活性和适应性外，研究还表明，多机器人系统的效能与鲁棒性和可扩展性有关（Bouffanais，2016；Hamann，2018b；Dorigo 等人，2021年）。这些关键属性源于系统缺乏一个能够支配个体智能体行动的中央控制器；正因如此，在涉及广阔、无结构且动态环境的严峻情境中，多机器人系统极具吸引力。这类系统的去中心化特性将多机器人系统的整体控制分散开来，使个体机器人能够根据其局部环境做出决策。这使它们能够：（1）迅速响应周围环境的变化（灵活性）；（2）即使发生智能体故障，也能在缺乏中央控制点的情况下继续运行（鲁棒性）；（3）消除潜在的处理瓶颈（可扩展性）。此外，多机器人系统还能够学习或改变行为，以应对新的情况（适应性）。

从业者必须面对的一项关键设计考量和重要问题是：针对给定的任务和环境，选择多少个机器人单元才能达到预期性能（Hamann，2018b）。事实上，已有研究表明，在生物系统和工程多智能体系统中，有效的涌现集体行为都需要达到一定数量的群体智能体。具体而言，Schranz 等人（2021年）指出：“只有达到临界质量的群体成员数量，才能发挥群体智能算法的优势。”然而，确定群体规模时，系统的集体行为并非唯一考量。对于给定任务，还有其他几个方面也会影响群体智能体数量的选择，

例如：（1）系统可扩展性；（2）个体智能体的技术能力（如通信范围、传感器范围、机动性、最大速度等）；（3）财务或后勤限制（即根据可用资源，能够建造、存储和运行的机器人数量）（Schroeder 等人，2019年）。因此可以说，对于系统设计者而言，选择机器人单元的数量绝非一项简单的任务。

在文献中，多机器人系统的形态和规模各异，其规模跨度达三个数量级。从Rubenstein 等人(2014)提出的由1024个单元组成的 Kilobot 群体，到Thenius 等人(2016)提出的由150个单元组成的 subCULTron 系统，再到de Souza 等人(2022)提出的可由少于10个单元运行的猎杀无人机群。需要指出的是，对于机器人群体由多少个单元构成才算群体，并没有共识（Hamann，2018b）。然而，在绝大多数研究中，人们往往不清楚具体是如何选定这一数量的。规模减半的 Kilobot 群体，其表现会与满规模的 Kilobot 多机器人系统大不相同吗（Rausch 等人，2019年）？另一方面，对于使用相对小型系统（例如只有10个或更少单元）的系统设计者，也可以提出同样的问题。尽管人们常常认为，如此小的系统规模足以完成当前任务（Zoss 等人，2018年；Kit 等人，2019年；Kwa 等人，2021年），但人们往往不禁会想，实际单元数量受限是否另有原因，例如上述物流、财务或技术方面的挑战。

系统的规模与智能体密度密不可分。许多研究表明，群体要实现有效的自组织，可能存在一个所需的最低临界密度。例如，Kilobot 群体所使用的智能体只有在最大 10 cm 的距离内才能彼此通信（Rubenstein 等人，2014年）。类似地，Hornischer 等人（2020年）发现，在他们的系统中，要使机器人按预期运行，智能体的通信范围内至少必须有另外 3 个机器人。除了通信或信息交换方面的限制外，研究人员还使用尺度定律，量化 BoB 系统在预定表面积内利用 50 个浮标执行动态区域监测任务时的有效性（Zoss 等人，2018年）。

从根本上说，对于给定任务该选择多大规模的多机器人系统（MRS），或者说选择何种智能体密度，这个问题从未得到系统且令人满意的解答，即便曾有过尝试。正如前文所述，人们早已认识到，最低密度对于确保简单物理模型中出现预期的集体行为至关重要。Vicsek 模型中的自驱动粒子（SPP）就是一个典型例子（Vicsek等人，1995）。研究表明，无论噪声大小如何，智能体密度都是确保自排序过程的关键。具体而言，在低密度下，SPP 群体呈现无序状态；随着智能体密度增加，系统会发生相变，进入有序相，此时所有 SPP 实际上都朝向一致。除 SPP 试图使其运动方向保持一致这一简单情形外，Hamann (2012)还考察了群体规模

和密度（保持表面积不变）对多种集体行为和决策协议下系统性能的影响。研究发现，随着系统规模扩大，性能呈超线性提升；但当群体超过一定规模后，性能便开始下降。这种性能退化被归因于干扰对系统性能的影响日益增强，而干扰的加剧则源于智能体执行避碰行为的次数增加。

除了集体运动之外，还需要考虑系统探索与利用之间的平衡问题，因为这是决定整体群体性能的重要因素。在各种计算优化任务中，例如虚拟智能体执行粒子群优化，以及多机器人系统的运行，研究表明，规模较大的群体表现出更高水平的探索活动（Shishika 和 Paley，2019年；Piotrowski 等，2020年）。然而，大量探索活动必须与适量的利用相结合，才能利用探索过程中收集到的信息。

本文研究了密度对多机器人系统执行目标跟踪这一高度动态集体任务的效果所产生的影响。鉴于群体探索与利用之间的平衡十分重要，我们还考察了群体密度对这种平衡的影响，并展示了这种平衡最终如何影响整体系统性能。可以认为，过去的一些研究所考察的任务要求过低，无需自组织或涌现集体行为，只需由独立运行的单元即可完成。然而，我们认为，只有应对这类具有挑战性的问题，系统才能展现群体智能的全部力量。因此，本研究采用一个快速移动目标（即移动速度超过群体中任何组成智能体的目标），且该目标不会发出信号梯度场，因此类似于视觉搜索任务：只有看到目标，才能确认其存在（Esterle 和 Lewis，2020年）。这样便排除了使用梯度下降等简单方法跟踪目标的可能性，从而迫使系统进行自组织，并以集体方式跟踪目标。需要指出的是，尽管存在一些试图控制智能体密度的随机方法，例如采用马尔可夫过程的方法（A꞉cikme꞉se 和 Bayard，2012；Elamvazhuthi 和 Berman，2019年；Biswal 等，2021年），本文主要关注采用确定性方法的策略。

我们的研究揭示了表征多机器人系统跟踪能力的三个密度“阶段”，即：(1) 低密度阶段，此时系统根本无法协调智能体的行为来执行跟踪任务；(2) 过渡阶段，此时系统性能会随着群体密度的增加而迅速提升；(3) 高密度阶段，此时系统能够持续跟踪目标，不会出现任何中断。无论系统中的智能体数量是多少，这些阶段都会出现。我们将这些趋势归因于过渡阶段中存在系统层面的探索—利用权衡，其中可明确识别出探索受限

以及利用受限状态。有趣的是，智能体之间的连通程度可用于引导群体动力学，使其偏向探索或利用。具体而言，提高（相应地，降低）连通性会提升低密度利用受限状态（相应地，高密度探索受限状态）下的跟踪性能。尽管如此，系统规模仍会影响多机器人系统进行探索和利用的能力。最后，我们讨论这些结果对通过机器学习和自动化设计发展有效集体动力学所具有的重要意义。

2 相关工作

2.1 系统规模与探索

多智能体系统中所采用的单元数量，是系统设计者需要选择的基本参数之一。在多机器人系统或虚拟多智能体系统中，关于系统规模的研究通常是在环境大小固定的条件下开展的。因此，向系统中增加智能体等同于提高智能体密度；反之，移除智能体则会降低群体密度。在优化领域，所采用的智能体数量有时也称为候选解数量，它与系统所进行的探索量相对应（VanDenBergh and Engelbrecht，2001年；Piotrowski et al，2020年）。不难理解，使用更多智能体能够使系统更全面地探索搜索空间，从而降低优化算法陷入局部最优的可能性。对野生蜂群的研究也发现了类似现象：规模较大的群体能够派出更多侦察蜂，从而增加探索量，并提高蜂群最终共识的准确性（Schaerf et al，2013年）。工程化多机器人系统中也观察到了这些结果：系统规模越大，系统性能通常越高（Kit et al，2019年；Prasetyo et al，2019年；Shishika and Paley，2019年；Jurt et al，2022）。与优化中使用的虚拟多智能体系统和自然界中的群体类似，这些性能提升归因于规模较大的系统能够进行更多探索。

2.2 边际效用

鉴于规模较大的多机器人系统往往能实现更好的性能，一些研究关注了增加智能体时的边际效用增益。这些研究聚焦于资源觅食情境下的边际效用增益。关于这一主题的早期研究之一由Lerman 和 Galstyan（2001年）开展。他们证明，尽管增加机器人确实可能提升整个群体的觅食表现，但每台机器人收集的资源量，即其个体效率，却会下降。这是因为在规模较大的系统中，机器人彼此碰撞导致物理干扰加剧。KitKit

等（2019年）在集体区域测绘任务中，以及由Sung等（2018年、2020年）在目标跟踪场景中进行了研究。然而，与资源觅食和区域建图不同，在目标跟踪中，多机器人系统达到一定规模后，群体性能便不再提升。这是因为此时系统无论目标如何移动，都能够对其进行跟踪。因此，向多机器人系统中增加单元不会进一步提升系统性能。有趣的是，即使在多智能体系统优化中，研究也经常发现，智能体数量超过一定阈值后，系统精度仅有微小提升，计算时间却显著延长（Roeva等，2015年）。

随着系统规模扩大和智能体密度提高，机器人效率会降低；在经济学领域，这一现象被称为“边际收益递减规律”，并由Hamann （2012）通过多智能体系统中的一个模型加以描述。该模型采用指数函数，同时考虑智能体间协作的益处，以及额外干扰所带来的负面影响。随后，Schroeder等（2019年）将这种多智能体性能策略与简单的成本模型相结合，通过找出其系统中理想的机器人数量，在最大化觅食多机器人系统性能的同时，将总体系统成本降至最低。

如果需要共享并利用共有资源，增加智能体导致的边际效用下降可能会进一步加剧。在觅食任务中，Hecker 和 Moses (2015年得出结论：当智能体必须将资源运送到中心位置时，由于机器人需要行进更长的距离才能获取资源，大型群体中的个体机器人效率会进一步降低。在 Rosenfeld等人(2006中，作者表明，过度开发共有资源会导致智能体之间的物理干扰程度上升。反过来，这种干扰的增加可能导致负边际效用，即多机器人系统中纳入更多智能体时，系统性能反而会下降。尽管群体密度增加带来了更多探索，但仍会出现这种情况，这是因为额外探索所带来的优势被个体智能体遭遇的呈指数级增长的干扰所掩盖。HamannHamann(2018a)也在一项拔棍任务中展示了这一结果，使作者得以说明调整群体规模时会出现三个不同阶段：(1) 智能体协作不足，未能充分利用可用资源；(2) 智能体共享的信息过多，导致共享资源耗尽；(3) 介于两者之间的阶段，此时资源既未利用不足，也未被过度利用，因此系统性能达到最佳。

2.3 运动诱导相分离

在负责围绕特定点聚集的系统中（例如目标跟踪和共识任务），智能体之间物理干扰的增加更加明显。如前所述，在局部群体密度较高的区域，聚集程度越高，物理干扰也越强。

这进而形成了正反馈循环，导致更多智能体聚集到局部智能体密度原本就高的区域，这种现象称为运动诱导相分离（MIPS）（Cates和Tailleur，2015年）。智能体在特定区域聚集会导致过度利用，从而降低系统性能。为应对MIPS导致的过度利用，研究人员开发了多种策略，将个体智能体周围的局部群体密度纳入考量。在使用多机器人系统识别光强较高的区域时，研究人员对原始BEECLUST算法进行了修改，使机器人在判断自己位于智能体密度较高的区域后，能够离开其等待位置。这避免了智能体过度集群，并促进了更多探索，从而使系统能够更灵敏地响应动态环境变化（Wahby等人，2019年）。Li等人(2017年)开发了一种策略，根据局部群体密度和信号场强度控制多机器人系统中机器人的位置分布。为执行觅食任务，Pang等人(2019年)根据局部群体密度估计调整每个机器人的步长。在目标搜索与跟踪任务中，许多策略采用智能体间排斥，防止机器人过度聚集在单一位置，从而促进区域探索（Zhang等人，2019年；Dadgar等人，2020年；Kwa等人，2020a）。

3 策略与仿真

3.1 搜索与跟踪策略

此前已在（Kwa等人，2021年，2022a）中介绍了用于促进对快速移动目标进行协同跟踪的策略。该策略由两个主要部分组成：（1）结合短期记忆的智能体聚集；（2）智能体间自适应排斥，系统的自适应性由此产生。这两个部分分别负责引导系统利用信息和探索环境；具体做法是在每个时间步生成两个速度向量，并将其组合为智能体的最终速度向量：

$$\mathbf{v}_i[t] = \mathbf{v}_{i,\mathrm{att}}[t] + \mathbf{v}_{i,\mathrm{rep}}[t], \tag{1}$$

其中，$\mathbf{v}_{i,\ \mathrm{att}}[t]$ 和$\mathbf{v}_{i,\ \mathrm{rep}}[t]$分别是由吸引分量和排斥分量产生的速度向量。随后，最终速度向量$\mathbf{v}_i[t]$按智能体的最大速度 $v_{\max}$进行缩放。系统整体的探索与利用平衡，即探索与利用动态（EED），通过调整相互连接的拓扑 k近邻通信网络的度来控制。下一节将进一步讨论这种调整及其对 EED 的影响。

8 群体密度对集体跟踪性能的影响

系统采用的整体策略总结于算法1中。有关策略各组成部分的更多详情，请参阅Kwa等人(2021年)。

算法1：动态 k 最近网络搜索与跟踪策略

设置 $t = 0$、$k \in [2, N-1]$、$\omega = 1$ 和 $c = 0.5$
当系统处于活动状态**时**
    对于所有智能体**执行**
        设置吸引点
        计算 $\mathbf{v}_{i,\ \mathrm{att}}[t]$
        计算 $\mathbf{v}_{i,\ \mathrm{rep}}[t]$
        $\mathbf{v}_i[t] \leftarrow \mathbf{v}_{\mathrm{att},\ i}[t] + \mathbf{v}_{\mathrm{rep},\ i}[t]$ // 应用公式（1）
        $\mathbf{v}_i[t] \leftarrow (v_{\max}/v_i[t]) \cdot$ **速度**$_i[t]$ // 确保速度向量的模不超过最大速度
        $\mathbf{x}_i[t+1] \leftarrow \mathbf{x}_i[t] +$ **速度**$_i[t]$ // 更新智能体位置
    结束循环
    $t \leftarrow t + 1$
结束循环

3.2 网络连通性

多机器人系统（MRS）的一个关键要素是其通信网络，单个机器人通过该网络在系统中共享信息（Sekunda 等，2016）。尽管大多数关于多机器人系统的研究要么假设智能体的通信范围无限（Coquet 等，2021；Rossides 等，2021），要么将通信范围内的所有其他机器人纳入考虑（Dadgar 等，2017；Jensen 等，2018；Dadgar 等，2020），但研究表明，调整系统的网络连通性会显著影响群体的集体动力学。Mateo 等（2017）证明，通信水平提高会降低群体对模拟捕食者攻击的集体响应。此外，Mateo 等（2019）和 Horsevad 等（2022b）还表明，通信水平较高的系统更擅长集体模仿移动缓慢的领头者，而要更准确地复现快速移动的驱动智能体的动作，则需要较低的连通性。在要求智能体准确描述静态且充满噪声的环境的情境中，也观察到了类似的性能提升（Crosscombe 和 Lawry，2021；Liu 等，2021；Kwa 和 Bouffanais，2022）。

基于这些结论，我们此前证明，在跟踪快速移动的目标时，k^*的 k近邻网络存在一个最优连通性水平，此时群体的性能达到最大（Kwa等人，2020a、b、2021年、2022a）。在这一最优状态下，多机器人系统能够在其组成智能体所执行的探索活动与利用活动之间实现理想的平衡。该值 k^* 会随...
...而变化

取决于多机器人系统运行的条件。需要注意的是，这里的邻域是从网络角度定义的；智能体 i 拥有的邻居数量等于其度 k。鉴于研究考虑了时变网络拓扑，每个智能体的邻域都是动态的，会随时间变化。

3.3 问题陈述

在本研究中，一组 N跟踪智能体 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$和一个目标 o在一个有界的二维正方形搜索空间内移动，该搜索空间的尺寸为 $L \times L$ 且没有任何障碍物，其中 $L \in [10^{0.6}, 10^{2.65}]$。智能体和目标的位置分别表示为$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$，其最大速度分别为$\mathbf{v}_{a,\max}$ 和$\mathbf{v}_{o,\max}$ 。需要强调的是，本研究考虑的目标移动速度快于追踪它的智能体。因此，$\mathbf{v}_{a,\max} < \mathbf{v}_{o,\max}$。本研究中，最大速度设定如下：$\mathbf{v}_{a,\max} = 0.1$ 和$\mathbf{v}_{o,\max} = 0.15$。

目标采用圆盘形二值目标函数建模，半径固定为 $r = 1$。如果某个智能体位于目标半径范围内，则认为该目标已被跟踪。形式化表示如下：

$$\mathrm{cov}(o, t) = \begin{cases} 1, & \exists i \in A \text{ s.t. } \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o\| \leq r, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

像这里这样将目标建模为二值目标函数，会使问题更具挑战性，也更接近视觉搜索任务：必须看到目标才能确认其存在（H¨onig 和 Aya- nian，2016；Esterle 和 Lewis，2020年）。这与根据目标发出的信号强度（例如无线电信号强度、化学羽流等）来跟踪目标形成对比；在这种情况下，可以使用各种梯度下降方法。尽管这类梯度下降方法是跟踪目标时最广泛使用的技术之一，但在处理这种二值目标函数时，这些方法会完全失效。使用这种类型的函数可确保系统无法采用这类简单的技术。这种保守的方法代表了最具挑战性的情形之一：近零量程传感器要跟踪移动速度快于智能体自身的目标。正如前文所述，可以认为，只有面对这类具有挑战性的场景，才能充分发挥群体智能的效能。

目标按照非规避运动策略移动。根据此策略，目标驶向搜索空间内随机生成的航路点。到达该航路点后，系统会生成另一个航路点，使目标改变行进方向。此过程会持续到仿真结束。

10 群体密度对集体跟踪性能的影响

系统的目标是在给定环境中最大化其跟踪性能，其奖励函数如下：

$$\Xi = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{cov}(o,t), \tag{3}$$

其中， T it 为所关注的总时间段，设为 $T = 100{,}000$。设置 T 这么大的值是为了确保结果具有统计平稳性，即我们测试的系统是遍历的，并且在条件保持不变的情况下，其跟踪性能在 $T \to \infty$ 时将趋于一个恒定值。在仿真中，智能体的任务是在无障碍物的环境中跟踪目标，并假设智能体一旦进入目标半径范围内，就能获得有关目标位置的完美信息。在执行跟踪任务时，还假设智能体能够完美获知其相对于全局参考坐标系在环境中的位姿。

3.4 指标

除了多机器人系统跟踪性能之外，还可以通过量化系统的 EED 来研究其集体动力学。因此，使用式（3）中的奖励函数来量化系统利用目标位置信息的效果。

为进一步量化系统的集体动力学，还计算其探索比率 。如果智能体进入了“探索”状态，并且 $S_{i,\exp}[t] = 1$，则认为它正在探索环境。在这种探索状态下，智能体会尝试远离邻居，从而在此过程中探索环境。相反，当智能体检测到目标时，它会进入“跟踪”状态，$S_{i,\exp}[t]$ 设为 0，并尝试跟随目标。因此，群体的总体探索比率计算如下：

$$\Theta = \frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}S_{i,\exp}[t], \tag{4}$$

其中， N 是系统中的智能体总数。探索比率中， Θ 的值越高，表示有更大比例的智能体花费更多时间搜索目标，因此探索程度也越高。相反，当 Θ较低时，智能体会尝试向目标移动，因此会花费更多时间利用目标信息。

本文还引入了系统的群体密度 或智能体密度 这一概念。需要注意的是，本文中这两个术语可以互换使用。其计算如下：

$$\rho = N/L^2. \tag{5}$$

此外，局部群体密度这一概念通过测量每个智能体到其 6 个最近邻的平均距离来量化（有关选择这一特定数值的更多详情，请参阅附录）。这使得我们能够计算每个智能体的局部群体密度。局部

密度随后在整个仿真过程中对群体中的所有智能体取平均：

$$\rho_L = \frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\frac{7}{\pi L_{i,t}^2}, \tag{6}$$

其中， L_i 是智能体到其六个最近邻的平均距离。使用 ρ_L可以量化系统中智能体的聚集程度。具体做法是计算群体密度与平均局部群体密度之差：$\Delta\rho = \rho_L - \rho$，称为密度差。

4 结果

4.1 群体密度对跟踪性能的影响

为研究群体密度对跟踪性能的影响，我们首先对不同群体规模进行仿真，规模范围从 $N = 20$到 $N = 50$，并在不同环境规模下跟踪一个非规避目标。图 1 中可以观察到三个不同的“阶段”。在低密度（$\rho \lesssim 10^{-3}$）下，系统基本无法跟踪目标。这是由于智能体之间距离较远，导致单元无法有效聚集并跟踪目标。个体间距离较大也降低了智能体遇到目标的概率，进一步加剧了跟踪性能不佳的问题。值得强调的是，我们模型的一个关键假设是，智能体之间距离较远不会影响信息交换的质量——智能体保持相同数量的拓扑邻居 k，并且假设通信完美无误。在高密度（$\rho \gtrsim 10^{-1}$）下，系统能够近乎完美地跟踪目标。在此密度下，由于智能体之间距离较小，且目标可移动的开放空间有限，智能体能够持续跟踪目标。

这两个阶段之间存在一个“过渡”阶段，在此阶段，跟踪性能 Ξ会随着 ρ急剧上升。过渡阶段的开始，源于智能体能够有效地聚集在吸引点周围；这一能力十分重要，因为它使新智能体能够接替最初发现目标的智能体执行跟踪任务。智能体的这种聚集能力可由密度差 $\Delta\rho$（见第3.4节介绍）相对于 ρ的增幅体现出来（图2）。过渡阶段开始时的密度似乎与 N 无关（图1）。智能体无法聚集并利用目标信息，这表明在低密度下，系统性能受限于利用能力不足。这是因为当连通性 k保持不变时，被吸引到目标处的智能体数量相同。然而，在接近高密度阶段时，大规模群体（即N取值较高）优于较小规模的群体（即 N取值较低），因为后者往往会投入更多资源——也就是将更大比例的智能体用于利用目标信息，从而只剩下极少数智能体执行区域探索。

12 群体密度对集体跟踪性能的影响

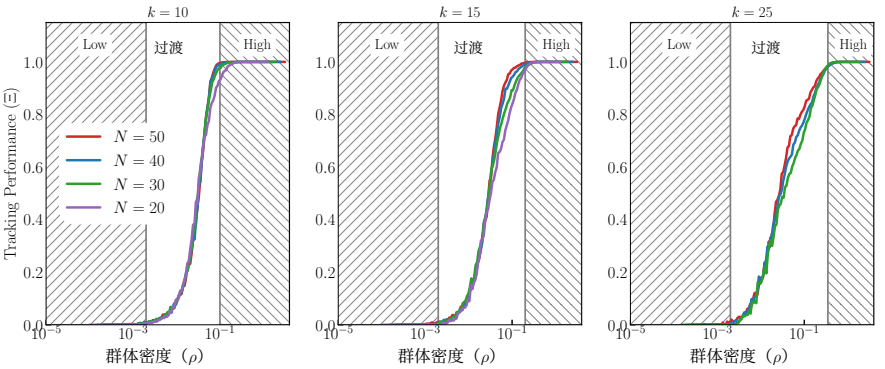


图1 由 $N = 20$、30、40 和 50 个智能体组成、连通性各异的群体， k，以及群体密度， ρ，正在跟踪一个以 $\mathbf{v}_{o,\max} = 0.15$ 的速度移动的快速移动的非规避目标。在低密度阶段，系统无法跟踪目标。在高密度阶段，系统能够持续跟踪目标，不会中断。在这两个阶段之间存在一个过渡阶段，在此阶段，系统的跟踪性能会随着群体密度 ρ 的增加而迅速提升。

因此，可以说，这些小规模系统的跟踪性能往往受限于探索不足。总之，低密度群体受利用能力限制，而高密度群体则受探索能力限制。后续章节将探讨群体规模及其连通性水平对系统 EED 的影响。

4.2 群体密度对探索—利用动态的影响

为确定改变群体密度对探索—利用动态（EED）的影响，我们通过计算探索比率， Θ来表征系统的 EED。该比率是一项系统级指标（见第3.4节）。按照定义，较高的 Θ 值表示群体倾向于进行探索。相反，较低的 Θ值则表明这种倾向转向利用，但正如本节稍后将讨论的，利用并不总是“有益的”。除了量化群体的性能外，跟踪能力 Ξ也可用于量化群体利用性行动的有效性（第3.4节）；较高的 Ξ值表明有效利用的程度较高。请注意，下文所寻求的任何最优值，始终都是以最大化 Ξ为目标。

此前已有研究报告，在不同的多智能体系统（Oliveira 等人，2017年；Kwa 和 Bouffanais，2022）中，集体任务的探索与利用之间存在权衡。然而，人们尚未充分理解这一权衡的根本机制。在此，我们对整个密度范围内的探索—利用—扩散平衡进行了定量分析。从图 1所示的低密度阶段开始，我们观察到，无论连通性水平如何，探索—利用—扩散平衡都完全偏向探索， k（图 3 ）。在群体密度如此低的情况下，即使极力偏向于采取利用性行动

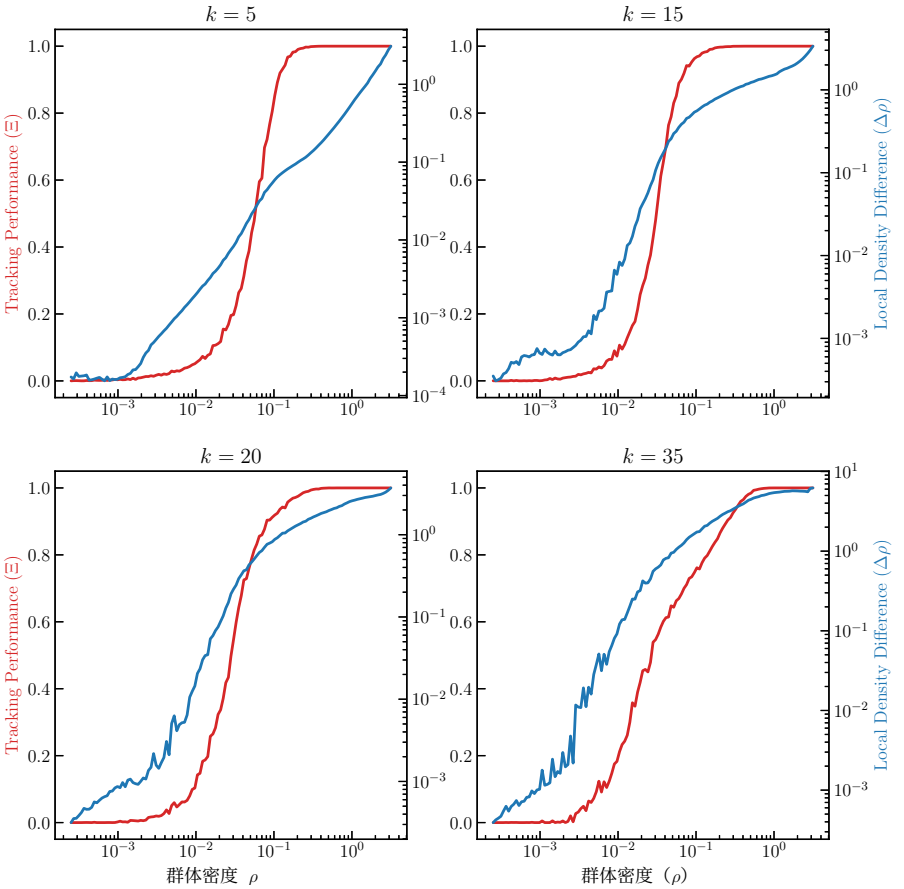


图2 密度差 $\Delta\rho$：由 $N = 50$ 个智能体组成、具有不同连通性度 k 的群体，跟踪以 $\mathbf{v}_{o,\ \max} = 0.15$ 行进的快速移动的非规避目标。

，通过高水平的 k 也不足以实现对目标的最低限度跟踪。换言之，这种群体策略显然无效。随着系统进入图 3所示的过渡阶段，探索与利用之间的权衡开始显现。这是因为个体间距离较小，个体更容易聚集在一起，进而促进其利用探索型智能体获取的任何目标信息。随着 Ξ增加，分配给利用的资源也随之增加，导致探索率 Θ相应下降。在这一过渡阶段，连通性 k的影响十分明显。如上一节所述，与低 Ξ 系统相比，高 k 系统的 k在较低密度下就会升高。具体而言，观察图 $k = 35$ 中的 3情形时，我们注意到，在整个过渡阶段，Θ 迅速下降，几乎降至完全不进行探索。应将此与 $k = 5$情形进行比较：在过渡阶段密度较高的一端， Ξ 值较高

14 群体密度对集体跟踪性能的影响

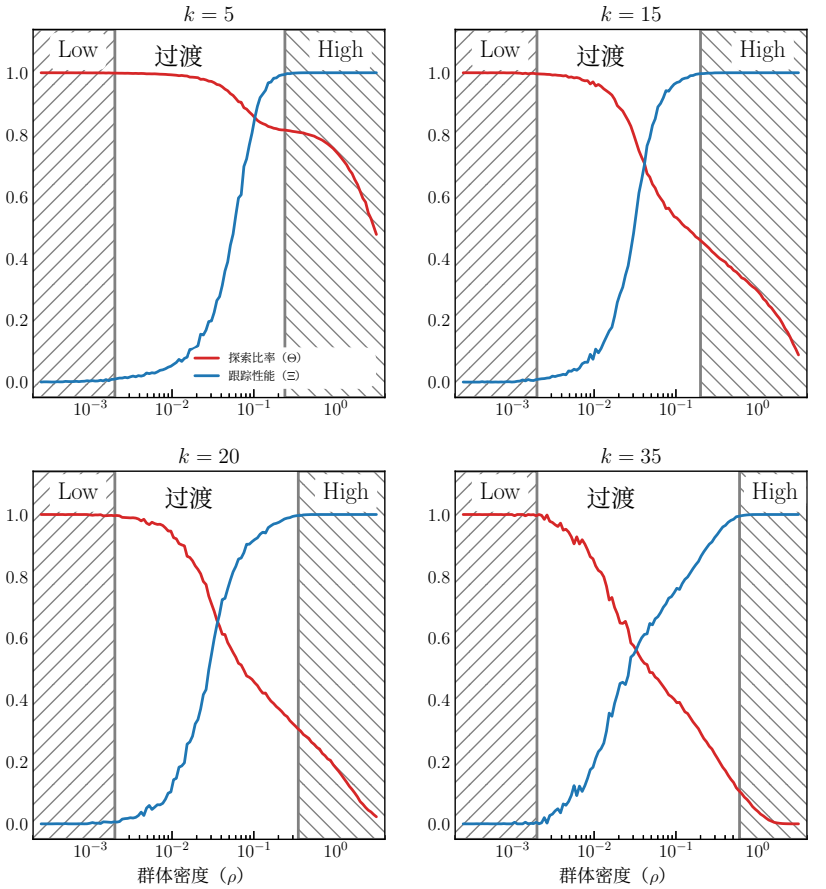


图 3 群体以连通性级别 $k \in [5, 15, 25, 35]$ 跟踪以 $\mathbf{v}_{o,\max} = 0.15$ 行进的非规避目标时的跟踪性能 Ξ 和探索比率 Θ；群体由 $N = 50$ 个智能体组成。图中标出了低密度、过渡和高密度阶段

在仍保持相对较高探索水平的同时实现， Θ。因此，有趣的是，在这种情况下，这种权衡并不意味着必须采取互斥行动；在中等至高密度下，仍然可以在进行同样高水平利用的同时保持高水平探索（$8 \times 10^{-2} \lesssim \rho \lesssim 1 \times 10^{0}$）。这与现有文献一致，已有研究表明，系统能够同时进行探索和利用（Kwa等人，2022b）。最后，进入探索受限的高密度阶段后，我们就更能理解为何低 k 系统的表现优于高 k 系统。事实上，在连通性较低时，系统在仍将资源分配给探索的同时即可达到最高跟踪性能。因此，在 $k = 5$ 下，这种有效的探索—利用—扩散平衡有助于维持较高的系统警觉性，而这正是取得令人向往的高跟踪得分的关键。相比之下，随着 $k = 35$， Ξ

在过渡阶段，尽管较早开始上升，但上升速度不及 $k = 5$的情况。对于 $\rho \gtrsim 10^{-1}$ （位于过渡阶段的右半部分）， Ξ 的上升明显放缓，因此需要相当高的群体密度才能实现完美跟踪。这种显著的性能下降可归因于 Θ快速下降导致的系统警觉性降低。

这组丰富而复杂的行为揭示了一个重要事实：随着群体密度变化，多智能体系统行为需要具备适应性。事实上，在给定密度下，适应性使系统能够寻求实现最大跟踪性能的最佳探索—利用—扩散平衡。请注意，在当前的搜索与跟踪问题中，连通性水平 k 是我们调节“适应性”的杠杆。此时接下来的问题是，如何确定任意给定密度 ρ下的最佳探索—利用—扩散平衡（即此处的 k 值）。

由于不同群体密度与连通性水平的组合对应着不同的探索-利用平衡，因此每种密度都有一个最佳连通性水平。图中对此进行了说明。4a （灰色阴影区域）显示，在过渡区域内，性能存在一个交叉点。具体而言，在过渡阶段的较低端，较高的连通性水平可实现更高的跟踪水平。然而，随着密度逐渐增加，情况则会反转。

为了更深入地了解这些现象，我们将考察探索比率的变化， Θ，以及 ρ。较低的连通度， k，在整个密度范围内都与较高的探索水平相关（图 4b）。事实上，连通性降低会限制目标位置信息向少数智能体传播。因此，该子集之外的智能体只能探索周围环境。由于低 k 群体往往受利用限制，因此在低 ρ下运行时表现较差，因为众所周知，这种条件会妨碍利用活动的开展。相反，较高的 k值会促进智能体之间的信息社会传播。因此，智能体能够更好地协作利用这些信息，并聚集在目标周围。较高的利用水平使高 k 系统从过渡阶段较低端（交叉点之前）开始时，表现优于低 k 系统。

如预期所示，在过渡阶段内增加密度时，个体间距离缩短会促进利用，进而促使智能体聚集。有趣的是，在过渡阶段较高端（交叉点之后），低 k 系统的表现优于高 k 系统。事实上，在这些密度下，此类高 k 系统会表现出过度利用性行动，可将其视为“冗余”，因为智能体过度聚集在目标周围并不能提升跟踪性能。因此，这些系统在这些密度下最终会受到探索限制。

系统的最优连通性水平会随 ρ 变化这一事实，可进一步借助图4c 来解释。该图展示了存在一个最优探索水平 Θ^*，在此水平下跟踪性能达到最大值。正如前面所述，

16 群体密度对集体跟踪性能的影响

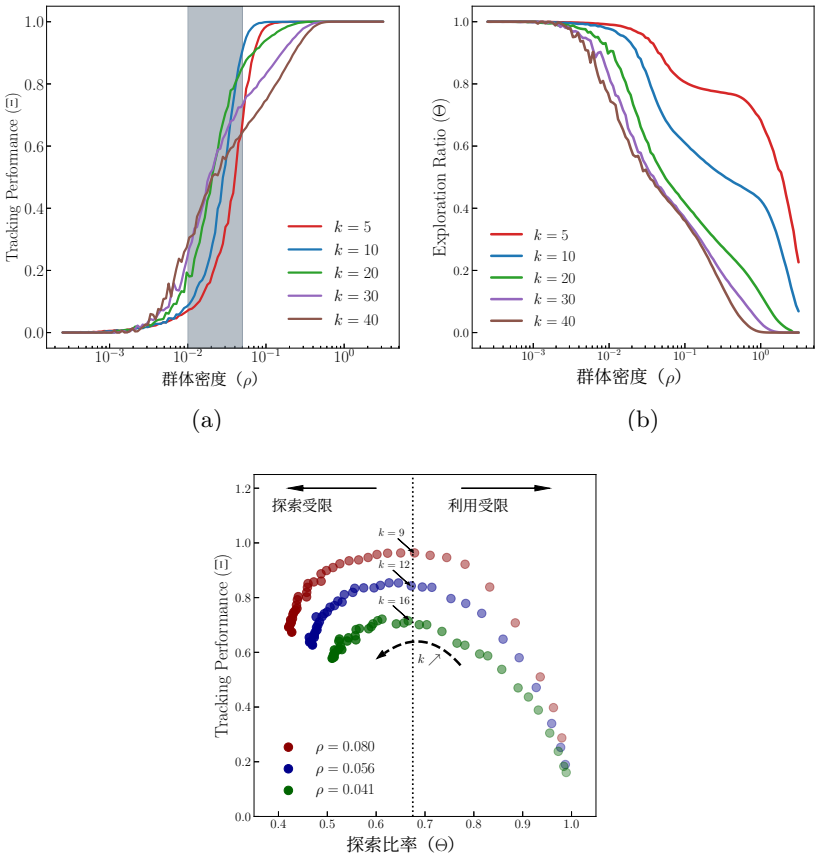


图 4 由 $N = 50$ 个智能体组成的群体以 $\mathbf{v}_o$ 的速度，$\max = 0.15$ 跟踪快速移动的非规避目标。 4a: 群体的跟踪性能（Ξ）与平均群体密度（ρ）之间的关系，显示了在不同连通性水平（k）下运行的情况。灰色部分突出显示了交叉区域，在该区域中，最优 k 可使 Ξ最大化。 4b: 群体的探索比率（Θ）与平均群体密度之间的关系，显示了在不同连通性水平下运行的情况。 4c: 系统的跟踪性能与探索比率之间的关系。较浅色的点表示 k 较低的系统，较深色的点表示 k较高的系统。最优探索水平 Θ^*以虚线表示，探索受限系统位于该线左侧，而利用受限系统位于右侧。所考察的三种密度均处于过渡区域（图 1）。

对于给定的群体密度， ρ，存在一个最优连通性水平 k^*，使得 $\Xi(k^*, \rho) = \max_k(\Xi(\rho))$（图4a）。进而可得 $\Theta^* = \Theta(\max_k(\Xi))$。虽然无法轻易从图4b中推导出这一最优探索水平 Θ^*，但从图4c 中可以明显看出（见垂直虚线）。有趣的是，确定 Θ^* 的精确位置需要

进一步研究表明，即使 ρ发生变化，它似乎仍保持不变，这与 k^* 从一种群体密度到下一种群体密度的变化有关。此外，Θ^* 清晰地区分了两个区域，分别对应探索受限系统和利用受限系统——也就是说，最优点左侧的系统受探索不足的限制，而最优点右侧的系统则因利用不足而导致性能受限。因此，我们得出一个重要结论：必须调整系统的连通性——即我们的“适应性”杠杆——以管理并实现探索与利用之间的最佳平衡；这一结论此前已在多项研究中提出（Kwa等人，2020a、2021年；Talamali等人，2021年；Horsevad等人，2022b）。

4.3 群体规模的影响

在前几节中，我们报告了有力证据，表明群体密度这一概念是分析任何多智能体系统的关键。要触发有效的涌现集体行为，必须达到最低密度。此外，随着密度增加并进入过渡阶段，探索性行动与利用性行动之间存在错综复杂的平衡，这表明这些涌现属性高度依赖于密度。尽管如此，我们不应忽视不可避免的有限尺寸效应；例如，多机器人系统中所使用的智能体数量有限所导致的效应，而智能体数量通常受财务和后勤方面的挑战所制约（Schroeder 等人，2019年；Hor- sevad 等人，2022a）。因此，我们必须认识到系统规模所起的作用，也因此有必要通过考察群体规模的影响来补充密度分析。

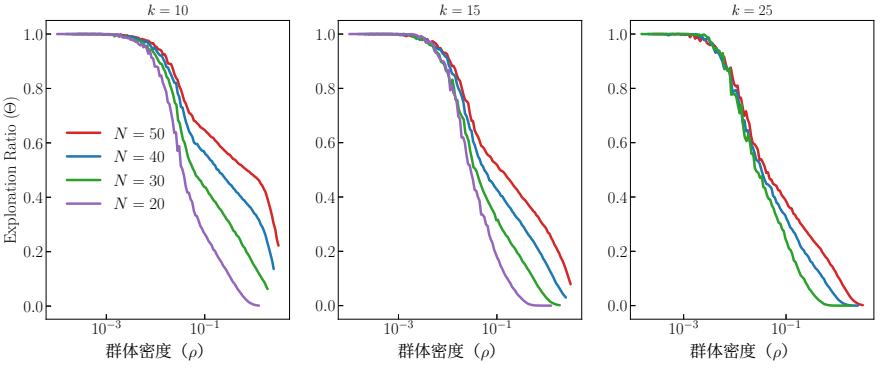


图 5 由 $N = 50$、40、30 和 20 个智能体组成的群体，在三种不同连通性水平 k 和不同群体密度 ρ 下，跟踪以$\mathbf{v}_{o,\ \max} = 0.15$速度行进的快速移动的非规避目标时的探索比率。

如前所述，在自然界的动物集群和计算优化问题中，增加系统中的智能体数量，主要是为了提高所开展探索活动的程度。图5 展示了

18 群体密度对集体跟踪性能的影响

目标跟踪群体也存在这种情况。尤其是随着群体密度增加，且系统在高连通性下运行时，图中显示，与小型系统相比，大型系统往往能维持较高的探索比率。这是因为群体所开展的探索程度会随 k/N而变化；该比例表示智能体的邻居数量与群体总规模之比，如图6所示。这些结果表明，探索是一种系统级行动，因此取决于开展探索活动的智能体所占比例。当一个智能体从探索转为利用时，与大型群体相比，小型群体的探索能力损失更大（由10个智能体组成的群体损失10%，而由50个智能体组成的群体损失2%）。因此，在连通性水平相近的情况下，大型系统中未参与目标跟踪的智能体比例往往更高，使其能够维持比由较少单元组成的系统更高的探索水平。

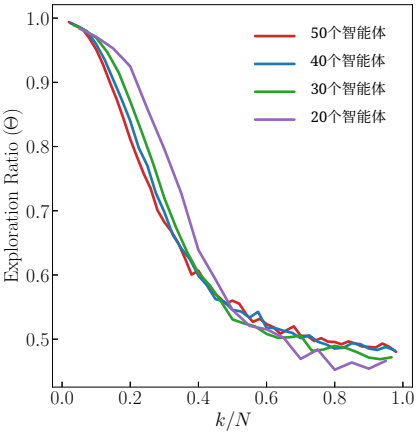


图6 群体密度为 $\rho = 0.0444$ 时，由 $N = 50$、40、30 和 20 个智能体组成的群体在不同连通性水平下的探索比率；该群体跟踪以 $\mathbf{v}_{o,\max} = 0.15$ 的速度移动的快速移动的非规避目标。

分析不同规模系统的跟踪性能时，也可以观察到探索的系统级自然属性。图7 显示，同样存在一个最优连通性水平（k^*），使系统的跟踪性能达到最大。在 $k < k^*$ 时，系统处于利用受限阶段。相反，在 $k > k^*$ 时，系统处于探索受限阶段。由此可见，无论系统规模如何，所有系统的性能损失都相近，且与 k/N 成正比。这进一步表明，系统所进行的探索量实际上是一种全局属性。

相比之下，在利用受限阶段运行时，可以看出系统的性能与 k（邻居的绝对数量）成正比，而与系统规模无关。这表明，利用是一项

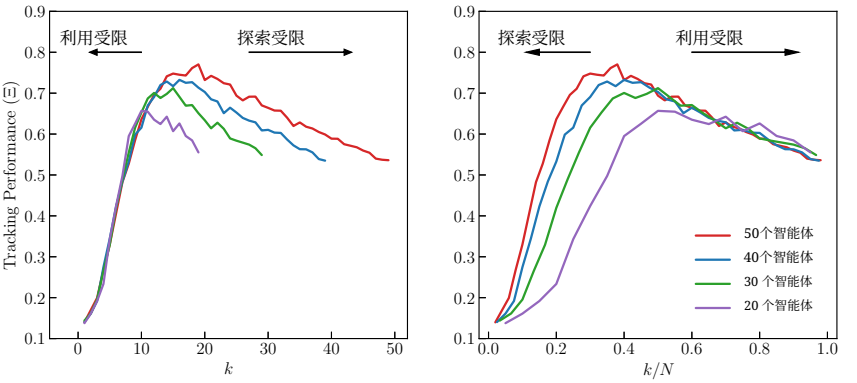


图 7 群体中包含 $N = 50$、40、30 和 20 个智能体时，在不同连通性水平下，以群体密度 $\rho = 0.0444$ 跟踪以$\mathbf{v}_{o,\max} = 0.15$ 的速度移动的快速移动非规避目标时的跟踪性能。跟踪性能以 k （左）和 k/N （右）为图示。

局部层级任务，取决于能够聚集在目标周围的智能体数量。在利用受限阶段运行时，使用相同水平的连通性会吸引相同数量的智能体前往目标，从而使不同智能体数量的系统保持相同的利用水平。

除了探索和利用中观察到的趋势外，图 7 还表明，与大型群体相比，小型群体的最高跟踪性能较低，且 k^* 也较低。这可以归因于小型群体同时执行探索性和利用性行动的能力较弱。随着小型群体的连通性水平提高，系统会迅速安排更多智能体参与利用任务，使其与目标互动。反过来，这会减少进行探索的智能体比例，导致系统比大型群体更快地从利用受限阶段转入探索受限阶段。

利用能力不足也解释了图中所示的趋势。8 该图展示了群体在接近低密度阶段运行时的性能。在这里可以观察到，跟踪性能仍随 k成比例提升，进一步证实目标跟踪任务因此也包括利用，需要局部协调。然而，对于由30个和20个智能体组成的群体，随着 k增大，跟踪性能仍持续上升，并未达到峰值。这表明，由于智能体数量较少且彼此距离较远，群体在发现目标后无法充分利用目标位置信息。因此，不存在最优连通性水平，也不会过渡到探索受限阶段。

20 群体密度对集体跟踪性能的影响

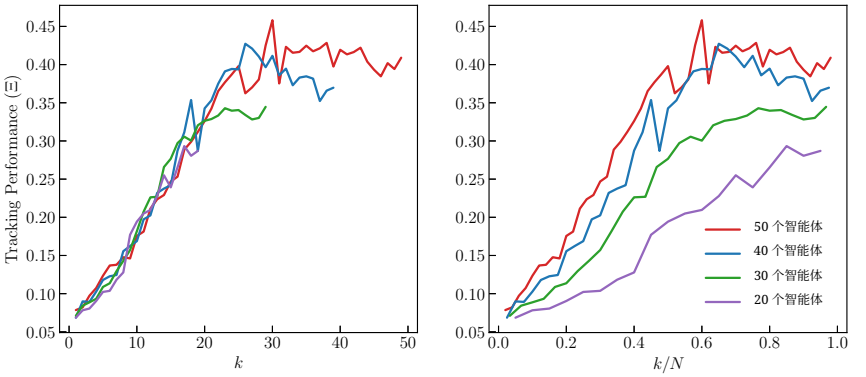


图8 由 $N = 50$、40、30和20个智能体组成的群体，在群体密度为 $\rho = 0.02$、连通性水平各异的情况下，对以$\mathbf{v}_{o,\ \max} = 0.15$速度行进的快速移动非规避目标进行跟踪时的跟踪性能。跟踪性能分别以 k （左）和 k/N （右）为横坐标绘制。

5 讨论

考虑一个由 N 个机器人组成的系统，这些机器人在给定任务区域内协作执行特定任务。通常，人们会根据特定指标，寻求完成该任务所需的最少单元数量。一方面，机器人过少时，多机器人系统必然无法协调各个单元的行动，从而阻碍稳健集体响应的形成。另一方面，机器人过多时，不可避免的干扰会妨碍行为协调（Hamann，2012，2018b）。这表明 N 的取值范围既不能过低，也不能过高。更一般地说，这表明智能体密度存在一个区间，在该区间内，系统的集体行动会从较差（乃至不存在）逐步提升至集体性能的最大值。

对于目标跟踪这一集体任务，我们确实识别出了这样一个区间：在所谓的利用受限状态下，存在一个明确的最低密度要求，以有效触发必要的涌现协调（图4a）。在该区间的另一端，密度上限对应于多机器人系统在所谓的探索受限状态下对目标进行持续且稳定跟踪的情形。从业者应设法尽可能将这一区间向较低密度值移动。这意味着以更小的系统规模实现更好的跟踪性能，也就是降低总体成本。换言之，改进集体行动的设计，有助于更充分地发挥群体智能。

具体而言，群体的灵活性体现在特定的探索与利用平衡上，这最终决定了观测到的跟踪性能随密度变化的情况。为讨论这一问题，不妨回顾 Dorigo 等人(2021年) 对灵活性给出的完整定义：“解决设计时未曾选定的问题／执行设计时未曾选定任务的能力。”

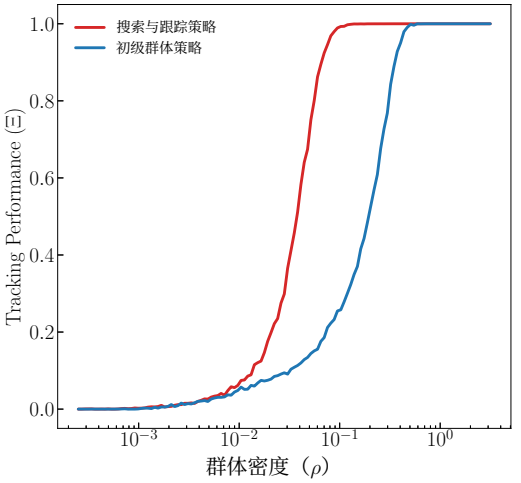


图9 第 3.1 节所述搜索与跟踪策略，以及采用恒定智能体间排斥行为的初级无记忆策略的比较。两组仿真均在连通性水平 $k = 10$ 下进行。与基准群体策略相比，初级策略的性能曲线向较高密度范围偏移。

“这些问题／任务与设计时所选定的不同。”毋庸置疑，迄今从未有人提出过衡量灵活性的绝对指标。因此，我们只能在广泛的运行条件下，对间接的灵活性测量进行相对比较。事实上，对于给定的群体策略——即给定的一组局部更新规则——当任务/环境需求发生变化时，系统集体响应的有效性可作为灵活性的替代指标。对于我们的目标跟踪问题，可以通过多种不同方式探测灵活性：例如，改变目标数量（Kwa等人，2021年，2022a）、改变目标速度（Kwa等人，2020a），或增加障碍物（Sun等人，2022）等。

事实上，在任意给定的密度下，提高集体跟踪性能的唯一方法，就是通过识别潜在的适应性“杠杆”来调整探索与利用之间的平衡——“学习/改变行为以应对新的运行条件的能力”（Dorigo 等人，2021年）。前几节所呈现的结果中，涉及的适应性杠杆仅有两种：(1) 速度吸引分量中的记忆机制（附录 A.1），以及 (2) 自适应排斥策略（附录A.2）。图9清楚地说明了这一点：图中展示了我们的搜索与跟踪群体策略 $k = 10$ （第3.1节）以及另一种策略；除不具备记忆且排斥强度固定外，两者在其他方面完全相同。正如预期，在低密度下，两种策略的效果都同样不佳。随着群体密度增加，红色曲线的跟踪性能开始超过蓝色曲线，随后迅速上升，并在密度几乎比蓝色曲线低十倍时达到峰值 1

。因此，红色曲线对应的群体策略展现出远高于蓝色曲线对应策略的灵活性。在过渡阶段的任意密度下，引入智能体间自适应排斥和记忆（第3.1节）都能发挥适应性的作用，从而实现更具群体智能的目标集体跟踪。因此，在此背景下，适应性似乎有助于提升灵活性。还需指出，除记忆和自适应排斥之外，还存在其他适应性杠杆，可加以利用以进一步提高集体策略的有效性。

然而，要实现这一点，关键在于清楚了解群体密度所发挥的关键作用。尽管前面的分析揭示了许多重要信息，但仍未充分强调改变密度的必要性，以便：(i) 确定多机器人系统实际运行于哪个阶段——低密度、过渡阶段还是高密度（图 1），以及 (ii) 描述实际的探索-利用平衡及其相应的灵活性水平。例如，设想一位实践者设计并运行一个由给定数量单元组成的多机器人系统 N。如果不改变群体密度，这位实践者就无法判断系统运行于探索受限状态还是利用受限状态。如果任务要求在有限表面积内运行，密度可能过高，群体智能也可能并非必需——它甚至可能造成干扰效应，妨碍集体动力学。可以说，最有趣的区域是过渡阶段，在此阶段可以通过自适应来增强群体智能，从而在相同密度下实现更高性能，或者以少得多的单元数量实现相同性能 N。除了确定过渡阶段对应的密度区间外，还必须判断在该密度下，多机器人系统的行为是探索受限还是利用受限。若未能做到这一点，将大大增加寻找有效自适应策略的难度。如图 4a所示，在过渡阶段的较低密度范围内，可以利用系统的连通性水平作为另一种自适应手段，并提高 k。然而，对于过渡阶段中略高一些的密度（此时仍处于探索受限状态），这一策略会适得其反。

先前关于机器人群体密度依赖性的分析，也有助于解释多机器人系统仿真与现实差距的某些方面。人们认为，这种差距尤其显著，因为多机器人系统具有复杂系统的典型特征——即大量相互作用单元共同造就涌现行为（Francesca 和 Birattari, 2016; Dorigo 等人,2021年）。事实上，在对机器人群体进行充分、准确的建模和／或仿真时遇到的挑战，可能导致群体密度出现不可忽略的差异，进而使仿真结果与硬件实验之间产生显著偏差（Hamann,2018b; Zhong 等人, 2018年; Dorigo 等人, 2021年; Kwa等人, 2020a, 2021年）。

需要强调的是，所得结果和分析是针对我们的集体跟踪问题得出的。如何将这些针对这一特定集体行动的结果推广到其他群体行为

是一个自然会引出的问题。此时值得回顾的是，目前与群体行为相关的普遍性结果寥寥无几；既没有普遍适用的可扩展性定律，也没有鲁棒性定律或灵活性定律。集体行动的涌现特性，以及群体属于复杂系统这一事实，可以解释为何普遍性结果如此匮乏；而目前又缺乏基准问题，无法对采用特定协同控制算法的系统整体性能进行定量评估和比较，这进一步加剧了这一状况（Kwa等人，2022b）。尽管如此，群体密度对多机器人系统涌现响应的影响这一关键问题，对于参与广泛集体行动的所有机器人群体而言，仍然适用且意义重大。如前所述，在密度极低时，群体不可避免地无法实现自组织。只有增加单元数量——从而提高群体密度——涌现行为才可能显现。在密度谱的另一端，高群体密度意味着可用单元数量众多，以至于执行当前任务可能根本不需要群体智能；密度过高甚至可能妨碍集体组织。这些众所周知的事实明确表明，存在一个过渡阶段，在此阶段，系统动力学从缺乏自组织转变为呈现涌现响应。这一过渡阶段已在多种集体行为中得到观察，包括使用 Vicsek 模型描述自推进粒子的情形（Vicsek等人，1995；Bouffanais，2016）。尽管这一过渡阶段的存在并非全新发现，但它对执行任何任务（而不仅仅是集体跟踪）的机器人群体设计所带来的影响，尤其是对系统规模设定的影响，却一直被忽视。在刻画这一过渡阶段时，不同任务和问题之间自然会存在差异。例如，高密度下干扰造成的不利影响，可能会导致性能下降；在具有中央存储点的觅食任务中，这一点已得到认可（Rosenfeld等人，2006；Hamann，2012）。然而，若能对涉及探索—利用平衡的集体任务类别中的这一过渡阶段进行系统分析（Kwa等人，2022b），将有助于进一步推广本文报告的一些结果。因此，我们希望本研究能鼓励其他研究人员在群体机器人学中，针对更广泛的平台和任务，研究群体密度的影响。

我们可以得出结论，对多机器人系统的密度依赖性进行分析，为比较和量化群体执行特定任务时的群体智能提供了方法。这是优化集体性能的必要一步，也就是说，这是提升群体智能时所需的一步。从机器学习的角度来看，这些结果和结论具有深远的意义。人们已考虑采用多种策略来确定能够促成所期望的全局集体行动的局部控制规则，例如：自动设计（Francesca 和 Birattari，2016；Ligot等人，2022）、多智能体强化学习（Kouzehgar等人，2020年；Zhang等人，2021）、深度强化学习（H¨uttenrauch等人，2019年）等。然而，在这些方法中，大多数都将单元数量（或等价地，群体密度）作为一个参数，

在学习/优化过程中被视为恒定。根据上述对密度依赖性的分析，我们应谨慎看待这样一种情况：如果学习/优化过程只在给定密度下进行，那么一旦情况突然改变，就可能导致糟糕的性能。例如，考虑针对过渡阶段较高密度范围（比如 $\rho \simeq 10^{-1}$ 图 4a中的情况）学得的行为，该行为本应带来相对较高的跟踪性能。根据第 4节的发现，学得的行为很可能会设法促进探索，从而限制该密度下的跟踪性能。如果由于单元损失或任务区域扩大而导致密度突然下降，那么，鉴于对利用的需求增加，为探索而优化的学得行为很可能表现不佳。同样，在采用机器学习方法时，也应考虑群体规模在探索受限状态下已确定的影响（第 4.3节）。

这并不意味着不应考虑将机器学习策略用于这类问题。相反，我们的分析表明，应采用旨在优化整个密度范围内适应性的机器学习策略。总之，对于多机器人系统，应以“适应性学习”为目标，同时避免针对特定任务和情境学习一套特定的行为。为了阐明适应性学习的深层含义，我们可以再次回到图4a：学习适应性相当于找到 k 的最优值，使其在任何群体密度下都能实现最高跟踪性能。如前所述，采用我们的搜索与跟踪策略（第 3.1 节）时，除记忆和排斥行为之外，另一个潜在的适应性“杠杆”是系统的连通度 k。这种适应性学习方法有一个局限：要将其推广到任意群体策略似乎并非易事。尽管如此，识别与任意群体策略相关的所有适应性杠杆，是朝这一方向迈出的第一步。

最后，可以认为，当环境和/或运行条件发生变化时，学习适应性等同于在系统层面动态优化利用与探索行为之间的平衡。我们相信，学习适应性以及对探索—利用平衡的优化，将为致力于设计有效集体群体动力学的研究群体带来前景广阔的新机遇和新方向。

声明

伦理审批和参与知情同意

不适用

发表知情同意

不适用

数据和材料的可用性

本研究使用的数据可在以下 GitHub 仓库中找到 https://github.com/hianlee/swarm-density-tracking。

利益冲突

H. L. Kwa 受雇于泰雷兹亚洲解决方案，担任研究工程师并领取薪水。所有其他作者均无相关财务或非财务利益需要披露。

经费

本研究获泰雷兹亚洲解决方案通过新加坡经济发展局工业研究生计划（EDB IPP）提供的支持，并获加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）资助，资助编号为 RGPIN-2022-04064。

作者贡献

概念构思：R.B.；方法：H.L.K. 与 R.B.；仿真与数据处理工具开发：H.L.K.；实验实施：H.L.K.；数据分析：H.L.K.、J.P. 与 R.B.；稿件准备与审阅：H.L.K.、J.P. 与 R.B.

致谢

不适用

附录A 策略速度分量

第3.1 节所述的搜索与跟踪策略会生成一个由两部分组成的速度向量：（1）吸引速度分量，$\mathbf{v}_{i,\ \mathrm{att}}[t]$；（2）排斥速度分量，$\mathbf{v}_{i,\ \mathrm{rep}}[t]$。随后，使用公式1将这两个分量合并，得到最终智能体速度。公式重述如下：

$$\mathbf{v}_i[t] = \mathbf{v}_{i,\mathrm{att}}[t] + \mathbf{v}_{i,\mathrm{rep}}[t]. \tag{A1}$$

本节说明如何确定$\mathbf{v}_{i,\ \mathrm{att}}[t]$ 和$\mathbf{v}_{i,\ \mathrm{rep}}[t]$ 的值。该策略最初由Kwa等人(2022a)提出。

A.1 吸引速度分量

吸引分量用于促使智能体聚集到兴趣点，$\mathbf{p}[t]$，根据算法2确定。在每个时间步，每个智能体都会测量其局部环境以寻找目标。如果智能体检测到目标，就会从探索状态过渡到跟踪状态，将$\mathbf{p}[t]$ 设为目标的当前位置，并广播该位置。如果未检测到目标，智能体就会与其 k个最近邻

并尝试跟踪邻居检测到的目标。此外，每个智能体都配有一段时长为 t_{mem} 的记忆 M。借助这段记忆，每个智能体能够记录发现目标的位置和时间。每个智能体还会从其 k 个最近邻处接收一组目标位置和遭遇时间。这些接收到的值会与智能体自身的值进行比较，并将最新的目标位置用作吸引点，$\mathbf{p}[t]$。此时，如果智能体仍然不知道目标位置，则将$\mathbf{p}[t]$ 设为智能体自身的位置 $x_i[t]$，从而实质上禁用吸引分量。通过使用这一更新算法，智能体能够比较直接从环境中感知到的信息与从邻居处接收的信息，并选择要利用哪一组信息。

在此需要再次强调，在该框架中，智能体的邻域应从网络的意义上理解。因此，智能体 i 拥有的邻居数量等于其度， k。此外，由于考虑了时变网络拓扑，需要注意的是，每个智能体的邻域会在整个任务期间不断演变。鉴于这种动态网络拓扑，所有智能体均独立使用$\mathbf{p}[t]$，并按照算法2进行计算。

算法 2：吸引点更新算法

初始化 $M = t_{\ \mathrm{mem}}$
如果 智能体检测到目标**则**
    $\mathbf{p}_{\mathrm{self}} \leftarrow$ 目标的位置
    $t_{\mathrm{best}} \leftarrow t$
结束条件判断
确定 $\mathcal{N}_i = \{j \in [1, N]$，使得智能体 j是拓扑上的k近邻智能体 $i\}$的
获取所有邻居的$\mathbf{p}$ 和 t_{best}列表
$\mathbf{p}^{\mathrm{neigh}} \leftarrow$所有邻居的最新条目 $\mathbf{p}$
$t_{\mathrm{neigh}} \leftarrow$ 所有邻居的最新条目 t_{best}
如果 $t_{\mathrm{best}} + M < t$ **那么**
    $\mathbf{p}_{\mathrm{self}} \leftarrow \emptyset$
结束如果
如果 $t_{\mathrm{neigh}} + M < t$ **那么**
    $\mathbf{p}_{\mathrm{neigh}} \leftarrow \emptyset$
结束条件判断
如果 $\mathbf{p}_{\mathrm{self}} = \emptyset$ **且** $\mathbf{p}_{\mathrm{neigh}} = \emptyset$ **则**
    $\mathbf{p}[t] \leftarrow \mathbf{x}_i[t]$
否则，如果 $t_{\mathrm{best}} > t_{\mathrm{neigh}}$ **则**
    $\mathbf{p}[t] \leftarrow \mathbf{p}_{\mathrm{self}}$
else
    $\mathbf{p}[t] \leftarrow \mathbf{p}^{\mathrm{neigh}}$
结束如果

利用智能体在上一个时间步的速度及其相对于$\mathbf{p}[t]$的位置，可以按如下方式计算吸引分量：

$$\mathbf{v}_{i,\mathrm{att}}[t] = \omega \mathbf{v}_i[t-1] + cr\big(\mathbf{p}[t] - \mathbf{x}_i[t]\big). \tag{A2}$$

该方程与Engelbrecht (2010)提出的仅社会项粒子群优化模型中使用的方程类似，其中 ω 是速度惯性权重， c 是社会权重，而 r 是从单位区间中随机抽取的数值。在计算优化中，这是驱动系统开发行为的主要因素。在此处，它用于驱动多机器人系统朝目标移动。值得注意的是，与采用无限记忆长度的仅社会项粒子群优化模型不同，所提出的策略让智能体使用有限的记忆长度。这样做是为了防止智能体利用过时的目标位置信息。

A.2 自适应排斥

自适应排斥分量用于促进智能体探索搜索空间，并防止智能体聚集在狭小区域内，从而避免过度开发目标信息。此外，这种行为还直接带来了防碰撞措施这一附带效果。

所采用的智能体间排斥方案基于 Vallegra 等人 (2018年) 开发的 BoB 环境监测群体所使用的方案；Zoss 等人 (2018年)。利用这一行为，具有 i 拓扑邻居的智能体 j按如下方式计算其个体排斥速度：

$$\mathbf{v}_{i,\mathrm{rep}}[t] = -\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\frac{a_R[t]}{r_{ij}[t]}\right)^d \frac{\mathbf{r}_{ij}[t]}{r_{ij}[t]}, \tag{A3}$$

其中，$\mathbf{r}^{ij}$ 是从智能体 i 指向智能体 j 的向量，且 $r_{ij} = \|\mathbf{r}_{ij}\|$。这种智能体间排斥由两个参数控制：排斥强度 a_R，它影响智能体在平衡状态下彼此之间的距离；以及前置因子项中的指数d （a_R/r_{ij}）。在所开展的研究中， d 被固定为 6，因为该值对 EED策略的性能影响非常温和。在较大的（a_R/r_{ij}）和 d 值下，智能体的排斥强度大致等于平衡构型中的最近邻距离（Vallegra 等人，2018年；Coquet 等人，2021年）。

这种智能体间排斥的关键在于，智能体能够根据其局部环境和邻域调整自身的排斥强度， $a_R[t]$。为此，采用智能体的探索状态$S_{i,\ \exp}[t]$。当智能体没有目标信息时，它会进入探索状态，即$S_{i,\ \exp}[t]$ =1，并不断增大其 a_R 值，直至达到最大值。相反，如果智能体处于跟踪状态，即$S_{i,\ \exp}[t] = 0$，则会逐渐减小其 a_R 值，直至达到最小值。用于获得排斥分量的自适应排斥行为总结于算法3中。

算法 3 自适应排斥

初始化 $a_{R,\ \min}$, $a_{R,\ \max}$, $d = 6$, $\delta_{\text{explore}} = 0.1$ 和 $\delta_{\text{track}} = 0.75$
当系统处于活动状态 **时**
  如果$S_{i,\ \exp}[t] = 0$ **则** // 智能体处于跟踪状态。减小 a_R。
    如果 $a_R > a_{R\text{最小值}}$ **然后**
      $a_R \leftarrow a_R - \delta_{\text{跟踪}}$
    结束如果
  否则如果 $a_R < a_{R,\ \max}$ **则** // 处于探索状态的智能体。增加 a_R。
    $a_R \leftarrow a_R + \delta_{\text{explore}}$
  结束如果
  计算 $\mathbf{v}_{i,\ \text{rep}}$，使用方程 A3
结束循环

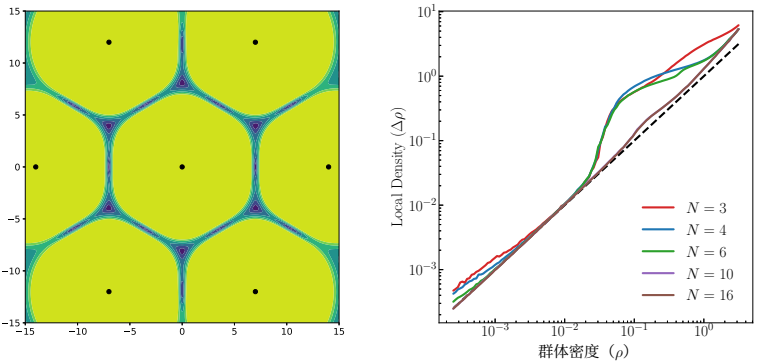
附录B 局部密度

本节说明了为何在计算系统的局部群体密度时使用公式 6 。为完整起见，这里再次陈述如下:

$$\rho_L = \frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\frac{7}{\pi L_{i,t}^2}. \tag{B4}$$

由于采用了智能体间排斥行为，智能体往往会形成图 B1a所示的六角密堆积模式。因此，除非智能体位于系统边缘，否则通常会有另外六个邻近智能体围绕着它。定义 L_i 为智能体 i 与其最近的 6 个邻居之间的平均距离，据此可假设，为计算单个智能体的局部个体密度，这 6 个邻近智能体与其之间的距离均为 L_i 。

虽然计算时可以使用不同数量的智能体，但在改变全局平均群体密度时，局部个体密度呈现出的趋势与图中所示相同。B1b然而，如果计算时使用的智能体较少，局部个体密度与全局平均群体密度之间最初的差异就会更加明显。因此，智能体在区域内移动时，若发现自己与另一个智能体的距离很近（相对于环境的大小而言），就会得到一个人为偏高的局部密度。反之，如果使用的智能体过多，这类偶然形成的智能体“集群”便不会反映出来。因此，本例选择使用六个智能体进行局部密度计算。



(a) (b)

图 B1 B1a：智能体（黑点）相对于彼此的位置，以及个体智能体处于平衡位置时产生的斥力场。黄色区域表示排斥势较高的区域，蓝色区域表示排斥势较低的区域。在这些排斥势场的作用下，智能体倾向于彼此形成六边形排列。B1b：对于由 50 个智能体组成、通过 $k = 20$ 通信网络连接的群体，采用不同数量的邻近智能体计算得到的局部个体密度。系统正在跟踪一个以最高速度为 $\mathbf{v}_{o,\ \max} = 0.15$行进的非规避目标。局部个体密度与全局平均群体密度（虚线）进行比较。

参考文献

A›cikme›se B, Bayard DS（2012）一种用于概率群体制导的马尔可夫链方法。载于：2012年美国控制会议（ACC）。IEEE，加拿大魁北克蒙特利尔，第6300–6307页，https://doi.org/10.1109/ACC.2012.6314729

Biswal S、ElamvazhuthiK、Berman S（2021年）使用局部密度反馈对多智能体系统进行分散式控制。IEEE 自动控制汇刊https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3109520

Bouffanais R（2016）群体动力学的设计与控制。新加坡施普林格，新加坡，https://doi.org/10.1007/978-981-287-751-2

Cates ME、Tailleur J（2015）运动诱导相分离。《凝聚态物质年度评论》6(1)：219–244。https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031214-014710

Coquet C、Aubry C、Arnold A 等（2019年）一种用于追踪水下移动源的局部带电粒子群优化方法。载于：OCEANS2019 - 马赛。IEEE，马赛，法国，https://doi.org/10.1109/OCEANSE.2019.8867527

Coquet C, Arnold A, Bouvet PJ(2021年) 采用通信约束控制机器人群体编队以跟踪动态目标：分析与仿真。《应用科学》11(3179)。https://doi.org/10.3390/app11073179

Crosscombe M, Lawry J (2021年) 网络连通性对集体学习的影响。载于：第15届分布式自主机器人系统国际研讨会（DARS21）论文集。施普林格·查姆，2106.00655

Dadgar M, Couceiro MS, Hamzeh A (2017年) 基于相似离子间斥力增强RDPSO多样性，用于机器人目标搜索。载于：2017年人工智能与信号处理会议（AISP）。IEEE，伊朗设拉子，第275–280页，https://doi.org/10.1109/AISP.2017.8324096

Dadgar M, Couceiro MS, Hamzeh A (2020年) RbRDPSO：用于机器人目标搜索的基于斥力的 RDPSO。《伊朗科学与技术期刊——电气工程汇刊》44(1):551–563。https://doi.org/10.1007/s40998-019-00245-z

Dorigo M, Theraulaz G, Trianni V (2021年) 群体机器人学：过去、现在与未来。《IEEE 会刊》109(7):1152–1165。https://doi.org/10.1109/jproc.2021.3072740

Ebert JT, Gauci M, Nagpal R (2018年) 机器人群体中的多特征集体决策。载于：自主智能体与多智能体系统国际联合会议论文集，AAMAS，瑞典斯德哥尔摩，第1711–1719页，https://doi.org/10.5555/3237383.3237953

Ebert JT、Gauci M、Mallmann-trenn F 等（2020）Bayes Bots：分布式机器人群体中的集体贝叶斯决策。在：2020 IEEE 国际机器人与自动化会议（ICRA），法国巴黎，第 7186–7192 页，https://doi.org/10.1109/ICRA40945.2020.9196584

Elamvazhuthi K、Berman S（2019）群体机器人学中的平均场模型：综述。《生物启发与仿生学》15（015001）。https://doi.org/10.1088/1748-3190/ab49a4

Engelbrecht AP（2010）异构粒子群优化。在：Dorigo、M. 等（编）第 7 届国际会议 ANTS 2010。施普林格，柏林、海德堡、布鲁塞尔，比利时，第 191–202 页

Esterle L、Lewis PR（2020）在线多对象 k 覆盖中的分布式自主性与权衡。《计算智能》36(2):720–742。https://doi.org/10.1111/coin.12264

Francesca G, Birattari M（2016）机器人群体的自动设计：成果与挑战。《机器人学与人工智能前沿》3:29

Hamann H (2012)迈向群体微积分：群体性能和集体决策的普遍属性。载于：《群体智能：第八届国际会议 ANTS 2012》。计算机科学讲义第7461卷。施普林格，德国柏林，第168–179页，https://doi.org/10.1007/978-3-642-32650-9 15

Hamann H (2018a) 并行计算和多机器人系统中的超线性可扩展性：共享资源、协作与网络拓扑。计算机科学讲义（包括人工智能讲义和生物信息学讲义子系列）10793 LNCS：31–42。
https://doi.org/10.1007/978-3-319-77610-1 3

Hamann H (2018b) 群体机器人学：一种形式化方法。施普林格国际出版公司，
https://doi.org/10.1007/978-3-319-74528-2

HeckerJP, Moses ME (2015年) 超越信息素：进化出容错、灵活且可扩展的受蚂蚁启发的机器人群体。《群体智能》9(1):43–70。
https://doi.org/10.1007/s11721-015-0104-z

H¨onig W, Ayanian N(2016) 利用机器人摄像机进行动态多目标覆盖。载于：IEEE智能机器人与系统国际会议，韩国大田，第1871–1878页，
https://doi.org/10.1109/IROS.2016.7759297

Hornischer H, Varughese JC, Thenius R 等（2020年）CIMAX：利用局部通信实现机器人群体中的集体信息最大化。《自适应行为》
https://doi.org/10.1177/1059712320912021

Horsevad N, Kwa HL, Bouffanais R（2022a）超越仿生机器人学：多机器人系统如何支持动物集体行为研究。《机器人学与人工智能前沿》9(865414)。https://doi.org/10.3389/frobt.2022.865414

Horsevad N、Mateo D、Kooij RE 等（2022b）集体决策中从简单传染到复杂传染的转变。《自然-通讯》13（1442）。https://doi.org/10.1038/s41467-022-28958-6

H¨uttenrauch M、Adrian S、Neumann G 等（2019）群体系统的深度强化学习。《机器学习研究杂志》20（54）：1–31

Jensen EA、Lowmanstone L、Gini M（2018）搜索团队的通信受限探索。分布式自主机器人系统，施普林格高级机器人学论文集，第6卷，第17–30页。
https://doi.org/10.1007/978-3-319-73008-0

Jurt M, Milner E, Sooriyabandara M 等（2022）机器人群体对任意形状物体的集体运输。《人工生命与机器人》https://doi.org/10.1007/s10015-022-00730-5

Kit JL, Dharmawan AG, Mateo D, 等（2019）微型机器人群与爬墙单元协同进行多楼层分散式探索。载于：2019年国际多机器人与多智能体系统研讨会（多机器人系统）。IEEE，新不伦瑞克，新泽西州，美国，https://doi.org/10.1109/MRS.2019.8901058

Kouzehgar M, Meghjani M, Bouffanais R（2020）浮标群用于动态海洋监测的多智能体强化学习。载于：IEEE-MTS 2020全球海洋大会：新加坡—美国墨西哥湾沿岸，IEEE，第1–8页，https://doi.org/10.1109/IEEECONF38699.2020.9389128

Kwa HL, Bouffanais R（2022）网络连通性对分散式集体学习中的探索与利用的影响。载于：2022年基于智能体的人类行为建模国际研讨会（ABMHuB），线上，网址 http://abmhub.cs.ucl.ac.uk/2022/camera ready/ Kwa Bouffanais.pdf

Kwa HL, Kit JL, Bouffanais R (2020a) 用于动态目标搜索与跟踪的最优群体策略。载于：第19届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（AAMAS 2020），新西兰奥克兰，第672–680页，https://doi.org/10.5555/3398761.3398842

Kwa HL, Toki´c G, Bouffanais R, 等（2020b）用于海上动态目标搜索与跟踪的异构群体。载于：2020全球海洋大会：新加坡—美国墨西哥湾沿岸。IEEE，新加坡，https://doi.org/10.1109/IEEECONF38699.2020.9389145

Kwa HL, Kit JL, Bouffanais R（2021）群体跟踪多个快速目标：社会交互与智能体记忆之间的相互作用。载于：ALIFE 2021：2021年人工生命会议，捷克共和国布拉格，https://doi.org/10.1162/isala 00376

Kwa HL、Babineau V、Philippot J 等（2022a）调整异构群体中的探索与利用平衡：跟踪规避目标。《人工生命》29：1–16。https://doi.org/10.1162/artl a 00390

Kwa HL、Kit JL、Bouffanais R（2022b）平衡多智能体与多机器人系统中的集体探索与利用：综述。《机器人学与人工智能前沿》8（771520）。https://doi.org/10.3389/frobt.2021.771520

Lerman K、Galstyan A（2001年）机器人群体觅食的数学模型：干扰的影响。《自主机器人》13（2）：127–141。https://doi.org/10.1023/A:1019633424543

Li H、Feng C、Ehrhard H 等（2017年）机器人群体密度的分散式随机控制：理论、仿真与实验。载于：IEEE 智能机器人与系统国际会议，温哥华，不列颠哥伦比亚省，

加拿大，第 4341–4347 页，https://doi.org/10.1109/IROS.2017.8206299

Ligot A、Cotorruelo A、Garone E 等（2022）迈向机器人群体离线全自动设计的实证实践。IEEE 进化计算汇刊 https://doi.org/10.1109/TEVC.2022.3144848

Liu Z、Crosscombe M、Lawry J（2021）用于集体学习的非精确融合算子。载于：ALIFE 2021：2021年人工生命会议，https://doi.org/10.1162/isala 00407

Mateo D、Kuan YK、Bouffanais R（2017）群体中的相关性对集体响应的影响。《科学报告》7(10388)。https://doi.org/10.1038/s41598-017-09830-w

Mateo D, Horsevad N, Hassani V, 等（2019年）适用于响应式集体行为的最优网络拓扑。《Science Advances》5(4):eaau0999。
https://doi.org/10.1126/sciadv.aau099

OliveiraM, Pinheiro D, Macedo M, 等（2017年）更佳的探索—利用节奏，造就更佳的群体：考察社会交互。载于：2017年 IEEE 拉丁美洲计算智能会议（LA-CCI）。IEEE，阿雷基帕，秘鲁，https://doi.org/10.1109/LA-CCI.2017.8285712

Pang B, Song Y, Zhang C, 等（2019年）基于改进随机游走方法的群体机器人探索策略。《机器人学杂志》2019年。https://doi.org/10.1155/2019/6914212

Piotrowski AP, Napiorkowski JJ, Piotrowska AE（2020年）粒子群优化中的种群规模。《群体与进化计算》58:100,718。
https://doi.org/10.1016/j.swevo.2020.100718

Prasetyo J, De Masi G, Ferrante E (2019年) 动态环境中的集体决策。群体智能13:217–243。https://doi.org/10.1007/s11721-019-00169-8

Rausch I, Reina A, Simoens P, 等 (2019年) 通过对社会反馈和噪声进行去中心化平衡而涌现的协调集体行为。群体智能 13:321–345。
https://doi.org/10.1007/s11721-019-00173-y

Roeva O, Fidanova S, Paprzycki M (2015年) 种群规模对遗传算法和蚁群算法在培养过程建模中的性能影响。载于：计算优化最新进展。施普林格，p107–120，https://doi.org/10.1007/978-3-319-12631-9 7

Rosenfeld A, Kaminka GA, Kraus S（2006）机器人团队可扩展性特性的研究。载于：Scerri P, Vincent R, Mailler R（编）《大规模多智能体系统的协调》。施普林格，美国马萨诸塞州波士顿，第27–51页，

https://doi.org/10.1007/0-387-27972-5 2

Rossides G, MetcalfeB, Hunter A（2021年）粒子群优化——一种用于控制机器人群体的适应方法。《机器人学》10(58)。https://doi.org/10.3390/robotics10020058

Rubenstein M, Ahler C, Hoff N 等（2014年）Kilobot：一种低成本机器人，具有可扩展的操作能力，专为集体行为而设计。《机器人与自主系统》62(7)：966–975。https://doi.org/10.1016/j.robot.2013.08.006

Schaerf TM, Makinson JC, Myerscough MR 等（2013年）小型群体在寻巢时是否具有优势？群体规模对西方蜜蜂巢址选择的影响。《英国皇家学会界面》10(87)。https://doi.org/10.1098/rsif.2013.0533

Schranz M, Di Caro GA, Schmickl T, 等（2021）群体智能与信息物理系统：概念、挑战与未来趋势。《群体与进化计算》60（100762）。https://doi.org/10.1016/j.swevo.2020.100762

Schroeder A, Trease B, Arsie A（2019）通过改变机器人数量和尺寸，平衡机器人群体成本与干扰效应。《群体智能》13（1）：1–19。https://doi.org/10.1007/s11721-018-0161-1

Sekunda A, Komareji M, Bouffanais R（2016）信号网络设计与群体动力学之间的相互作用。《网络科学》4（2）：244–265。https://doi.org/10.1017/nws.2016.5

Shishika D, Paley DA（2019）受蚊子启发的分布式集群与追捕，用于协同防御快速入侵者。《Autonomous Robots》43（7）：1781–1799。https://doi.org/10.1007/s10514-018-09827-y

de Souza C, Castillo P, Vidolov B（2022）追捕无人机的局部交互与导航引导：一种基于追逐行为的方法及实时测试。《机器人学》页码 1–19。https://doi.org/10.1017/S0263574721001910

Strickland L, Baudier K, Bowers K 等（2018）异构团队在场地防御任务中的仿生角色分配。载于：《分布式自主机器人系统 2018》。施普林格国际出版公司，美国科罗拉多州博尔德，https://doi.org/10.1007/978-3-030-05816-6 10

Sun Z、Sun H、Li P 等（2022）多无人水面艇与动态障碍船的自组织协同追捕策略。《海洋科学与工程学报》10。https://doi.org/10.3390/jmse10050562

Sung Y, Budhiraja AK, Williams RK, 等（2018年）多机器人多目标跟踪中的分布式同步行动与目标分配。载于：《IEEE机器人与自动化国际会议论文集》。IEEE，澳大利亚布里斯班，第3724–3729页，https://doi.org/10.1109/ICRA.2018.8460974

Sung Y, Budhiraja AK, Williams RK, 等（2020年）用于多机器人多目标跟踪的有限通信分布式分配。《Autonomous Robots》44：57–73。https://doi.org/10.1007/s10514-019-09856-1

Talamali MS, Saha A, Marshall JA, 等（2021年）少即是多：机器人群体在通信受限时能够更好地适应变化。《科学机器人》6(56)。https://doi.org/10.1126/scirobotics.abf1416

Thenius R, Moser D,Varughese JC, 等（2016）subCULTron——将文化发展作为水下机器人技术的一种工具。载于：人工生命与智能体，第732卷。施普林格国际出版公司，英国伯明翰，第27–41页，https://doi.org/10.1007/978-3-319-90418-4 3

VallegraF，Mateo D,Toki´c G, 等（2018）用于动态海洋监测的自主浮标群体渐进式升级。载于：IEEE-MTS OCEANS2018，美国南卡罗来纳州查尔斯顿，https://doi.org/10.1109/OCEANS.2018.8604642

Van Den BerghF, Engelbrecht AP（2001年）群体规模对协同粒子群优化器的影响。载于：GECCO'01：第3届遗传与进化计算年度会议论文集，美国加利福尼亚州旧金山，第892–899页，https://doi.org/10.5555/2955239.2955400

Vicsek T、Czir´ok A、Ben-Jacob E 等（1995）自驱动粒子系统中的新型相变。PhysicalReview Letters 75（6）：132–135。https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1226

Wahby M、Petzold J、Eschke C 等（2019）集体变化检测：机器人群体对动态群体密度和光照条件的适应性。载于：人工生命会议论文集，麻省理工学院出版社，纽卡斯尔，英国，第642–649页，https://doi.org/10.1162/isal a 00233

Zhang K、Yang Z、Ba¸sar T（2021）多智能体强化学习：理论与算法的选择性综述。《强化学习与控制手册》，第321–384页。https://doi.org/10.1007/978-3-030-60990-0 12

Zhang S, Liu MY, Lei XK 等（2019年）吸引-排斥相互作用下 k-捕获博弈的动力学与运动模式。《欧洲物理快报》128(10003)。https://doi.org/10.1209/0295-5075/128/10003

Zhong VJ、Umamaheshwarappa RR、Dornberger R 等（2018）对比了真实 Kilobot机器人的实现与其计算机仿真，重点研究目标搜索算法。载于：2018年智能自主系统国际会议（ICoIAS）论文集。IEEE，新加坡，第160–164页，https://doi.org/10.1109/ICoIAS.2018.8494196

Zoss BM、Mateo D、Kuan YK 等（2018）自主浮标分布式系统，用于大型水体的可扩展部署与监测。AutonomousRobots 42卷：1669–1689。https://doi.org/10.1007/s10514-018-9702-0