arXiv:2301.10698v1 [math.CV] 25 Jan 2023

$\mathbb{C}^2$中奇异叶状芽的拓扑

DAVID MARÍN、JEAN-FRANÇOIS MATTEI 和 ELIANE SALEM

目录

引言 1 1. 分离曲线与分隔集 4 1.1. 曲线芽补集的图分解 4 1.2. 分离曲线 5 1.3. 分隔集与动力分解 7 2. 叶的不可压缩性 11 2.1. 叶状连通性与叶状范坎彭定理 12 2.2. 叶状块的构造 13 3. 示例 14 3.1. dicritical尖点奇点 14 3.2. 非广义曲线的叶状结构 17 4. 单值化 17 4.1. 约化叶状结构的叶空间的端 17 4.2. 叶空间上的复结构 20 4.3. 扩展整体变换 21 4.4. 单值化 23 4.5. 分类定理 26 5. Camacho-Sad 指数的拓扑不变性 29 5.1. Camacho-Sad 指数 29 5.2. 不同类型的动力学分支 29 5.3. 小动力学分量 30 5.4. 大型动力学分支 31 5.5. 外围结构与指数不变性定理 32 6. 优越性定理与拓扑模空间 34 6.1. 优越性定理 34 6.2. 分类问题：完备族与模空间 34 参考文献 36

引言

本综述旨在概述 $(\mathbb{C}^2, 0)$ 上全纯叶状芽的奇点拓扑。这种叶状芽 $\mathcal{F}$ 可以由一个

日期：2023年1月26日。2010 年数学主题分类。主要分类号 37F75；次要分类号 32M25、32S50、32S65、34M。关键词和短语。复动力系统、复常微分方程、全纯向量场、奇异叶状结构、整体变换。D. Marín 感谢西班牙科学、创新与大学部通过资助项目 PID2021-125625NB-I00，以及加泰罗尼亚大学与科研资助管理局通过资助项目 2021SGR01015 提供的经费支持。本研究还得到西班牙国家研究署通过研发卓越中心与单位 Severo Ochoa 和 María de Maeztu 计划（CEX2020-001084-M）的支持。E. Salem 感谢法国国家科学研究中心通过借调提供的支持。

微分形式 $\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ 或等价地由向量场 $X = b(x,y)\partial_x - a(x,y)\partial_y$ 定义，其中 $a(x,y)$ 和 $b(x,y)$ 是环 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ 中的元素，即在 $\mathbb{C}^2$ 原点处消失的全纯函数芽，且没有公共除子。叶状结构 $\mathcal{F}_U$ 的一片叶（它在开邻域 U 上表示芽 $\mathcal{F}$，且在该邻域上 $a(x,y)$ 和 $b(x,y)$ 有定义且全纯）是 $U \setminus \{0\}$ 中的一张极大浸入黎曼曲面，它是方程 $\omega = 0$ 的解，或者等价地说，它与 X 相切。若存在从原点 0 的两个开邻域 U 和 V 之间的同胚，将 $\mathcal{F}_U$ 的任意一片叶映到 $\mathcal{G}_V$ 的一片叶上，则两个叶状芽 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 称为拓扑等价（或 $\mathcal{C}^0$-共轭）。这一概念在所有叶状芽的集合上构成一种等价关系；拓扑分类的最终目标是列出一组叶状芽，使每个拓扑类至少包含其中一个元素，同时尽可能减少冗余。

特殊叶 L 是指 $\mathcal{F}_U$ 满足以下条件的叶： $L \cup \{0\}$ 是 U中的一条闭解析曲线；它们在拓扑上由其在 $U \setminus \{0\}$中闭合这一性质来刻画。然而，对于芽 $\mathcal{F}$，这一概念只有作为0处的曲线芽才具有严格意义，称为 $\mathcal{F}$的分离曲线。事实上，有些芽 $\mathcal{F}$ 的每一片叶都包含一条分离曲线（作为去心曲线芽），而且 $\mathcal{F}_U$ 中也有叶包含无穷多条分离曲线，见备注 1.10和图4。

我们从历史角度回顾叶状芽奇点的拓扑研究。关于分离曲线拓扑的首个结果，见 C. Briot 和 J.C. Bouquet 于 [1]（1856年）发表的著名论文。作者在引入叶状芽的牛顿多边形这一概念后，提出了一种算法，可求得任意分离曲线的 Puiseux 对，从而确定其拓扑类型。后来，A. Seidenberg 在 [40]（1968年）证明，对于给定的叶状芽，分离曲线的拓扑类型数目有限。为此，他证明，经过原点上有限次爆破后，在例外除子上的每个奇点处，叶状结构都可局部由一个线性部分可对角化且具有非零特征值的向量场定义。再经过若干次爆破后，每个奇点都变为约化奇点，即特征值之比不是正有理数。A. van den Essen[44], [27, 附录 I] （1979年）和 F. Cano [2] （1986年）给出了这一结果的一个简明证明。1982年，C. Camacho 和 P. Sad 在 [7] 中证明了分离曲线的存在性。后来，J. Cano [3]（1997年）和 M. Toma [43]（1999年）给出了这一结果的其他证明。

最简单的约化叶状芽由线性部分为$\omega_L = \lambda_1 y dx + \lambda_2 x dy$的1-微分形式 ω 给出，其中 λ_1、 $\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ 和 $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}$成立。H. Poincaré 和 H. Dulac [10] （1904年）对它们进行了研究，并证明存在局部全纯坐标，使得$\omega = \omega_L$，即 $\mathcal{F}$ 可线性化。所有这些叶状芽都属于同一个拓扑类，见§4.1.1。C. Camacho 和 P. Sad 于 [6] （1982年）对由线性部分为 $pydx + qxdy$ 的1-形式 ω 给出的约化叶状芽进行了拓扑分类，其中 p、 $q \in \mathbb{N}^*$，称为共振鞍点；他们得到一组可数的拓扑类，并证明拓扑类型由 ω的有限阶喷射决定。其余的约化叶状芽是鞍结点，由满足$\omega_L = ydx$的微分形式 ω 给出。P.M. Elizarov 于 [11]（1990年）对其进行了拓扑分类。还有由 ω 给出的不可线性化叶状芽，其中 $\omega_L = \lambda_1 y dx + \lambda_2 x dy$ 和 $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$。在最后这种情况下，可线性化的叶状芽构成一个拓扑类，而不可线性化叶状芽的分类问题等价于单变量 Cremer 双全纯映射的拓扑分类问题。

对于非约化叶状芽，C. Camacho、A. L. Neto 和 P. Sad 在 [4]1984年提出了一类重要的叶状芽，即所谓的广义曲线，其在约化后不会出现鞍结奇点。他们证明了任意叶状芽的米尔诺数具有拓扑不变性（该数定义为

由$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$定义叶状芽的、具有孤立奇点的 1-形式的系数所生成的理想）。利用这一不变量，他们刻画了拓扑广义曲线。他们还证明，广义曲线与其分离曲线具有相同的约化，但这一拓扑性质并不能刻画广义曲线 [29] (2004)。关于非广义曲线，目前已知的拓扑结果很少，见 §3.2。

这些结果之后，到了20世纪90年代，对非约化叶状芽拓扑的研究转向“局部”层面，即在由空间芽参数化的微分形式芽族所定义的“小 $\mathcal{C}^0$-平凡变形”下寻找不变量。这项研究中的一个重要进展，是 A.A. Shcherbakov 证明了单变量双全纯映射芽的非可解群具有拓扑刚性 [41] （1984年），随后 I. Nakai [31]（1994年）完成了这一结果。由此可以对定义叶状芽的微分形式提出新的（一般性）假设（某些整体单值群的非可解性），从而使共轭这类叶状结构芽的任意同胚都具有横向全纯性，见 §5.4。在刚性假设下，D. Cerveau 和 P. Sad 在 [8] （1986年）证明，对于经一次爆破约化的一般叶状芽，例外除子的整体变换在$\mathcal{C}^0$-平凡变形下是不变的；他们还猜想，任意一对拓扑共轭的广义曲线也具有这一性质，即使它们不一定包含在 $\mathcal{C}^0$-平凡变形中。E. Paul 在 [34] （1989年）建立的一般对数叶状结构分类表明，刚性假设是必要的，见定理5.6。事实上，仅考察整体变换不足以获得完整的拓扑分类。对于满足某些附加假设的广义曲线，还存在其他在$\mathcal{C}^0$-平凡变形下保持不变的连续拓扑不变量，我们其中两人在 [28] （1997年）对其作了完整刻画。

本文旨在阐述作者关于叶的拓扑、叶空间的结构以及任意两个叶状芽的共轭判据方面所取得的成果，并介绍其证明思路。这些叶状芽不必包含在一个 $\mathcal{C}^0$-平凡变形中。这些成果基于单值化的构造；单值化是一种具有几何和动力学性质的新拓扑不变量。所有这些结果最终证明：对于满足某些一般性假设的两个广义曲线，原点邻域 $\mathbb{C}^2$ 之间存在共轭同胚，当且仅当奇点约化后，例外除子邻域之间存在共轭同胚。显然，这一性质（优越性定理6.1）为 Cerveau-Sad 猜想给出了肯定答案。它也是一系列三篇著作 [23, 24, 25]（2020—2022）的起点，使我们得以完成对一般广义曲线的拓扑分类；我们将在 §6.2中概述这一分类。

本文结构如下：

§1 我们研究叶状芽中最简单的不变集：分离曲线和分隔集。当叶状芽约化的例外除子中存在节点奇点或非不变的不可约分支时，就会出现分隔集。它们将 $0 \in \mathbb{C}^2$ 的任意小邻域划分为彼此不相交的不变集，我们称之为动力学分支。我们将这种分解与利用三维流形理论 [16] 得到的分离曲线补集的锥形几何块分解进行比较。

§2 广义曲线的叶的关键拓扑性质，是它们在由称为适当曲线的某个分离曲线并组成的补集中具有不可压缩性（不可压缩性定理 2.1）。引入叶状连通性的概念和叶状范坎彭定理后，便可借助由空间的几何块分解所引导的叶状块分解，证明不可压缩性。

§3 我们讨论一个例子，说明适当曲线中包含非孤立分离曲线的必要性。

§4 我们首先举例说明叶空间的端在约化叶状结构解析研究中的应用。随后，我们着重介绍由 $\mathcal{F}_U$ 在 $U \setminus S$的万有覆盖上诱导的叶状结构的叶空间的复结构，其中 U 位于适当曲线的一组合适邻域内 S。由此可以将叶状芽的单值化定义为补集 S的基本群在叶空间系上的作用。单值化与 Camacho-Sad 指数一起构成完备的拓扑不变量，参见分类定理 4.15。

§5 我们描述不同类型的动力学分支，以便提出关于约化的例外除子上奇点处 Camacho-Sad 指数拓扑不变性的最优假设。

§6 我们阐述优越性定理6.1 的证明，并陈述广义曲线的拓扑分类。

1. 分离曲线与分隔集

由具有孤立奇点的函数芽 [30] 的 Milnor 纤维化所关联的长正合序列可知，正则水平集的基本群嵌入奇异纤维补集的基本群中（**不可压缩性**）。在广义曲线这一更一般的情形下，我们将看到，补集中某条适当不变曲线（包含孤立分离曲线）的叶也具有不可压缩性。

1.1. 曲线芽补集的图分解。设 $(S,0)$ 是原点 $\mathbb{C}^2$ 处的解析曲线芽 S，其约化方程为 $f=0$。众所周知，**完整的 Milnor 管** S

$$\mathbb{T}^*_{\varepsilon,\eta} := \mathbb{T}_{\varepsilon,\eta} \setminus S\,, \quad \text{with} \quad \mathbb{T}_{\varepsilon,\eta} := \{|f(z)| \leq \eta, \|z\| \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^2\,, \quad 0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1\,,$$

是球 $\{\|z\| \leq \varepsilon\}$ 中曲线补集的一个变形收缩，并且它还是一个以**空 Milnor 管**为底的锥

$$\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta} := \{|f(z)| = \eta, \|z\| \leq \varepsilon\},$$

即存在一个同胚 $\psi\colon \mathbb{T}^*_{\varepsilon,\eta} \xrightarrow{\sim} \delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta} \times (0,1]$，使得当 $z \in \delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta}$ 时，$\psi(z) = (z,1)$。关于 $\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta}$ 作为图流形的结构，已有多位作者进行了描述 [45, 14, 15]，此处我们采用 [16, 定理 1.2.3 和 1.2.6], 的表述，另见 [20, §3.2]:

- 存在有限个嵌入于$\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta}$中的二维环面 $\mathscr{T}$，它们在同伦意义下唯一，并将$\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta}$ 分解为带边界 K_α的不可压缩紧子流形，每个子流形都带有一个（唯一的）塞弗特纤维化 $\mathscr{S}_\alpha$，使得若 $T \in \mathscr{T}$是 $K_\alpha \cap K_\beta$的交，则 (1) T 在 K_α和 K_β 中均不可压缩，且不与$\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta}$边界的某个连通分支同伦；(2) 在 T 中，$\mathscr{S}_\alpha$ 和 $\mathscr{S}_\beta$ 的一般纤维不同伦。

我们将介绍一种利用 S的解奇异映射 $E_S : M_S \to \mathbb{C}^2$ 来得到集合 $\mathscr{T}$ 的方法。我们回顾一下，具有正规交叉的曲线 C 的**对偶图**A_C 是一种图，其顶点是该曲线的不可约分支（紧致或非紧致），当且仅当曲线中相应的不可约分支相交时，两个顶点之间才有一条边。为简便起见，我们将**全变换**$\mathcal{D}_S$ 的对偶图A_S 记作

$$\mathcal{D}_S := E_S^{-1}(S)\,.$$

显然，A_S 是一棵树。我们为其赋予一种度量，使每条边的长度都等于 1。顶点的**价**是与其相连的边的数量。A_S 中的一条**链**是

A_S 中连接两个价至少为 3 的顶点的测地线，这两个顶点称为**链的端顶点**，其余顶点的价均为 2。A_S 中的一条**分支**是连接一个价至少为 3 的顶点（称为**附着顶点**）和一个价为 1 的顶点（称为**端顶点**）的测地线，其余顶点的价均为 2。如果其端顶点对应于 $\mathcal{D}_S$ 的一个紧致不可约分支，则称其为**死分支**；否则称为**简单分支**。A_S 的一条死分支或简单分支的各顶点所对应的不可约分支之并，称为 $\mathcal{D}_S$**死**或**简单分支**。类似地，$\mathcal{D}_S$ 的一条**链**是指对应于A_S 的一条链中价为 2 的顶点的不可约分支之并；若该链退化为 $\overset{D}{\bullet}-\overset{D'}{\bullet}$，则它是唯一的交点 $D\cap D'$。

现在，对每条链 $\mathcal{C}$ in A_S ，我们选取一条边 $\mathsf{e}_{\mathcal{C}}$。它对应于 $\mathcal{D}_S$的两个不可约分支的交点。我们还选取该点处的局部全纯坐标 $(u_{\mathcal{C}}, v_{\mathcal{C}})$，使得 $u_{\mathcal{C}}v_{\mathcal{C}}=0$ 是 $\mathcal{D}_S$的局部方程。实解析超曲面 $\{|u_{\mathcal{C}}|=1\}$ 与“米尔诺管”$E_S^{-1}(\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta})$横截相交于一个二维环面 $T_{\mathcal{C}}$，其中 $0<\eta\ll\varepsilon\ll 1$。通过借助 E_S将 $E_S^{-1}(\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta})$与 $\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\eta}$ 相识别，我们定义

$$\mathscr{T}=\{T_{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C}\in\mathrm{chain}(\mathsf{A}_S)}$$

其中，chain(A_S)是 A_S中所有链的集合。类似地，实超曲面族 $(\{|u_{\mathcal{C}}|=1\})_{\mathcal{C}\in\mathrm{chain}(\mathsf{A}_S)}$ 诱导出 $E_S^{-1}(\mathbb{T}^*_{\varepsilon,\eta})\simeq\mathbb{T}^*_{\varepsilon,\eta}$的**几何块分解**，其中每个**几何块** 都是带边界与角的实四维子流形，并且有：

(B1) 每个块在$\mathbb{T}^*_{\varepsilon,\ \eta}$中都是不可压缩的，*(B2)* 任意两个块的交都是各自的一个边界分支，在各自的块中均不可压缩，且同胚于一个无核满环面 $\mathbb{D}^*\times\mathbb{S}^1$，*(B3)* 每个块在 $E_S^{-1}(\mathbb{T}_{\varepsilon,\ \eta})$ 中的闭包 $\mathcal{B}$ 恰好包含 $\mathcal{D}_S$ 的一个不可约分支 D，该分支至少有三个 $\mathcal{D}_S$ 的奇点，并将 $\mathcal{B}$ 记为 $\mathcal{B}_D$；反过来，对于A_S 中价至少为三的任意顶点，都存在一个块 $\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{B}=\mathcal{B}_D$，*(B4)* 给定一个块 $\mathcal{B}_D$，在开集 $D^\star\subset D$ 上，其中 $D\setminus D^\star$ 是由 $\mathcal{D}_S$ 在 D中的奇点为中心的互不相交圆盘组成的并，$E_S^{-1}(\delta\mathbb{T}_{\varepsilon,\ \eta})\cap\mathcal{B}$的塞弗特纤维化与 D的霍普夫纤维化重合；此外，例外纤维由每个对应于A_S 中一条死分支的端顶点、且附着顶点为 D的不可约分支 $\mathcal{D}_S$ 所对应的一个霍普夫纤维组成。

1.2. **分离曲线**。现在以及下文中，我们固定一个原点处的奇异叶状结构芽 $\mathcal{F}$，它由一个全纯微分形式芽 ω 定义，且 0 是其孤立奇点。

一个 **分离曲线** 属于 $\mathcal{F}$，是一个 **不变** 不可约全纯曲线的芽，即它的任意参数化 $\gamma:(\mathbb{C},0)\to\mathbb{C}^2$ 都满足 $\gamma^*\omega\equiv 0$。经典地，曲线芽 C 是分离曲线，当且仅当存在一个包含 U 0 的开邻域，以及一个闭叶 L，它属于由 ω 在 $U\setminus\{0\}$ 上定义的正则叶状结构，且 $C\cap(U\setminus\{0\})=L$。根据 Camacho-Sad 存在性定理 [7], ，叶状结构的分离曲线数目严格大于零。这个数目可以是无限的，但根据 Seidenberg 约化定理，其拓扑类的数目有限 [40]。该定理断言存在唯一的适当映射，称为**约化映射** $\mathcal{F}$

$$E_{\mathcal{F}}:M_{\mathcal{F}}\to\mathbb{C}^2$$

通过具有有限中心的最小爆破映射序列得到，使得叶状结构 $\mathcal{F}^\sharp:=E_{\mathcal{F}}^{-1}\mathcal{F}$ 在例外除子的任意点处的芽

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}:=E_{\mathcal{F}}^{-1}(0)$$

要么是正则的，要么可在适当的局部坐标（u，v）下由一个微分形式定义

$$(\lambda v+\cdots)du-(u+\cdots)dv\quad\text{with}\quad\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}_{>0}\,,\tag{1}$$

此外，在 **dicritical分支** 的任意点（即非 $\mathcal{F}^\sharp$-不变） D处， $\mathcal{E}_\mathcal{F}$的叶状结构 $\mathcal{F}^\sharp$ 是正则的，且与 D 横截。

我们回忆，若一个叶状芽 $\mathcal{F}$ 称为 **广义曲线**，是指不存在 **鞍点-结点** 奇点 $\mathcal{F}^\sharp$，即由微分形式（1）给出，且满足 $\lambda = 0$。对于这类叶状结构， $E_\mathcal{F}$ 与消解 $\mathcal{F}$的所有分离曲线的最小爆破解析复合重合，参见 [4]。

若一条分离曲线 C 的**严格变换** $E_\mathcal{F}^{-1}(C \setminus \{0\})$经由 $E_\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{E}_\mathcal{F}$的某个dicritical分支相交，则称其为**dicritical分离曲线**；否则， C 称为**孤立分离曲线**。**孤立分离曲线簇**是由所有孤立分离曲线的并集得到的曲线芽。我们将其及其经 $\mathcal{F}$的约化映射得到的全变换分别记为

$$S_\mathcal{F} \subset (\mathbb{C}^2, 0), \quad \text{resp.} \quad S_\mathcal{F}^\sharp := E_\mathcal{F}^{-1}(S_\mathcal{F}). \tag{2}$$

这些概念可以用拓扑方式刻画。事实上，一条分离曲线是dicritical的，当且仅当它包含在一个非恒定的等约化不变解析曲线芽族中。另一方面，对于$(\mathbb{C}^2, 0)$中的曲线芽族，经典结论是等约化性与拓扑平凡性等价。

dicritical分支和孤立分离曲线所包含的拓扑信息可以组织成一个全局组合对象，该对象也将是叶状结构的一个拓扑不变量。

定义 1.1. 对偶图$\mathsf{A}_\mathcal{F}$ 的 $\mathcal{F}$ 是正规交叉曲线 $S_\mathcal{F}^\sharp$ 的对偶图。

请注意，解奇异映射 $E_{S_\mathcal{F}}$ 的 $S_\mathcal{F}$ 可能不同于 $\mathcal{F}$的奇点约化，在这种情况下$\mathsf{A}_\mathcal{F}$并不是$\mathsf{A}_{S_\mathcal{F}}$的对偶图 $E_{S_\mathcal{F}}^{-1}(S_\mathcal{F})$，见图1。

命题 1.2. 任意同胚芽 $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$，若共轭两个广义曲线 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$, $\phi(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$，则定义一个同构

$$\mathsf{A}_\phi : \mathsf{A}_\mathcal{F} \to \mathsf{A}_\mathcal{G}$$

连接 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的对偶图，并满足：若 D 是对应于 $S_\mathcal{F}$ 的不可约分支 C 的严格变换的顶点，则 $\mathsf{A}_\phi(D)$ 是 $\mathsf{A}_\mathcal{G}$ 中对应于 $\phi(C)$ 的严格变换的顶点。该同构将 *dicritical* 分支映射到 *dicritical* 分支，并与交叉形式相容，即有

$$\mathsf{A}_\phi(D) \cdot \mathsf{A}_\phi(D') = D \cdot D'$$

对于 $\mathsf{A}_\mathcal{F}$ 的任意顶点 D、 D'，将它们视为 $S_\mathcal{F}^\sharp$ 的不可约分支。此外，对应关系 $(\mathcal{F}, \phi) \mapsto (\mathsf{A}_\mathcal{F}, \mathsf{A}_\phi)$ 是从广义曲线与拓扑共轭构成的范畴到图与图的同构构成的范畴的一个函子。

下面给出证明思路。 [4] 中的结果表明，当 $\mathcal{F}$ 是广义曲线时，约化映射 $E_\mathcal{F}$ 与某个合适曲线芽 $C_\mathcal{F}$ 的解奇异映射重合；该曲线芽由 $S_\mathcal{F}$ 添加若干对非孤立分离曲线得到，每个 dicritical 分支添加一对。此外， $\mathcal{G} = \phi(\mathcal{F})$ 的约化映射也与 $\phi(C_\mathcal{F})$ 的解奇异映射重合。经典的 Zariski 定理 [46] 将 ϕ 与一个态射

$$\phi_\bullet : \mathsf{A}_{C_\mathcal{F}} \to \mathsf{A}_{\phi(C_\mathcal{F})}$$

通过约化映射 $E_{C_\mathcal{F}} = E_\mathcal{F}$，在 $C_\mathcal{F}$ 与 $\phi(C_\mathcal{F})$ 的全变换的对偶树之间建立联系。更具体地说， $\phi_\bullet$ 可通过将下述定理应用于 $X = C_\mathcal{F}$、 $Y = \phi(C_\mathcal{F})$ 和 $\varphi = \phi$ 得到：

定理 1.3。 [20, 定理 A] 设 $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ 是一个同胚芽，将曲线芽 X 映到曲线芽 Y。那么，存在一个

同胚芽 $\psi:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$，以及沿着 X 和 Y的消奇异化的例外除子的同胚芽

$$\Psi:(M_X,\mathcal{E}_X)\to(M_Y,\mathcal{E}_Y)$$

使得

(1) Ψ 提升为 ψ，即 $E_Y\circ\Psi=\psi\circ E_X$；*(2)* 对于 X 的任意不可约分支 C，都有 $\varphi(C)=\psi(C)$；*(3)* 对于足够小的米尔诺球 B，针对 X 和 $B'\supset\psi(B)\cup\varphi(B)$，针对 Y，由 φ和 ψ诱导的群态射 $\pi_1(B\setminus X)\to\pi_1(B'\setminus Y)$ 相差一个内自同构复合映射。

同胚芽 Ψ 在 $C_{\mathcal{F}}$ 和 ϕ的全变换对偶树之间诱导一个图态射 $\mathsf{A}_{C_{\mathcal{F}}}\to\mathsf{A}_{\phi(C_{\mathcal{F}})}$，这些全变换由其解奇异映射得到，并且该图态射将对应于不可约分支 D 的顶点映到对应于不可约分支 $\Psi(D)$的顶点，且对于 $\mathsf{A}_{C_{\mathcal{F}}}$ 中任意一对顶点D，D'，满足 $\Psi(D)\cdot\Psi(D')=D\cdot D'$。事实上，从该定理的证明可知，这个图态射不依赖于 Ψ的选择，因此我们可以将其记为 $\phi_\bullet$。由于 $E_{\mathcal{F}}=E_{C_{\mathcal{F}}}$，我们有包含映射

$$S^\sharp_{\mathcal{F}}\subset E^{-1}_{C_{\mathcal{F}}}(C_{\mathcal{F}})$$

且$\mathsf{A}_{\mathcal{F}}$是$\mathsf{A}_{C_{\mathcal{F}}}$的子图，类似地，$\mathsf{A}_{\mathcal{G}}$是$\mathsf{A}_{\phi(C_{\mathcal{F}})}$ 的子图。这些子图通过删除对应于 dicritical 分离曲线的顶点得到。利用 ϕ 将的 dicritical 分离曲线映射为 $\mathcal{G}$的 dicritical 分离曲线这一事实，我们看到 $\phi_\bullet$ 将$\mathsf{A}_{\mathcal{F}}$ 映射到$\mathsf{A}_{\mathcal{G}}$，从而诱导出命题1.2ϕ 中所述的这两个图之间的同构。

正如我们将在§3.1中看到的，存在一些判别叶状结构 $\mathcal{F}$，其叶在任意邻域中都不满足相对于 $S_{\mathcal{F}}$ 补集的不可压缩性。换言之，米尔诺球中 Γ 的补集 $S_{\mathcal{F}}$ 的基本群可能过小，无法包含任何叶的基本群。因此，我们将通过向Γ 中添加一些 dicritical 分离曲线来扩充 $S_{\mathcal{F}}$。

定义1.4。一个包含$\mathcal{F}$ 所有孤立分离曲线的不变曲线芽，且其在 $\mathcal{F}$ 的约化下的严格变换与任意 *dicritical* 分支 D 都交于$\mathrm{card}(D\cap\text{奇点集}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}))=1$，称为 $\mathcal{F}$-适当曲线芽。

命题1.5。任何共轭两个广义曲线 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$, $\phi(\mathcal{F})=\mathcal{G}$ 的同胚芽 $\phi:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$，必然会将 $\mathcal{F}$ 的任何 *dicritical* 分离曲线或孤立分离曲线，分别变换为 $\mathcal{G}$ 的 *dicritical* 分离曲线或孤立分离曲线；也会将 $\mathcal{F}$-适当曲线芽变换为 $\mathcal{G}$-适当曲线芽。

证明。根据命题 1.2，只需证明 ϕ 对 $\mathcal{F}$-适当曲线 S 的像是 $\mathcal{G}$-适当曲线。为此，我们可以对 $X=S$ 和 $Y=\phi(S)$ 进行前述分析。同样可以得到一个图同构 $\mathsf{A}_{S^\sharp}\to\mathsf{A}^{\phi(S)^\sharp}$，它将 $S^\sharp:=E^{-1}_{\mathcal{F}}(S)$ 的对偶图映到 $\phi(S)^\sharp:=E^{-1}_{\mathcal{G}}(\phi(S))$ 的对偶图，并将 dicritical 分支映到 dicritical 分支，将 $\mathsf{A}_{\mathcal{F}}\subset\mathsf{A}_{S^\sharp}$ 映到 $\mathsf{A}_{\mathcal{G}}\subset\mathsf{A}^{\phi(S)^\sharp}$。由此很容易推出 $\phi(S)$ 是 $\mathcal{G}$-适当的。□

1.3. **分隔集与动力分解**。当约化叶状结构的芽 $\mathcal{F}^\sharp$ 在例外除子 p 上的奇点 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 在适当的局部坐标 **中由微分形式** 定义时，称其为结点 (u,v)，该微分形式为（1），且满足 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}\setminus\mathbb{Q}$。此时，该点恰有两个不变曲线芽；它们都是正则的，彼此正规交叉，并且包含例外除子的芽。

利用**局部线性化坐标**$(u,\ v)$的存在性，可以构造其他不变集；在这些坐标中，$\mathcal{F}^\sharp$由微分形式 $\lambda vdu-udv$给出。对于任意足够小的

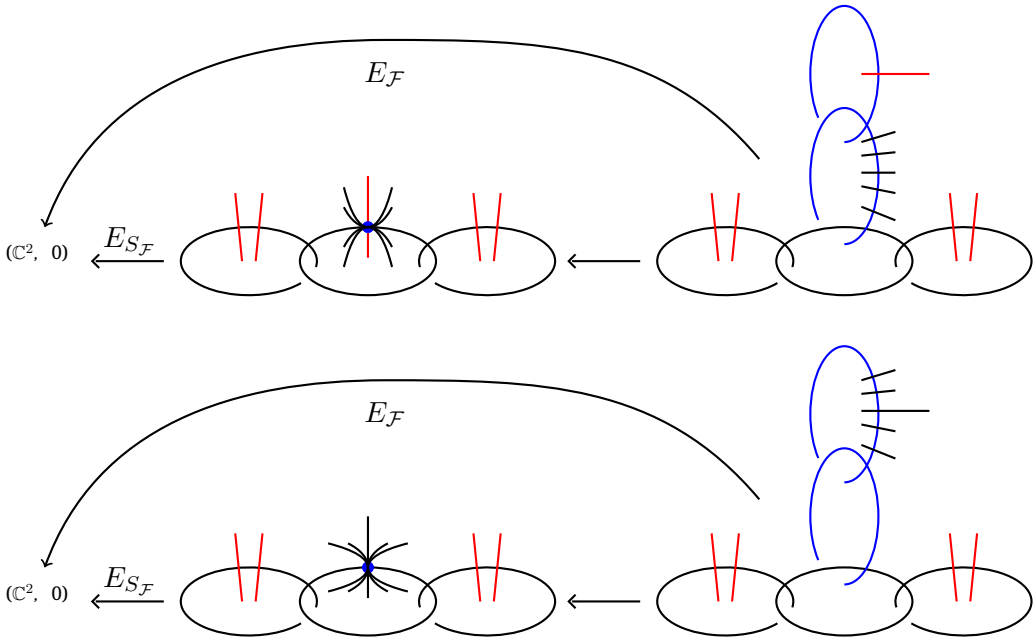


图1. 在两种情况下， $E_{S_{\mathcal{F}}} \neq E_{\mathcal{F}}$ 都源于 $E_{S_{\mathcal{F}}}$ 中心除子中的一个非约化奇点（蓝色）。第一种情况下， $S_{\mathcal{F}}$ （红色）是 $\mathcal{F}$-适当的；第二种情况下则不是。

球 $B := \{|u|^2 + |v|^2 < r\}$，叶状结构 $\mathcal{F}^\sharp$ 在 $B \setminus \{uv = 0\}$上的限制中的任意一片叶，都包含于由方程 $|v| = c|u|^\lambda$,$c \in \mathbb{R}^*$定义的实不变超曲面中，且在其中稠密。更一般地，任意子集

$$S_{c_1,c_2} := \{c_1|u|^\lambda \leq |v| \leq c_2|u|^\lambda\} \subset B \quad \text{with} \quad 0 < c_1 \leq c_2 < \infty\,,$$

是不变的，即它是叶的并集，并将 B 分成两个不变连通分支。因此，我们将 $\mathcal{F}^\sharp$ 在 p处的节点分隔集称为$S_{c_1,\ c_2}$ 与 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$的某个邻域的任意交。

利用 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$的一个非恒定型不可约分支$D$，可以构造另一种不变集。为此，我们首先选取 D 的一个足够小的紧管状邻域 T，使得 $\mathcal{F}^\sharp$ 在 T 上的限制是局部平凡纤维化。然后，我们选取以例外除子 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$的奇点 $s \in D$ 为中心的开共形圆盘$D_s \subset D$，使得$D_s \cap D_{s'} = \emptyset$ 对于 $s \neq s'$ 成立。叶状结构 $\mathcal{F}^\sharp$ 在 T 上的限制中，不与任何圆盘 D_s相交的叶的并集是一个 $\mathcal{F}^\sharp$-不变集，我们称之为 $\mathcal{F}^\sharp$在 D处的非恒定型分隔集。

称为 $0 \in \mathbb{C}^2$ 的一个邻域与 $E_{\mathcal{F}}$ 下 $\mathcal{F}^\sharp$的一个节点或判别分隔集的像的交，称为**节点**或**判别分隔集** $\mathcal{F}$。 **的一个节点分离曲线** $\mathcal{F}$ 是指其严格变换经 $E_{\mathcal{F}}$ 后经过 $\mathcal{F}^\sharp$的一个节点奇点的分离曲线。C. Camacho 和 R. Rosas 证明，每个不变集都包含一条分离曲线或一个节点分隔集，见 [5,定理 1]。

定理1.6 ([38, 定理 1]和 [39, 定理1.3])。 $\mathcal{F}$ 的节点分离曲线芽、节点分隔集芽或判别分隔集芽在一个将 $\mathcal{F}$ 共轭到叶状结构芽 $\mathcal{G}$的同胚芽下的像，分别是 $\mathcal{G}$的节点分离曲线芽、节点分隔集芽或判别分隔集芽。

现在考虑一组属于 $\mathcal{F}$ 的分隔集

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}\,, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{dic}} \cup \mathcal{N},$$

其中，$\mathcal{N}$ 是 $\mathcal{F}^\sharp$ 的节点奇点集，$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{dic}}$ 是 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 的 dicritical 分支集；对于每个 $\alpha \in \mathcal{A}$，$\mathcal{S}_\alpha$ 都是由 $E_{\mathcal{F}}$ 在闭球中映射得到的像，该像对应于 $\mathcal{F}^\sharp$ 在 α 处选定的一个闭节点或非恒定型分隔集。我们称 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{F}$ 的**完备分隔集系统**。在任意足够小的半径为 $r \le R$ 的闭球 B_r 中，每个 $\mathcal{S}_\alpha$ 作为叶状流形，都是以其与球面 ∂B_r 的交为底的锥。这是因为包含在 $\mathcal{S}_\alpha$ 中的叶与任意球面 ∂B_r、$0 < r \le R$ 横截。我们称 B_R 为 $\mathcal{S}$ 的**米尔诺球**。

定义 1.7。设 B 是关于 $\mathcal{S}$ 的一个完备分隔集系统的米尔诺球 $\mathcal{F}$。我们称 $\mathcal{F}$-动力学分支 B 为由 $\mathcal{S}$定义的 $B \setminus \cup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathcal{S}_\alpha$的任意连通分支。我们称 动力学分支 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$（见（2））为 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 中 $S^\sharp_{\mathcal{F}} \setminus (\mathcal{E}^{\mathrm{dic}}_{\mathcal{F}} \cup \mathcal{N})$ 的任意连通分支的闭包，见图 2。$S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的一个动力学分支的对偶图称为 动力学分支 $\mathsf{A}_{\mathcal{F}}$，见定义 1.1。

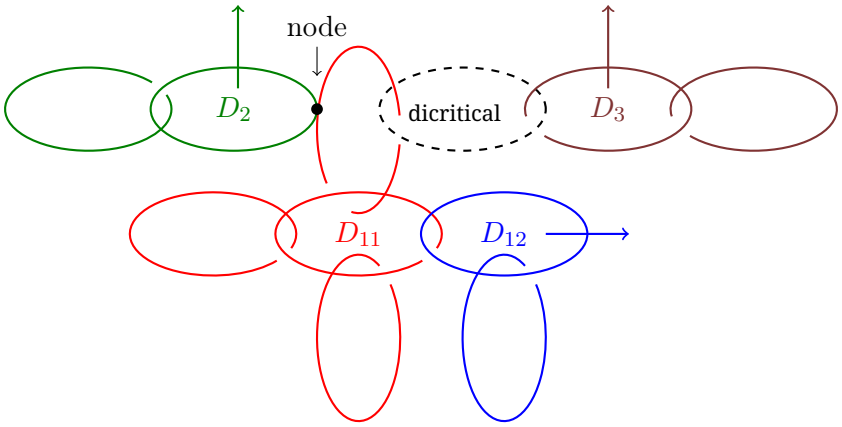


图 2。在除子 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的这一示意图中，我们有三个动力学分支：绿色和黑色的分支，以及红色和蓝色分支的并集。每种颜色对应一个几何块（按照§1.1的含义），其中包含一个 D_i 价为≥ 3的除子。$S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的非紧分量用箭头表示。

根据构造，若 $\mathcal{D}$ 是 B的一个 $\mathcal{F}$动力学分支，则其交

$$\mathcal{E}_{\mathcal{D}} = \overline{E_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{D})} \cap \overline{S^\sharp_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{E}^{\mathrm{dic}}_{\mathcal{F}}}$$

是一个动力学分支 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$。**对偶图** $\mathsf{A}_{\mathcal{D}}$ **的** $\mathcal{E}_D$ 也可刻画为从 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$的对偶图 $\mathsf{A}_{\mathcal{F}}$ 中移除以下部分后所得图的一个连通分支：
(a) 满足 $D \cap D'$ 是 $\mathcal{F}^\sharp$的节点奇点的边 $\langle D, D'\rangle$；(b) 对应于 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 的 dicritical分支的顶点 D，以及所有包含这些顶点的边。

注意，$S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的一个动力学分支 $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$ 可以退化为 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$的单个不可约分支：当 C 是 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的一个非紧致不可约分支，且它在 $\mathcal{F}^\sharp$的一个节点奇点处与 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 相交时，我们有 $\mathcal{E}_{\mathcal{D}} = C$；换言之，此时 C 是节点分离曲线经 $E_{\mathcal{F}}$ 严格变换后的结果。

动力学分支的显著性质是 Camacho-Sad 存在性定理的以下强化版本，由 L. Ortiz-Bobadilla、E. Rosales-González 和 S.M. Voronin [32, 强 Camacho-Sad 分离曲线定理]提出，并在 [22, 引理 1.9] 中补充，用于判别叶状结构。

定理 1.8。 分离曲线 $S_{\mathcal{F}}$ 的全变换 $S_{\mathcal{F}}^{\sharp}$ 的任一动力学分支，要么包含一条非节点型孤立分离曲线，要么仅由一条节点分离曲线构成。

现在我们将指出， $S_{\mathcal{F}}^{\sharp}$ 的动力学分支可刻画为“极小”不变集在 $S_{\mathcal{F}}^{\sharp}$ 上的迹。

设叶状结构 $\mathcal{F}$ 定义在球 B 上，令 $A \subset A'$ 分别为 B 和 $E_{\mathcal{F}}^{-1}(B)$ 的两个子集。我们用 $\mathrm{sat}(A, A')$ 表示 $L \cap A'$ 中与 A 相交的每个叶 L（分别为 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{F}^{\sharp}$）所在连通分支的并集。我们还用 $\mathrm{sat}(A, A')$ 表示 $\mathrm{sat}(A, A')$ 在 B（分别在 $E_{\mathcal{F}}^{-1}(B)$）中的闭包。对于 $\mathbb{C}^2$ 中的任意子集 A，记

$$A^{\sharp} := E_{\mathcal{F}}^{-1}(A).$$

沿用 [5] 中提出的思路，可以证明：

命题 1.9。 令 B 为 $S_{\mathcal{F}}$ 的一个米尔诺球，并令 $(W_i)_i$ 为 $S_{\mathcal{F}}$ 在 B 中的一个基本邻域系。设 Δ 是 $B \setminus \{0\}$ 中与 $\mathcal{F}$ 横截的一个嵌入圆盘，它与孤立分离曲线 $S_{\mathcal{F}}$ 在单点 p 相交，并定义 $\Delta_i = \Delta \cap W_i$。那么

(1) $\bigcap_i \mathrm{sat}(\Delta_i^{\sharp}, B^{\sharp})$ 是与 $\Delta^{\sharp}$相交的 $S_{\mathcal{F}}^{\sharp}$ 的动力学分支；*(2)* 存在两个完备分隔系统 $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$，属于 B，以及 $\mathcal{S}' =(\mathcal{S}'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$，属于球 $B' \subset B$，满足：- B 是 $\mathcal{S}$的米尔诺球， B' 是 $\mathcal{S}'$ 和 $\mathcal{S}_\alpha \cap B' \subset \mathcal{S}'_\alpha$的米尔诺球；- 若 W_i 足够小，则 $\mathrm{sat}(\Delta_i, B)$ 包含于由 $\mathcal{S}$ 定义的 B 的某个 $\mathcal{F}$-动力学分支中，并包含由 $\mathcal{S}'$定义的 B' 的某个 $\mathcal{F}$-动力学分支。

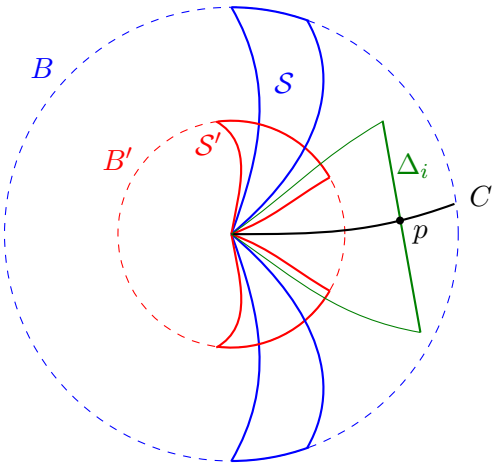


图 3. 命题 1.9的示意图， C 是 $S_{\mathcal{F}}$的一个不可约分支。

注 1.10. 注意，由命题 1.9，当 $\mathcal{F}^{\sharp}$ 没有节点奇点且 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$包含 dicritical 分支时，$U = E_{\mathcal{F}}\big(\mathrm{sat}(\mathcal{E}_{\mathcal{F}}^{\mathrm{dic}}, B^{\sharp}) \cup S_{\mathcal{F}}^{\sharp}\big)$ 是 0 在 $\mathbb{C}^2$中的一个邻域。因此，对于 $L \subset U$ 的每一片叶 $\mathcal{F}$，都有一条分离曲线包含于其中（作为曲线芽），即 $L \cup \{0\}$。此外，若 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 包含一个具有无限全纯延拓群的不变不可约分支，则存在一些 $L \subset U$ 的叶 $\mathcal{F}$ 包含无穷多条分离曲线，见图 4。 □

命题 1.9 中的断言（1）并不意味着 $\mathsf{A}_{\mathcal{F}}$ 分解为动力学分支是 $\mathcal{F}$的拓扑不变量。

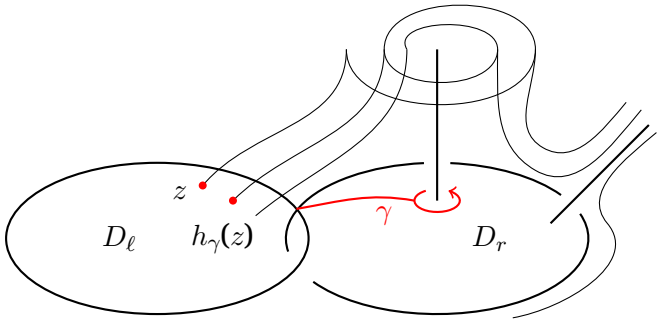


图 4。左侧的不可约分支 D_ℓ 属于 $\mathcal{E}_\mathcal{F}$，是 dicritical 的。右侧的不可约分支 D_r 是不变的，其射影整体单值群是无限的。经过点 $z \in D_\ell$ 的 $\mathcal{F}^\sharp$ 的叶与 D_ℓ相交无穷多次，因此它在 $E_\mathcal{F}$ 下的像是 $\mathcal{F}$的一片叶，包含无穷多个以 0 为经过点的曲线芽形式的分离曲线。

问题1.11。若 $\phi:(\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ 是一个将广义曲线 $\mathcal{F}$ 共轭到另一条广义曲线 $\mathcal{G}$的同胚芽，那么命题 Aϕ 中定义的图态射*1.2* 是否将 A$_\mathcal{F}$ 的任意一个动力学分支映到 A$_\mathcal{G}$的一个动力学分支中？

根据命题1.9 中的断言 (1) 可以很容易地推得，对于不含节点奇点的动力学分支，答案是肯定的：

推论 1.12。设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{E}_\mathcal{F} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{F}^{\mathrm{dic}}$ 的一个连通分支的闭包，且 A$_\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的对偶图。若 $\phi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是广义曲线之间的拓扑共轭，则 Aϕ(A$_\mathcal{D}$) 是 $\mathcal{E}_\mathcal{G} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{G}^{\mathrm{dic}}$ 的一个连通分支 $\mathcal{D}'$ 的闭包的对偶图。此外，若 $\mathcal{D}$ 不包含 $\mathcal{F}^\sharp$ 的节点奇点，则 $\mathcal{D}'$ 不包含 $\mathcal{G}^\sharp$ 的节点奇点。

此外，正如我们稍后将看到的，在关于定义 $\mathcal{F}$的微分形式满足某些 Krull一般性假设时，问题1.11 也有肯定的答案。

2. 叶的不可压缩性

本章的目标是，对于任意广义曲线，界定叶作为浸入黎曼曲面时其拓扑的复杂性。具体结果如下：

定理 2.1（不可压缩性定理）。设 $\mathcal{F}$ 为一条广义曲线，S 为米尔诺管 $\mathbb{T}$ 中关于 S 的一条 $\mathcal{F}$-适当曲线，且 C 为 $\mathbb{T}$ 中的一条不一定不可约的闭解析曲线，使得 $C \setminus \{0\}$ 光滑且与 $\mathcal{F}$横截。则存在 S 在 $\mathbb{T}$ 中的一个开邻域基本系（U_n）$_{n\in\mathbb{N}}$, $U_{n+1} \subset U_n$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有：

(1) 包含映射 $U_n \hookrightarrow \mathbb{T}$ 在 $U_n \setminus S$ 和 $\mathbb{T} \setminus S$的基本群之间诱导一个同构；*(2)* 对于叶状结构在 $U_n \setminus S$上由 $\mathcal{F}$诱导的每个叶 L，包含映射 $L \hookrightarrow U_n \setminus S$诱导一个单射态射 $\pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(U_n \setminus S)$；*(3)* $C \cap U_n$ 在万有覆盖映射 $q: U_n \to U_n \setminus S$ 下的拉回的任意连通分支 $C' \subset q^{-1}(C)$ 都是一个嵌入开圆盘，并且对于叶状结构在 $\tilde{U}_n$上由 $q^{-1}\mathcal{F}$ 诱导的每个叶 L'，都有 $\mathrm{card}(L' \cap C') \leq 1$。

这一结果由我们中的两位在 [19] 针对广义曲线，在附加假设非 dicritical 性成立，且约化后不存在同时满足非共振和不可线性化的奇点时得出。在 [22] 中，通过引入适当曲线的概念，去除了非 dicritical 性这一假设，参见定义1.4。最后

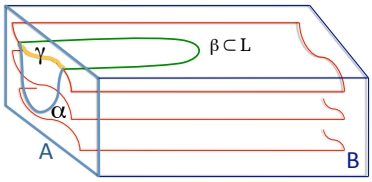
在 [42] 中，L. Teyssier 将这一结果推广至仅需满足广义曲线假设的情形；他还通过构造非 dicritical 叶状结构来证明这一假设的必要性。这些叶状结构并非广义曲线，其唯一适当曲线的补集中存在可压缩叶，参见 §3.2。

I在接下来的两段中，我们将描述定理 2. 证明的步骤。 1.

2.1. **叶状连通性与叶状范坎彭定理**。 为研究 $\mathcal{F}$ 的叶在 $\mathcal{F}$-适当曲线 S 补集中的不可压缩性，主要工具是 $\mathcal{F}$-连通性的概念，该概念由 [19] 引入。它通过将每个叶的这一全局性质转化为由 $\mathcal{F}$ 在空间某个适当分解的每个块上诱导的叶状结构的局部性质，从而实现局部化。该分解的每个块都包含在 S 的米尔诺管分解的一个几何块中，详见 §1.1。

定义 2.2。 设 $A \subset B$ 是赋有正则叶状结构 $\mathcal{G}$ 的流形 M 的子集。若满足以下性质，我们称 A 在 $\mathcal{G}$ 中严格 B -连通，并记作 $A \overset{\mathcal{G}}{\hookrightarrow} B$ 或 $B \overset{\mathcal{G}}{\hookleftarrow} A$:

(1) A 在 B中是不可压缩的[1] ; *(2)* 对于 $\mathcal{G}$的任意一片叶 L ，如果路径 $\beta:[0,1] \to L \cap B$ 在 B 中同伦于路径$\alpha:[0,1] \to A$ ，那么 β 也在 $L \cap B$ 中同伦于路径 $\gamma:[0,1] \to L \cap A$ ，并且路径 α 和 γ 在 A中同伦。



这一概念的一个显著性质是：如果集合 A 缩减为单个点，那么 A在 B 中是 $\mathcal{G}$连通的，当且仅当包含该点的叶 L 在 B中不可压缩。另一个显而易见但很有用的性质是这种关系的传递性：

$$\left(A \overset{\mathcal{G}}{\hookrightarrow} B \text{ and } B \overset{\mathcal{G}}{\hookrightarrow} C\right) \Longrightarrow A \overset{\mathcal{G}}{\hookrightarrow} C\,. \tag{3}$$

因此，为了证明定理2.1中所述的叶的不可压缩性，只需在 $S^\sharp = E_{\mathcal{F}}^{-1}(S)$的米尔诺管$\mathcal{T}_{\varepsilon,\,\eta} := E_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbb{T}_{\varepsilon,\,\eta})$中构造一个滤过

$$W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_m \;\subset\; \mathcal{T}_{\varepsilon,\eta}\,, \tag{4}$$

满足：

(a) $\mathcal{F}^\sharp$限制到 $W_0^* := W_0 \setminus S^\sharp$的任意叶在 W_0^*中都是不可压缩的；(b) 若记 $W_i^* := W_i \setminus S^\sharp$，则有 $W_{i-1}^* \overset{\mathcal{F}^\sharp}{\hookrightarrow} W_i^*$, $i = 1, \ldots, m$; (c) W_m 是$\mathcal{T}_{\varepsilon,\eta}$中的一个开集，包含 $S^\sharp$ 的一个米尔诺管$\mathcal{T}_{\varepsilon,\,\eta'}$ ，且包含映射$\mathcal{T}_{\varepsilon,\eta'} \setminus S^\sharp \subset W_m^* \subset \mathcal{T}_{\varepsilon,\eta} \setminus S^\sharp$在它们的基本群之间诱导同构。

为了获得性质 (b)， [19]中提出的方法是构造一列 $\mathcal{T}_{\varepsilon,\eta}$ 的实四维子流形 $(V_j)_{j=0}^m$ ，它们带有边界，我们称之为**叶状块**，使得在设定

$$W_i := V_0 \cup \cdots \cup V_i\,, \quad i = 0, \ldots, m\,, \tag{5}$$

[1]即，包含映射 $A \subset B$ 对每个 $a \in A$都诱导单态射 $\pi_1(A,a) \hookrightarrow \pi_1(B,a)$。

每一对 (W^*_{i-1}, V^*_i)，其中 $V^*_i := V_i \setminus S^\sharp$, $i = 1, \dots, m$，都满足如下关系

$$W^*_{i-1} \overset{\mathcal{F}^\sharp}{\hookleftarrow} W^*_{i-1} \cap V^*_i \overset{\mathcal{F}^\sharp}{\hookrightarrow} V^*_i \,.$$

下面的 **叶状范坎彭定理** 由此给出了所需的关系

$$W^*_{i-1} \overset{\mathcal{F}^\sharp}{\hookrightarrow} W^*_{i-1} \cup V^*_i = W^*_i.$$

定理 2.3. [19, 定理 1.3.1] 设 (A, B) 是流形M 中的一对连通子集，该流形赋有一个 $\mathcal{G}$ 类的正则叶状结构 $\mathcal{C}^1$。假设 $A \cap B$ 是 M的一个（不一定连通的）横向可定向子流形，且与 $\mathcal{G}$ 横截，并且$A \cup B$ 是 $A \cap B$的一个邻域。那么有：

$$\left(A \overset{\mathcal{G}}{\hookleftarrow} A \cap B \overset{\mathcal{G}}{\hookrightarrow} B\right) \Longrightarrow A \overset{\mathcal{G}}{\hookrightarrow} A \cup B \,.$$

注意，当我们仅考虑定义 1中的不可压缩性2.2）时，上述蕴含关系是经典范坎彭定理的推论。

2.2. **叶状块的构造**。 对于全变换 D 的每个不可约分支 $S^\sharp$ 中 $\mathcal{F}$-适当曲线 S，根据定理 2.1，定义 K_D 为从 D 中去除以$\mathrm{Sing}(S^\sharp) \cap D$ 各点为圆心且不属于任何死分支的互不相交共形圆盘后的补集。用于（ V_j 5）中构造穷竭$(W_i)_{i=0}^m$的叶状块有三种类型：

- **叶状塞弗特块** $\mathscr{B}_D$ 包含在以下形式的几何块中的 $\mathcal{B}_D$，如 §3 的（B1.1）所述；包含映射诱导同构 $\pi_1(\mathscr{B}_D \setminus S^\sharp) \simeq \pi_1(\mathcal{B}_D \setminus S^\sharp)$。此外， $\mathscr{B}_D$ 是以下集合的并集的一个邻域： K_D 以及与 $S^\sharp$ 相交的所有死分支 D。
- **叶状领圈块** $\mathscr{B}_C$ 是以下任一集合的邻域：(a) 集合 K_D，其中 D 是 $S^\sharp$链中价为 2 的一个非非判别不可约分支；或 (b) 集合 K_D，其中 D 是 S的一个不可约分支的严格变换；或 (c) 集合 $K_s = S^\sharp \cap \{|u|, |v| \le 1\}$，其中 (u, v) 是以 s 为中心的局部坐标， s 是 $S^\sharp$ 的一个奇点，属于一条链，并且 $uv = 0$ 是 $S^\sharp$的一个局部方程。称其为叶状领圈是有依据的，因为存在一个同胚

  $\circ\varphi$： $\mathbb{D}^* \times \mathbb{S}^1 \times (0,1) \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_C \setminus S^\sharp$ 使得 $\varphi(\{(z, \theta)\} \times (0, 1))$ 包含在一片叶中
  $\circ$ $\mathcal{F}^\sharp$的，其中 $\mathscr{B}_C$表示 $\mathscr{B}_C$的内部。

- **拼接块**，它们是 K_D 的邻域，并带有 D $S^\sharp$的一个 dicritical分支。此外，若 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}'$ 是叶状块，且 $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}' \neq \emptyset$，则此交是 $\partial\mathscr{B}$ 和 $\partial\mathscr{B}'$的一个公共连通分支，并满足

$$\mathscr{B} \setminus S^\sharp \overset{\mathcal{F}^\sharp}{\hookleftarrow} (\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') \setminus S^\sharp \overset{\mathcal{F}^\sharp}{\hookrightarrow} \mathscr{B}' \setminus S^\sharp.$$

Each 块由归纳过程构造而成，其起点是先前构造的块的公共边界分支 o
其中
先前构造的块。
每个块的边界分支都是**悬挂型**的集合。这意味着它们按如下方式构造。首先，我们固定一个定义在不变不可约分支 D 的邻域 Ω 上的次沉浸 ρ，该次沉浸在 D 上等于恒等映射；同时还固定一条简单闭曲线 $\gamma : [0, 1] \to D \setminus$ 奇点集$(S^\sharp)$，以及一个全纯坐标

$$z : \rho^{-1}(\gamma(0)) \xrightarrow{\sim} \{|z| \le 1\} \subset \mathbb{C} \,, \qquad z(\gamma(0)) = 0 \,.$$

然后，我们考虑一个闭的共形圆盘 $\Delta \subset \rho^{-1}(\gamma(0))$，其内部包含 $\gamma(0)$，且其边界 $\partial\Delta$ 由一条分段实解析路径 δ参数化。我们假设 Δ足够小，以便对于任意点 $m \in \Delta$， γ 都能经由 ρ 提升到包含 $\mathcal{F}^\sharp$ 的叶 L_m

m，从而定义一条（唯一的）路径 $\gamma_m\colon [0,1]\to L_m\cap\Omega$，其原点为 $\gamma_m(0)=m$，并满足 $\rho\circ\gamma_m=\gamma$。集合

$$T_\Delta:=\{\gamma_m(t)\mid m\in\Delta, 0\le t\le 1\}$$

称为**相对于 Δ 在 γ上的**悬挂型集合。

我们要强调的是，集合 $T^*_\Delta:=T_\Delta\setminus S^\sharp$ 的拓扑可能很复杂，因为 $\Delta\cup h_\gamma(\Delta)$ 的基本群可能是非平凡的，h_γ 其中 $m\mapsto\gamma_m$ 表示整体映射(1)。为避免这种可能性，我们必须确保 Δ 和 $h_\gamma(\Delta)$ 是星形的。为了控制这一性质，我们固定 $\delta(t)$ 的一个参数化 $\partial\Delta$，并将 Δ 的**粗糙度**定义为 $e_z(\Delta)$ 的最大值，即 $\delta'_\pm(t)$ 处的切线与经过该点且以 $z=0$ 为中心的圆的切线之间的夹角。粗糙度足够小时，星形性质便得到满足。此外，由于 h_γ 的光滑性，商 $|e_z(\Delta)/e_z(h_\gamma(\Delta))|$ 在 Δ 的直径趋于 0 时趋于 1。因此，当粗糙度和 Δ 的直径足够小时，我们有 T^*_Δ 具有二维环面的同伦型。

构造叶状块的归纳过程基于以下存在性性质（参见 [19, 定理 3.2。1]）。对于每个定义在环路 $\gamma\subset\partial K$上的悬挂型集合 T，若 $K=K_D$ 或 $K=K_s$，则存在一个叶状块 $\mathscr{B}$，它是 K的邻域，并且满足

- T 是 $\partial\mathscr{B}$的一个连通分支，
- $\partial\mathscr{B}$ 的每个连通分支 T' 都是悬挂型集合，其粗糙度受 T的粗糙度控制，并且满足 $T'\setminus S^\sharp\overset{\mathcal{F}^\sharp}{\pitchfork}\mathscr{B}\setminus S^\sharp$,
- $\mathcal{F}^\sharp$在 $\mathscr{B}\setminus S^\sharp$上的限制 $\mathcal{F}^\sharp_{|\mathscr{B}\setminus S^\sharp}$的叶在 $\mathscr{B}\setminus S^\sharp$中不可压缩，
- 对于足够小的 S 的米尔诺管 $\mathbb{T}_{\varepsilon,\,\eta}$，有 $\pi_1(\mathscr{B}\setminus S^\sharp)\simeq\pi_1(W\cap E_S^{-1}(\mathbb{T}^*_{\varepsilon,\,\eta}))$，其中 W 是 K的一个固定邻域。

块的构造顺序如下：首先为 $S^\sharp$选定一个合适的穷竭，它将对应于

$$W_0\cap S^\sharp\subset W_1\cap S^\sharp\subset\cdots\subset W_m\cap S^\sharp=S^\sharp.$$

由归纳过程末尾的（4）确定的穷竭。

3. 示例

3.1. dicritical尖点奇点。 我们重新讨论 [22] 中的例1.1。考虑在 $(\mathbb{C}^2,\,0)$ 中由有理第一积分 $f(x,\,y)=\frac{y^2-x^3}{x^2}$ 定义的 dicritical 叶状结构 $\mathcal{F}$，其孤立分离曲线集为尖点 $S=\{y^2-x^3=0\}$。我们将先计算米尔诺球 B 中 S 的补集的基本群，然后证明 $\mathcal{F}$ 的叶并非全都在 $B\setminus S$ 中不可压缩；但若向 S 添加 $\mathcal{F}$ 的一条非孤立分离曲线 S'，则 $B\setminus(S\cup S')$ 中所有叶都满足不可压缩性。

3.1.1. 我们考虑定义 S 的最小解奇点化的三次爆破的复合映射 $E:\ M\to B$，它也与叶状结构的约化映射相一致。例外除子 $\mathcal{E}=E^{-1}(0)$ 有三个不可约分支 D_1、D_2、D_3，我们按照它们在爆破过程中出现的顺序进行编号。因此，相应的自交数为

$$D_1\cdot D_1=-3\,,\quad D_2\cdot D_2=-2\,,\quad D_3\cdot D_3=-1\,.$$

$\mathcal{S}$ 的 S 的严格变换仅与 D_3 相交，因此 D_1 和 D_2 是附着于 D_3的死分支。此外，D_1 是 $\mathcal{F}$ 的一个 dicritical 分支（事实上，它与 $\mathcal{F}^\sharp=E^{-1}\mathcal{F}$完全横截）。下面说明如何计算 $B\setminus S\simeq M\setminus(\mathcal{E}\cup\mathcal{S})$的基本群。对于每个 $i=1,\,2,\,3$，我们考虑 D_i的一个管状邻域 U_i，它是以 $D_i\simeq\mathbb{P}^1$ 为底、陈类为 $k=D_i\cdot D_i$的圆盘纤维化。对于 $i=1,\,2,\,U_i\cap(\mathcal{E}\cup\mathcal{S})$

由 D_i 和 $r=1$ 纤维组成；对于 $i=3$，$U_i \cap (\mathcal{E}\cup\mathcal{S})$ 由 D_i 和 $r=3$ 个纤维组成。我们可以覆盖每个

$$U = U_i = \varphi_x(\mathbb{D}\times\mathbb{D}^*)\cup\varphi_y(\mathbb{D}\times\mathbb{D}^*)$$

由两个平凡化图表 $\varphi_x(t,\ x)$、$\varphi_y(s,\ y)$ 及过渡函数 $ts=1, y=t^{-k}x$ 给出。我们可以假设

$$U^* := U\setminus(\mathcal{E}\cup\mathcal{S}) = \varphi_x((\mathbb{D}\setminus\{t_1,\dots,t_r\})\times\mathbb{D}^*)\cup\varphi_y(\mathbb{D}\times\mathbb{D}^*).$$

我们考虑 $\mathbb{D}\setminus\{t_1,\dots,t_r\}$ 中围绕 t_j、指标为 1 的简单闭环 $\bar\alpha_j(u)$，使得乘积 $\bar\alpha_0 = \bar\alpha_1\cdots\bar\alpha_r$ 同伦于 $e^{2i\pi u}$。定义 $\alpha_j(u) = \varphi_x(\bar\alpha_j(u),\ 1)$ 以及$\gamma(u) = \varphi_x(1,\ e^{2i\pi u})$。那么环路

$$\alpha_0\gamma^k \sim \varphi_x(e^{2i\pi u}, e^{2i\pi k u}) = \varphi_y(e^{-2i\pi u}, 1)$$

在 $\varphi_y(\mathbb{D}\times\mathbb{D}^*)\ \subset U^*$ 中零伦。应用 Seifert–Van Kampen定理可得

$$\pi_1(U^*) = \langle\alpha_1,\dots,\alpha_r,\gamma\,|\,\alpha_1\cdots\alpha_r=\gamma^{-k}, [\alpha_j,\gamma]=1\rangle.$$

将此计算具体应用于每个 U_i，我们推得

$$\pi_1(U_1^*) = \langle a,c\,|\,c=a^3,[a,c]=1\rangle,\quad \pi_1(U_2^*) = \langle b,c\,|\,c=b^2,[b,c]=1\rangle$$

and

$$\pi_1(U_3^*) = \langle a,b,c,d\,|\,abd=c,[a,c]=[b,c]=[b,d]=1\rangle,$$

环路 a、b、c、d如图5所示。注意，环路 a、b、c、d也可以分别定义为圆盘纤维化在 D_1、D_2、D_3 和 $\mathcal{S}$ 上的纤维的边界（子午线）。由于 $\mathcal{E}\cup\mathcal{S}$ 的对偶树的任意几何实现都是可缩的，因此可以选择在 $M\setminus(\mathcal{E}\cup\mathcal{S})$ 中按 [20, §3.1], 所述对其进行适当嵌入，作为环路 a、b、c、d 的公共“基点”，参见图5。

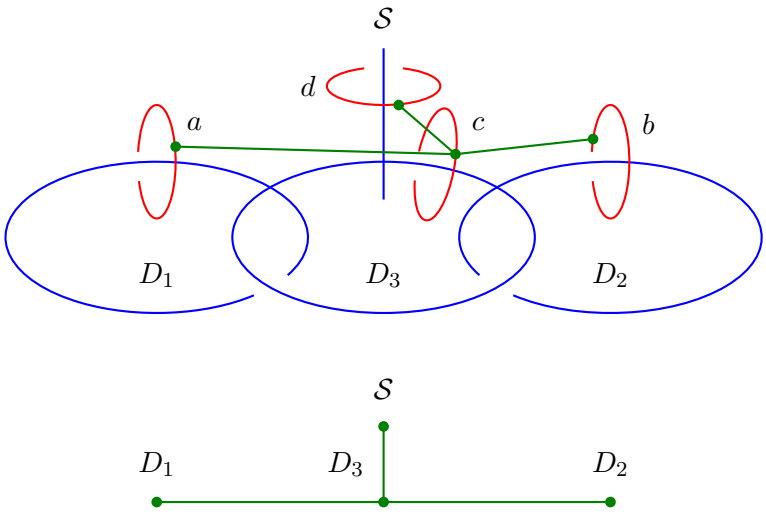


图5。尖点 $S=\{y^2-x^3=0\}$ 的严格变换 $\mathcal{S}$、带有其对偶树的全变换 $S^\sharp = D_1\cup D_2\cup D_3\cup\mathcal{S}$，以及其补集基本群的生成元$a$，$b$，$c$，$d$。

再次应用 Seifert–Van Kampen定理，我们得到 M^* 的基本群的如下表示：$= M \setminus (\mathcal{E} \cup \mathcal{S})$：

$$\begin{aligned}\pi_1(M^*) &= \pi_1(U_1^*) *_{\pi_1(U_1^* \cap U_3^*)} \pi_1(U_3^*) *_{\pi_1(U_3^* \cap U_2^*)} \pi_1(U_2^*) \\ &= \langle a, b, c \,|\, a^3 = b^2 = c \rangle.\end{aligned}$$

该方法可用于计算任意曲线芽的补集的基本群（参见 [20, 命题 3。3]）。

3.1.2. 现在，我们将证明在 $B \setminus S$ 内部存在 $\mathcal{F}$ 的不可压缩叶。考察第一次爆破 E_1 后的情形：在图 (t, x) 中，$(M_1, D_1) \to (B,0)$，使得 $(x, y) = E_1(t, x) = (x, tx)$，我们有

$$f_1(t, x) := f(x, tx) = t^2 - x$$

我们看到，$\mathcal{F}$ 的叶有两种类型：一种靠近孤立分离曲线 S，是去掉两点后的圆盘；另一种则与 $\mathbb{D}^*$ 微分同胚。若 L 是第一种叶，则 $\pi_1(L)$ 是秩为 2 的自由群。我们声称，可以选取 $\pi_1(L)$ 的生成元 λ, μ，使得由包含映射诱导的态射 $\imath\colon \pi_1(L) \to \pi_1(M^*)$ 满足 $\imath(\lambda) = a$ 且 $\imath(\mu) = b^{-1}ab$。由此可得

$$\imath(\lambda^3 \mu^{-3}) = a^3 b^{-1} a^{-3} b = 1$$

因此，L 在 $B \setminus S \simeq M^*$中将不可压缩。

首先，令 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得 $V := f_1^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon)$是爆破 $M \to M_1$ 作用于 $U_2 \cup U_3$所得像的形变收缩，并且将 f_1 限制在 $W := f_1^{-1}(\mathbb{S}^1_\varepsilon) \setminus D_1$上后，是一个以半径为 ε的圆 $\mathbb{S}^1_\varepsilon$ 为底空间的局部平凡 C^∞-纤维化，其在 $\underline{\varepsilon}$ 上的纤维同构于 $F_\varepsilon := \mathbb{D} \setminus \{\pm\sqrt{\varepsilon}\}$。通过指数映射 $[0,1] \to \mathbb{S}^1_\varepsilon, u \mapsto \varepsilon e^{2i\pi u}$ 对 $f_1\colon W \to \mathbb{S}^1_\varepsilon$ 进行拉回，所得纤维化是平凡的，且存在一个平凡化映射

$$\tau : F_\varepsilon \times [0,1] \to W\,, \qquad (z, u) \mapsto (t, x) = (ze^{i\pi u}, (z^2 - \varepsilon)e^{2i\pi u})\,.$$

考虑路径 $\beta\colon [0,1] \to F_\varepsilon \times [0,1]$，其由 $\beta(u) = (0,\ u)$给出，经 τ投影到环路$(t,\ x) = (0,\ -\varepsilon e^{2i\pi u})$ $\in W \subset U_1$，该环路是 D_2 的子午线，因此我们可以选择 $\pi_1(M^*)$ 的生成元 b 为 $\tau(\beta)$ 的同伦类。

现在，令 $z(u)$ 为 F_ε 中一个基于 $z = 0$ 的简单闭曲线，其绕 $+\sqrt{\varepsilon}$ 的指标为 $+1$，绕 $-\sqrt{\varepsilon}$ 的指标为 0。对于 $i = 0,\ 1$，我们定义 $\alpha_i(u) = (z(u),\ i)$。显然，α_1 在 $F_\varepsilon \times [0,1]$中与 $\beta\alpha_0\beta^{-1}$ 同伦。因此，它们分别经由 τ 的投影，即 $\lambda = \tau(\alpha_1)$ 和 $\tau(\beta\alpha_0\beta^{-1}) = b\mu b^{-1}$，在 W 中也同伦，其中 $\mu = \tau(\alpha_0)$。注意，环路 λ、μ 包含在经过点 $(t, x) = (0, -\varepsilon)$ 的叶 L 中，它们是绕 D_1 的子午线，因此我们可以将生成元 $a \in \pi_1(M^*)$ 选作 λ 的同伦类。此外，λ（分别地，μ）绕点 $(t, x) = (+\sqrt{\varepsilon}, 0) \in L \cap D_1$（分别地，$(t, x) = (-\sqrt{\varepsilon}, 0) \in L \cap D_1$）。因此，$L$ 的自由基本群由 λ 和 μ 生成，它们在 $\imath\colon \pi_1(L) \to \pi_1(M^*)$ 下的像分别为 a 和 $b^{-1}ab$。

最后，如果我们移除非孤立分离曲线 $S' = \{x = 0\}$ 那么 $\mathcal{F}$中的所有叶在 $B \setminus (S \cup S')$中都是不可压缩的。事实上，利用 §3.1.1 中给出的描述，我们得到

$$\pi_1(U_1 \setminus (\mathcal{E} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{S}')) = \langle a, c, e \,|\, ce = a^3, [a, c] = [a, e] = 1 \rangle\,,$$

其中 e 是 S' 的严格变换 $\mathcal{S}'$ 的子午线；因此

$$\begin{aligned}\pi_1(M \setminus (\mathcal{E} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{S}')) &= \langle a, b, c, d, e \,|\, ce = a^3, abd = c = b^2, [a, e] = [c, a] = [c, b] = [c, d] = 1 \rangle \\ &= \langle a, b \,|\, [a, b^2] = 1 \rangle\,.\end{aligned}$$

该群除以正规子群 $\langle b^2\rangle$ 的商群是自由积 $\mathbb{Z}a * \mathbb{Z}_2\bar{b}$。复合态射

$$\langle \lambda, \mu\rangle \to \langle a, b \,|\, [a, b^2] = 1\rangle \to \mathbb{Z}a * \mathbb{Z}_2\bar{b},$$

将 $\pi_1(L)$ 的自由生成元 λ 和 μ 分别映到 a 和 bab，显然是单射，因此 $\pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(M\setminus(\mathcal{E}\cup\mathcal{S}\cup\mathcal{S}'))$ 也是单射。另一种说法是，W 是 $M\setminus(\mathcal{E}\cup\mathcal{S}\cup\mathcal{S}')$ 的变形收缩，而 $\pi_1(L) = \pi_1(F_\varepsilon)$ 注入 $\pi_1(M\setminus(\mathcal{E}\cup\mathcal{S}\cup\mathcal{S}')) = \pi_1(W)$，这是纤维化 $F_\varepsilon \to W \xrightarrow{f_1} \mathbb{S}^1_\varepsilon$ 的长正合序列所致。

3.2. **非广义曲线叶状结构**。每个鞍结点都有一条收敛分离曲线（称为强分离曲线）和一条可能发散的形式分离曲线（称为弱分离曲线）。如果叶状结构的最小化约中出现的所有鞍结点，其强分离曲线都与例外除子横截，则称该叶状结构在 **强可呈现**的 [42, 定义 1。2]。L. Teyssier [42, 定理 C] 的一般结果是，不可压缩性定理 1 和（2）中的性质对强可呈现叶状结构仍然成立，而不仅仅适用于广义曲线。此外，通过恰当选择定理 2.1 中的曲线 C，性质（3）也仍然成立。

另一方面，L. Teyssier [42, §8.2] 展示了一些非 dicritical 叶状结构$\mathcal{F}$ 的例子；这些叶状结构并非强可呈现，其叶的基本群无法嵌入分离曲线补集的基本群中 $S_{\mathcal{F}}$。这是因为，在 $\mathcal{F}$ 的奇点约化中出现的一些鞍结点，其强分离曲线包含在例外除子中，而相应的弱分离曲线发散，因此 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 补集的基本群$S_{\mathcal{F}}$ 太小，无法容纳一般叶（一个非紧黎曼曲面）的基本群（一个非阿贝尔自由群）。

令人惊讶的是，他还介绍了 [42, §8.3]一个经过一次爆破后约化的叶状结构的例子，其中所有鞍结点都有两条收敛的分离曲线，并且在分离曲线补集中存在可压缩的叶。该构造基于横截曲线（由 E. Paul 发现）的存在；对于这些曲线，定理 3 中的叶状连通性性质（2.1 ）不成立。

4. 单值化

叶状结构的单值化概念反映了空间基本群在叶的“端点”上的作用；更具体地说，反映了其在叶空间逆系统上的作用。在 §4.4 引入这一概念之前，我们先在 §4.1考察约化叶状结构的叶空间结构如何包含对这些叶状结构进行分类所需的全部信息。在 §4.2 中，我们将看到，不可压缩性定理 2.1 使得每个叶空间都可以赋予一种复流形结构（通常并非豪斯多夫）。在 §4.4中，在定义单值化的概念之后，我们将明确说明它与约化过程中例外除子的不变不可约分支的整体变换，以及 §4.3中定义的扩展 holonomy 之间的关系。对于可通过一次爆破约化的叶状结构，这一概念对应于 L. Ortiz-bobadilla、E. Rosales-González 和 S.M. Voronin 在 [33]中引入的概念。最后，在 §4.5 中，我们将给出分类定理 4.15的陈述，并概述其基于单值化和 Camacho-Sad 指数的证明思路。

4.1. **约化叶状结构的叶空间的端**。约化叶状结构奇点的解析分类可以在叶空间的端这一框架下重新表述。首先回顾一下由 1-形式定义的鞍点 $\mathcal{F}$ 的情形

$$\omega = (1 + \cdots)ydx - (\lambda + \cdots)xdy, \quad \text{with} \quad \lambda \notin \mathbb{Q}_{\geq 0}.$$

坐标轴 $\{x = 0\}$ 和 $\{y = 0\}$ 是仅有的分离曲线，且 $S := \{xy = 0\}$ 是一个 $\mathcal{F}$-适当曲线。假设 ω 在多圆盘 $P = \{|x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$上全纯，并固定 P中 $S\cap P$的开邻域基本系 $\mathcal{U}$，其顺序由

包含映射给出。对于任意 $U \in \mathcal{U}$，我们用 Q_U 表示由 $\mathcal{F}$ 在 $U \setminus S$上诱导的叶状结构 $\mathcal{F}_{|U\setminus S}$ 的叶空间。它们与连续映射一起构成**叶空间的逆系统**

$$\rho_{VU} : Q_U \longrightarrow Q_V\,, \quad V \supset U\,, \quad U, V \in \mathcal{U}\,, \tag{6}$$

将叶 L_U从 $\mathcal{F}_{|U\setminus S}$映射到包含 L_U的 $\mathcal{F}_{|V\setminus S}$的叶。**沿** $S \cap P$ **的叶端空间**是逆极限

$$\varprojlim_{U\in\mathcal{U}} Q_U := \{(L_U)_{U\in\mathcal{U}}\,;\, L_U \in Q_U\,, V \supset U \Longrightarrow L_U \subset L_V\} \subset \prod_{U\in\mathcal{U}} Q_U\,,$$

它不依赖于基本系 $\mathcal{U}$的选择。我们区分三种情况:

4.1.1. 庞加莱型奇点 $\lambda \notin \mathbb{R}$。我们可以构造 $\mathcal{U} = (U_r)_{0<r<1}$，使得交 $U_r \cap \{|x| = 1\}$ 相对于横截圆盘$\Delta_r := \{x = 1, |y| < r\}$ 是悬挂型子集，该横截圆盘位于环路 $\gamma(s) = (e^{2i\pi s}, 0)$ 上，参见 §2.2；并且它们在 $\mathcal{F}_{|U_r}$ 下的饱和集是整个 U_r。因此，空间 Q_{U_r} 可识别为叶状结构沿 γ的整体变换 h: $\Delta_r \xrightarrow{\sim} h(\Delta_r)$ 的轨道空间，该整体变换是可线性化压缩映射（或膨胀映射）。因此， Q_{U_r} 是椭圆曲线

$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z}2i\pi + \mathbb{Z}2i\pi\lambda) \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda)$$

且投影 $\varprojlim_r Q_{U_r} \to Q_{U_r}$ 是同构。经典地， λ 决定了 $\varprojlim_r Q_{U_r}$ 的解析类型，而 λ 是 h 唯一的解析不变量，因此也是 $\mathcal{F}$ 的唯一解析不变量，因为它是可线性化的。

请注意，所有庞加莱型叶状结构在拓扑上都共轭，见引理5.1。事实上，叶与足够小的球面横截，因此它们是以与球面的交为底的锥。球面上的诱导叶状结构是具有两条闭叶的莫尔斯–斯梅尔型一维实叶状结构。

4.1.2. 不可线性化共振鞍点。这些叶状结构的拓扑分类由三个自然数 p， q， $k \in \mathbb{N}$给出，$\gcd(p, q) = 1$。事实上，根据 [6]，任何不可线性化共振鞍点 $\mathcal{F}$ 在拓扑上都与由以下表达式定义的叶状结构共轭

$$\omega_{p,q,k,\nu} = py(1 + (\nu - 1)(x^p y^q)^k)dx + qx(1 + \nu(x^p y^q)^k)dy$$

对于任意 $\nu \in \mathbb{C}$，它是一个解析 （以及形式 ） $\mathcal{F}$ 的不变量，但不是拓扑不变量。

与前一种情况一样，我们可以利用坐标轴的邻域的一个基本系 $(U_r)_r$，其中使用横截圆盘 Δ_r，从而再次将叶空间 Q_{U_r} 识别为环路 γ 在 Δ_r上实现的整体变换的轨道空间。叶空间 Q_{U_r} 仍是一个黎曼曲面，但与前一种情况不同，它不是豪斯多夫的。更确切地说，Q_{U_r} 具有“球串”（球串）的结构，即将穿孔球面 $S_j^+ = S_j^- = \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$的不交并 $\bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}(S_j^- \cup S_j^+)$ 按由“粘合”双全纯映射诱导的等价关系 $m \sim \varphi_j^\star(m)$ 取商所得的空间

$$\varphi_j^0 \;:\; S_j^+ \supset (V_j^+ \setminus \{0\}) \;\xrightarrow{\sim}\; (V_j^- \setminus \{0\}) \subset S_j^-$$

$$\varphi_j^\infty \;:\; S_j^- \supset (W_j^- \setminus \{\infty\}) \;\xrightarrow{\sim}\; (W_{j+1}^+ \setminus \{\infty\}) \subset S_{j+1}^+\,,$$

其中， $V_j^\pm$和 $W_j^\pm$分别是 $S_j^\pm$和 $j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$中 0 和 ∞的开邻域，参见例如 [26] 或 [18, 第 116] 页。

叶端空间 $\varprojlim_r Q_{U_r}$ 是豪斯多夫且非连通的黎曼曲面$\bigsqcup_{j\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}(S_j^- \cup S_j^+)$ 其中 k 是整体变换动力学的花瓣数。要获得叶状结构的完整解析不变量，需要收集所有粘合数据，并考虑式（$(Q_{U_r})_r$ 中引入的整个叶空间逆系统。6）：

定理 4.1 (Birkhoff、Écalle，参见 [18, 定理 2.7。1])。两个不可线性化共振鞍点芽 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$，具有相同的拓扑不变量 p， q， k且具有相同的形式不变量 ν 当且仅当它们的叶空间逆系统之间存在同构时，二者解析共轭。

上述陈述中的**逆系统同构**概念如下，参见 [9, §2.8]:

定义 4.2。令Top 为拓扑空间及连续映射构成的范畴。范畴Top$\longleftarrow$ 是一个范畴，其对象为拓扑空间的逆系统

$$\mathcal{A} := \big((A_\alpha)_\alpha\,,\quad (\rho_{\alpha',\alpha} : A_\alpha \to A_{\alpha'})_{\alpha\preccurlyeq\alpha'}\big)$$

其态射（此处称为连续芽[2]）是以下集合的元素：

$$\varprojlim\big(\mathcal{A},\mathcal{B}\big) := \varprojlim_\beta \varinjlim_\alpha \mathcal{C}^0(A_\alpha, B_\beta), \tag{7}$$

其中 $\mathcal{C}^0 = \mathrm{Hom}^{\mathrm{Top}}$。类似地， $\mathbb{C}$-Man$\longleftarrow$ $\subset$ Top$\longleftarrow$ 是复流形逆系统构成的子范畴，其态射（称为全纯芽）是$\lim\longleftarrow_\beta \lim_{\longrightarrow\alpha}\mathcal{O}(A_\alpha, B_\beta)$的元素，其中 $\mathcal{O} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Man}}$。

注意，对于任意 β，系统 $(\mathcal{O}(A_\alpha, B_\beta))_\alpha$ 是直接的，而系统 $\left(\lim_{\longrightarrow\alpha}\mathcal{O}(A_\alpha, B_\beta)\right)_\beta$是逆的。这解释了 Hom$\longleftarrow$定义中使用的极限。

回到定理 4.1，若 $\mathcal{Q} = (Q_{U_r})_r$和 $\mathcal{Q}' = (Q_{U'_{r'}})_{r'}$是共振鞍点的叶空间系统 $\mathcal{F}$且 $\mathcal{F}'$，那么可逆元素 Iso$\longleftarrow(\mathcal{Q},\mathcal{Q}')$ $\subset$Hom$\longleftarrow$$(\mathcal{Q},\mathcal{Q}')$对应于叶空间端（豪斯多夫“球链”）之间的双全纯映射

$$\Phi : \varprojlim \mathcal{Q} \xrightarrow{\sim} \varprojlim \mathcal{Q}'$$

这些映射与粘合映射 $(\varphi_j^0, \varphi_j^\infty)$ 可交换。因此，叶空间端 $\lim\longleftarrow \mathcal{Q}$ 的自同构集合严格包含逆系统 $\mathcal{Q}$的自同构集合。

4.1.3. 实鞍点 $\lambda \in \mathbb{R}_{<0}$。对于这类奇点，叶端空间 $\lim\longleftarrow \mathcal{Q}$提供了一个判定线性化性的标准。

定理 4.3。实鞍点可线性化，当且仅当其叶空间的端为空。

证明。若 $\lambda = -q/p \in \mathbb{Q}_{<0}$ 且 ω 共轭于 $pydx + qxdy$ 则具有 $x^p y^q$ 作为第一积分，没有叶会累积到 S，且叶空间的端 $\lim\longleftarrow \mathcal{Q}$ 为空。若$\lambda \in \mathbb{Q}_{<0}$ 且 ω 不可线性化，则 §4.1.2 中的上述描述直接表明，叶空间的端 $\lim\longleftarrow \mathcal{Q}$ 非空。

若 $\lambda \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \mathbb{Q}$ 且奇点在坐标 $(x,\ y)$ 中是线性的，则叶包含于闭实超曲面 $|x||y|^\lambda$ =常数中。在不可线性化情形下，Pérez-Marco [36]证明了整体变换的轨道会累积到 0。因此，存在累积到分离曲线的叶，且 $\lim\longleftarrow \mathcal{Q} \neq \emptyset$。□

4.1.4. 非约化对数奇点。设 $\mathcal{F}$ 是由亚纯形式定义的对数叶状结构芽

$$\lambda_1\frac{df_1}{f_1} + \cdots + \lambda_r\frac{df_r}{f_r}$$

其中 $\lambda_i/\lambda_j \notin \mathbb{R}$，若 $i \neq j$。根据 [35, 推论 2.5]，存在原点的一个基本邻域系 $\mathcal{U}$，使得叶空间 Q_U、 $U \in \mathcal{U}$ 均可识别为

$$\mathbb{C}/(\mathbb{Z}2i\pi\lambda_1 + \cdots + \mathbb{Z}2i\pi\lambda_r) \simeq \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\lambda_1 + \cdots + \mathbb{Z}\lambda_r),$$

[2]在 [21] 中，它们被称为原芽。

对于 $r \geq 3$，它不是拓扑流形。然而，通过万有覆盖映射 $q\colon U \to U \setminus S$、$S = \{f_1 \cdots f_r = 0\}$，拉回叶状结构 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\mathcal{F}$ 的叶空间可识别为 $\mathbb{C}$。这个例子表明，对于非约化奇点，考虑万有覆盖空间 U 上诱导的叶状结构反而更有意义 $\tilde{}$。

4.2. 叶空间上的复结构。 再次假设 $\mathcal{F}$ 是一个广义曲线，并固定一条 $\mathcal{F}$-适当曲线 S的米尔诺管 $\mathbb{T}$。我们分别用

$$q : \tilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{T} \setminus S\,, \quad \Gamma := \mathrm{Aut}_q(\tilde{\mathbb{T}})\,, \quad \tilde{\mathcal{F}} := q^{-1}\mathcal{F}\,,$$

的万有覆盖、甲板变换群，以及$\tilde{}$叶状结构 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{T}$上的拉回。我们固定一个基本系 $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$，它由 S的邻域构成，并满足不可压缩性定理2.1 中所述的性质；我们考虑**叶$\tilde{}$空间的逆系统** $\mathcal{F}$，即拓扑空间的逆系统

$$\mathcal{Q} := \{(Q_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (Q_n \leftarrow Q_m)_{m<n}\}, \qquad Q_n := Q^{\tilde{\mathcal{F}}}_{\tilde{U}_n} \tag{8}$$

$\tilde{}$其中，$Q^{\mathcal{F}}_{\tilde{U}_n}$ 表示由 $\tilde{\mathcal{F}}$ 在 $\tilde{\mathcal{F}}_{|\tilde{U}_n}$ 上诱导的叶状结构的叶空间

$$\tilde{U}_n := q^{-1}(U_n \setminus S)$$

对于任意子集 $A \subset q^{-1}(\mathbb{T} \setminus S)$，我们关联以下拓扑空间逆系统 al spaces

$$(A, \infty) := \left\{ \left(A \cap \tilde{U}_n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(A \cap \tilde{U}_m \hookleftarrow A \cap \tilde{U}_n\right)_{m<n} \right\}.$$

映射

$$\tau_{m,n} : A \cap \tilde{U}_n \to Q_m, \quad m < n,$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$将 $p \in A \cap U_n$ 映射到经过 p的 $\mathcal{F}_{|\tilde{U}_m}$ 的叶，定义一个态射

$$\tau_A : (A, \infty) \to \mathcal{Q} \tag{9}$$

在 Top⟵范畴中，我们称之为与 A**相关联的典范态射**。

定理 2.1 中的断言（3）不足以在 dicritical 情形下用坐标图覆盖整个叶空间。因此，我们对这一性质作如下细化：

引理 4.4。 *设 $\mathbb{T}$ 是广义曲线 S 的一条适当曲线 $\mathcal{F}$的米尔诺管。那么存在 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 作为 S 在 $\mathbb{T}$ 中的邻域基本系，满足定理 2.1 的断言（1）和（2），并且在每个 U_n 中都存在一条闭曲线 Δ_n，使得*

(i) 原像 $\tilde{\Delta}^{\alpha}_n \subset q^{-1}(\Delta_n \setminus S)$ 的任意连通分支（由 $\Delta_n \setminus S$ 在普遍覆盖映射$\tilde{}$ $q : U_n \to U_n \setminus S$ 下的原像给出）都是一个嵌入开圆盘，并满足：对于由 $q^{-1}\mathcal{F}$ 在 $\tilde{U}_n$上诱导的叶状结构的每个叶 L，都有 $\mathrm{card}(L \cap \tilde{\Delta}^{\alpha}_n) \leq 1$；(ii) $\mathrm{sat}(\Delta_n \setminus S, U_n \setminus S) = U_n \setminus S$。

证明思路。 我们将每个 U_n 的构造过程视为由 §2.1和 §2.2中描述的叶状块 V_j 组成的并集。由 [19]$\check{}$ 中每个 V_j 的构造可知，我们可以选取互不相交的嵌入圆盘的并集 $\Delta_{j,n} \subset V_j$，使得

$$(\check{\Delta}_{j,n} \setminus S^\sharp) \overset{\mathcal{F}^\sharp}{\hookrightarrow} (V_j \setminus S^\sharp) \quad \text{and} \quad \mathrm{sat}(\check{\Delta}_{j,n} \setminus S^\sharp, V_j \setminus S^\sharp) = V_j \setminus S^\sharp\,.$$

由叶状连通性的传递性，见（3），曲线 $\Delta_{j,\,n} := E_{\mathcal{F}}(\check{}\Delta_{j,\,n})$ 满足 $(\Delta_{j,\,n} \setminus S) \overset{\mathcal{F}^\sharp}{\hookrightarrow} (U_n \setminus S)$。此关系意味着，在 $U_n \setminus S$ 的万有覆盖中，$q^{-1}(\Delta_{j,\,n})$ 的每个连通分支都是一个嵌入圆盘，且与每个叶至多相交于一点。为完成证明，我们令 $\Delta_n := \cup_j \Delta_{j,\,n}$。 □

引理 4.4的一个直接推论是，由 Q_n 在 $\tilde{\mathcal{F}} = q^{-1}\mathcal{F}$ 上诱导的叶状结构的叶空间 $\tilde{U}_n$ 配有一个图册[3], ，此处称为 **由** Δ_n诱导的特定图册。该图册中的各图是单射开映射的逆映射

$$\tilde{\Delta}_n^{\alpha} \hookrightarrow Q_n$$

˜ ˜将 $p \in \Delta_n^{\alpha}$ 发送到包含 p的 $\mathcal{F}_{|\tilde{U}_n}$ 的叶上。由此，我们在 Q_n上得到一个（不一定是豪斯多夫的）黎曼曲面结构。可以看出，该结构不依赖于 Δ_n的选择。

4.3. 扩展整体变换。 固定一条 $\mathcal{F}$-适当曲线 S后，现在考虑全变换 $S^{\sharp}$ 的一个不变不可约分支 D ，它不包含在 $S^{\sharp}$的死分支中。我们还考虑定义在 D的管状邻域 Ω_D 上的光滑收缩映射，

$$\rho_D : \Omega_D \to D,$$

它是一个局部平凡的圆盘纤维化，在 D 中每个奇点s_1、.....、 s_v 的邻域上是全纯的，并且圆盘 $\rho_D^{-1}(s_j)$ 位于 $S^{\sharp}$中。不妨设，经重新排列后， s_1、.....、 s_r、 $1 \leq r \leq v$是奇点 s_j，它们不属于 $S^{\sharp}$的任何死分支。我们选取足够小且彼此不相交的闭圆盘

$$D_{s_j} \subset D\,, \quad j = 1, \ldots, v\,,$$

以 s_j 为中心，使得 ρ_D 沿 D_{s_j} 全纯且平凡。我们还假设 S 的米尔诺管 $\mathbb{T}$ 足够小，从而实超曲面 $\rho_D^{-1}(\partial D_{s_j})$ 与 $E_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbb{T})$ 的边界横截相交于一个包含在 $E_{\mathcal{F}}^{-1}(\delta\mathbb{T})$ 中的二维环面上。然后，我们考虑 $E_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbb{T})$ 中 $\cup_{j=1}^{r}\rho_D^{-1}(D_{s_j})$ 的补集里包含 D 中 $\bigcup_{j=1}^{r} D_{s_j}$ 的补集的连通分支的闭包 $\mathcal{B}_D$ ，即

$$K_D := D \setminus \bigcup_{j=1}^{r} \mathring{D}_{s_j} \;\subset\; \mathcal{B}_D \;\subset\; E_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbb{T}) \setminus \bigcup_{j=1}^{r} \rho_D^{-1}(\mathring{D}_{s_j})\,.$$

我们固定 $\tilde{\mathcal{B}}_D := q^{-1}(E_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}_D) \setminus S)$ 的一个连通分支 $\tilde{\mathcal{B}}_D^{\xi}$，并将其记为 by

$$\Gamma_{\xi} \subset \Gamma$$

覆盖 q 中保持 $\tilde{\mathcal{B}}_D^{\xi}$ 不变的甲板变换子群。利用 [20, 命题 3.3] 中给出的 $\mathcal{B}_D \setminus S_{\mathcal{F}}^{\sharp}$ 的基本群的特定表示，我们可以证明

- $\mathcal{B}_D \setminus S^{\sharp}$ 在 $E_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathbb{T}) \setminus S^{\sharp}$中不可压缩，因此，将 q 限制到 $\tilde{\mathcal{B}}_D^{\xi}$所得的映射是 $E_{\mathcal{F}}$ $(\mathcal{B}_D \setminus S^{\sharp})$ 的万有覆盖，并且 Γ_{ξ} 可与该覆盖的甲板变换群自然地等同；
- $\mathcal{B}_D \cap S^{\sharp}$ 包含 $S^{\sharp}$ 中与 D相交的所有死分支；
- 将 ρ_D 限制到$(\mathcal{B}_D \setminus S^{\sharp}) \cap \Omega_D$ 所得的映射可延拓为一个光滑满射

$$\pi_D : \mathcal{B}_D \setminus S^{\sharp} \to K_D \tag{10}$$

  该映射是穿孔圆盘纤维化，且除 $r < v$ 位于点 s_{r+1}、.....、 s_v处外，均为局部平凡；在此情形下，$\pi_D^{-1}(s_j)$ 的闭包是一个闭圆盘，它与包含 s_j、 $j = r+1$、.....、 v的 $S^{\sharp}$ 死分支的末端分支横截相交；
- 存在一个沿着 π_D 的纤维将 $\mathcal{B}_D \setminus S^{\sharp}$ 变形收缩到 $\delta\mathcal{B}_D := \mathcal{B}_D \cap E_{\mathcal{F}}^{-1}(\delta\mathbb{T})$的映射；
- π_D 到 $\delta\mathcal{B}_D$ 的限制是一个塞弗特纤维化，其例外纤维为横截交点$\delta\mathcal{B}_D \cap \pi_D^{-1}$ (s_j) 、$j = r+1$、 $\ldots v$，当 $r < v$时。

[3]事实上，它是一个取值于 $q^{-1}(\Delta_n)$ 的“图册”。

现在固定一条连通正则曲线 $\Sigma \subset \mathcal{B}_D$，它在正则点 σ 处与 $D \subset S^\sharp$ 相交，并且与 $\mathcal{F}^\sharp$ 横截。我们用 $\tilde{\Sigma}^j$、$j \in \mathcal{J}$ 表示 $q^{-1}(E_{\mathcal{F}}(\Sigma)) \cap \tilde{\mathcal{B}}_D^\xi$ 的连通分支。我们假设基本系 $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定理 2.1 中的断言 (3)，其中取 $C = E_{\mathcal{F}}(\Sigma)$。那么每个 $\tilde{\Sigma}_n^j := \tilde{\Sigma}^j \cap \tilde{U}_n$ 都是一个嵌入圆盘，并且对于 $\tilde{\mathcal{F}}_{|\tilde{\mathcal{B}}_D^\xi}$ 的每个叶 L，$\mathrm{card}(L \cap \tilde{\Sigma}_n^j) \leq 1$。

注4.5。将 $p \in \tilde{\Sigma}_n^j$ 映入经过 p 的 $\tilde{\mathcal{F}}_{|\tilde{U}_n}$ 叶的全纯映射 $\tau_n^j \colon \tilde{\Sigma}_n^j \hookrightarrow Q_n$，定义了典范态射

$$\tau_{\tilde{\Sigma}^j} : (\tilde{\Sigma}^j, \infty) \to \mathcal{Q}$$

引入于（9）中。由于 τ_n^j 是单射，$\tau_{\tilde{\Sigma}^j}$ 是范畴 $\mathbb{C}$-Ma 中的单态射 $\xleftarrow{\quad\quad}$n. □

命题 4.6（[21, 命题 4.2。1]）。对于任意 i、$j \in \mathcal{J}$ 以及充分大的 $n \in \mathbb{N}$，映射 τ_n^i 和 τ_n^j 的像有非空交集 W_n^{ij}，并且对于 $p \gg n \gg 1$，有以下包含关系

$$\tilde{\Sigma}_n^k \cap q^{-1}(U_p) \subset (\tau_n^k)^{-1}(W_n^{ij}), \qquad k = i, j .$$

全纯映射族

$$m_n^{ij} = (\tau_n^i)^{-1} \circ \tau_n^j : (\tau_n^j)^{-1}(W_n^{ij}) \to (\tau_n^i)^{-1}(W_n^{ij}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

定义了范畴 $\mathbb{C}$-流形$\xleftarrow{\quad\quad}$中的一个态射

$$m^{ij} \in \underset{\xleftarrow{\quad}}{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Man}}}\big((\tilde{\Sigma}^j, \infty), (\tilde{\Sigma}^i, \infty)\big)$$

使得 $\tau_{\tilde{\Sigma}^i} \circ m^{ij} = \tau_{\tilde{\Sigma}^j}$，并且对于任意的 i、j、$k \in \mathcal{J}$ 以及任意的覆盖变换 $\varphi \in \Gamma_\xi$，我们有

$$m^{ij} \circ m^{jk} = m^{ik}, \quad m^{ij} = (m^{ji})^{-1}, \quad \varphi \circ m^{ij} \circ \varphi^{-1} = m^{\varphi(i)\varphi(j)}, \tag{11}$$

其中 $\varphi(k) \in \mathcal{J}$ 是指标，使得 $\varphi(\tilde{\Sigma}^k) = \tilde{\Sigma}^{\varphi(k)}$。

我们很容易从关系（11）推出映射

$$\mathcal{H}^i : \Gamma_\xi \longrightarrow \underset{\xleftarrow{\quad}}{\mathrm{Aut}}(\tilde{\Sigma}^i, \infty), \quad \gamma \mapsto \mathcal{H}^i(\gamma) := m^{i\gamma(i)} \circ \gamma,$$

定义良好，且是一个群态射。我们称之为 **沿 $\mathcal{F}$ 的$\mathcal{B}_D$ 在 $\tilde{\Sigma}^i$ 上的扩展 holonomy**（见图 6）。

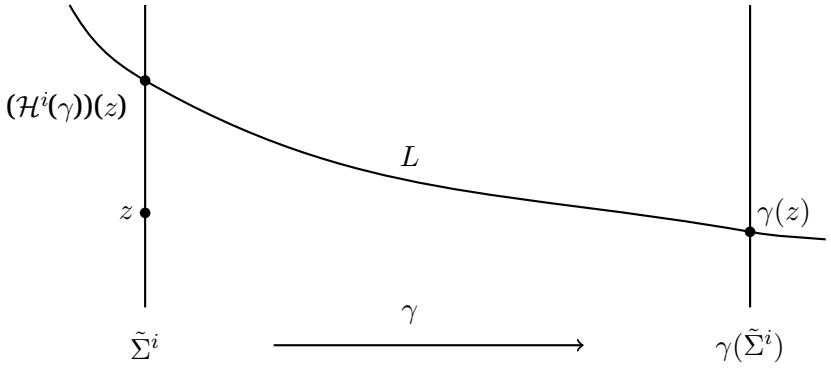


图6。扩展 holonomy 变换 $\mathcal{H}^i(\gamma)$：覆盖变换 γ 表示为水平平移，而 L 是包含 $\gamma(z)$ 的 $\tilde{\mathcal{F}} = q^{-1}\mathcal{F}$ 的叶。

4.4. 单值化。沿用上一小节的记号，现在考虑群

$$\underleftarrow{\mathrm{Aut}}(\mathcal{Q}) \subset \underleftarrow{\mathrm{Hom}}(\mathcal{Q},\mathcal{Q})$$

可逆态射的$\mathrm{Hom}\leftarrow\!\!-(\mathcal{Q},\mathcal{Q})$ 在范畴$\mathrm{Top}\leftarrow\!\!-$中，参见（7）。任意覆盖变换$\tilde{\ }$ $\gamma\in\Gamma$ 都保持叶状结构 $\mathcal{F}$不变，并在每个叶空间上诱导一个自同构$Q_{\tilde{U}_n}$， $n\in\mathbb{N}$从而定义一个自同构 $\gamma_*\in\mathrm{Aut}\leftarrow\!\!-(\mathcal{Q})$。

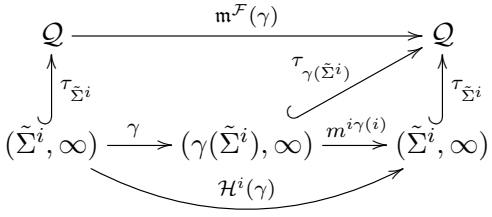
定义 4.7。映射

$$\mathfrak{m}^{\mathcal{F}}:\Gamma\to\underleftarrow{\mathrm{Aut}}(\mathcal{Q}),\quad \gamma\mapsto\gamma_*,$$

是一个群态射，我们称之为 $\mathcal{F}$的单值化表示。

事实上， $\mathfrak{m}^{\mathcal{F}}$ 的取值属于 $\mathcal{Q}$的全纯自同构群。

下面的交换图表明， $\mathcal{H}^i(\gamma)$可以解释为“ $\mathfrak{m}^{\mathcal{F}}(\gamma)$在图 $\tilde{\Sigma}^i$中的表达式”



(12)

现在，对于另一叶状结构 $\mathcal{F}'$， 我们固定 $\mathbb{T}'$, S', Δ', $\check{}\Delta'$, $\mathcal{U}':=(U'_n)_n$, $q'\colon\ \tilde{\mathbb{T}}'\to\mathbb{T}'\setminus S'$, D', $\tilde{\mathcal{B}}'^{\xi'}_{D'}$, Σ', σ'， 并将 $\tilde{\mathcal{F}}'$, Γ', $\mathcal{Q}'$, $(\tilde{\Sigma}'^j_n)_{j\in\mathcal{J}'}$, $\Gamma'_{\xi'}$ 记作与我们针对 $\mathcal{F}$ 所考察的 $\mathcal{F}'$ 的类似元素。我们还将 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 的单值化表示 $\mathfrak{m}^{\mathcal{F}}$ 和 $\mathfrak{m}^{\mathcal{F}'}$ 分别简记为 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$，并将它们沿 $\mathcal{B}_D$ 和 $\mathcal{B}'_{D'}$、在 $\tilde{\Sigma}^i$ 和 $\tilde{\Sigma}'^{i'}$ 上的延拓全纯映射分别记为 $\mathcal{H}^i$ 和 $\mathcal{H}'^{i'}$ 。

A $\mathcal{C}^0$**-共轭**[4] **两个单值化** $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$ 是由以下元素构成的一对 $(\tilde{g}_*,\ h)$ ：

(i) 一个群态射 $\tilde{g}_*\colon\ \Gamma\to\Gamma'$, $\gamma\mapsto\tilde{g}\circ\gamma\circ\tilde{g}^{-1}$， 由同胚 $g:(\mathbb{T},\ S)\to(\mathbb{T}',\ S')$ 的提升 $\tilde{g}\colon\ \tilde{\mathbb{T}}\to\tilde{\mathbb{T}}'$ 定义；**(ii)** 范畴 $\mathrm{Top}\leftarrow\!\!-$ 中的一个同构 $h\colon\ \mathcal{Q}\to\mathcal{Q}'$

使得下图可交换:

$$\begin{array}{ccc}\Gamma & \xrightarrow{\mathfrak{m}} & \underleftarrow{\mathrm{Aut}}(\mathcal{Q})\\ {\scriptstyle\tilde{g}_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_*}\\ \Gamma' & \xrightarrow{\mathfrak{m}'} & \underleftarrow{\mathrm{Aut}}(\mathcal{Q}')\end{array}\tag{13}$$

其中 $\tilde{g}_*(\gamma)\colon\ =\tilde{g}\circ\gamma\circ\tilde{g}^{-1}$ 且 $h_*(\psi)\colon\ =h\circ\psi\circ h^{-1}$。根据定理 1.3，在不改变第一个元素 $\tilde{g}_*$ 的情况下，我们总能选择定义它的同胚 g ，使其通过约化映射的提升 $E_{\mathcal{F}}$ 和 $E_{\mathcal{F}'}$ 能以同胚方式延拓到例外除子 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ ，且该延拓在$S^\sharp$ 的奇点处是全纯的：$=E_{\mathcal{F}}^{-1}\ (S)$；此时我们称 g 是 **与** S **之间的优良共轭** S'。

定义 4.8. 如果共轭 $(\tilde{g}_*,h)$ 在以下意义下是优良的，则称其是 $\mathfrak{m}$ 与 $\mathfrak{m}'$ 之间的优良共轭：存在$\mathcal{F}$ 的结点型分隔集与 *dicritical* 分隔集的并集 K ，使得 $h=$ 极限$\leftarrow\!\!-^n$极限$\longrightarrow^m h_{m,n}$ ，并且对于足够大的 m， n映射 $\mathcal{C}^0$ $h_{mn}\colon\ Q_m\to Q'_n$在每个点 $L\in Q_m$ 处都是全纯的，其中 $L\in Q_m$ 是与 K不相交的叶。

[4]在 [21] 中，这对应于几何共轭的概念。

类似地，沿着 $\mathcal{B}_D$ 和$\mathcal{B}'_{D'}$ 、位于 $\tilde{\Sigma}^i$ 和 $\tilde{\Sigma}'^{i'}$ 上的延拓全纯映射 $\mathcal{H}^i$ 与$\mathcal{H}'^{i'}$ 之间的全纯共轭，是由群态射$\tilde{g}_*:\Gamma_\xi\to\Gamma'_{\xi'}$ 构成的一对$(\tilde{g}_*,\ \tilde{\varphi})$，满足：

(1) g 是 S 与 S' 之间的优良共轭，其通过 $E_{\mathcal{F}}$ 和 $E_{\mathcal{F}'}$的提升 $g^\sharp$ 将 D 映到 D'；(2) $\tilde{g}$ 是 g 通过 q 和 q' 的一个提升，使得当 $n\gg p$足够大时，$\tilde{g}(\tilde{\Sigma}^i_n)$包含于$\tilde{\Sigma}'^{i'}_p$ 中，因此由 g 诱导的群态射 $\tilde{g}_*:\Gamma\to\Gamma'$将 Γ_ξ 映到$\Gamma'_{\xi'}$；(3) $\tilde{\varphi}:(\tilde{\Sigma}^i,\infty)\to(\tilde{\Sigma}'^{i'},\infty)$ 是双全纯芽 $\varphi:(\Sigma,\sigma)\to(\Sigma',\sigma')$ 的一个提升，并且对于任意 $\gamma\in\Gamma_\xi$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc}(\tilde{\Sigma}^i,\infty) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\tilde{\Sigma}'^{i'},\infty)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}^i(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{H}'^{i'}(\tilde{g}_*(\gamma))}\\ (\tilde{\Sigma}^i,\infty) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\tilde{\Sigma}'^{i'},\infty)\,.\end{array}\tag{14}$$

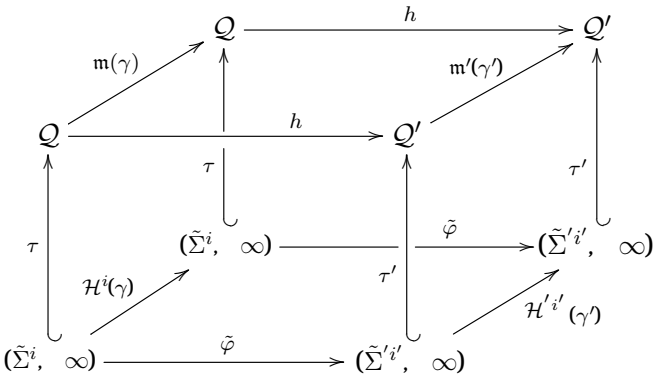
采用这些记号，我们有：

命题 *4.9.* 设 $(\tilde{g}_*,h)$ 是 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 的单值化 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$ 之间的共轭，且 g 优良，$g^\sharp(D)=D'$ 且 $\tilde{g}(\tilde{\Sigma}^i_n)\subset\tilde{\Sigma}'^{i'}_n$。设 $\tilde{\varphi}:(\tilde{\Sigma}^i,\infty)\to(\tilde{\Sigma}'^{i'},\infty)$ 是双全纯映射芽 $\varphi:(\Sigma,\sigma)\to(\Sigma',\sigma')$ 的一个提升，并且与 h 相容，其意义是下图

$$\begin{array}{ccc}(\tilde{\Sigma}^i,\infty) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & (\tilde{\Sigma}'^{i'},\infty)\\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau'}\\ \mathcal{Q} & \xrightarrow{h} & \mathcal{Q}'\end{array}\tag{15}$$

交换，其中 τ分别表示 τ'，典范态射 $\tau_{\tilde{\Sigma}^i}$和 $\tau_{\tilde{\Sigma}'^{i'}}$，定义于（9）中。于是 $(\tilde{g}_*,\ \tilde{\varphi})$ 是沿着 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$、在 $\mathcal{B}_D$ 和 $\mathcal{B}'_{D'}$ 之上、关于 $\tilde{\Sigma}^i$ 和 $\tilde{\Sigma}'^{i'}$的延拓全纯映射之间的全纯共轭。

证明。对于 $\tilde{\Sigma}$ 的任意连通分支 $\tilde{\Sigma}^i$，我们考虑以下图，其中 $\tilde{\Sigma}'^{i'}$ 是 $\tilde{\Sigma}^i$ 在 $\tilde{\varphi}$ 下的像，$\gamma\in\Gamma_\xi$ 和 $\gamma':=\tilde{\varphi}_*(\gamma)\in\Gamma'_{\xi'}$。



(16)

根据 $\tilde{\varphi}$-相容关系（15）以及扩展全纯单值关系（12），该立方图的所有侧方方块都是交换的。我们需要证明底部方块（14）的交换性。为此，首先注意到我们有以下等价关系：

$$\tilde{\varphi}\circ\mathcal{H}^i(\gamma)=\mathcal{H}'^{i'}\circ\tilde{\varphi}\iff\tau'\circ\tilde{\varphi}\circ\mathcal{H}^i(\gamma)=\tau'\circ\mathcal{H}'^{i'}\circ\tilde{\varphi}\tag{17}$$

因为 τ' 是单态射，见注释 4.5。但侧方方块的交换性给出：

$$\tau' \circ \tilde{\varphi} \circ \mathcal{H}^i(\gamma) = h \circ \mathfrak{m}(\gamma) \circ \tau \quad \text{and} \quad \tau' \circ \mathcal{H}'^{i'} \circ \tilde{\varphi} = \mathfrak{m}'(\gamma') \circ h \circ \tau\,.$$

因此，（17）中的两个等价等式也等价于

$$h \circ \mathfrak{m}(\gamma) \circ \tau = \mathfrak{m}'(\gamma') \circ h \circ \tau\,.$$

但该等式成立，是因为图（16）中的上方方块由于单值群共轭关系（13）而交换。□

使用相同的记号，我们还有：

命题4.10。 设$(\tilde{g}_*, \tilde{\varphi})$ 是扩展全纯映射 $\mathcal{H}^i$ 与$\mathcal{H}'^{i'}$ 之间的一个共轭，其中 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 分别沿着 $\mathcal{B}_D$ 和 $\mathcal{B}_{D'}$ 覆盖 $\tilde{\Sigma}^i$ 上的 $\Sigma'^{i'}$ 。那么，叶状结构 $\mathcal{F}^\sharp$和 $\mathcal{F}'^\sharp$沿着 D和 D'的整体变换表示 $H_D^{\mathcal{F}}$与$H_{D'}^{\mathcal{F}'}$是全纯共轭的，更确切地说，以下图表是交换的：

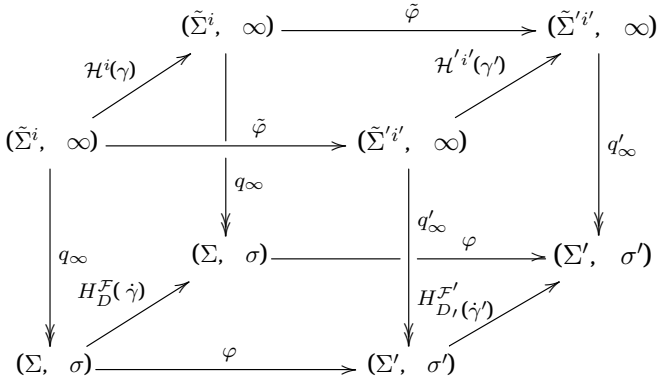
$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D^*, \sigma) & \xrightarrow{H_D^{\mathcal{F}}} & \mathrm{Diff}(\Sigma, \sigma) \\ {\scriptstyle g_*^\sharp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ \pi_1(D'^*, \sigma') & \xrightarrow{H_{D'}^{\mathcal{F}'}} & \mathrm{Diff}(\Sigma', \sigma') \end{array} \tag{18}$$

由将 $g^\sharp$ 限制到 $D^* := D \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}^\sharp)$ 并映到 $D'^* := D' \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}'^\sharp)$以及 $\varphi_*(f) := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$所诱导的 $g_*^\sharp$。

证明思路。我们可以假设 Σ 是纤维化 $\pi_D : \mathcal{B}_D \setminus S^\sharp \to K_D$（前文已介绍，见 (10)）中位于 $\sigma \in D \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F}^\sharp)$ 上方的（正则）纤维。对于任意 $\gamma \in \Gamma_\xi$，根据命题 4.6，存在一条路径 α，它位于 $\tilde{\mathcal{F}}_{|\tilde{\mathcal{B}}_D^\xi}$ 的一个叶中，端点分别属于 $\tilde{\Sigma}^i$ 和 $\gamma(\tilde{\Sigma}^i)$；当 $r < v$ 时，我们可以选择足够一般的 α，使得 $E_{\mathcal{F}}^{-1} \circ q \circ \alpha$ 的像不与任何例外纤维 $\pi_D^{-1}(s_j)$、 $j = r+1$、……、v 相交。§4.1], 中给出的 $\mathcal{B}_D \setminus S^\sharp$ 基本群的特殊表示方式，使我们能够验证

- 商群 $\dot{\gamma}$（D^*, σ）/ $\ker(H_D^{\mathcal{F}})$ 中环路 $\pi_D \circ E_{\mathcal{F}}^{-1} \circ q \circ \alpha$ 的类不取决于路径 α 的选择，而只取决于 γ；
- 映射 $\Gamma_\xi \to \pi_1$（D^*, σ）/ $\ker(H_D^{\mathcal{F}})$ ， $\gamma \mapsto \dot{\gamma}$，是满射的，并且 $H_D^{\mathcal{F}}$（$\dot{\gamma}$） 定义良好。

对于 $\gamma' = \tilde{g}_*(\gamma) \in \Gamma'_{\xi'}$，我们类似地定义 $\dot{\gamma}' \in \pi_1(D'^*, \sigma')/\ker(H_{D'}^{\mathcal{F}'})$。令 q_∞ 和 q'_∞ 分别为范畴 $\mathbb{C}$-Man$\longleftarrow$ 中由覆盖映射 q 和 q' 分别限制到 $q^{-1}(U_n)$ 和 $q'^{-1}(U'_n)$ $n \in \mathbb{N}$ 所诱导的态射。由 $\dot{\gamma}$ 和 $\dot{\gamma}'$ 的构造可知，以下立方图的所有侧方方块均可交换：



根据假设，顶部方块可交换。注意到 q_∞ 和 q'_∞是范畴 $\mathbb{C}$-Man$\leftarrow\!\!\!-$中的满态射后，我们仿照命题 4.9 的证明，可以推得底部方块也可交换。□

最后，作为命题 4.9 和 4.10 的推论，我们得到：

定理 *4.11*。 [21, 定理 *4.3*。1] 设 $(\tilde{g}_*, h)$ 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$ 关于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 的单值化之间的共轭，设 Σ 和 $\Sigma' := g^\sharp(\Sigma)$ 分别是 $D \subset \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 和 $D' := g^\sharp(D)$ 的横截截面，其中 $\subset \mathcal{E}_{\mathcal{F}'}$。设 $\tilde{\varphi} : \tilde{\Sigma} \xrightarrow{\sim} \tilde{\Sigma}'$ 是双全纯映射 $\varphi : \Sigma \to \Sigma'$ 的提升，并且与 h 兼容。那么， $\mathcal{F}^\sharp$ 和 $\mathcal{F}'^\sharp$ 沿着 D 和 D' 的 ***holonomy***（单值化）$H_D^{\mathcal{F}}$ 和 $H_{D'}^{\mathcal{F}'}$ 由 φ 全纯共轭，即图 *(18)* 是交换的。

4.5. 分类定理。我们考虑在 $0 \in \mathbb{C}^2$ 处的两个叶状结构芽 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$，它们都是广义曲线。沿用之前的记号：在 $\mathcal{F}$ 的适当曲线 S 的米尔诺管 $\mathbb{T}$ 中，分别对应于 $\mathbb{T}'$、$\tilde{}$；对于这些覆盖空间，我们仍分别用 $q: \mathbb{T} \to \mathbb{T} \setminus S$ 和 $q' : \mathbb{T}' \to \mathbb{T}' \setminus S'$ 表示万有覆盖映射，用 Γ 和 Γ' 表示甲板变换群； $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{Q}'$ 分别表示 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 的叶空间逆系统，其定义如 (8) 所示，分别由 S 和 S' 的开邻域基本系 $\mathcal{U} = (U_n)_n$ 和 $\mathcal{U}' = (U'_n)_n$ 给出，并满足定理 2.1 中所述的性质。

定义 *4.12.* 给定两个子集 $V \subset \mathbb{T}$ 和 $V' \subset \mathbb{T}'$，其闭包分别与 S 和 S'相交，我们称共轭$\tilde{}$$(\tilde{g}_*, h)$ 在 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$的单值化 $\mathfrak{m}$和 $\mathfrak{m}'$之间，在芽 (V, S) 和 (V', S') 上的实现为以下数据 (ψ, ψ)：一个同胚芽 $\psi : (V, S) \to (V', S')$，以及一个 *Top*$\leftarrow\!\!\!-$-态射

$$(\tilde{V}, \infty) \longrightarrow (\tilde{V}', \infty), \qquad (\tilde{V}, \infty) := (q^{-1}(V \cap U_n))_n, \quad (\tilde{V}', \infty) := (q'^{-1}(V' \cap U'_n))_n$$

t $\tilde{}$的提升 ψ，即 $q' \circ \psi = \psi \circ q$，并满足以下图的交换性

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{V}, \infty) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & (\tilde{V}', \infty) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau'} \\ \mathcal{Q} & \xrightarrow{h} & \mathcal{Q}' \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_{\tilde{V}} & \xrightarrow{\tilde{\psi}_*} & \Gamma'_{\tilde{V}'} \\ \uparrow{\scriptstyle \iota} & & \uparrow{\scriptstyle \iota'} \\ \Gamma & \xrightarrow{\tilde{g}^*} & \Gamma' \end{array}$$

其中 $\Gamma_{\tilde{V}}$和 $\Gamma'_{\tilde{V}'}$是覆盖空间 $q^{-1}(V) \to V$和 $q'^{-1}(V') \to V'$ 的甲板变换群（不一定连通），它们分别由 q 和 q'诱导。

当 ψ 经由奇点约化提升时，它在 V和 V'的严格变换之间定义一个同胚芽：

$$\psi^\sharp : (\hat{V}, S) \longrightarrow (\hat{V}', S^\sharp), \quad E_{\mathcal{F}'} \circ \psi^\sharp = \psi \circ E_{\mathcal{F}}, \qquad \hat{V}' := \overline{E_{\mathcal{F}}^{-1}(V') \setminus S'^\sharp},$$

我们也称 $(\psi^\sharp, \tilde{\psi})$ 是芽 $(\tilde{g}_*, h)$ **在芽**$(\hat{}V, S)$ **和**$(\hat{}V', S')$**上的一个实现**。

注4.13$\tilde{}$。若 V包含开集 U，且(ψ, ψ)在(V, S)和(V', S')上实现了 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$的单值化之间的共轭，则 ψ 在 U 上的限制是 $\mathcal{F}$在 U上的限制与 $\mathcal{F}'$在 $\psi(U)$上的限制之间的共轭。□

定义4.14。我们称米尔诺球 B中对于 $S_{\mathcal{F}}$的完全 $\mathcal{F}$-横截曲线 为 Δ 的任意有限并，其中各个圆盘是 $B \setminus \{0\}$ 中的互不相交的连通嵌入圆盘，与 $\mathcal{F}$横截，并且 $S_{\mathcal{F}}^\sharp$ 的每个动力学分支都与 $E_{\mathcal{F}}^{-1}$ (Δ)交于单个点（该点必属于 $\mathcal{F}$的某条孤立分离曲线的严格变换）。

定理 1.8 保证了可以通过在每个动力学分支中选取一条非节点型孤立分离曲线，以及选取一个横截于其像的小型嵌入圆盘，从而得到一条完整的 $\mathcal{F}$-横截曲线 $S_{\mathcal{F}}^\sharp$。 $E_{\mathcal{F}}$。

定理 4.15. [20, 分类定理] 固定一条完整的 $\mathcal{F}$-横截曲线 Δ，以及一条完整的 $\mathcal{F}'$-横截曲线 Δ'。假设存在一个优良的 $\mathcal{C}^0$-共轭$(\tilde{g}_*,\ h)$ 单值表示 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{m}'$ 分别对应于 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$，并令

$$\tilde{\varphi}:\tilde{\Delta}\to\tilde{\Delta}',\quad \tilde{\Delta}:=q^{-1}(\Delta),\quad \tilde{\Delta}':=q'^{-1}(\Delta'),$$

是双全纯映射芽 $\varphi:(\Delta,S_{\mathcal{F}})\to(\Delta',S_{\mathcal{F}'})$ 经覆盖映射 q和 q'的提升。设$(\varphi,\tilde{\varphi})$是共轭$(\tilde{g},h)$在芽 $(\Delta,S_{\mathcal{F}})$和 $(\Delta',S_{\mathcal{F}'})$上的实现，并且

(1) φ 对 Δ 中与 $\mathcal{F}$ 的孤立分离曲线 C相交的任一连通分支的像，是 Δ' 中与 $g(C)$相交的连通分支；*(2)* $\mathcal{F}^\sharp$ 沿 $\mathcal{F}$的任一孤立分离曲线C 的严格变换 $\mathcal{C}$ 的 *Camacho-Sad* 指数，等于 $\mathcal{F}'^\sharp$ 沿 $g(C)$的严格变换 $\mathcal{C}'$ 的 *Camacho-Sad* 指数，即

$$\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp,\mathcal{C},s)=\mathrm{CS}(\mathcal{F}'^\sharp,\mathcal{C}',s'),\qquad \{s\}:=\mathcal{C}\cap\mathcal{E}_{\mathcal{F}},\quad \{s'\}:=\mathcal{C}'\cap\mathcal{E}_{\mathcal{F}'}.$$

于是存在一个同胚芽 $\Phi:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$，它将 $\mathcal{F}$共轭到 $\mathcal{F}'$，并且可沿约化映射提升为一个同胚芽：

$$\Phi^\sharp:(M_{\mathcal{F}},S^\sharp_{\mathcal{F}})\to(M_{\mathcal{F}'},S^\sharp_{\mathcal{F}'}),\quad E_{\mathcal{F}'}\circ\Phi^\sharp=\Phi\circ E_{\mathcal{F}},\quad \Phi^\sharp(\mathcal{F}^\sharp)=\mathcal{F}'^\sharp.$$

此外， $\Phi^\sharp$ 在 $\mathcal{F}^\sharp$ 的每个非节点型奇点处都是全纯的，并且在 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 中每个对 $\mathcal{F}^\sharp$ 而言是正则且不属于任何 *dicritical*分支的点处都是横向全纯的。

定义 4.16。 满足本定理结论的同胚 Φ 称为 $\mathcal{F}$与 $\mathcal{F}'$之间的优良共轭，我们称 $\mathcal{F}$与 $\mathcal{F}'$是$\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-共轭的。

证明思路。 在一些附加假设下，文献 [21] 证明了单个动力学分支的叶状结构情形下的这个定理。一般情形的证明见 [23, 定理 11.4 的证明，步骤 (iii)-(v)]。沿 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$的每个动力学分支分别构造共轭，并在最后一步将它们在分隔集上粘合起来。

我们将 $\mathcal{D}$ 的任意动力学分支 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 划分为**初等块**，这些初等块可以是（小块） $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 与以 $\mathcal{F}^\sharp$的奇点为中心的小闭多圆盘的交的连通分支，也可以是（大块） $\mathcal{D}$ 中所有小块之补集的连通分支的闭包。对于每个大块K ，我们在 ρ_K 的开邻域 Ω_K 上固定一个局部平凡光滑收缩纤维化 $\rho_K:\ \Omega_K\to K$ ，其纤维是与 $\mathcal{F}^\sharp$横截的圆盘。我们可以假设 ρ_K在 K 边界 ∂K 的每一点处都是全纯的。我们可以用连通闭集对 $\mathcal{D}$ 作穷竭，

$$Z_0\subsetneq Z_1\subsetneq\cdots\subsetneq Z_k=\mathcal{D},\qquad Z_j=Z_{j-1}\cup K_j,$$

其中， Z_0 是一个大块，其在 $E_{\mathcal{F}}$下的像包含于 $\mathcal{D}$ 中与 Δ相交的（唯一）孤立分离曲线内，而 K_j 的闭包 $Z_j\setminus Z_{j-1}$ 是一个与 Z_{j-1}相交的初等块。不失一般性，我们假设 g 是优良的，并且 $g^\sharp$ 在任意小初等块的邻域上都是全纯的。正如我们将在 §5.2 中看到的，假设（2）中关于孤立分离曲线的 Camacho-Sad 等式导出如下等式

$$\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp,D,s)=\mathrm{CS}(\mathcal{F}'^\sharp,g^\sharp(D),g^\sharp(s)) \tag{19}$$

对于 $\mathcal{F}^\sharp$ 的任意奇点 $s\in D$ 以及 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的任意不可约分支 D。因此， $g^\sharp$ 将 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的任意动力学分支映射到 $S^\sharp_{\mathcal{F}'}$ 的一个动力学分支上。

我们还有动力学分支的穷竭

$$Z'_0\subsetneq Z'_1\subsetneq\ldots\subsetneq Z'_k=\mathcal{D}',\qquad Z'_i:=g^\sharp(Z_i),$$

$\mathcal{D}' := g^\sharp(\mathcal{D})$ $S^\sharp_{\mathcal{F}'}$。经过同痕 [20, 定理 2.9 和定义 2.5] 后，我们还可以假设，对于任意大块 $K \subset \mathcal{D}$，映射$g^\sharp$ 将 ρ_K 在任意 $p \in K$ 上的纤维映到先前固定的局部平凡光滑纤维化 $\rho'_{g^\sharp(K)}$：$\Omega' \to g^\sharp(K)$ 在 $g^\sharp(p)$ 上的纤维，即

$$\rho'_{g^\sharp(K)} \circ g^\sharp = g^\sharp \circ \rho_K \,.$$

我们将依次构造单值化共轭（ψ_j，ψ_j）的实现，其中 ψ_j 是从 Z_j 的一个邻域到 Z'_j 的一个邻域的同胚，并且扩张了 ψ_{j-1}。此外，我们将有

$$\rho'_{g^\sharp(K)} \circ \psi_j = \psi_j \circ \rho_K \tag{20}$$

在与 Z_j相交的每个初等大块 K 的边界上。

证明通过将注 4.13 应用于最后一个同胚 $\Phi := \psi_k$；该同胚将 $\mathcal{F}^\sharp$ 共轭到 $\mathcal{F}'^\sharp$ 在 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 的邻域上，而非节点奇点处的全纯横截性和全纯性则由该构造得到。

假设我们已经构造了ψ_{j-1}，并以 K 表示包含p_j的大块。考虑横截圆盘

$$\Sigma_j := \rho_K^{-1}(p_j)\,, \qquad \Sigma'_j := \rho'^{-1}_{g^\sharp(K)}(p'_j) = g^\sharp(\Sigma_j)\,, \qquad p'_j := g^\sharp(p_j)\,,$$

以及由相应万有覆盖映射给出的提升

$$\tilde{\Sigma}_j := q^{-1}(E_{\mathcal{F}}(\Sigma_j))\,, \quad \tilde{\Sigma}'_j := q'^{-1}(E_{\mathcal{F}'}(\Sigma'_j))\,.$$

归纳过程的关键在于应用以下延拓引理，其中 ϕ 取 ψ_{j-1} 在 Σ_j 上的限制，ϕ_j 取 ψ_{j-1} 在 Σ_j上的限制。

引理 4.17 ([21,引理 8.3。2])。设

$$\phi : (\Sigma_j, p_j) \to (\Sigma'_j, p'_j)\,, \quad \tilde{\phi} : (\tilde{\Sigma}_j, \infty) \longrightarrow (\tilde{\Sigma}'_j, \infty)\,,$$

是一个双全纯芽和一个 $\mathbb{C}$-流形$\longleftarrow$ 同构，它们定义了 $(\tilde{g}_*, h)$ 在芽 $(\Sigma_j, S^\sharp_{\mathcal{F}})$ 和 $(\Sigma'_j, S^\sharp_{\mathcal{F}'})$ 上的一个实现。若 $\tilde{\phi}$ 和 $\tilde{g}$ 诱导相同的典范态射

$$\tilde{\phi}_\star = \tilde{g}_\star : \pi_0(\tilde{\Sigma}_j) \to \pi_0(\tilde{\Sigma}'_j)\,,$$

则存在一个同胚 Φ，它将 ϕ 延拓到 K_j 的某个邻域Ω_j 上，并存在一个 Φ 经由 $q \circ E_{\mathcal{F}}^{-1}$ 和 $q' \circ E_{\mathcal{F}'}^{-1}$ 的提升 $\tilde{\Phi}$，将 $\tilde{\phi}$ 延拓，使得

(1) $(\Phi, \tilde{\Phi})$ 是在芽 $(\Omega_j, S^\sharp_{\mathcal{F}})$ 和 $(\Phi(\Omega_j)\ S^\sharp_{\mathcal{F}'})$上的 $(\tilde{g}_*, h)$ 的一个实现；*(2)* 在 K_j 的边界的每个连通分支 $\mathscr{C}$ 的某个邻域上，等式 $\rho' \circ \Phi = \Phi \circ \rho$ 成立，其中 ρ（分别为 ρ'）是包含 $\mathscr{C}$（分别为 $\Phi(\mathscr{C})$）的大块上的圆盘纤维化；

(3) $\Phi_{|\tilde{\Sigma}_{j+1}}$ 和 $\tilde{g}$ 从 $\pi_0(\Sigma_{j+1})$ 到 $\pi_0(\Sigma'_{j+1})$ 诱导相同的典范态射。

上面的性质 (2) 蕴含了 ϕ 在邻域 Ω 上的$Z_{j-1} \cap K_j$ 延拓的唯一性。因而，根据指标 $j-1$ 下的关系 (20)，Φ 和 ψ_{j-1} 在Ω 上重合，并可粘合起来定义同胚 ψ_j。

引理的证明 4.17虽然技术性较强，但基于以下事实：根据定理 4.11，由 ϕ 实现的单值群共轭 ϕ 也会共轭 $\mathcal{F}^\sharp$ 与 $\mathcal{F}'^\sharp$ 沿整段 K_j 的 holonomy（单值化），当 K_j 较大时如此；而当 K_j 较小时，则沿包含p_j 的不可约分支如此。延拓 Φ 作为从 $\mathcal{F}^\sharp$ 到 $\mathcal{F}'^\sharp$ 沿着K_j 的共轭，在 K_j 较大时，可由正则叶状结构的经典定理给出。当 K_j较小时，利用 Camacho-Sad 指数相等关系（19），可由鞍点奇点的经典定理得到该延拓 [27]。 □

5. Camacho-Sad 指数的拓扑不变性

5.1. **Camacho-Sad 指数**。我们回顾一下：在叶状结构 $\mathcal{F}$ 的不变正则曲线 C 上的奇点 s 处，Camacho-Sad 指数 CS($\mathcal{F}$, S, s) 给出了 $\mathcal{F}$ 的叶在 s 的邻域内绕行 C 的信息。更确切地说，若 $\mathcal{F}$ 由 1-形式 $vA(u, v)du + B(u, v)dv$ 定义，且 $C = \{v = 0\} \ni (0, 0) = s$，则

$$\mathrm{CS}(\mathcal{F}, C, s) := \mathrm{Res}_{u=0}\left(-\frac{B(u,0)}{A(u,0)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_z}\frac{dv}{v}, \tag{21}$$

其中，$\Gamma_z = (\gamma(t)\ \mu_z(t))$ 是通过将环路 $\gamma(t) = (e^{2i\pi t}, 0)$ 提升到 C with $\mu_z(0) = z$. 内的叶上得到的路径。

我们将确定一大类叶状芽 $\mathcal{F}$，对于这些芽，在例外除子 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 上、 $\mathcal{F}^\sharp$ 的奇点处的 Camacho-Sad 指数**是拓扑不变量**，其含义是：若 ϕ 是从 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的拓扑共轭，则有如下等式

$$\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, D, s) = \mathrm{CS}(\mathcal{G}^\sharp, \mathsf{A}_\phi(D), \mathsf{A}_\phi(s)) \tag{22}$$

对于任意与边 D 相邻的顶点 s，位于 $\mathsf{A}_{\mathcal{F}}$中。这里，对偶树 $\mathsf{A}_{\mathcal{F}}$ 和 $\mathsf{A}_{\mathcal{G}}$ 的顶点和边分别对应于全变换 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 和 $S^\sharp_{\mathcal{G}}$ 以及 A_ϕ ： $\mathsf{A}_{\mathcal{F}} \to \mathsf{A}_{\mathcal{G}}$ 是命题 1.2中引入的图态射。

我们将进一步对 $\mathcal{F}$ 引入两个条件 (NFC) 和 (TR)，使得 Camacho-Sad 指数具有拓扑不变性。但首先，我们将考察可能对此构成的障碍。

5.2. **不同类型的动力学分支**。基于以下 Camacho-Sad 指数公式[21, §7.3] Appendix [7, foranyinvari- ant irreducible component D $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$，一个直接的归纳过程给出

$$\sum_{s\in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}^\sharp)\cap D} \mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, D, s) = D \cdot D \tag{23}$$

可得

($\star$) 等式 *(22)* 对任意 D 和 s 属于 $\mathsf{A}_{\mathcal{F}}$ 的情形成立，前提是当 D 为任意孤立分离曲线的严格变换时，该等式成立。

对于固定的孤立分离曲线 C，我们将根据动力学分支 $\mathcal{D}$ 的性质考察不同情形；该动力学分支 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 包含 $\mathcal{C}$ 的严格变换 C。注意，定理 1.8给出了存在一条与动力学分支 $\mathcal{D}$相交的非节点型孤立分离曲线，但并不能保证 $\mathcal{D}$中存在一个至少含有 $\mathcal{F}^\sharp$ 的三个奇点的不可约分支。然而，利用该定理和指数公式 (23)，我们可以看出（参见 [23, 引理 11 的证明。6]），$\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$只有五种可能：

(1) $\mathcal{C}$ 是一条节点分离曲线，且 $\mathcal{D}$ 退化为 $\mathcal{C}$；(2) 非空交 $\mathcal{D}' := \mathcal{D}\cap\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$是 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$的不变不可约分支的一个并 $\mathcal{D}' = D_1 \cup \cdots \cup D_\ell$，其中 D_i 在一个（非节点型）单点s_i 与 D_{i+1} 相交（当 $\ell > 1$时），而当 $|i - j| \neq 0$时， $D_i \cap D_j$ 为空，1；此外， $\mathcal{C}$ 在非节点型奇点 s 与 D_1 相交，并且以下构型之一成立：(a) $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}'$，当 $\ell > 1$时，Sing($\mathcal{F}^\sharp$) $\cap\,\mathcal{D}$等于 $\{s, s_1, \ldots, s_{\ell-1}\}$；或者当 $\ell = 1$时，参见图 7；(b) $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}'$， $\{s\}$ Sing($\mathcal{F}^\sharp$) $\cap\,\mathcal{D} = \{s, s_1, \ldots, , s_\ell\}$，且 $s_\ell \in D_\ell \setminus \{s_{\ell-1}\}$ 是$\mathcal{F}^\sharp$的一个节点奇点，参见图 8；(c) $\mathcal{D} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D}' \cup \mathcal{C}'$， $\mathcal{C}'$ 是一条孤立的非节点型分离曲线，在奇点 s'与 D_ℓ 相交；当 $\ell > 1$时，Sing($\mathcal{F}^\sharp$) $\cap\,\mathcal{D}$等于 $\{s, s_1, \ldots, s_{\ell-1}, s'\}$，而当 $\ell = 1$时，等于$\{s, s'\}$，参见图 9。

在所有这些情况下，与 $\mathcal{D}$ 相交的 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 的任何不可约分支，要么包含于 $\mathcal{D}$ 中，要么是 dicritical。

(3) $\mathcal{D}$ 有一个不可约分支，其中包含至少 3 个 $\mathcal{F}^\sharp$奇点。

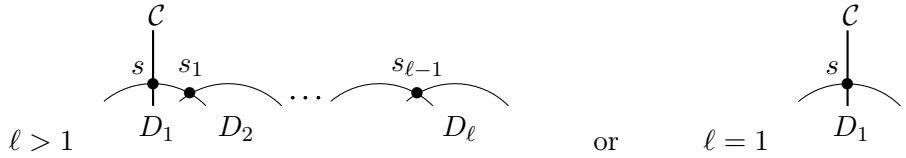


图 7. 情形（2a）： $\mathcal{D}$ 上没有节点奇点，并且必有某个 dicritical 分支与 $\mathcal{D}$相交。

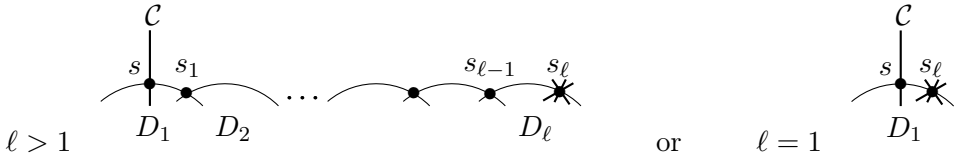


图 8. 情形（2b）： s_ℓ 是 $\mathcal{D}$ 上的唯一节点奇点，并且某些 dicritical 分支可能与 $\mathcal{D}$相交。

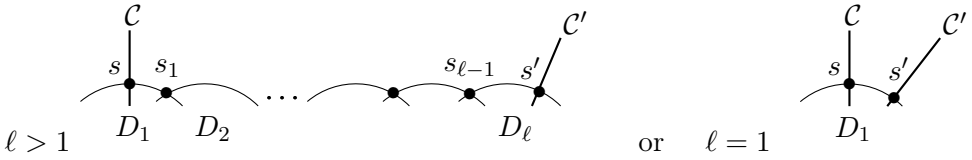


图 9. 情形（2c）： $\mathcal{D}$ 上没有节点奇点，并且必有某个 dicritical 分支与 $\mathcal{D}$相交。

我们称动力学分支 $\mathcal{D}$ 在**情形**（1）和（2）中是小的，**而在情形**（3）中是大的。下面我们将逐一讨论各个情形。

5.3. **小动力学分量**。我们仍以 $\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{F}$ 的一条孤立分离曲线的严格变换，并以 $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 表示 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$之间的一个拓扑共轭。

在情形（1）中，等式

$$\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, \mathcal{C}, s) = \mathrm{CS}(\mathcal{G}^\sharp, \mathsf{A}_\phi(\mathcal{C}), \mathsf{A}_\phi(s))$$

R. Rosas 在弱假设下证明了这一点 [38, 命题 13]，另见 [22, 定理 1.12]。

指数公式（23）意味着：

- 在情形（2a）中，Camacho-Sad 指数 $\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, \mathcal{C}, s)$ 是一个有理数，可用连分数表示，其系数由 $D_i \cdot D_i$ 的不可约分支的自交数决定 $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$；由于这些自交数在拓扑共轭下不变，参见 [46]或 [20],Camacho-Sad 指数的等式（22）成立；
- 在情形（2b）中，我们有 $\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, D_\ell, s_\ell) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$因此 $\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, \mathcal{C}, s) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$；事实上 s 必须是一个可线性化鞍点 $\mathcal{F}^\sharp$ （请注意， s 不是结点）。于是， [22, 定理 1。12] 的证明给出了等式（22）。

在情形（2c）中，任意约化奇点都可能出现在点 s，因此我们称 $\mathcal{D}$ 为一个**自由（动力学）分支**。所有 **庞加莱型**的自由分支，即满足 $\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp,\ \mathcal{C},\ s) \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$的自由分支，都是拓扑共轭的。事实上，这一结论用到了以下事实：

引理 5.1。 设 (λ_1,λ_2) 和 (μ_1,μ_2) 是两对 $\mathbb{R}$-线性无关的复数，且$g:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个 $\mathbb{R}$-线性映射，满足 $g(i\lambda_j) := i\mu_j$。那么，由下式定义的映射 $\psi_j:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C},\ j=1,2$

$$\begin{cases} \psi_j(z) := \exp\left(\mu_j^{-1} g(\lambda_j \log z)\right) \ \ if\ z\neq 0\,, \\ \psi_j(0) := 0\,, \end{cases}$$

是定义良好的同胚，且映射

$$\Psi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2\,,\quad \Psi(z_1,z_2)=\big(\psi_1(z_1),\psi_2(z_2)\big)$$

是一个同胚，它将由亚纯形式 $\lambda_1\frac{dz_1}{z_1}+\lambda_2\frac{dz_2}{z_2}$ 定义的叶状结构共轭到由 $\mu_1\frac{dz_1}{z_1}+\mu_2\frac{dz_2}{z_2}$ 定义的叶状结构。

证明。 映射

$$(\mu_1\log z_1+\mu_2\log z_2)\circ\Psi = g(\lambda_1\log z_1+\lambda_2\log z_2)$$

在 $\lambda_1\frac{dz_1}{z_1}+\lambda_2\frac{dz_2}{z_2}$ 的各叶上为常数。□

因此，在情形（2c）中，若 $\mathcal{F}^\sharp$ 在 s处为庞加莱型，则它在自由分支 $\mathcal{D}$的每个奇点处也为庞加莱型。采用 E. Paul 在 [34] 中提出的类似方法，可以看出，引理5.1给出的自由分支奇点处的局部共轭可以沿整个自由分支拼接成全局 $\mathcal{C}^0$-共轭。最后，对于约化中含有庞加莱型自由分支且拓扑共轭的两个叶状结构，在自由分支的奇点处等式（22）可能不成立。这一现象迫使我们排除情形（2c），并作出如下假设：不存在自由动力学分支：

(NFC) $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的动力学分支中不存在这样的分支：它没有 $\mathcal{F}^\sharp$ 的节点奇点，且其紧致不可约分支恰好包含 $\mathcal{F}^\sharp$ 的两个奇点。

注意，若 $\phi:\ \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 是广义曲线之间的拓扑共轭，且 $\mathcal{F}$满足（NFC），那么根据推论 $\mathcal{G}$，1.12，它也满足（NFC）。

5.4. **大型动力学分支**。 为了在情形（22）下得到等式（3），我们要求 $\mathcal{F}$ 满足以下**横向刚性**假设：

（TR）若 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的一个动力学分支包含一个具有至少3个 $\mathcal{F}^\sharp$奇点的不可约分支，则它也包含一个整体单值群拓扑刚性的不可约分支，例如不可解的整体单值群。

我们回顾一下，Diff(ℂ,0)的一个芽群 G 称为**拓扑刚性**，如果任何将该群与Diff(ℂ,0)的另一子群共轭的保定向同胚芽必为全纯映射。D. Cerveau和P. Sad证明，具有一般线性部分的非阿贝尔子群是拓扑刚性的 [8] ；根据Y. Ilyashenko、A.A. Shcherbakov和I. Nakai [13, 41, 31] 的经典结果，任何不可解子群都是拓扑刚性的。上述条件（TR）是克鲁尔泛型的 [17]。我们回顾一下，若空间Ω上的一个性质$\mathscr{P}$ 满足下述条件，则称其为Ω中关于（$\mathbb{C}^2$,0）的全纯微分1-形式芽的克鲁尔泛型性质：它在Ω的克鲁尔拓扑下是开且稠密的，即

(a) 对于任意 $\omega\in\Omega$ 以及任意 $p\in\mathbb{N}$，存在满足 $\mathscr{P}$ 的 $\eta\in\Omega$，其在 0 处与 ω 具有相同的 p 阶 jet；
(b) 如果 ω 满足 $\mathscr{P}$，那么存在 $q\in\mathbb{N}$，使得每个与 ω 具有相同 q 阶 jet 的 $\xi\in\Omega$ 也满足 $\mathscr{P}$。

条件 (TR) 的意义在于，我们可以应用 J. Rebelo 在 [37], 中的主定理，其证明对于以下扩展表述仍然成立：

定理 5.2 （横向刚性定理）。 设 $\mathcal{F}$ 是一个广义曲线，且 $\mathcal{D}$ 是 $S^\sharp_{\mathcal{F}}$ 的一个动力学分支，其中包含一个整体单值群具有拓扑刚性的不可约分支。那么， $\mathcal{F}$ 沿 $\mathcal{D}$ 具有横向刚性，其含义如下：对于任意将 $\mathcal{F}$ 共轭到另一个叶状结构胚的同胚 $\phi : (\mathbb{C}^2、0) \to (\mathbb{C}^2、0)$，若该同胚保持环境空间和叶的定向，则存在 $\mathcal{D}\backslash\mathcal{N}$ 的一个开邻域 W，使得 ϕ 在 $E_{\mathcal{F}}(W) \backslash\{0\}$ 的每一点处都横向全纯，其中 $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 是 $\mathcal{F}^\sharp$ 的节点奇点集。

回忆一下，若同胚芽 ϕ 将两个叶状结构 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ =$\phi(\mathcal{F})$ 共轭，则称其在点 p**处横向全纯**，如果对于任意的淹没第一积分芽 $u : (\mathbb{C}^2, p) \to (\mathbb{C}, 0)$ 和 $v : (\mathbb{C}^2, \phi(p)) \to (\mathbb{C},0)$，都存在一个双全纯映射芽 $\phi^\flat : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C},0)$，使得 $\phi^\flat \circ u = v \circ \phi$。

注意，对于仅定义在穿孔分离曲线$C \setminus \{0\}$某个邻域上的 $\mathcal{C}^0$-共轭，横向全纯性不足以保证沿 C的严格变换的 Camacho-Sad 指数不变。一个简单的反例是：对中心为 $\{0\}$ 的 E 进行爆破，其中 C 光滑；取 $\mathcal{G}$ 为 E 作用下 C 的严格变换 C' 与例外除子 E^{-1} (0)的交点 p 处$E^{-1}\mathcal{F}$ 的芽。在邻域 V 内限制后， E 是一个将 $\mathcal{G}_{|V}$共轭到 $\mathcal{F}_{|E(V)}$的双全纯映射。然而，取 $\phi = (E_{|V})^{-1}$，我们有

$$\mathrm{CS}(\mathcal{F}, C, 0) = \mathrm{CS}(\phi(\mathcal{F}), C', p) + 1\,,$$

见命题 2.1] [7, 。因此，我们必须将共轭与 C 在 $\mathcal{F}$-适当曲线 S之补集的基本群中的外围结构相容，作为一项额外假设。

5.5. 外围结构与指数不变性定理。我们固定交点 s 处的局部坐标 (u, v)，其中 $\mathcal{C}$ 是 C 的严格变换，与例外除子 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 相交；使得在 s 附近，方程 $v = 0$ 定义 $\mathcal{C}$，而 $u = 0$ 定义 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$；我们考虑环路 m（分别为 p），它们具有公共原点 $a := (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$，由 $u(t) = \varepsilon_1, v(t) = \varepsilon_2 e^{2\pi i t}$ 定义；（分别）由 $u(t) = \varepsilon_1 e^{2\pi i t}, v(t) = \varepsilon_2, t \in [0, 1]$ 定义；我们选取足够小的 ε_1 和 ε_2，使得环路 $E_{\mathcal{F}} \circ m$ 和 $E_{\mathcal{F}} \circ p$ 包含在叶状结构 $\mathcal{F}$ 的米尔诺球 B 内；我们固定 $b \in B \setminus S$，并取一条路径 α，位于 $B \setminus S$ 中，将 a 与 b 连接起来。我们将 C 在 $\pi_1(B \setminus S, b)$ 中的外围结构称为两类 $\mathbf{m}$、$\mathbf{p} \in \pi_1(B \setminus S, b)$，它们分别称为子午线和平行线，由路径定义

$$\alpha^{-1} \vee (E_{\mathcal{F}} \circ m) \vee \alpha \quad \text{and} \quad \alpha^{-1} \vee (E_{\mathcal{F}} \circ p) \vee \alpha\,.$$

由于子群 $\langle \mathbf{m}, \mathbf{p} \rangle \subset \pi_1(B \setminus S, b)$ 在 $\pi_1(B \setminus S, b)$ 中等于其正规化子，因此 [12] α 的选择不会影响 $\mathbf{m}$ 和$\mathbf{p}$，参见[21,推论 6.1.4]。

定理 5.3。 设 ϕ 是定义在 $\mathbb{C}^2$ 中 $C \setminus \{0\}$ 的开管状邻域 V 上的一个同胚，并且将 $\mathcal{F}_{|V}$ 共轭到 $\mathcal{G}_{|\phi(V)}$。若 ϕ 是横向全纯的，且分别将 C 的外围结构中的子午线和平行线映射为 $\phi(C)$ 的子午线和平行线，则 $\mathcal{F}^\sharp$ 沿 $E_{\mathcal{F}}$ 对 C 的严格变换的 *Camacho-Sad* 指数，等于 $\mathcal{G}^\sharp$ 沿 $E_{\mathcal{G}}$ 对 $\phi(C)$ 的严格变换的 *Camacho-Sad* 指数。

证明。 设 (u, v)（分别为 (u', v')）是以严格变换 $\mathcal{C} = \{v = 0\}$ （分别为 $\mathcal{C}' = \{v' = 0\}$）与例外除子 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}} = \{u = 0\}$ （分别为 $\mathcal{E}_{\mathcal{G}} = \{u' = 0\}$）的交点 s（分别为 s'）为中心的局部坐标，其中 $\mathcal{C} = \{v = 0\}$ （分别为 $\mathcal{C}' = \{v' = 0\}$）是 C （分别为 $\phi(C)$）的严格变换。根据 ϕ 的横向全纯性，$\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 的 holonomy（单值化）解析共轭，因此

$$\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, \mathcal{C}, s) - \mathrm{CS}(\mathcal{G}^\sharp, \mathcal{C}', s') \in \mathbb{Z}. \tag{24}$$

设 Γ_n 是环路 $t \mapsto (\varepsilon_1 e^{2i\pi nt}, 0)$ 在 $\mathcal{F}^\sharp$的一条叶上的提升。公式（21）推出

$$\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, \mathcal{C}, s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2i\pi n} \int_{\Gamma_n} \frac{dv}{v}.$$

设 ξ_n 是一条包含在 $\{u = \varepsilon_1, 0 < |v| < 1/n\}$ 中的路径，它连接点 $\Gamma_n(1)$ 和 $\Gamma_n(0)$，并且 $v \circ \xi_n$ 的辐角变化有界，因此

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i\pi n} \int_{\xi_n} \frac{dv}{v}\right) = 0$$

and

$$\mathrm{Re}(\mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, \mathcal{C}, s)) = \lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n}, \quad \text{where} \quad I_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_n \vee \xi_n} \frac{dv}{v} \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

$E_{\mathcal{F}}(\Gamma_n \vee \xi_n)$ 的同伦类可利用 C 在 $\pi_1(V \setminus C, b_n) \hookrightarrow \pi_1(B \setminus S, b_n)$、$b_n = E_{\mathcal{F}}(\Gamma_n(0))$ 的外围结构 $\mathbf{m}_n$，$\mathbf{p}_n$，分解为 $I_n\mathbf{m}_n + n\mathbf{p}_n$。经过同伦后，我们可以假设 $\phi^\sharp \circ u = u' \circ \phi^\sharp$ 位于圆 $\{|u| = \varepsilon_1, v = 0\}$ 的一个邻域内，其中 $\phi^\sharp = E_{\mathcal{G}}^{-1} \circ \phi \circ E_{\mathcal{F}}$。由于 ϕ 是横向全纯的，$v' \circ \phi^\sharp \circ \xi_n$ 的辐角变化有界，因此我们有

$$\mathrm{Re}(\mathrm{CS}(\mathcal{G}^\sharp, \mathcal{C}', s')) = \lim_{n\to\infty} \frac{I'_n}{n}, \quad \text{where} \quad I'_n := \frac{1}{2i\pi} \int_{\phi^\sharp(\Gamma_n \vee \xi_n)} \frac{dv'}{v'} \in \mathbb{Z}, \tag{26}$$

且 $\phi(E_{\mathcal{F}}(\Gamma_n \vee \xi_n))$ 的同伦类可分解为 $I'_n\mathbf{m}'_n + n\mathbf{p}'_n$，其中$\mathbf{m}'_n$，$\mathbf{p}'_n$ 是 $\pi_1(\phi(V \setminus C)\ \phi(b_n)) \hookrightarrow \pi_1(B' \setminus S',\ \phi(b_n))$ 中 C' 的外围结构。根据假设，群态射

$$\phi_* : \pi_1(V \setminus C, b_n) \to \pi_1(\phi(V \setminus C), \phi(b_n))$$

将$\mathbf{m}_n$ 映射到 $\mathbf{m}'_n$，并将$\mathbf{p}_n$ 映射到 $\mathbf{p}'_n$。由于

$$\phi_*(I_n\mathbf{m}_n + n\mathbf{p}_n) = I_n\mathbf{m}'_n + n\mathbf{p}'_n,$$

我们得到 $I_n = I'_n$。因此，关系（24）、（25）和（26）给出等式 CS($\mathcal{F}^\sharp$，$\mathcal{C}$，s) =CS($\mathcal{G}^\sharp$，$\mathcal{C}'$，s')。□

此外，全局同胚总是满足外围结构假设：

命题 *5.4.* [21, 定理 *6.2.*1] 考虑原点处曲线芽 S 和 S' 的 *Milnor* 球 B 和 B'，它们分别位于 $\mathbb{C}^2$ 和 $b \in B \setminus S$ 中。对于任意同胚 $\phi: B \to \phi(B) \subset B'$，满足 $\phi(S \cap B) = S' \cap \phi(B)$，映射 $\phi_*: \pi_1(B \setminus S, b) \to \pi_1(B' \setminus S', \phi(b))$ 将 $\pi_1(B \setminus S, b)$ 中任意不可约分支 C *of* S 的外围结构的子午线和平行线，分别映射为 $\pi_1(B' \setminus S', b)$ 中 $\phi(C)$ 的外围结构的子午线和平行线。

定理 5.3、命题 5.4 以及前面对小动力学分量的分析给出：

定理 5.5（指标不变性定理）。对于满足假设 *(NFC)* 和 *(TR)* 的广义曲线，奇点约化后的 *Camacho-Sad* 指数是拓扑不变量，也就是说，对于任意 $\mathcal{C}^0$-共轭 ϕ: $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$，等式 *(22)* 均成立。

该定理的假设是最小的。正如我们在 §5.3 中已经看到的，条件 (NFC) 是必要的。不满足条件 (TR) 的反例可由对数叶状结构族给出，其拓扑分类由 E. Paul 得到：

定理 5.6 ([35,定理 3。5])。设 ω_t 是对数形式的芽族

$$f_1 \cdots f_p \sum_{j=1}^{p} \lambda_{j,t} \frac{df_j}{f_j}, \quad t \in (\mathbb{C}, 0),$$

定义在$(\mathbb{C}^2,0)$上，其留数$\lambda_{j,\,t}\in\mathbb{C}$之间不存在系数为正整数的关系。若存在一个$\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$的族芽$\{g_t,t\in(\mathbb{C},0)\}$，使得每个映射$g_t$都将$2i\pi\lambda_{j,\,0}$映入$2i\pi\lambda_{j,\,t}$，则叶状结构族芽$\{\omega_t,t\in(\mathbb{C},0)\}$是拓扑平凡的。

6. 优越性定理与拓扑模空间

6.1. 优越性定理。 在满足 (NFC) 和 (TR) 的叶状芽集合上，$\mathcal{C}^0$-共轭与$\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-共轭的等价关系一致：

定理6.1 (优越性定理)。 设$\mathcal{F}$和$\mathcal{G}$是$0\in\mathbb{C}^2$处两个拓扑等价的叶状结构芽，满足§5.3和§5.4中所述的*(NFC)*和*(TR)*性质。那么以下断言等价：

(1) 存在同胚芽$\phi:(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^2,0)$，将$\mathcal{F}$共轭到$\mathcal{G}$；*(2)* 存在同胚芽$\Phi:(M_{\mathcal{F}},\mathcal{E}_{\mathcal{F}})\to(M_{\mathcal{G}},\mathcal{E}_{\mathcal{G}})$，将$\mathcal{F}^\sharp$共轭到$\mathcal{G}^\sharp$；此外，$\Phi$在$\mathcal{F}^\sharp$的每个非节点型奇点处均为全纯，并且在$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$的每个对$\mathcal{F}^\sharp$而言正则且不包含于*dicritical*分支中的点处均为横向全纯。

证明。 只需使用指数不变性定理5.5、分类定理 4.15 和横向刚性定理 5.2，如图所示 10。□

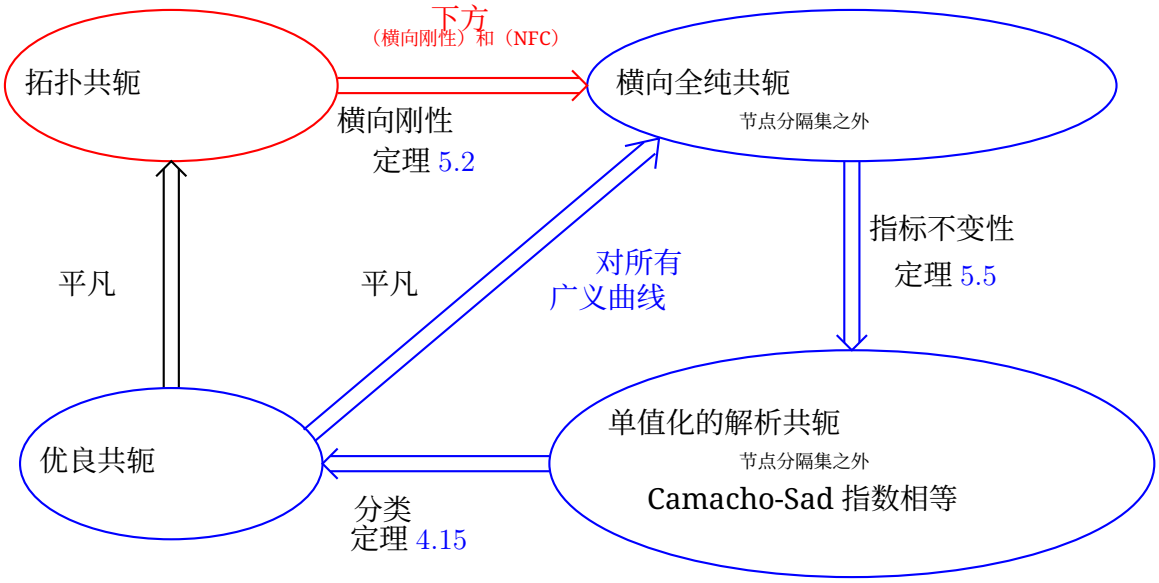


图1优越性定理的证明策略6.1。

6.2.**分类问题：完备族与模空间。** 优越性定理将$\mathbb{C}^2$原点处叶状结构芽的拓扑分类问题，归结为优良同胚芽下的分类问题。后者可表述如下。我们称**半局部不变量**是叶状芽$\mathcal{F}$的分离曲线拓扑、$\mathcal{F}^\sharp$的 Camacho-Sad 指数，以及$\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$的不变不可约分支的整体表示态射所构成的数据。这些数据都是$\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-不变量，因此在优越性定理 6.1的假设下是拓扑不变量。记$\mathrm{SL}(\mathcal{F})$为所有与$\mathcal{F}$具有相同半局部不变量的叶状芽的集合。$\mathcal{C}^0$-分类的目标是构造一个自然的叶状芽集合，使其与$\mathrm{SL}(\mathcal{F})$中任意叶状结构的拓扑类的交非空且全不连续。对于一大类叶状芽，一个完备

对这一问题的解答见论文 [23, 24, 25]，这些论文构造出 SL($\mathcal{F}$) 中的一个叶状结构族，该族依赖于一个在最小维数复流形中取值的参数，并且关于该参数全纯。该族具有自然的分解性质：SL($\mathcal{F}$)中的任何其他全纯族都可由此分解；此外，该族中拓扑类型的冗余度最小，且可精确描述。

秉承特希米勒理论的思路，对于我们的模问题，为每个叶状芽赋予一个标记是方便的。为此，我们固定一个广义曲线型叶状芽 $\mathcal{F}_0$ ，并将 $\mathcal{E}^\diamond := (\mathcal{E},\ \Sigma)$这一对简记为$(\mathcal{E}_{\mathcal{F}_0},$ 奇点集$(\mathcal{F}_0^\sharp))$。一个由 $\mathcal{E}^\diamond$**标记的叶状芽**是指一对$(\mathcal{F},\ f)$，其中 $\mathcal{F}$是$(\mathbb{C}^2,\ 0)$处的叶状芽，且f 是从 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{E}_{\mathcal{F}}$ 的同胚，使得

$$f(\Sigma) = \mathrm{Sing}(\mathcal{F}^\sharp) \quad \text{and} \quad f(D)\cdot f(D') = D\cdot D'$$

对于 $\mathcal{E}$的任意一对不可约分支$(D,\ D')$均成立。若两个 $\mathcal{E}^\diamond$-标记 f 和 g 对应于同一个叶状结构 $\mathcal{F}$，则当 $g^{-1}\circ f$ 可通过保持 Σ中每一点不动的同伦同伦至恒等映射时，称它们**等价**。若存在一个 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-共轭芽 $\Phi\colon (M_{\mathcal{F}},\ \mathcal{E}_{\mathcal{F}}) \to (M_{\mathcal{G}},\ \mathcal{E}_{\mathcal{G}})$，使得 g和 $\Phi\circ f$是 $\mathcal{G}$的等价 $\mathcal{E}^\diamond$-标记，则称两个由 $\mathcal{E}^\diamond$标记的叶状芽$(\mathcal{F},\ f)$和$(\mathcal{G},\ g)$为 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$**-共轭**。

定义 6.2. 若两个由 $\mathcal{E}^\diamond$ 标记的叶状芽$(\mathcal{F}, f)$和$(\mathcal{G}, g)$具有相同的半局部类型，则称

(1) 对任意不可约分支 $D\in\mathcal{E}$ 及任意 $s\in\Sigma\cap D$，*Camacho-Sad* 指数相等：$\mathrm{CS}(\mathcal{G}^\sharp,$ $g(D)\ g(s)) = \mathrm{CS}(\mathcal{F}^\sharp, f(D)\ f(s))$；*(2)* 对任意满足 $D\cap\Sigma\neq\emptyset$ 的不可约分支 $D\in\mathcal{E}$，由标记诱导的群态射与

$$H_D^{\mathcal{F}}\circ f_* \ \ and \ \ H_D^{\mathcal{G}}\circ g_* \ :\ \pi_1(D\setminus\Sigma,\cdot)\longrightarrow \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$$

沿 $f(D)$和 $g(D)$ 的叶状结构 $\mathcal{F}^\sharp$ 和 $\mathcal{G}^\sharp$ 的整体单值态射 $H^{\mathcal{F}}_{f(D)}$ 与 $H^{\mathcal{G}}_{g\ (D)}$复合后，相差一个Diff($\mathbb{C}$,0)的内自同构。

为了用有限维流形“参数化”具有固定半局部类型的带标记叶状芽的 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-共轭类集合，我们需要一个称为**有限型**的附加假设。该概念最初由 [23] 引入，作为对偶图 $\mathrm{A}_{\mathcal{F}}$ 一种适当定向的组合性质；随后在 [23, 24] 中被重新诠释为自然关联的上同调空间 $\mathcal{F}(\ \tau)$ 的有限维数。此假设并不十分苛刻，因为在定义广义曲线的 1-微分形式集合中，有限型叶状结构构成一个 Krull拓扑下的开稠密子集，参见[29, 定理 6.2.1] 和 [23, 注 2.5]。

定理 6.3. [25, 定理 3.7] 设$(\mathcal{F}, f)$是一个广义曲线型的带标记有限型叶状芽。则存在一个等奇异带标记叶状芽族

$$(\mathcal{F}_{z,d}, f_{z,d})_{(z,d)\in\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}}$$

使得

(1) D 是圆$\mathbb{U}$的全不连通子群的有限乘积的一个商，且 $\tau=\tau(\mathcal{F})$，*(2)* 对于任何与 $(\mathcal{F},$ $f)$ 具有相同半局部类型的带标记叶状芽 $(\mathcal{G}, g)$，存在 $(z, d)\in\mathbb{C}^\tau\times D$，使得 $(\mathcal{G}, g)$ 与 $(\mathcal{F}_{z,d}, f_{z,d})$ 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-共轭的，*(3)* 如果 $(\mathcal{G}_t, g_t)_{t\in P}$ 是一个以连通流形 P 为参数空间、满足 $H^1(P,\mathbb{Z}) = 0$ 的等奇异带标记叶状芽族，那么对于任意 $t_0\in P$ 以及满足 $(\mathcal{G}_{t_0}, g_{t_0})$ 与 $\mathcal{F}_{z_0,d_0}$ 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$- 共轭的 $(z_0, d_0)\in\mathbb{C}^\tau\times D$，存在唯一的全纯映射 $\lambda\colon P\to\mathbb{C}^\tau\times D$，使得 $\lambda(t_0) = (z_0, d_0)$，并且对任意$t\in P$，带标记叶状芽 $(\mathcal{G}_t, g_t)$ 与 $(\mathcal{F}_{\lambda(t)}, f_{\lambda(t)})$ 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$- 共轭的，

(4) 在 $W_{t'}$ 任意点 $t' \in P$的邻域内， $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$带标记叶状芽 $(\mathcal{G}_t, g_t)$ 与 $(\mathcal{F}_{\lambda(t)}, f_{\lambda(t)})$ 在断言（*3*）中的共轭可由优良同胚 Φ_t 实现，且连续依赖于 $t \in W_{t'}$。

.....的概念**带标记的叶状结构芽族**，由 [25, §2。2], 引入，是标记与整个例外除子关于参数的局部拓扑平凡性之间的一种相容性性质。等奇异性则在 [24, §3]中明确定义；基本而言，它意味着该族是局部等约化的，且族中的所有叶状结构芽具有相同的半局部类型。定理6.3 中的断言（4）可由 [25, 定理 44]推出。

最后，我们描述族 $(\mathcal{F}_{z,d}, f_{z,d})_{(z,d)\in\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}}$ 中 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-类的冗余。我们将 $(\mathcal{F}, f)$ 的 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$**-模空间定义**为如下集合

$$\mathrm{Mod}(\mathcal{F}, f) := \{\, [\mathcal{G}, g] \mid (\mathcal{G}, g) \text{ and } (\mathcal{F}, f) \text{ have same semi-local type}\}$$

由 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-共轭类 $[\mathcal{G}, g]$ 组成的集合，其中的叶状结构 $(\mathcal{G}, g)$ 由 $\mathcal{E}^\diamond$ 标记。对于任意等奇异的带标记族 $\mathcal{G}_P{:=}(\mathcal{G}_t, g_t)_{t\in P}$，其叶状结构芽与 $(\mathcal{F}, f)$ 具有相同的半局部类型，我们将其关联到**模映射**

$$\mathrm{mod}_{\mathcal{G}_P} : P \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{F}, f)\,, \qquad t \mapsto [\mathcal{G}_t, g_t]\,.$$

定理 6.4. [23, 定理 D] 设$(\mathcal{F}, f)$是一个属于广义曲线的带标记的有限型叶状芽。在$\mathrm{Mod}(\mathcal{F}, f)$上存在自然的阿贝尔群结构，由以下正合列给出

$$0 \to \mathbb{Z}^p \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}^\tau \xrightarrow{\Lambda} \mathrm{Mod}(\mathcal{F}, f) \xrightarrow{\beta} \mathbf{D} \to 0$$

并且对于 β 的任意截面 ζ，都存在一个等奇异带标记叶状芽族

$$\mathcal{F}_{\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}} := (\mathcal{F}_{z,d}, f_{z,d})_{(z,d)\in\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}}$$

其叶状芽的半局部类型与$(\mathcal{F}, f)$相同，并且满足

(1) 定理*6.3*中的所有断言均成立；*(2)* 模空间映射 $\mathrm{mod}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}}}$ 是满射，且对于任意 $(z, d) \in \mathbb{C}^\tau \times \mathbf{D}$，均有

$$\mathrm{mod}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}}}(z, d) = \Lambda(z) \cdot \zeta(d)$$

其中 $\cdot$是$\mathrm{Mod}(\mathcal{F}, f)$上的群运算。

请注意，$\mathrm{mod}_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}}}$ 的满射性等价于定理 6.3中的性质（2）。

定理 6.4 的一个直接推论是对族 $\mathcal{F}_{\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}}$中$\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-类冗余的明确描述：

推论 6.5. 带标记的族 $\mathcal{F}_{\mathbb{C}^\tau\times\mathbf{D}}$ 中的两个带标记的叶状结构芽$(\mathcal{F}_{z,d}, f_{z,d})$ 和$(\mathcal{F}_{z',d'}, f_{z',d'})$ 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{ex}}$-共轭的，当且仅当 $d = d'$，并且存在 $N \in \mathbb{Z}^p$ 使得$z' = z + \alpha(N)$。

参考文献

[1] C. Briot 和 J.C. Bouquet，关于由微分方程定义的函数的研究。 J. 综合理工学院 **21** （1856），134–198。[2] F. Cano，平面向量场的去奇异化。 美国数学会汇刊，第**296**卷，第1期，（1986），83–93。[3] J. Cano，奇异全纯向量场不变曲线的构造。 美国数学会会刊，第**125** 卷（1997），2649–2650。[4] C. Camacho、A. Lins-Neto 和 P. Sad，全纯向量场的拓扑不变量与等去奇异化。《微分几何杂志》**20** （1984），第1期，143–174。[5] C. Camacho 和 R. Rosas，全纯叶状结构奇点附近的不变集。《遍历理论与动力系统》**36** （2016），第8期，2408–2418。[6] C. Camacho 和 P. Sad，具有共振的全纯流的拓扑分类与分岔，定义于 $\mathbb{C}^2$。《数学发明》**67** （1982），447–472。

[7] *C. Camacho* 和 *P. Sad*，全纯向量场奇点处的簇。《数学年刊》（第*2*辑）*115*卷，第*3*期（*1982*），*579–595*。[8] *D. Cerveau* 和 *P. Sad*，复平面上奇异微分形式的模问题。《*Comment. Math. Helv.*》*61*卷（*1986*），第*2*期，*222–253*。[9] *R. Douady* 和 *A. Douady*，代数与伽罗瓦理论。*Cassini*出版社（*2005*）。[10] *H. Dulac*，关于微分方程奇点的研究。*J.* 综合理工学院 *2*（*1904*），*1–125*。[11] *P. M. Elizarov*，二维复平面上退化初等奇点邻域内解析微分方程的轨道拓扑分类。《苏联数学》*50*（*1990*），*1447–1468*。[12] *W. Heil*，三维流形中不可压缩曲面的正规化子。《格拉斯尼克数学杂志》*16*（*1981*），*145–150*。[13] *Y. S. Ilyashenko*，复射影平面上解析微分方程相图的拓扑。*Trudy Sem. Petrovsk. 4*（*1978*），*83–136*。[14] *W.H. Jaco* 和 *P.B. Shalen*，三维流形中的塞弗特纤维空间。美国数学会回忆录 *21*，*220*（*1979*）。[15] *K. Johannson*，具有边界的三维流形之间的同伦等价。《数学讲义》*761*（*1979*）。[16] *D.T. Lê*、*F. Michel* 和 *C. Weber*，极曲线与平面曲线的拓扑。*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) 24*（*1991*），第*2*期，*141–169*。[17] *L. Le Floch*，奇异叶状结构的一般刚性。*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) 31*（*1998*），第*6*期，*765–785*。[18] *F. Loray*，二维全纯叶状结构奇点的伪群。*Ensaios Matemáticos 36*（*2021*），*53–274*。*doi.org/10.21711/217504322021/em362*。[19] *D. Marín* 和 *J.-F. Mattei*，奇异全纯叶状结构芽的叶的不可压缩性。*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) 41*（*2008*），第*6*期，*855–903*。[20] *D. Marín* 和 *J.-F. Mattei*，平面曲线芽的映射类群。*Topology Appl. 158*（*2011*），第*11*期，*1271–1295*。[21] *D. Marín* 和 *J.-F. Mattei*，全纯叶状结构芽的单值化与拓扑分类。*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) 45*（*2012*），第*3*期，*405–445*。[22] *D. Marín* 和 *J.-F. Mattei*，紧除子沿线奇异全纯叶状结构的拓扑。*J. Singul. 9*（*2014*），*122–150*。[23] *D. Marín*、*J.-F. Mattei* 和 *E. Salem*，全纯叶状结构芽的拓扑模空间，《国际数学研究通知》，第*2020*卷，第*23*期（*2020*），*9228–9292*。[24] *D. Marín*、*J.-F. Mattei* 和 *E. Salem*，全纯叶状结构芽的拓扑模空间 *II*：泛变形，*https://arxiv.org/abs/* 2105 12688。[25] *D. Marín*、*J.-F. Mattei* 和 *E. Salem*，全纯叶状结构芽的拓扑模空间 *III*：完备族，*https://arxiv.org/abs/* 2201 07479。[26] *J. Martinet* 和 *J.-P. Ramis*，一阶共振非线性微分方程的解析分类。*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) 16*（*1984*），*571–621*。[27] *J.-F. Mattei* 和 *R. Moussu*，全纯整体与第一积分。*Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) 13*（*1980*），第*4*期，*469–523*。[28] *J.-F. Mattei* 和 *E. Salem*，*($\mathbb{C}^2$, 0)* 上一般叶状结构的拓扑与解析不变量完备系统。《数学研究快报》*4*（*1997*），第*1*期，*131–141*。[29] *J.-F. Mattei* 和 *E. Salem*，全纯叶状结构的局部形式模。（*2004*）*arXiv:math/0402256v*1 [*math.DS*], 89 页。[30] *J. Milnor*，复超曲面的奇点。《数学年刊研究》*61*（*1968*）。[31] *I. Nakai*，*($\mathbb{C}$, 0)* 上不可解动力系统的分离曲线。*Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44*（*1994*），第*2*期，*569–599*。[32] *L. Ortiz-Bobadilla*、*E. Rosales-González* 和 *S.M. Voronin*，论 *Camacho-Sad* 定理：分离曲线的存在性。《国际数学杂志》*21*（*2010*），第*11*期，*1413–1420*。[33] *L. Ortiz-Bobadilla*、*E. Rosales-González* 和 *S.M. Voronin*，扩展 *holonomy* 与消失整体群的拓扑不变性。《动力与控制系统杂志》*14*（*2008*），*299–358*。[34] *E. Paul*，闭对数形式的拓扑研究。《数学发明》*95*（*1989*），*395–420*。[35] *E. Paul*，一般对数形式芽的拓扑分类。*Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 39*（*1989*），*909–927*。[36] *R. Pérez Marco*，不动点与圆映射。《数学学报》*179*（*1997*），*243–294*。[37] *J. Rebelo*，论*($\mathbb{C}^2$, 0)*上奇异叶状结构的横向刚性。《遍历理论与动力系统》*31*（*2011*），第*3*期，*935–950*。[38] *R. Rosas*，构造延拓至除子的等价以及射影整体的拓扑不变性。《*Comment. Math. Helv.*》*89*卷，第*3*期（*2014*），*631–670*。

[39] *R. Rosas*，全纯叶状结构的结节分隔集。*Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 68*，第*2*期（*2018*年），*511–539*页。[40] *A. Seidenberg*，微分方程 *Ady = Bdx* 的奇点约化。*Amer. J. Math. 90*，第*1*期（*1968*年），*248–269*页。[41] *A.A. Shcherbakov*，保形映射芽之非交换群的拓扑与解析共轭。*Trudy Sem. Petrovsk. 10*（*1984*年），*170–192*、*238–239*页。[42] *L. Teyssier*，复平面上可呈现的叶状结构芽。*Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 46*（*2015*年），第*2*期，*275–329*页。[43] *M. Toma*，*Camacho–Sad* 定理的一个简短证明。*L'Enseignement Mathématique*，*45*（*1999*年），*311–316*页。[44] *A. van den Essen*，可微方程 $Ady = Bdx$ 的奇点约化。*Springer* 讲义 *712*（*1979*年），*44–59*页。[45] *F. Waldhausen*，关于足够大的不可约三维流形。*Ann. of Math. (2) 87*（*1968*年），*56–88*页。[46] *O. Zariski*，关于代数型奇点的拓扑。*Amer. J. Math. 54*，第*3*期（*1932*年），*453–465*页。

巴塞罗那自治大学数学系，*E-08193* 塞尔达尼奥拉-德尔巴列斯（巴塞罗那），西班牙；数学研究中心，贝拉特拉校区，*E-08193* 塞尔达尼奥拉-德尔巴列斯，西班牙。电子邮箱：*David.Marin@uab.cat*

图卢兹数学研究所，保罗·萨巴蒂埃大学，*118, Route de Narbonne*，*F-31062 Toulouse Cedex 9*，法国。电子邮箱：*jean-francois.mattei@math.univ-toulouse.fr*

索邦大学、巴黎大学、法国国家科学研究中心、朱西厄数学研究所—巴黎左岸，*F-75005* 巴黎，法国。电子邮箱：*eliane.salem@imj-prg.fr*