物理信息驱动的超弹性基准测试

Vahidullah Tac[1], Kevin Linka[2], Francisco Sahli-Costabal[3], Ellen Kuhl[2] 和 Adrian Buganza Tepole[1,4]

[1]普渡大学机械工程学院，美国西拉斐特[2]斯坦福大学机械工程系，美国斯坦福[3]智利天主教大学机械工程系，智利圣地亚哥[4]普渡大学韦尔登生物医学工程学院，美国西拉斐特

arXiv:2301.10714v1 [cs.CE] 20 Jan 2023

摘要

数据驱动方法改变了我们理解和模拟材料的方式。然而，尽管这些方法具有无与伦比的灵活性，但也存在局限，例如外推能力减弱、过拟合以及违反物理约束。近期的发展催生了能够自动满足这些要求的建模框架。本文回顾、扩展并比较三种前景良好的数据驱动方法：本构人工神经网络（CANN）、输入凸神经网络（ICNN）和神经常微分方程（NODE）。我们将应变能势表示为不变量的凸非递减函数之和及其线性组合。三种方法共享这一能量展开形式，并由此保证自动满足客观性和多凸性，这对于超弹性至关重要。为对这些方法进行基准测试，我们使用橡胶和皮肤的应力-应变数据对其进行训练。三种方法都能近乎完美地拟合数据，且不会过拟合，并具备一定的外推能力。值得注意的是，尽管对实测应力数据的预测几乎完全相同，这些方法得到的能量函数却各不相同。最显著的差异体现在二阶导数上，这可能会影响数值求解器的性能。在这些基准测试所用的丰富数据集上，模型展现出预期的参数数量与准确度之间的权衡。总体而言，CANN、ICNN 和 NODE 在不牺牲物理约束的前提下，保留了其他数据驱动方法的灵活性和准确度。因此，这些方法是模拟任意超弹性材料行为的理想选择。

关键词：物理信息机器学习、多凸性、非线性力学、神经网络、本构模型

引言

个性化手术等生物医学工程应用的前沿，需要准确的数学模型来描述材料特定行为 [1]。同样，基于软材料的人工工程系统也需要高精度的预测模拟[2]。用于这些应用的材料具有极强的非线性，且会发生大变形，例如橡胶和皮肤。然而，尽管数十年来人们一直致力于为这些材料开发本构方程，但由于专家构建的模型存在固有局限，至今仍没有适用于它们的定论模型 [3]。传统材料建模将预测

力学响应限制在一组狭窄的函数项中，几乎不可能充分捕捉数据。另一方面，神经网络等数据驱动方法是通用逼近器，几乎可以完美拟合复杂响应的力学行为数据 [4, 5]。不过，数据驱动方法也有其缺点。最重要的是，若将橡胶和许多生物材料的响应视为超弹性，则其力学响应完全由一个标量势确定，而该标量势必须满足客观性和多凸性条件 [6]。这些物理约束对于实现稳健的大规模模拟、根据数据进行外推以及避免过拟合至关重要 [7]。然而，现成的机器学习工具无法先验地满足这些条件。我们回顾并改进了物理信息机器学习领域近期出现的三项发展，这些方法旨在将客观性和多凸性约束纳入其形式之中，从而使其能够先验地满足这些约束。我们考察的三种方法分别是：本构人工神经网络（CANN） [8], 神经常微分方程（NODE） [9], 和输入凸神经网络（ICNN） [10, 11]。

要表征橡胶和皮肤等非线性材料，需要在多种变形模式下对其进行测试，例如单轴、双轴、剪切，有时还包括三轴变形。通过这些测试收集到的数据是应力-应变曲线。利用机器学习处理这些数据的一种直接方法，是直接建立应变与应力之间的映射 [12]。这种策略的一个问题是无法保持客观性。一种解决方法是通过叠加任意旋转来扩充数据 [13, 10]。这种方法并不能完全保证客观性，不过，对旋转空间采样得越充分，就越能满足这一约束。对于闭式本构模型，实现客观性并非难题。专家默认通过以变形的不变量表示应变能来满足客观性 [14, 15]。沿着这一思路，也有人提出了机器学习方法 [16, 17, 18, 19]。在数据驱动方法中施加多凸性则更难处理。应变能的多凸性（以及额外的增长条件）是超弹性边值问题存在解的充分条件 [20]。多凸性是一种灵活的框架，能够兼容屈曲等不稳定材料行为。这与更严格的概念形成对比，例如要求应变能关于变形梯度具有凸性；这种要求可能违反客观性 [21]。秩一凸性等较宽松的条件弱于多凸性，不足以保证应变能存在全局极小值 [22]。许多专家模型都基于多凸性这一概念（不过，也有许多广受欢迎的模型可能违反这一条件 [23]）。数据驱动框架中也考虑过不同的凸性概念，但大多数方法选择通过损失函数将这一约束作为惩罚项加入 [17]。

CANNs 是一种新的自动化模型发现方法，其架构借鉴了传统前馈神经网络，但采用能够保持凸性的激活函数。它们还会剪除输入与后续节点之间的连接，从而使最终结果成为多凸应变能 [8]。ICNNs 也利用特定的激活函数和非负权重，基于不变量输入构建凸函数 [24, 25]。NODEs 采用不同的方法，通过利用单变量常微分方程（ODEs）轨迹的单调性，对与应变能导数相关的单调函数进行插值，而不是直接对能量进行插值 [9]。与其他方法不同，CANNs、ICNNs 和 NODEs 将物理学置于其公式的核心，以生成 consti-

满足客观性和多凸性先验的本构模型。然而，我们尚未充分了解这些不同方法在基准数据集上的表现，且通常需要对计算力学中的机器学习方法进行基准测试 [26, 27]。

在上个世纪，大变形超弹性研究的重点是橡胶建模，人们提出了数十种本构模型 [28]。近年来，软体机器人学的发展重新激发了人们的兴趣，促使他们改进由橡胶和其他弹性体制成的软体机器人的高保真仿真。例如，旨在实现复杂运动的应用，如触手式夹持器、行走软体机器人和康复软体外骨骼 [29], ，都需要精确地对材料响应进行建模。

由胶原蛋白构成的软组织具有非凡的力学性质。它们表现出类似指数函数的应力-应变响应和各向异性。这些非线性特征使皮肤等组织能够保护我们免受环境危害，同时允许我们与环境互动并进行活动 [30]。软组织，尤其是皮肤的本构模型发展，可追溯至 Lanir 和 Fung 的开创性工作 [31, 32], ，过去五十年来由此提出了大量应变能函数 [3]。直到今天，新的模型仍在不断提出 [33, 34]。尽管关于皮肤和软组织建模的文献十分丰富，但这些材料的材料响应十分复杂，因此始终未能出现明显优于其他模型的本构模型。

本文的组织结构如下。在方法部分，我们首先回顾描述超弹性材料力学行为的基本方程，重点介绍满足客观性和多凸性要求的应变能函数展开。然后，我们展示如何利用 CANN、ICNN 和 NODE 架构，在所考虑的弹性势函数族中构建材料模型。对橡胶和皮肤数据集进行训练后，结果部分将详细探讨这些模型的插值与外推能力、对模型初始化的稳健性、能量二阶导数的正则性，以及参数数量与模型精度之间的权衡。最后，我们结合计算力学领域的其他数据驱动研究讨论这些结果。

方法

多凸应变能密度函数

考虑运动 φ，梯度 **变形梯度** $= \nabla\varphi$ 包含了有关变形的所有局部信息。在超弹性框架下，应变能函数 ψ**(变形梯度)** 完全定义了材料响应。多凸性意味着，能量 ψ**(变形梯度)** 可以表示为扩展域 $\hat{}\,\psi$**(变形梯度**，变形梯度的余因子，变形梯度的行列式**) 上的凸函数。直观而言，这个扩展域涵盖了不同的变形模式：变形梯度** 衡量长度变化，变形梯度的余因子 衡量面积变化，而 $J =$ 变形梯度的行列式 衡量体积变化。直接将变形梯度及其余因子作为应变能的输入并不容易。因此，采用右柯西-格林变形张量 **右柯西-格林张量** $=$**变形梯度**$^{\intercal}$**变形梯度** ，因为它不包含叠加刚体

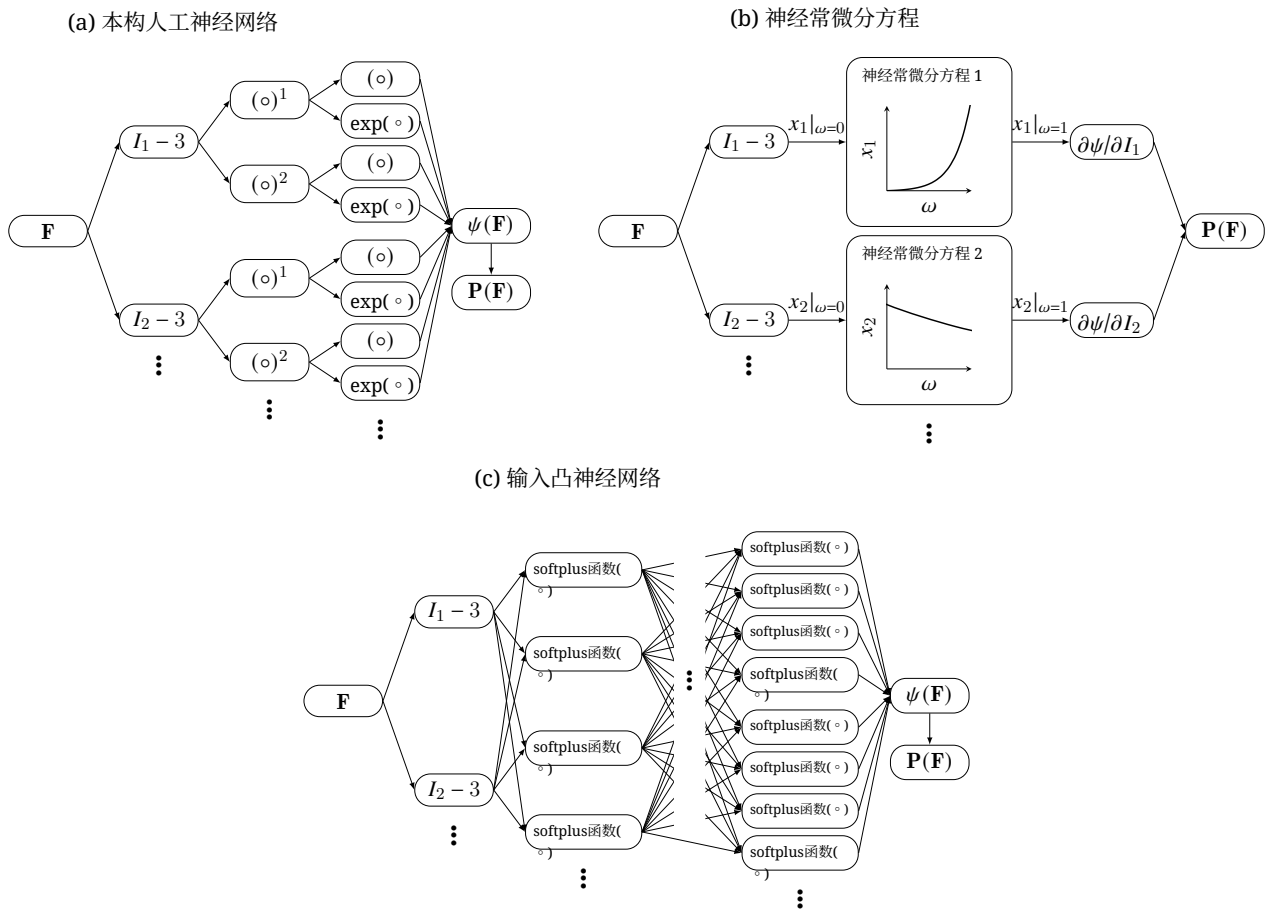


图1：图示 d　　展示深度神经网络材料模型的训练和推理过程　　.

转动的信息。此外，通过使用不变量来确保客观性

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \operatorname{tr}\mathbf{C} = \mathbf{C} : \mathbf{I} \\
I_2 &= \frac{1}{2}\left((\operatorname{tr}\mathbf{C})^2 - \operatorname{tr}\mathbf{C}^2\right) \\
I_3 &= J^2 = \det\mathbf{C} \\
I_{4a} &= \mathbf{C} : \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0\,,\ I_{4s} = \mathbf{C} : \mathbf{s}_0 \otimes \mathbf{s}_0\,.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

式（1）中的最后两个不变量仅与横向各向异性材料有关，并取决于两个材料单位向量$\mathbf{a}_0, \mathbf{s}_0$的变形。对于软组织，这些向量$\mathbf{a}_0,\ \mathbf{s}_0$ 代表胶原纤维束取向。此外，对于橡胶和皮肤等近似不可压缩材料，通常会将体积部分与等容部分分开。变形的等容部分为 $\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3}\mathbf{F}$，相应的变形

¯ ¯ ¯张量 **右柯西-格林张量** = **变形梯度**⊤**变形梯度**。等容不变量
如下

$$\begin{aligned}\bar{I}_1 &= J^{-2/3} I_1 \\ \bar{I}_2 &= J^{-4/3} I_2 \\ \bar{I}_{4a} &= J^{-2/3} I_{4a}\,,\ \bar{I}_{4s} = J^{-2/3} I_{4s}\,.\end{aligned} \tag{2}$$

基于变形的等容部分与体积部分的分解，能量可以加性地分解为

$$\psi = \psi_{\text{iso}}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_{4a}, \bar{I}_{4s}) + \psi_{\text{vol}}(J)\,. \tag{3}$$

要使这种加性分解满足多凸性，一个要求是ψ_{vol} 具有凸性，且满足 $\psi_{\text{vol}} \to \infty$ 增长条件，例如 $J \to 0$ 或 $J \to \infty$。对于完全不可压缩材料，应变能的体积部分由 $p(J-1)$替代，其中 p 是用于施加 $J = 1$的拉格朗日乘子场。在单轴或双轴变形等简单加载工况下，可以根据边界条件直接确定 p 。此外，对于不可压缩行为，能量的等容部分成为由式（1）定义的原始不变量的函数。

ˆ 为确保 ψ_{iso}具有多凸性，请注意，该条件意味着函数 ψ 在（$\mathbf{F}$，$\operatorname{cof}\mathbf{F}$，$\det\mathbf{F}$）上是凸函数。不变量 I_1 关于$\mathbf{F}$是凸的，而 I_2 关于$\operatorname{cof}\mathbf{F}$是凸的。各向异性不变量 I_{4a}、 I_{4s} 关于$\mathbf{F}$也都是凸的。此外，等容分解保留了 I_1、 I_{4a}、 I_{4s}的多凸性¯ ¯ ¯；对I_2按 J 的幂进行简单缩放，便足以维持多凸性。因此，一大类充分满足条件的多凸函数具有如下形式

$$\psi = \psi_1(\bar{I}_1) + \psi_2(\bar{I}_2) + \psi_{4a}(\bar{I}_{4a}) + \psi_{4s}(\bar{I}_{4s}) + \psi_{vol}(J)\,, \tag{4}$$

其中，每个 ψ_i a 都是其自变量的凸非减函数；如前所述， ψ_{vol} 则必须是凸函数，并随着 J的变化以适当的方式趋于无穷大。同样，对于不可压缩性，式（4）中的最后一项由拉格朗日乘子约束替代，而 ψ_i 项可视为式（1）中不变量的函数。

应变能势的应力预测

给定一个应变能函数，第二类 Piola-Kirchhoff 应力可根据标准的 Coleman-Noll 方法 [6], 得出。

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}\,. \tag{5}$$

通过推前运算可以轻松得到其他应力张量，例如名义应力或第一类 Piola-Kirchhoff 应力$\mathbf{P} = \mathbf{FS}$，或柯西应力 $\sigma = J^{-1}\mathbf{FSF}^{\top}$；它们分别出现在参考构形或变形构形下的线动量平衡强形式中。由于能量是以不变量表示的，计算

应力需要用到标准导数

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{I} \\
\frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{1}{2}(I_1\mathbf{I} - \mathbf{C}) \\
\frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} &= I_3\mathbf{C}^{-1} \\
\frac{\partial I_{4a}}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a_0}\,, \quad \frac{\partial I_{4s}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{s}_0 \otimes \mathbf{s_0}\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

与式（6）中相同的导数同样适用于等容不变量¯关于C的导数。然而，当采用体积部分与等容部分的分解时，我们需要投影

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{P} = J^{-2/3}\left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1}\right)\,. \tag{7}$$

式（7）中的张量 I 表示四阶单位张量。综上，第二类 Piola-Kirchhoff 应力的形式为

$$\mathbf{S} = 2\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = 2\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \mathbb{P} + \mathbf{S}_{\text{vol}} = \bar{\mathbf{S}} : \mathbb{P} + \mathbf{S}_{\text{vol}}\,, \tag{8}$$

with

$$\bar{\mathbf{S}} = 2\frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{I}_1}\mathbf{I} + 2\frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{I}_2}(\bar{I}_1\mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}}^{-1}) + 2\frac{\partial \psi_{4a}}{\partial \bar{I}_{4a}}\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0 + 2\frac{\partial \psi_{4s}}{\partial \bar{I}_{4s}}\mathbf{s}_0 \otimes \mathbf{s}_0\,. \tag{9}$$

可以将式（4）扩展到涵盖更广泛的材料类别。关于**F**，不变量的凸线性组合保持多凸性。因此，除了式（1）中的不变量或其式（2）中的等容对应项之外，我们还可以考虑混合不变量

$$K_{ij} = \alpha_{ij} I_i + (1 - \alpha_{ij}) I_j\,, \tag{10}$$

¯以及相应的等容版本 K_{ij}。考虑这些混合项的应变能族具有以下结构

$$\psi = \sum \psi_i(\bar{I}_i) + \sum \psi_{ij}(\bar{K}_{ij}) + \psi_{vol}(J)\,. \tag{11}$$

{v1>在这一更一般情况下，**S** 的表达式类似于式（9），但增加了用于计入 ψ_{ij} 贡献的项。

单轴、纯剪切和双轴加载

对于完全不可压缩材料的各向同性单轴变形这一特例，变形取决于单一伸长 λ，而施加伸长方向上的应力为

$$P = 2(\lambda - \lambda^{-2})\left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \psi}{\partial I_2}\right)\,. \tag{12}$$

对于宽而薄的试样发生纯剪切变形时，施加伸长 λ 方向上的名义应力为

$$P = 2(\lambda - \lambda^{-3})\left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\right). \tag{13}$$

对于薄型不可压缩各向同性材料，第三种关注的加载情况是由伸长 λ定义的等双轴拉伸。在这种加载下，沿施加伸长的两个主方向的名义应力相同，且等于

$$P = 2(\lambda - \lambda^{-5})\left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\right). \tag{14}$$

最后，我们考虑在任意双轴加载下的不可压缩横观各向异性材料，该加载由两个伸长 λ_x、 λ_y指定。不失一般性，我们令$\mathbf{a}_0 = [1, 0, 0]$， $\mathbf{s}_0 = [0, 1, 0]$。面内名义应力为

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\lambda_x + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}(I_1\lambda_x - \lambda_x^3) + \frac{\partial \psi}{\partial I_{4a}}\lambda_x - p\lambda_x^{-1} \\ P_{yy} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\lambda_y + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}(I_1\lambda_y - \lambda_y^3) + \frac{\partial \psi}{\partial I_{4s}}\lambda_y - p\lambda_y^{-1}, \end{aligned} \tag{15}$$

其中，压力拉格朗日乘子由平面应力条件求得

$$p = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\lambda_z^2 + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}(I_1\lambda_z^2 - \lambda_z^4), \tag{16}$$

法向伸长则由不可压缩约束求得

$$\lambda_z = \frac{1}{\lambda_x \lambda_y}. \tag{17}$$

*CANN*模型

为了构造凸非递减函数来表示式（11）中的能量，一种方法是借鉴前馈神经网络的架构，但仅在多项式展开上使用凸非递减激活函数。该方法如图1a所示。从**变形梯度**出发，在预处理步骤中计算式（1）中的不变量。为便于实现并改进模型训练过程中的优化步骤，考虑归一化不变量

$$\hat{I}_i = (I_i - a_i)/b_i \tag{18}$$

其中， $a_1 = a_2 = 3$、 $a_{4a} = a_{4s} = 1$和 b_i 是归一化常数，使得 I_i 的范围约为 $[0, 3]$。请注意，在下文假设的完全不可压缩情况下，归一化不变量严格满足 $I_i \geq 0$。对于可压缩材料或近似不可压缩材料，只需在式（18）中将 I_i 替换为其等容对应项 $\bar{I}_i$ 。对于混合不变量，其归一化形式为

$$\hat{K}_{ij} = \alpha_{ij}\hat{I}_i + (1 - \alpha_{ij})\hat{I}_j, \tag{19}$$

它同样满足 $K_{ij} \geq 0$，只要 $\alpha_{ij} \in [0,1]$成立。对于包括各向异性在内的一般情况，应变能可概括为

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{CANN}} &= \sum_{i,a,b} \psi_{i,ab} + \sum_{i,j,a,b,i\neq j} \psi_{ij,ab} \\ &= \sum_{i,a,b} g_{i,ab} f_b(w_{i,ab} P_a(\hat{I}_i)) + \sum_{i,j,a,b,i\neq j} g_{ij,ab} f_b(w_{i,ab} P_a(\hat{K}_{ij})) ,\end{aligned} \tag{20}$$

其中，$P_a(x) = x^a$ 是基本多项式展开，在我们的实现中包含 $a \in \{1, 2, 3\}$；$f_b(\circ)$是本例采用的激活函数，可选恒等函数 $f_1(x) = x$或指数函数$f_2(x) = \exp(x) - 1$。混合不变量的记法相同。权重$g_{i,\ ab}$,$w_{i,\ ab}$, $g_{ij,\ ab}$, $w_{ij,\ ab}$ 是模型的可训练参数，必须为非负值，以保持输出凸且非递减。

对于下面的橡胶示例，我们只使用两个主要不变量 I_1, I_2。对于皮肤示例，我们有两种试探函数。较简单的模型包含来自 I_1, I_2, $K_{4a\,4s}$的贡献。皮肤示例的第二种方案采用输入 I_1, I_2, $K_{1\,2}$, $K_{1\,4a}$, $K_{1\,4s}$, $K_{4a\,4s}$。

我们所选择的多项式和激活函数可保证在区域 $I_i, K_{ij} \geq 0$ 内对输入 I_i、 K_{ij} 的凸且单调不减函数进行插值，前提是仅使用非负权重；这一条件很容易满足。对于不可压缩材料，区域 $I_i, K_{ij} \geq 0$ 上的非负条件显然成立；对于可压缩或近似不可压缩材料，若在式 (18) 中使用等容不变量，该条件也成立。因此，CANNs先验地可得出多凸应变能函数。

*ICNN*模型

该算法同样依赖于构建归一化不变量及其线性组合的凸函数。令 X 为第一层的输入，$\mathbf{Z}_{i-1}$ 为第 $i-1$ 层的输出。那么，对于第 i 层，其输出为

$$\mathbf{Z}_i = \mathrm{softplus}^2(\exp(\mathbf{W}_{z,i}^{\top})\mathbf{Z}_{i-1} + X\exp(\mathbf{W}_{x,i}) + \mathbf{b}_i) , \tag{21}$$

参数化时使用权重 $\mathbf{W}_{z,i}$、$\mathbf{W}_{x,i}$ 和偏置 $\mathbf{b}_i$。对于第一层，我们有 e

$$\mathbf{Z}_1 = \mathrm{softplus}^2(X\exp(\mathbf{W}_{x,1}) + \mathbf{b}_1) , \tag{22}$$

而对于最后一层

$$Z_n = \exp(\mathbf{W}_{z,n}^{\top})\mathbf{Z}_{n-1} + X\exp(W_{x,n}) + \mathbf{b}_n . \tag{23}$$

该架构保留了凸性，因为 $\mathrm{softplus}^2(\circ)$ 是一个凸非递减函数，它通过非负权重（利用 $\exp(\circ)$ 函数强制实现）作用于原始输入和中间层输出的线性组合。因此，ICNNs 可用于构造关于与 CANN模型中方程（18）、（19）所定义的相同归一化不变量 I_i 和归一化混合不变量 $\hat{}\ K_{ij}$ 的凸非递减函数。其一般展开式为

$$\psi_{\mathrm{ICNN}} = \sum_i \psi_i(\hat{I}_i) + \sum_{i,j,i\neq j} \psi_{ij}(\hat{K}_{ij}) . \tag{24}$$

与 CANNs 类似，对于使用 ICNNs 的橡胶示例，我们只考虑两个函数 $\psi_1(I_1)$、 $\psi_2(I_2)$。对于各向异性示例，我们有两个模型。较简单的模型使用三个函数 $\psi_1(I_1)$、 $\psi_2(I_2)$、 $\psi_{4a\,4s}(K_{4a\,4s})$。第二个各向异性模型还包括混合项 $\psi_{1\,4a}(K_{1\,4a})$、 $\psi_{1\,4s}(K_{1\,4s})$、 $\psi_{1\,2}(K_{1\,2})$。

*NODE*模型

与前两种方法不同，NODE无需对能量进行插值，而是直接对导数函数进行插值。最终，关于不变量的导数会用于定义应力，见式（9）。考虑归一化不变量 I_i，NODE是一个前馈神经网络，其权重$\mathbf{W}$ 和偏置$\mathbf{b}$ 定义了常微分方程的函数 $f(\circ)$

$$\frac{dy_i(\omega)}{d\omega} = f(y_i, \omega)\ , y_i(0) = \hat{I}_i\ , \tag{25}$$

其中 ω 是一个伪时间辅助变量。我们关注的输出是在固定伪时间下常微分方程的解。在此实现中，我们选择 $\omega = 1$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_i} = y_i(1)\ . \tag{26}$$

注意，输出直接就是应变能的导数。关键在于，常微分方程的轨迹不会相交，因此对于两个初始条件 $y_i^{(a)}(0) \geq y_i^{(b)}(0)$，后续轨迹始终满足 $y_i^{(a)}(\omega) \geq y_i^{(b)}(\omega)$。这意味着

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_i}\right|_{\hat{I}_1=\hat{I}_1^{(a)}} \geq \left.\frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_i}\right|_{\hat{I}_1=\hat{I}_1^{(b)}} \iff \hat{I}_1^{(a)} \geq \hat{I}_1^{(b)}\ . \tag{27}$$

输出式（27）的单调性等价于底层 ψ的凸性。对于混合不变量，NODE定义导数

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{K}_{ij}} = y_{ij}(1)\ , \tag{28}$$

对于与式（25）类似的常微分方程。因此，使用 NODE模型时，我们无法得到 ψ_{NODE} 的解析表达式。不过，如有需要，可以对能量进行积分

$$\psi_{\mathrm{NODE}} = \sum_i \int_{\hat{I}_i} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{I}_i} + \sum_{i,j\ i\neq j} \int_{\hat{K}_{ij}} \frac{\partial \psi}{\partial \hat{K}_{ij}} \tag{29}$$

ˆ ˆ 沿着给定轨迹变化，范围为 I_i, K_{ij}。尽管根据式 (27)， ψ_{NODE}关于不变量的凸性得到了保证，但为了构造凸非递减函数，还需施加偏置为零的额外限制 $\mathbf{b} = 0$。经过这项最终修正后，能量 ψ_{NODE} 自动具有多凸性。

基准数据集和测试案例

本研究考虑两个数据集：一个经典橡胶数据集，包含来自 [8] 的单轴拉伸 (UT)、纯剪切 (PS) 和等双轴拉伸 (ET) 名义应力-伸长数据。另一个数据集来自猪皮，包含三种双轴测试：沿 x 方向进行条带双轴测试 (SX)，即施加 $\lambda_x = \lambda$，并使正交方向保持在 $\lambda_y = 1$；沿 y 方向进行条带双轴测试 (SY)；以及等双轴拉伸 (EB)。皮肤数据来自 [7]，同样是名义应力-伸长数据。

结果

橡胶数据集上的性能

如方法部分所述，橡胶数据集包含三种力学测试。为了测试数据驱动方法的外推能力，我们首先使用三种测试中的一种进行训练，并将结果与另外两种测试进行比较。结果如图2的前三列所示。不出所料，三种方法都能完美捕捉其训练所用的加载曲线（图2a、f、k）。然而，这些方法在外推方面存在困难。根据所用的训练测试不同，验证数据上的表现也有所差异。使用单轴数据训练时，对另外两种测试的预测并不准确，且所有情况下的预测都比数据表现得更硬（图2e、i）。使用纯剪切数据训练的ICNN仍能捕捉双轴和单轴加载下的响应（图2c、g）。相比之下，使用PS数据训练的CANN模型能够预测UT和ET数据，直至达到中等伸长；此后，预测值呈指数增长，并逐渐偏离数据。使用PS数据训练的NODE在UT数据集上的表现良好，但在ET数据集上表现不佳。对于这三种方法，等双轴训练似乎最有利于外推。ET数据的预测与实验结果高度吻合，见图2f；单轴和纯剪切的预测在定性上也与观测到的响应相符，但仍存在一定误差（图2b、j）。为验证这些方法确实能够捕捉材料的完整响应，图2最后一列展示了CANN、NODE和ICNN模型使用全部数据同时训练时的预测结果。三种方法都能对整个数据集进行无误差插值（图2d、h、l）。

图2中的结果具有代表性，但它们分别对应于 CANN、NODE 和 ICNN模型的一次拟合。为了展示数据驱动方法的稳健性能，我们重复训练50次，并计算每个训练后模型的 R^2 值。 R^2 值以与代表性训练结果图2类似的布局显示在图4中。 R^2值证实了图2中的先前观察结果。对于单轴训练，单轴拉伸数据上的 R^2 值始终约为1（图4a），但在另外两种测试中的预测性能很差（图4e、i）。对于 PS训练，我们证实 NODE 和 ICNN 能够捕捉 PS 响应（图 4k ）和单轴响应（图 4c ），但无法捕捉等双轴拉伸数据（图 4g ）。CANN模型同样能够很好地捕捉纯剪切响应（图4k），但无法外推至另外两种加载工况（图4c、g）。通过50次模型拟合，我们可以确信，等双轴测试确实能够使这三种机器学习模型更好地外推至其他加载工况。图4b、f、j中的 R^2 值始终大于0.656，且标准差很小。图4d、h、l也证实，当使用全部数据同时训练时，CANN、ICNN 和 NODE 都能轻松拟合数据，各方法的平均值分别达到 R^2 0.971、0.997 和0.997。

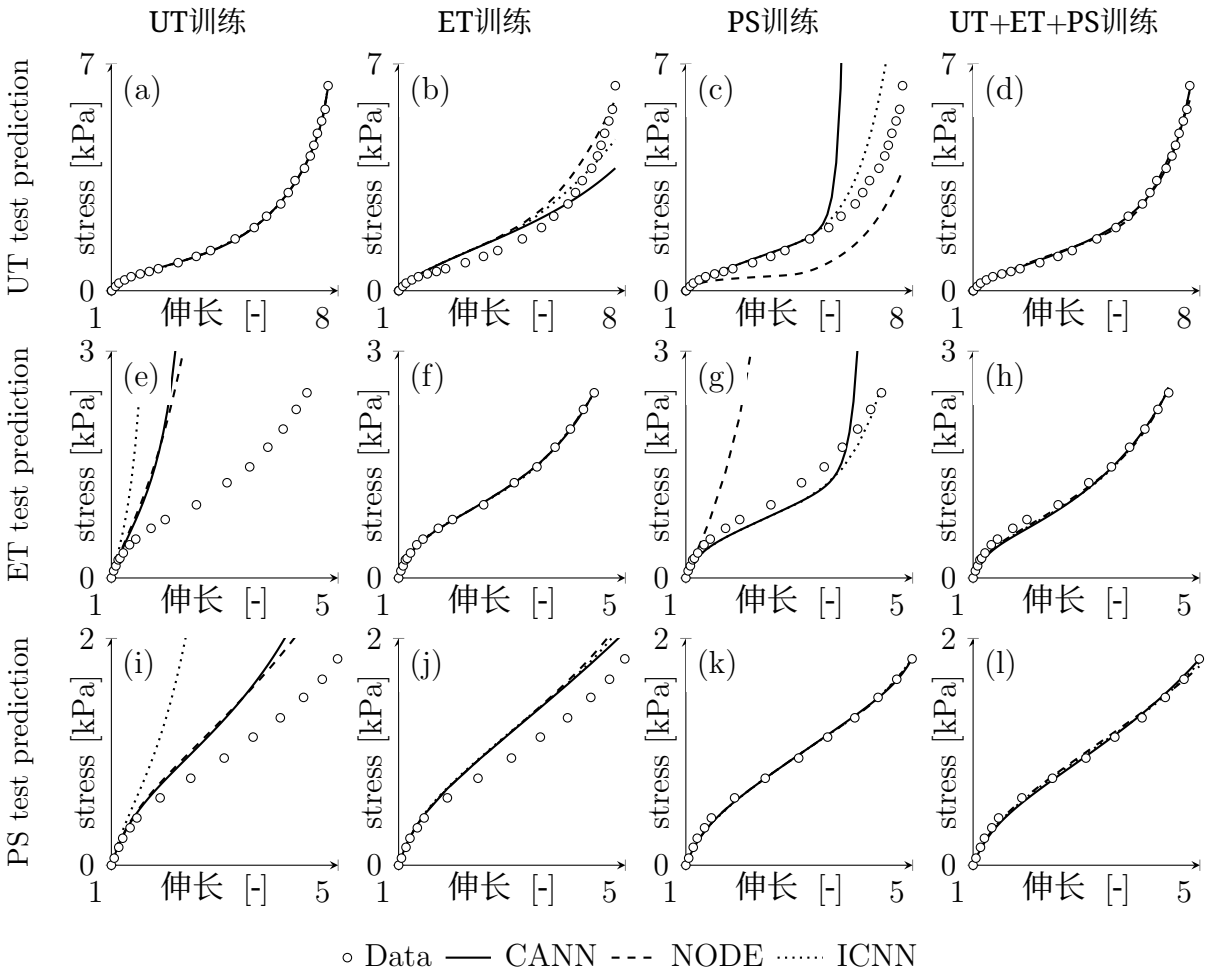


图2：CANN、NODE 和 ICNN 模型在橡胶名义应力-伸长数据上的表现。使用单轴拉伸（UT）训练后，将模型与 UT 数据（a）进行比较，同时也与等双轴拉伸（ET）数据（e）和纯剪切（PS）数据（i）进行比较。使用 ET 训练后，分别在 UT、ET、PS 数据上评估模型（b、f、j）。同样，使用 PS 数据训练后，将模型与 UT、ET、PS 曲线进行比较（c、g、k）。使用所有数据同时训练时，三种模型都能拟合全部三组数据集（d、h、l）。

皮肤数据集上的性能

皮肤的各向异性使这三种算法的外推能力较差。分别使用 x中的条带双轴数据、 y条带双轴数据或等双轴拉伸进行训练时，这三种方法都能捕捉训练所用数据对应的响应，但无法进行外推，如图3的前三列所示。为了捕捉皮肤的横向各向异性响应，三种数据驱动方法所具备的参数数量以及函数空间灵活性，使其能够生成复杂的响应；但与此同时，这也导致它们在训练区域之外的预测不受约束且表现不佳。例如，使用 SX数据训练时，在 SX加载下的预测非常准确（图3a），但 CANN模型往往会预测 EB 和 SY加载下更硬的响应（图3e、i）；NODE 在 SY加载下预测的响应更硬（图3i），但在 EB加载下的响应准确（图3e）；而 ICNN 在 EB加载下表现良好（图3e），但在 SY加载下预测的响应比数据所示更软（图3i）。为了验证这些模型是否能够捕捉整个数据集，我们使用全部数据同时训练了 CANN、NODE 和 ICNN模型，并展示

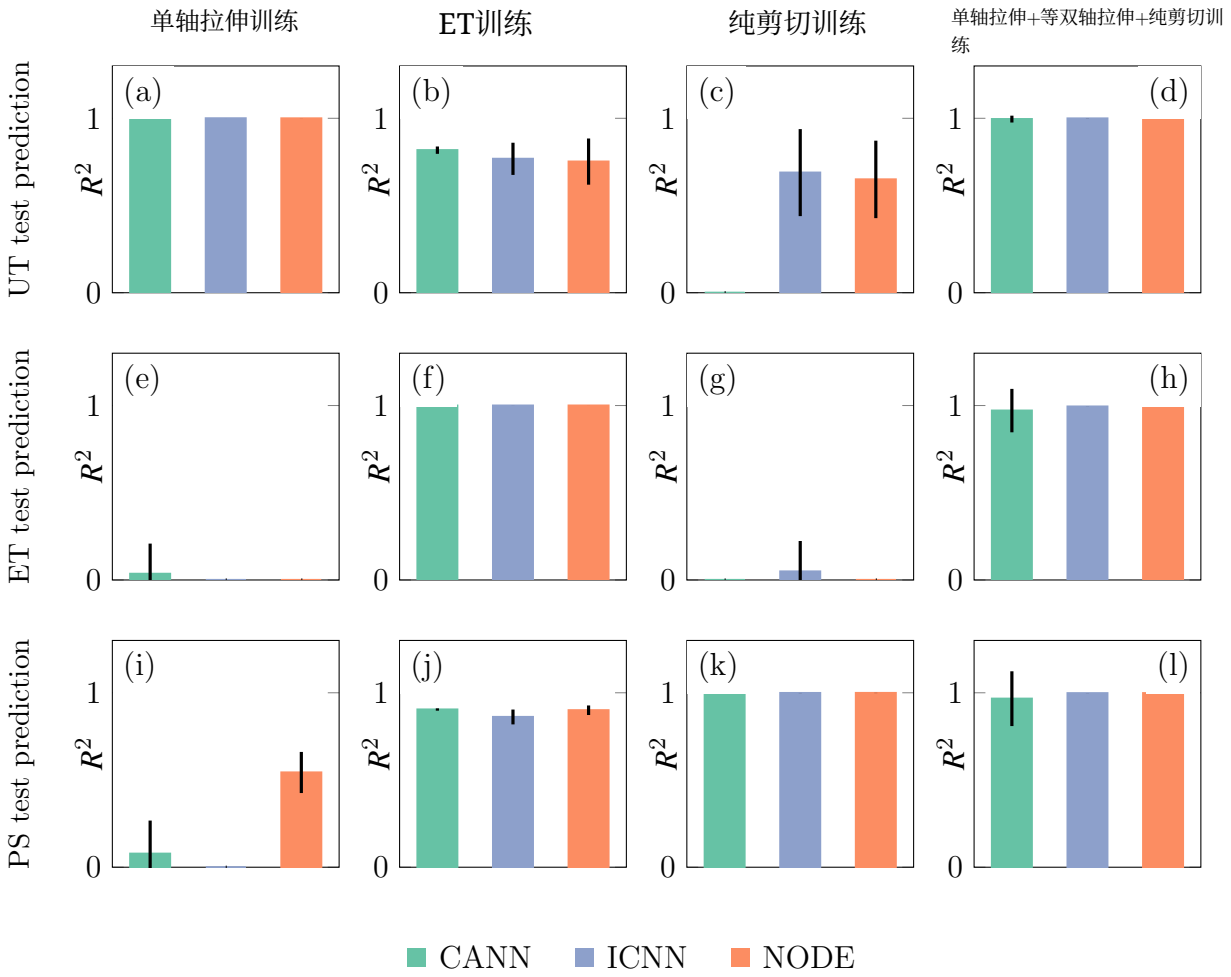


图 3：采用不同初始化方式进行 XX 训练时，数据驱动本构模型的平均 R^2 值表现。比较了在单轴拉伸（UT）数据上训练的 CANN、NODE 和 ICNN 模型与 UT 数据 (a)、等双轴拉伸（ET）数据 (e) 和纯剪切（PS）数据 (i) 的结果。在 ET 数据上训练的模型分别在 UT、ET、PS 数据上进行评估 (b,f,j)。在 PS 数据上训练的模型则与 UT、ET、PS 曲线进行比较 (c,g,k)。在所有数据上同时训练时，三种模型在所有数据上的 R^2 值均接近 1 (d,h,l)。

见图 3d、h、l 中的拟合结果。三种方法在所有数据上训练时都能捕捉响应，但与图 3a、f、k 中针对单独测试集的拟合相比，结果并不完美。三种方法在同时拟合时表现较差这一现象是一致的，这表明数据本身可能与超弹性假设不一致，可能存在实验误差，或者数据驱动模型可用的函数空间还需要更加丰富。

图 5 对性能进行了更定量的分析，展示了采用不同随机初始化进行 10 次模型训练后计算得到的 R^2值。正如图 3 中具有代表性的拟合结果所示，在训练所用的加载工况下，R^2 得分接近 1（图 5a、f、k），但在验证案例中得分较低，甚至接近 0（图 5b、c、e、g、i、j）。令人惊讶的是，等双轴试验（图 5f）仍然提供了一些有用的信息，可用于外推至条带双轴加载工况（图 5b、j）。在条带双轴试验上训练时，SY 对 SX 或 EB 数据没有任何信息（图 5c、g），而 SX

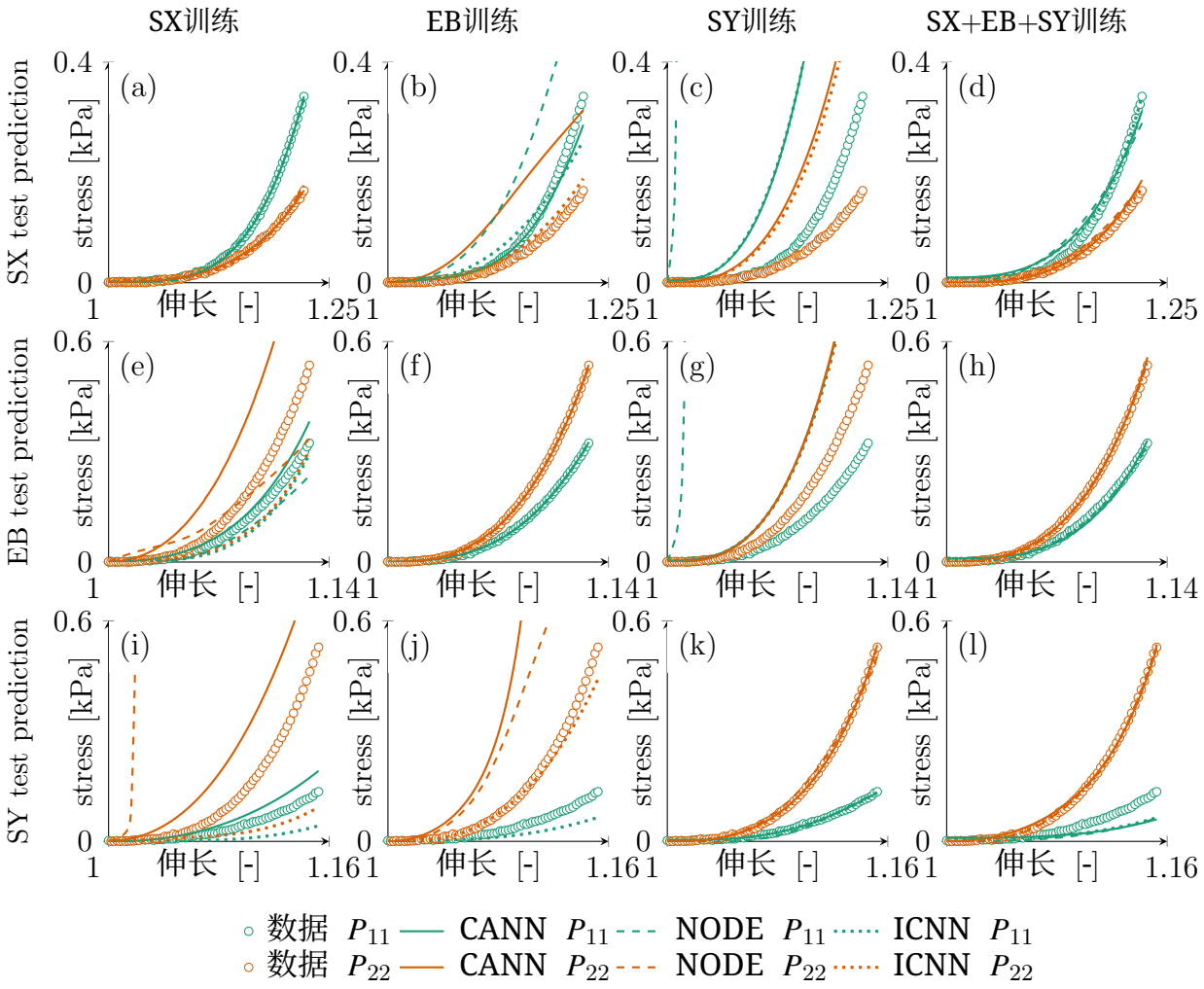


图4：CANN、NODE 和 ICNN 模型在皮肤力学数据集上的表现。使用条带 x (SX) 数据训练时，将这三个模型与 SX (a)、等双轴 (EB) (e) 和条带 y (SY) 数据 (i) 进行比较。使用 EB 数据训练时，与 SX、EB、SY 数据的比较结果见 (b,f,j)。使用 SY 数据训练时，与 SX、EB、SY 的比较结果见 (c,g,k)。同时使用所有数据进行训练时，这三种方法能够捕捉 SX (d)、EB(h) 和 SY 的响应 (l)。

训练确实能为 EB 数据提供一些 $R^2 > 0$ （图 5e），但对 SY 数据则不然（图 5i）。无论随机初始化如何，这些方法都能够始终对来自全部三种试验的完整数据进行插值（图 5d、h、l）。

二阶导数的正则性

迄今为止，我们关注的是数据驱动模型捕捉应力—伸长数据的表现，这些数据与应变能导数直接相关。然而，在大规模物理求解器中使用这些高度非线性的模型，无论是用于隐式动力学还是平衡问题，都需要计算能量的二阶导数。因此，尽管二阶导数与任何数据都无关，我们仍关注 CANN、ICNN 和 NODE 模型的二阶导数正则性。

对于橡胶基准测试，这些模型基于两个函数$\partial\psi(I_1)/\partial I_1$、 $\partial\psi(I_2)/\partial I_2$的插值。图6展示了二阶导数 $\partial^2\psi(I_1)/\partial I_1^2$、 $\partial^2\psi(I_2)/\partial I_2^2$，其布局与

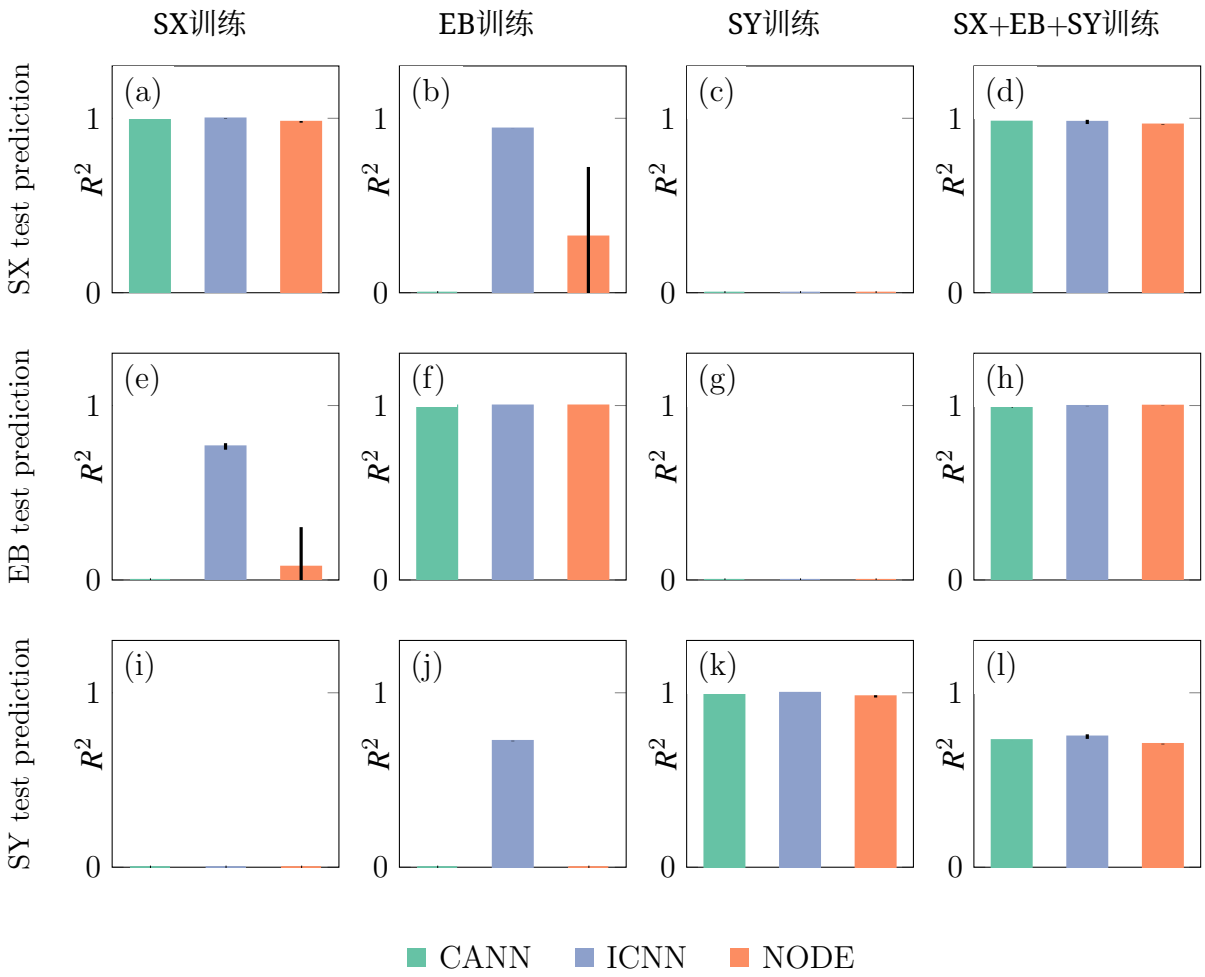


图5：数据驱动方法在皮肤数据集上的表现，以 R^2 分数衡量，数据来自三种类型的测试：条带双轴 x （SX）、等双轴（EB）以及沿 y 方向的条带双轴（SY）。使用SX数据训练的模型（a），在EB（e）和SY（i）数据上进行测试。使用EB数据训练的模型（f），在SX（b）和SY（j）加载条件下进行测试。使用SY数据训练时（k），模型无法捕捉SX（c）或EB（g）响应。使用全部数据同时训练时，CANN、ICNN和NODE模型能够捕捉所有三种加载类型：SX（d）、EB（h）、SY（l）。

图2和图4相同。令人惊讶的是，尽管这三种方法都能很好地捕捉应力数据，但它们的二阶导数却存在显著差异。这表明，有许多多凸应变能函数 $\psi(I_1,\ I_2)$能够捕捉单轴、纯剪切和等双轴加载下的应力-伸长数据。CANN、ICNN和NODE适合捕捉各自方法所能涵盖的大量函数空间中的不同函数。图6中一致呈现的趋势是，CANN模型往往会产生指数型二阶导数，因为两个关键激活函数之一是指数函数。相比之下，NODE模型在所有情况下的二阶导数都最小。对于这三种方法，二阶导数都是平滑函数。

对于皮肤基准，三个数据驱动框架插值的函数更多。因此，图7展示了二阶导数 $\partial^2\psi/\partial I_1^2$，$\partial^2\psi/\partial I_2^2$,$\partial^2\psi\ \partial I_{4a}^2$ $\partial^2\psi\ \partial I_{4b}^2$ / ，以及 / 。与橡胶数据一致，NODE 的二阶导数是

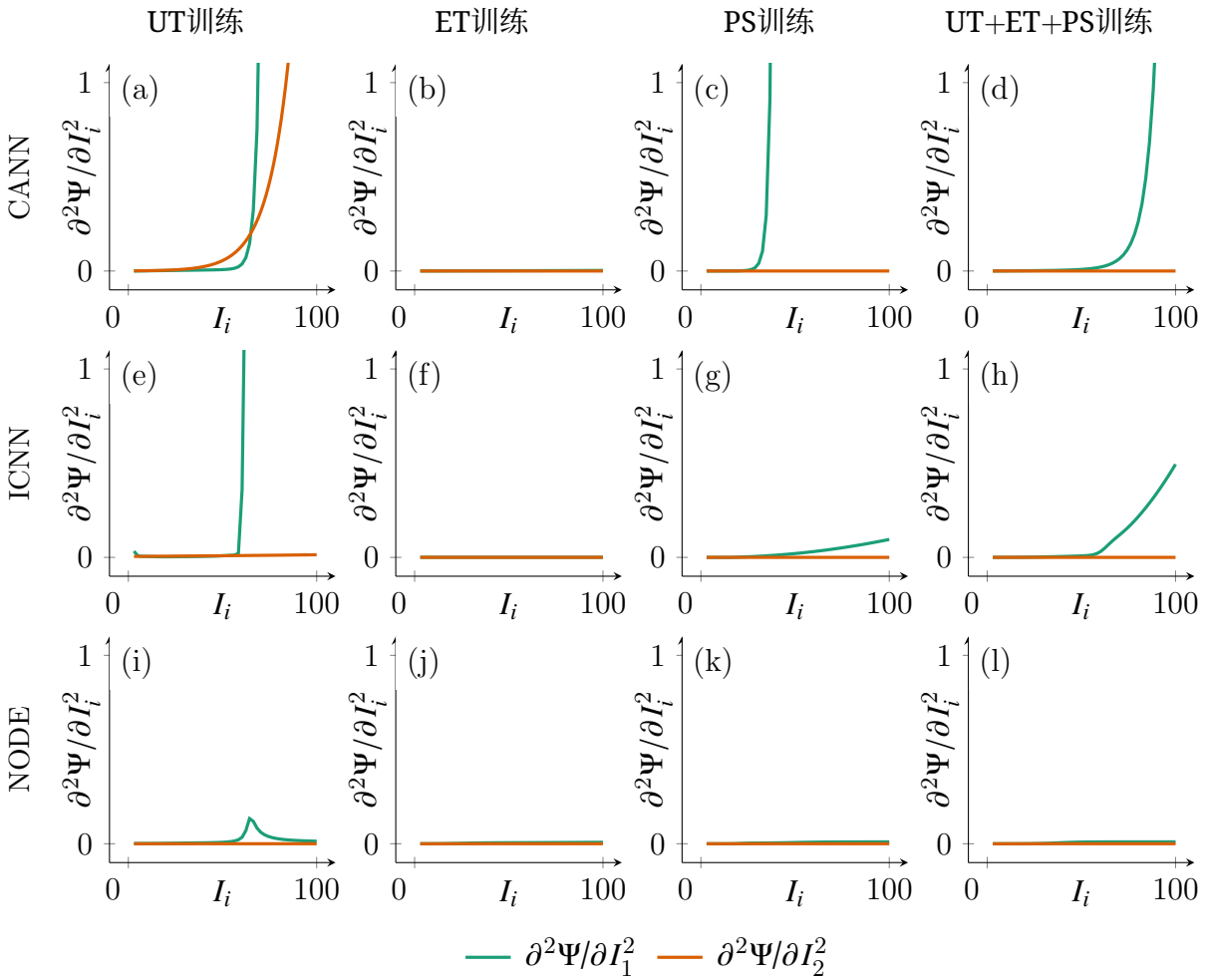


图6：使用橡胶数据训练的数据驱动模型预测的应变能函数二阶导数。仅使用 UT 训练时，展示了 CANN（a）、ICNN（e）和 NODE（i）模型的预测结果。同样，图中还展示了三种方法仅使用 ET训练（b、f、j）、仅使用 PS训练（c、g、k）以及使用全部数据训练（d、h、l）时的二阶导数。

三种方法中最小的。二阶导数在变形初始范围内可能会增大，但在测试范围末端趋于较小值（图7i-l）。CANN（图7a-d）和 ICNN 方法（（图7e-h）在不变量范围内的二阶导数不断增大。与橡胶基准测试类似，我们还看到，尽管这三种方法在应力-伸长预测方面表现相近（见图3），但它们是通过插值不同的函数 $\psi(I_1,\ I_2,\ I_{4a},\ I_{4s})$ 实现的。

模型效率

关于数据驱动模型，尤其是基于神经网络的模型，一个关键问题和常见批评是：增加可训练参数的数量，按理说能让方法越来越好地拟合有限数据，但也会带来过拟合的风险。对于 CANN、ICNN 和 NODE 模型，多凸性约束得到严格实施，可防止非物理外推，效果与专家模型类似。另一方面，专家模型和一些非参数数据驱动方法 [35] 通常效率很高，只需极少的参数便能较好地拟合数据。我们测试数据驱动

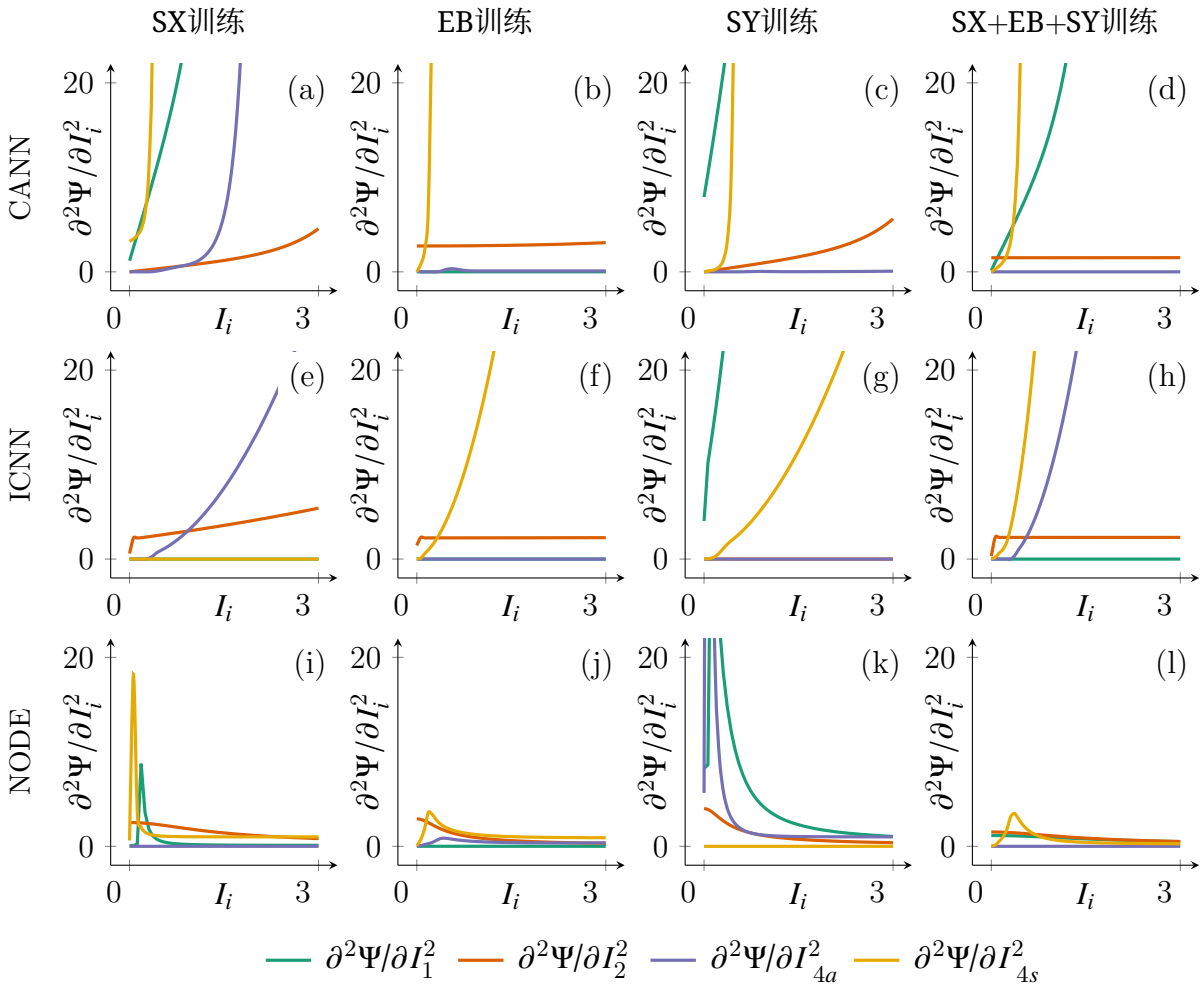


图 7：使用皮肤数据训练时应变能的二阶导数。CANN预测（a-d）、ICNN预测（e-h）以及NODE预测（d-l）。各列对应训练中使用的数据。前三列分别仅对应SX、EB或SY数据。最后一列显示模型同时使用所有数据进行训练时的预测结果。

模型对数据进行插值的效率，即考察误差如何随可训练参数数量的变化而降低。

图 8展示了橡胶基准测试的模型效率图。CANN模型的结构介于神经网络和专家模型之间。因此，在图 8的每个图中，CANN模型都对应一个单独的点。对于ICNN和NODE模型，随着参数数量增加，误差逐渐减小，这与预期一致。当具有52个可训练参数时，NODE和ICNN在所有训练情形下都表现出相似的性能。然而，与NODE 框架相比，ICNN的误差降幅更为明显。这表明，即使参数非常少，NODE模型也能很好地捕捉数据。

如图 9 所示，各向异性皮肤数据并未呈现出相同的效率趋势。在这种情况下，为了探究参数数量对方法准确度的影响，我们采用两种策略：仅对式 (4) 中的函数进行插值以缩减试探函数，或使用完整展开式 (11)，但改变可训练参数的数量。对于

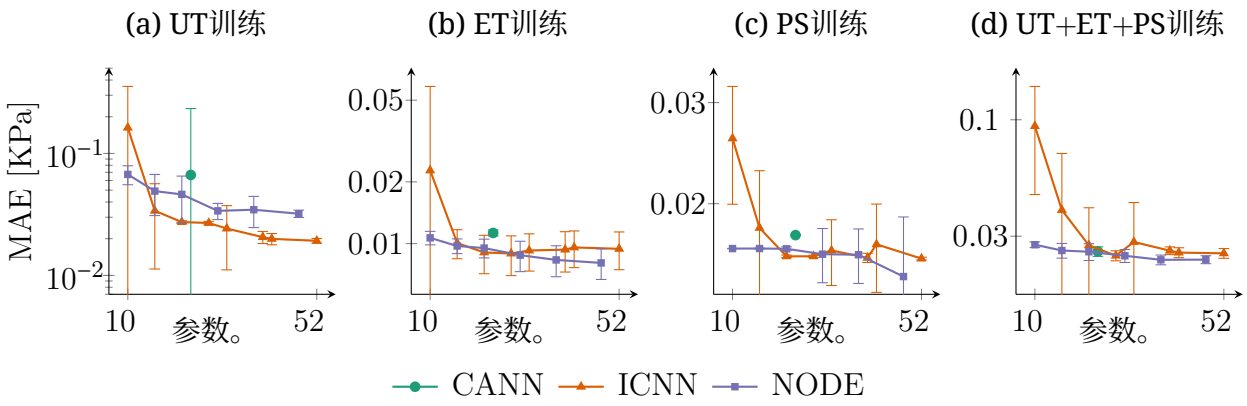


图 8：橡胶数据集的模型效率，以平均绝对误差（MAE）随可训练参数数量的变化表示。各列对应训练所用的数据类型：UT（a）、ET（b）、PS（c），或训练期间同时使用所有数据（d）。请注意，CANN模型的参数数量固定，因此每个面板中CANN模型仅显示一个点。ICNN和NODE是基于神经网络的模型，可训练参数的数量会随层数和层深度增加。

CANN模型而言，无论采用式 (4) 还是式 (11)，其参数数量都是固定的。我们观察到，在所有训练情况下，完整试探函数的误差都低于缩减后的试探函数。加入混合项提高了框架的灵活性，有助于更好地捕捉数据。这与 Gasser-Ogden-Holzapfel模型等常见闭式本构方程中混合不变量项的发展相一致 [36]。从缩减模型 (4) 转向包含混合不变量的模型 (11) 时，ICNN 和 NODE 的误差也都有所降低。与 ICNN 相比，NODE模型的改善更加显著。与橡胶数据集不同，对于皮肤数据，增加 NODE模型中所用神经网络的参数数量会大幅降低误差。ICNN模型的误差则仅随参数数量增加而略微降低。在所考察范围的上限处，即参数数量接近 200 时，ICNN 和 NODE 的表现相近。对于皮肤数据，CANN 是效率最高的方法，它以最少的参数数量实现了最低的误差。

讨论

本文分析了三种数据驱动方法在各向同性和各向异性超弹性材料中的表现。这些方法能够自动满足应变能的客观性和多凸性。传统闭式模型依靠选取少量函数项，以简洁的方式捕捉材料响应，并用较少的参数进行拟合。闭式表达式虽然优雅，但主要缺点是牺牲准确度。数据驱动方法具有灵活性，能够完美插值数据。然而，这些方法难以普及的一个原因是，很难保证基本物理约束，而这些约束正是专家模型设计的核心所在 [15, 37]。客观性和多凸性是表征真实材料的关键要求。本文研究的 CANN、ICNN 和 NODE模型经过特殊构造，能够先验地满足这些基本物理约束

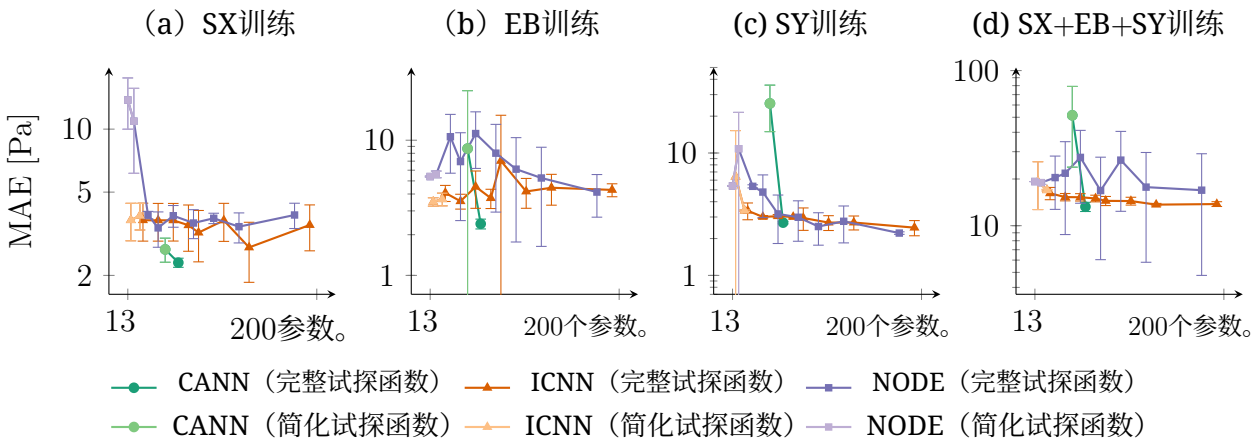


图 9：皮肤基准中 CANN、ICNN 和 NODE模型的模型效率，以平均绝对误差（MAE）随可训练参数数量和模型复杂度的变化表示。对于这三种模型，均使用了两种试探函数：基于 ((4) 的简化展开，或完整展开（??）。图中展示了不同训练情形下的效率：SX (a)、EB (b)、SY (c)，或同时使用所有数据 (d)。

。因此，这三种方法有望彻底改变高度非线性材料的建模与仿真。我们展示了这三种方法能够对各向同性和各向异性超弹性的橡胶与皮肤基准数据集进行插值。它们几乎完美地捕捉了数据，并且在使用部分数据训练后具备一定的外推能力。二阶导数平滑，这对于平衡求解和隐式动力学求解器来说是必需的。这些模型展现出准确度与参数数量之间预期的权衡。总体而言，这三种建模框架中的任何一种都适用于完全数据驱动的材料建模。

我们在此分析的方法与数据驱动计算力学领域近期的其他进展形成对比。利用机器学习工具最直接的方式，是直接对应变—应力数据进行插值。近年来已有一些沿着这一思路开发的方法 [38]。这类方法的一个局限是无法外推。处理应力数据的另一个问题是，客观性和多凸性并非先验满足。捕捉应变能函数的数据驱动模型则更类似于专家模型 [18]。CANN、ICNN 和 NODE 属于这一类。对于对插值应变能的数据驱动模型，一种施加多凸性的方法是通过损失函数实现。这些方法取得了一些成功，但必须谨慎权衡施加约束与获得更高准确度之间的关系 [7, 39]。另一种方法是从可用模型的庞大库中选出最佳模型 [40]。近期开发的 CANN、ICNN 和 NODE模型能够自动满足多凸性；多凸性是超弹性边值问题获得解的充分条件。这些方法的原始版本见于近期发表的文献 [10, 41, 8]。然而，由于各个方法采用了不同的能量展开形式，对原始模型进行基准测试颇具挑战。在本研究中，我们重新表述了这些方法，使三个模型始终采用相同的不变量和能量项。通过这一实现，我们表明，由于约束已嵌入这些方法，因此模型精度与施加物理学约束之间不存在权衡。这三种方法都能准确表示

数据，显示能量相对于不变量的二阶导数为正，并且即使采用随机初始化，也能稳健地运行。

每种方法背后的理念各不相同，因此性能也略有差异。CANN 利用了前馈神经网络的结构，但采用固定数量的可用项。拟合 CANN 需要确定各个项的权重。因此，CANNs 生成的模型较为简约，但其能力本质上受函数项数量的限制。尽管结构固定，CANNs 在本研究的基准数据集上仍表现良好。ICNNs 通过在传统前馈神经网络结构的每一层中嵌套凸非递减函数的线性组合来构建凸函数。NODEs 直接处理能量导数函数，并利用常微分方程的单调性来获得单调的导数函数（这意味着得到凸函数）。由于 ICNNs 和 NODEs 的内部结构与标准神经网络相似，因此可以通过改变层数或每层的深度，更灵活地调整参数数量。效率图反映了准确度与参数数量之间的权衡。随着参数数量增加，NODE 和 ICNN模型之间的差异逐渐消失。因此，这三种方法都能准确、高效地捕捉数据。

这些方法之间另一个显著差异在于对应变能二阶导数的预测。CANN 和 ICNN模型往往会预测出递增的二阶导数函数。与另外两种方法相比，NODE 往往会预测出较小的二阶导数，或在训练区域末端使二阶导数趋于零。这种差异可能源于常微分方程存在不动点。换言之，导数预测会收敛到单一值，因此二阶导数趋于零。在所有情况下，二阶导数都是平滑函数，这对于平衡求解器和隐式动力学求解器而言十分理想 [9]。这与其他需要对导数进行额外正则化的数据驱动方法形成对比 [42]。另一种利用能量导数但避免求解常微分方程的策略，是探索可积神经网络 [43]。

本文基准测试的方法旨在捕捉超弹性。即使仅考虑超弹性材料，能量展开也可以通过不同方式实现，从而有望涵盖更广泛的行为类别 [44]。数据驱动方法的灵活性也有助于描述超越超弹性的复杂材料响应。目前，针对塑性和黏弹性等耗散材料的物理信息机器学习方法仍有待进一步发展 [45]。已有一些朝这一方向发展的数据驱动方法，但尚未具备一套完整的内置物理约束 [46, 47]。因此，这是未来工作的一个核心领域，可以借鉴并完善本文综述的三种现有框架。另一项亟需拓展的工作是对材料响应的不确定性进行建模，这对生物组织尤为重要 [1]。基于神经网络的框架能够精准捕捉单一材料的响应，也可以利用新数据轻松重新训练；而完整的贝叶斯方法则有助于更深入地了解群体分布。例如，它可以用于建模皮肤特性如何随年龄、性别或种族而变化。贝叶斯框架还能够监测认知不确定性，从而指导数据收集并生成可信的模拟。我们想要强调的第三项工作是拓展至多模态数据。我们探讨的三种方法仍然基于应力-伸长数据。相比之下，一些专家模型围绕微观结构建模、多尺度模拟展开，

或者基于微观力学论证 [36]。这些理念已开始渗透到入门级数据驱动建模中 [48, 49]。此外，近年来，不依赖应力-伸长对、而是根据全场位移和全局力数据推断材料行为的方法也日益受到关注[50, 51]。能够基于 CANN、ICNN 或 NODE 框架构建，同时利用组织微观结构图像或材料组成信息的物理信息机器学习方法，是顺理成章的下一步。

结论

我们提出了三种完全由数据驱动且受物理约束的非线性材料建模方法：CANNs、ICNNs 和 NODEs。这些方法在橡胶和皮肤的基准数据集上，能够完美捕捉三种不同加载工况下的超弹性材料响应。通过评估它们的外推能力、效率以及二阶导数的正则性，我们得出结论：尽管这些方法各有特点，但它们的误差均较低且彼此相当，并随着参数数量和模型复杂度的增加而降低；它们的二阶导数均平滑，也都具备一定的外推能力。总之，这些方法为无需选择闭式表达式即可对任意材料行为进行高保真建模提供了关键途径。本次提交附有代码和数据，我们相信这些资源将补充我们的详细分析，并有助于数据驱动计算力学的持续发展与完善。

致谢

本研究由美国国家关节炎、肌肉骨骼和皮肤病研究所（美国国立卫生研究院，美国）通过资助项目 R01AR074525 资助。

补充信息

与本文相关的代码可在此处获取 `https://github.com/tajtac/hypermodelcomp`。

参考文献

[1] T. Lee, S. Y. Turin, A. K. Gosain, I. Bilionis, A. B. Tepole, 《重建手术非线性有限元模型中材料行为不确定性的传播》，《生物力学与机械生物学建模》17（2018）1857–1873。[2] C. Duriez, T. Bieze, 《实时软体机器人建模、仿真与控制》，载于：《软体机器人：趋势、应用与挑战》，Springer，2017年，第103–109页。[3] G. Limbert, 《皮肤生物物理学：从实验表征到先进建模》，第22卷，Springer，2019年。[4] M. Leshno, V. Y. Lin, A. Pinkus, S. Schocken，具有非多项式激活函数的多层前馈网络可以逼近任意函数，《神经网络》6（1993）861–867。

[5] G. C. Peng, M. Alber, A. B. Tepole, W. R. Cannon, S. De, S. Dura-Bernal, K. Garikipati, G. Karniadakis, W. W. Lytton, P. Perdikaris 等，《多尺度建模与机器学习相遇：我们能学到什么？》，《计算工程方法档案》（2020）1–21。[6] J. E. Marsden, T. J. Hughes，《弹性的数学基础》，Courier Corporation，1994年。[7] V. Tac, V. D. Sree, M. K. Rausch, A. B. Tepole，关于各向异性软生物组织力学行为的数据驱动建模，《计算机辅助工程》38（2022）4167–4182。[8] K. Linka, E. Kuhl，迈向自动化模型发现的新型本构人工神经网络，《应用力学与工程中的计算方法》403（2023）115731。[9] V. Tac, F. Sahli Costabal, A. B. Tepole，利用多凸神经常微分方程进行数据驱动的组织力学建模，《应用力学与工程中的计算方法》398（2022）115248。[10] D. K. Klein, M. Fern´andez, R. J. Martin, P. Neff, O. Weeger，利用神经网络实现多凸各向异性超弹性，《固体力学与物理学杂志》159（2022）104703。[11] B. Amos, L. Xu, J. Z. Kolter，输入凸神经网络，载于：国际机器学习会议，PMLR，第146–155页。[12] J. Ghaboussi, D. Sidarta，用于本构建模的新型嵌套自适应神经网络（NANN），《计算机与岩土工程》22（1998）29–52。[13] Y. Heider, K. Wang, W. Sun，面向各向异性弹塑性材料的基于信息图的深度神经网络的 SO(3) 不变性，《应用力学与工程中的计算方法》363（2020）112875。[14] G. A. Holzapfel，《非线性固体力学：工程连续体方法》，John Wiley & Sons，LTD，2000年。[15] A. E. Ehret, M. Itskov，应用于软组织的纤维增强材料多凸超弹性模型，《材料科学杂志》42（2007）8853–8863。[16] X. Zhang, K. Garikipati，机器学习材料物理：多分辨率神经网络学习演化中的微观结构的自由能与非线性弹性响应，《应用力学与工程中的计算方法》372（2020）113362。[17] N. N. Vlassis, R. Ma, W. Sun，计算力学的几何深度学习（第一部分）：各向异性超弹性，《应用力学与工程中的计算方法》371（2020）113299。

[18] M. Liu, L. Liang, W. Sun，基于通用物理信息神经网络的软生物组织本构模型，《应用力学与工程中的计算方法》372（2020年）。[19] J. N. Fuhg, N. Bouklas, R. E. Jones，通过张量基神经网络从数据中学习超弹性各向异性，arXiv 预印本 arXiv:2204.04529（2022年）。[20] J. M. Ball，非线性弹性力学中的凸性条件与存在性定理，《理性力学与分析档案》63（1976年）337–403。[21] J. Schr¨oder，各向异性多凸能量，载于《应用力学中的多凸性、拟凸性与秩一凸性》，Springer，2010年，第53–105页。[22] J. Schr¨oder，P. Neff，基于多凸自由能函数的超弹性横观各向同性不变量表述，《国际固体与结构杂志》40（2003年）401–445。[23] D. Y. Gao，P. Neff，I. Roventa，C. Thiel，关于非线性弹性能量相对于右柯西-格林张量的凸性，《弹性力学杂志》127（2017年）303–308。[24] F. As' ad，P. Avery，C. Farhat，一种力学信息人工神经网络方法在数据驱动本构建模中的应用，《国际工程数值方法杂志》123（2022年）2738–2759。[25] P. Chen，J. Guilleminot，用于超弹性本构模型的多凸神经网络：一种整流方法，《力学研究通讯》125（2022年）103993。[26] E. Lejeune，Mechanical MNIST：力学元模型的基准数据集，《极端力学快报》36（2020年）100659。[27] H. Kobeissi，S. Mohammadzadeh，E. Lejeune，利用基于生成模型的增强训练数据集提升力学元模型，《生物医学工程杂志》144（2022年）121002。[28] H. Dal，K. Aşcıkg¨oz，Y. Badienia，类橡胶材料各向同性超弹性本构模型的性能：前沿综述，《应用力学评论》73（2021年）。[29] D. Rus，M. T. Tolley，软体机器人的设计、制造与控制，《自然》521（2015年）467–475。[30] J. W. Jor，M. D. Parker，A. J. Taberner，M. P. Nash，P. M. Nielsen，皮肤力学的计算与实验表征：识别当前挑战与未来方向，《Wiley跨学科评论：系统生物学与医学》5（2013年）539–556。[31] Y. Lanir，Y. Fung，兔皮肤的二维力学性质——II. 实验结果，《生物力学杂志》7（1974年）171–182。

[32] Y. Lanir，纤维性结缔组织的本构方程，《生物力学杂志》16（1983年）1–12。[33] J. D. Toaquiza Tubon，O. Moreno-Flores，V. D. Sree，A. B. Tepole，胶原组织各向异性损伤模型及其在骨折建模和针刺力学中的应用，《生物力学与机械生物学建模》21（2022年）1–16。[34] S. Chen，A. N´ı Annaidh，S. Roccabianca，一种受微观结构启发的皮肤力学本构模型，《生物力学与机械生物学建模》19（2020年）275–289。[35] J. N. Fuhg，N. Bouklas，通过概率机器学习和空间填充采样构建物理信息驱动的数据驱动各向同性与各向异性本构模型，《应用力学与工程中的计算方法》394（2022年）114915。[36] T. C. Gasser，R. W. Ogden，G. A. Holzapfel，采用胶原纤维取向分布的动脉层超弹性建模，《英国皇家学会界面》3（2005年）15–35。[37] J. N. Fuhg，C. M. Hamel，K. Johnson，R. Jones，N. Bouklas，模块化机器学习弹塑性：有限数据背景下的泛化，2022年。[38] T. Kirchdoerfer，M. Ortiz，数据驱动计算力学，《应用力学与工程中的计算方法》304（2016年）81–101。[39] A. Ghaderi，V. Morovati，R. Dargazany，利用前馈神经网络引擎的物理信息组装预测交联聚合物的非弹性，《聚合物》12（2020年）2628。[40] M. Flaschel，S. Kumar，L. De Lorenzis，利用euclid自动发现广义标准材料模型，《应用力学与工程中的计算方法》405（2023年）115867。[41] V. Tac，F. S. Costabal，A. B. Tepole，利用神经常微分方程自动构建多凸应变能函数，arXiv 预印本 arXiv:2110.03774（2021）。[42] N. N. Vlassis，W. Sun，热力学信息神经网络的索博列夫训练：用于水平集硬化的可解释弹塑性模型，《应用力学与工程中的计算方法》377（2021年）。[43] G. H. Teichert，A. Natarajan，A. Van der Ven，K. Garikipati，机器学习材料物理：可积深度神经网络通过学习自由能函数实现尺度桥接，《应用力学与工程中的计算方法》353（2019年）201–216。[44] D. J. Steigmann，关于各向同性、帧不变的多凸应变能函数，《力学与应用数学季刊》56（2003年）483–491。

[45] W. Zhang、G. Sommer、J. A. Niestrawska、G. A. Holzapfel、D. Nordsletten，《黏弹性对主动脉软组织残余应变的影响》，《生物材料学报》140 (2022年) 398–411。[46] K. Xu、A. M. Tartakovsky、J. Burghardt、E. Darve，利用深度神经网络从间接数据中学习黏弹性模型，《应用力学与工程中的计算方法》387 (2021) 114124。[47] G. Chen，循环神经网络（RNN）学习黏弹性的本构定律，《计算力学》67 (2021) 1009–1019。[48] G. A. Holzapfel、K. Linka、S. Sherifova、C. J. Cyron，利用深度学习对动脉进行预测性本构建模，《英国皇家学会界面》18 (2021) 20210411。[49] Y. Leng、S. Calve、A. B. Tepole，利用基于离散纤维网络数据训练的神经网络预测纤维蛋白的力学性质，arXiv 预印本 arXiv:2101.11712 (2021)。[50] M. Flaschel、S. Kumar、L. De Lorenzis，无监督发现可解释的超弹性本构定律，《应用力学与工程中的计算方法》381 (2021) 113852。[51] C.-T. Chen、G. X. Gu，利用深度神经网络学习隐含弹性，《美国国家科学院院刊》118 (2021) e2102721118。