arXiv:2301.10745v1 [math.AT] 25 Jan 2023

上同调与双模上的扭曲作用

弗拉基米尔·希戈列夫

Abstract. 我们引入单元素集$H_R^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$的等变上同调在 L-空间 X的等变上同调 $H_L^\bullet(X,\Bbbk)$上的一种扭曲作用。将此作用视为右作用时，$H_L^\bullet(X,\Bbbk)$与 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$的典范左作用共同构成一个双模。利用这一双模结构，我们证明了 K¨unneth 同构的一个等变版本。

我们将这一结果应用于 Bott-Samelson簇的等变上同调计算，并用于几何构造这些上同调之间的双模态射。

关键词：等变上同调、纤维丛、K¨unneth 同构、Bott-Samelson簇、交换图。

1. Introduction

设 L 是一个拓扑群，连续作用于拓扑空间 X。对于任意交换环 $\Bbbk$， L-等变（层）上同调 $H_L^\bullet(X,\Bbbk)$ 自然具有左 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模结构，其中 pt 是由 L 平凡作用于其上的单元素集。这个模结构可以明确描述如下：

$$cm = a_X^\star(c) \cup m,$$

其中， $c \in H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$、 $m \in H_L^\bullet(X,\Bbbk)$， $a_X\colon X \to \mathrm{pt}$ 是常值映射， $a_X^\star$ 是等变拉回， $\cup$ 表示杯积。

本文的主要思想是为 $H_R^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$ 在 $H_L^\bullet(X,\Bbbk)$ 上定义右模结构，可能适用于 $R \neq L$。当然，如果 $L = R$ 且我们没有关于 X 的任何其他信息，那么可以简单地令 $md = m \cup a_X^\star(d)$ 来实现。但这种构造的限制性很强。因此，我们借助一个 L-等变映射 $A\colon X \to G/R$，在 $H_L^\bullet(X,\Bbbk)$ 上定义右 $H_R^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模结构；我们称之为扭曲映射，见第 2.9 节。该定义（见 (6)）假设群 L 和 R 包含于一个更大的群 G 中，而后者作用于万有主 L-丛的总空间 E。因此，我们定义等变上同调 $H_L^\bullet(X,\Bbbk)$ 时，并非借助任意万有主 L-丛 $E \to L\backslash E$，而只借助这样一种丛：它带有 G 的连续作用。至少当 G 是紧李群，且 L 和 R 是它的闭子群时，这种构造是可行的。我们认为扭曲映射无处不在，例如参见第 6 节和第 7 节。

本文的主要结果是证明以下 K¨unneth 同构的等变形式。设 X和 Y为拓扑空间， L、R、 P、 Q为紧李群 G 的闭子群，满足 $R \subset P$和 $Q \subset P$；群 L 和 R 分别在左侧和右侧对 X 连续且可交换地作用，并且 Q 在Y上连续作用。接下来我们考虑空间

$$X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y = X \times P \times Y/\sim,$$

其中， $\sim$是由对任意 $r \in R$和 $q \in Q$， $(x,p,y) \sim (xr, r^{-1}pq, q^{-1}y)$ 定义的等价关系。再设 $\alpha\colon X \to G$ 是一个连续映射，使得 $\alpha(lx) = l\alpha(x)$，并且

对任意 $l \in L$、 $x \in X$ 和 $r \in R$，$\alpha(xr) = \alpha(x)r$ 。此映射诱导出左L-空间的态射 A: $X/R \to G/R$ ，其定义为 $A(xR) = \alpha(x)R$。将 A 视为扭曲映射，我们在 $H_L^\bullet(X/R,$ pt) 上得到右 $H_R^\bullet$(pt $\Bbbk$)-模结构，进而通过自然态射 $H_P^\bullet$(pt $\Bbbk$) $\to H_R^\bullet$(pt $\Bbbk$)，得到右$H_P^\bullet$(pt $\Bbbk$)-模结构。类似地，自然态射 $H_P^\bullet$(pt $\Bbbk$) $\to H_Q^\bullet$(pt $\Bbbk$) 通过修改典范左模结构，在 $H_Q^\bullet(Y, \Bbbk)$ 上定义了左 $H_P^\bullet$(pt $\Bbbk$)-模结构。于是存在一个映射

$$H_L^\bullet(X/R, \Bbbk) \otimes_{H_P^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)} H_Q^\bullet(Y, \Bbbk) \xrightarrow{\theta} H_L^\bullet\left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y, \Bbbk\right)$$

即在一定限制（I）–（VIII）下的一个同构（如果在 $H_Q^\bullet(Y, \Bbbk)$ 上定义了扭曲右作用，则为双模同构）。需要注意的是，这一同构的重要性在于，它由一个显式构造的映射 θ 给出，而仅仅根据谱序列即可相当平凡地推出两边的上同调同构。当我们在第7节考察 Bott-Samelson簇的上同调以及在第8节考察它们之间的态射时，这种精确描述将发挥作用。

我们在第6节给出此前发展理论的两个基本应用实例。第一个例子涉及旗簇 G/B 的上同调。我们重新证明经典同构

$$H_T^\bullet(G/B, \Bbbk) \cong \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}^W} \mathcal{R},$$

其中， B 是包含极大环面 T 的半单复代数群 G 的一个 Borel子群， W 是 Weyl群， $\mathcal{R} = H_T^\bullet$(pt $\Bbbk$)，而 $\mathcal{R}^W$ 是 W-不变量的子环。通常，人们利用这一同构为具有 T-等变连续态射 $X \to G/B$ 的空间 X （例如旗簇和 Bott-Samelson簇）的 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模结构引入 T-等变上同调；而我们将证明，这一同构本身是第2–5节所发展理论的一个结果。在本文中，我们仅将这一同构作为例子引用，因为我们的扭曲作用理论使我们能够独立地引入右作用。第二个例子涉及标准双模（带有扭曲右作用），我们重新证明此类双模通常具有的乘法性质。

第 7 节中的 Bott-Samelson簇 BS(s) 是我们的主要例子。在这里，我们采用 Bott和 Samelson [BS] 对这些簇的原始定义。注意，BS(s) 是极大紧环面 K 的左 K-空间。因此，对于任意交换环 $\Bbbk$，我们都可以考虑 K-等变上同调 $H_K^\bullet$(BS(s) $\Bbbk$)。在定理 34 中，我们建立了 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模的同构

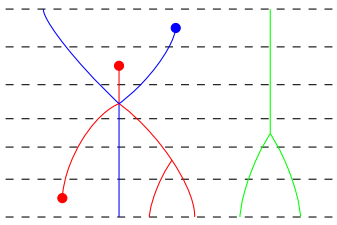
$$\theta_s : \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}^{s_1}} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}^{s_2}} \otimes \cdots \otimes_{\mathcal{R}^{s_n}} \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} H_K^\bullet(\mathrm{BS}(s), \Bbbk),$$

其中， $s = (s_1, \ldots, s_n)$，而 $\mathcal{R}^{s_i}$ 表示点 $\mathcal{R}$ 的 K-等变上同调中 s_i-不变量构成的子环。与其他类似同构的构造（例如， [WW，定理 1.6]）相比，我们的构造有以下优点：

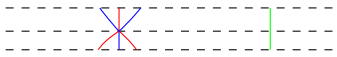
- 反射 s_i 不一定是简单反射；
- 证明不需要局部化；
- θ_s 被显式地构造为拉回与 K¨unneth 同构的复合的商空间；
- 系数环 $\Bbbk$可以是任意有限全局维数的交换环。

这些同构 θ_s 满足预期中的拼接性质（定理 35），并计算了它们在 K-不动点上的限制（定理 37）。

最后，在第8节中，我们考虑 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模 $H_K^\bullet(\mathrm{BS}(s)\ \Bbbk) \to H_K^\bullet(\mathrm{BS}(t)\ \Bbbk)$ 的态射。众所周知 [L]，所有这些态射都由平面图 [EW] 所描述的态射（作为线性组合）生成。这里我们假设这类图没有水平切线，且没有两个顶点具有相同的 y-坐标（按 [EW] 的术语，称为 Soergel图）。我们可以用水平线将任意此类图切分成若干条带，每条带中仅含一个顶点。典型图形如下所示



我们为任意这样的水平条带找到了几何描述，即将其描述为拉回、推前或两者的复合。前两种情形在第8.2节和第8.3节中进行了讨论并用坐标计算，而复合则在第8.5节中讨论，并在第8.9节中作了横向推广。可以看出，只有包含双色顶点的条带才需要考虑复合。这样的条带还可以进一步切分为上部和下部，分别由拉回和推前给出。例如，上面的交换图还可以再加一道切口。相应的条带变为以下交换图：



这幅图表明，我们需要考虑比 Bott-Samelson簇更一般的簇，见第8.4节。我们还证明，双色态射满足正规化判据（引理 41），这使我们能够将它们与 Libedinsky 在 [L, Lemme 4.7] 中定义的态射等同起来。

如果像第8.7节中那样以不同方式复合这些元素，我们便得到琼斯-温策尔投影算子；我们也用与表示态射 $f_{s,t}$ 的顶点价数相同的双色顶点来表示它们。有些关系可以通过直接构造态射来证明。相关例子见第8.3、8.7和8.8节。我们猜想，定义给定群的图示范畴的所有其他关系也可以用类似的方法证明。此外，如果能为由包含多个顶点的条带表示的态射找到几何描述，也会很有意思；至少在该条带中的所有顶点均由拉回或推前表示时是如此。

2. Notation and basic constructions

2.1. 集合论。我们用大写拉丁字母表示集合，用小写拉丁字母表示集合中的元素。并集、交集和笛卡尔积使用通常的符号[1]。为避免与商集混淆，我们用 $-$ 表示集合的差异。对于指标序列 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ 和集合 $X_1, \dots, X_n$，我们用 $\mathrm{pr}_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ 表示到相应坐标的投影 $X_1 \times \cdots \times X_n \to X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_k}$。

设 X、Y 和 S 为集合，$f\colon X \to S$ 和 $g\colon Y \to S$ 为映射。记

$$X \times_{f=g} Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}.$$

这个集合称为关于 f 和 g 的 X 与 Y 的纤维积。

我们经常使用单元素集 pt，其唯一元素记为 p t.

[1]我们还使用以下记号表示幂 $X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{ 次}}$。

2.2. 序列。有限序列 s 的长度 n 记为 $|s|$，其第 i 个元素记为 s_i。因此 $s = (s_1, \dots, s_n)$。情形 $|s| = 0$ 对应于空序列，我们记为 $\varnothing$。然而，如果 $|s| > 0$，那么我们得到截断序列$s' = (s_1, \dots, s_{n-1})$。如果 $t = (t_1, \dots, t_m)$ 是另一个序列，我们考虑它们的拼接

$$st = (s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_m).$$

显然，$|st| = |s| + |t|$。

2.3. 模。设 M 和 M' 分别是环 R 和 R' 上的右模。假设存在一个环同构 ι：$R \xrightarrow{\sim} R'$。若映射 $\mu\colon M \to M'$ 是其底层阿贝尔群的同构，且

$$\mu(mr) = \mu(m)\iota(r) \tag{1}$$

对于一个 y $m \in M$ 和 $r \in R$。我们对左模和双模作类似的定义 .

右 R-模 M 与左 R-模 N 的张量积照惯例记为 $M \otimes_R N$。若 R 是交换的，我们还可以考虑具有 n 个因子的第 n 个张量幂 $N \otimes_R \cdots \otimes_R N$，记为 $N^{\otimes_R n}$。

2.4. 群作用与商。在本文中，我们考虑群在集合上的左作用和右作用。因此，我们将仔细区分左商与右商。更确切地说，设群 G 在集合 X 上左作用。我们用 $G \circlearrowright X$表示这一事实。接着，我们将

$$G \setminus X = \{Gx \mid x \in X\}$$

商空间。将每个 x 映到 Gx 的映射 $X \to G \setminus X$ 称为商映射（对应于 G的作用）。我们还考虑 G的不动点集合

$$^G X = \{x \in X \mid \forall g \in G : gx = x\}$$

设 G 也在 Y和 f 上左作用，且 $X \to Y$是一个映射。若对任意 $x \in X$和 $g \in G$，都有 $f(gx) = gf(x)$，则称 f 是 G-等变的。在这种情况下，我们将由 $G \setminus f$表示从$G \setminus X$到 $G \setminus Y$的映射，其定义为

$$(G \setminus f)(Gx) = Gf(x).$$

类似地，若 G 在 X上右作用，我们用 $X \circlearrowleft G$表示这一事实，并令

$$X/G = \{xG \mid x \in X\},$$

采用类似的商映射和 G-等变概念，并类似地记 G 的不动点集合以及商空间之间的映射。

此外，若群 L 和 R 分别在集合 X 上左作用和右作用，则若对任意 $l \in L$、$r \in R$ 和 $x \in X$，都有 $l(xr) = (lx)r$，我们称 L 和 R 的作用交换。在这种情况下，L 通过 $l(xR) = (lx)R$ 在 X/R 上左作用，而 R 通过 $(Lx)r = L(xr)$ 在 $L \setminus X$ 上右作用。若进一步地，Y 是另一个空间，分别带有 L 和 R 的可交换左作用和右作用，则若映射 $f\colon X \to Y$ 同时是 L-等变和 R-等变的，我们称其为 R-L-等变映射。

现在假设 G 同时在 X 和 E 上左作用。则 G 在乘积 $X \times E$ 上以对角方式左作用：$g(x, e) = (gx, ge)$。于是我们定义

$$X \times_G E = G \setminus (X \times E).$$

我们将把任意轨道 $G(x, e)$ 映射到 Ge 的映射 $X \times_G E \to G \setminus E$ 称为典范投影。典范投影记作 can。若 X' 和 E' 是另外一些赋有左G-作用的集合，且 $\alpha\colon X \to X'$ 和 $\beta\colon E \to E'$ 是 G-等变映射，则我们用$\alpha \times_G \beta$表示从 $X \times_G E$到 $X' \times_G E'$的映射，其定义为 $G(x, e) \mapsto G(\alpha(x)\ \beta(e))$。

2.5. 商积。设 $X_1, \dots, X_n$ 是拓扑空间， $G_1, \dots, G_{n-1}$ 是拓扑群，并且每个 G_i 都在右侧作用于 X_i 、在左侧作用于 X_{i+1}。此外，假设对每个 $i = 2, \dots, n-1$， G_{i-1} 和 G_i 在 X_i 上的作用彼此交换。于是我们考虑 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 上的以下等价关系 $\sim$:

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (x_1 g_1, g_1^{-1} x_2 g_2, \dots, g_{n-1} x_n)$$

对任意 $g_1 \in G_1, \dots, g_{n-1} \in G_{n-1}$。我们记作

$$X_1 \underset{G_1}{\times} X_2 \underset{G_2}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n / \sim .$$

若 $n = 0$ ，此空间就是单元素集；若 $n = 1$ ，此空间为 X_1。包含 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的等价类记为 $[x_1 \colon x_2 \colon \cdots \colon x_n]$。若 $n > 0$，且 G_0 是一个在左侧作用于 X_1 的群，并且在 $n > 1$ 的情况下，该作用与 G_1 在 X_1 上的作用交换，则得到 G_1 在 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上的如下左作用：

$$g_0[x_1 : x_2 : \cdots : x_n] = [g_0 x_1 : x_2 : \cdots : x_n]. \tag{2}$$

类似地，对于 $n > 0$ ，以及一个在 X_n 上从右侧作用的群 G_n ，若在 $n > 1$的情况下，该作用与 G_{n-1} 在 X_n 上的作用交换，则得到如下右作用：

$$[x_1 : x_2 : \cdots : x_n] g_n = [x_1 : x_2 : \cdots : x_n g_n]. \tag{3}$$

此构造是结合的，也就是说，

$$X_1 \underset{G_1}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n \cong X_1 \underset{G_1}{\times} \cdots \underset{G_{m-2}}{\times} X_{m-1} \underset{G_{m-1}}{\times} (X_m \underset{G_m}{\times} \cdots \underset{G_{k-1}}{\times} X_k) \underset{G_k}{\times} X_{k+1} \underset{G_{k+1}}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n.$$

对于 $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$。我们将在整篇论文中采用这一识别。因此$[x_1 \colon \cdots \colon x_n] = [x_1 \colon \cdots \colon x_{m-1} \colon [x_m \colon \cdots \colon x_k] \colon x_{k+1} \colon \cdots \colon x_n]$。

2.6. 更多商积。沿用上一节的记号和假设，考虑商空间

$$X_1 \underset{G_1}{\times} X_2 \underset{G_2}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n / G_n = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n / \approx,$$

其中，等价关系 $\approx$ 由对任意 $g_1 \in G_1, \dots, g_{n-1} \in G_{n-1}, g_n \in G_n$ 成立的 $(x_1, \dots, x_n) \approx (x_1 g_1, g_1^{-1} x_2 g_2, \dots, g_{n-1} x_n g_n)$ 给出。包含 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的等价类记作 $[x_1 \colon x_2 \colon \cdots \colon x_n]\!]$。鉴于同构

$$X_1 \underset{G_1}{\times} X_2 \underset{G_2}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n / G_n \cong X_1 \underset{G_1}{\times} X_2 \underset{G_2}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n \underset{G_n}{\times} \mathrm{pt},$$

我们假设 $[x_1 \colon x_2 \colon \cdots \colon x_n]\!] = [x_1 \colon x_2 \colon \cdots \colon x_n \colon pt]$，其中 G_n 在 pt 上的左作用是平凡的。这个识别使我们能够为任意 n （包括 $n = 0$ 的情形）引入 G_0 在上述空间上的左作用。注意

$$X_1 \underset{G_1}{\times} X_2 \underset{G_2}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n / G_n \cong (X_1 \underset{G_1}{\times} X_2 \underset{G_2}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n) / G_n$$

and

$$X_1 \underset{G_1}{\times} X_2 \underset{G_2}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n / G_n \cong X_1 \underset{G_1}{\times} X_2 \underset{G_2}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} (X_n / G_n)$$

如果 $n > 0$。

最后注意

$$X_1 \underset{G_1}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n / G_n \cong X_1 \underset{G_1}{\times} \cdots \underset{G_{i-1}}{\times} X_i \underset{G_i}{\times} G_i \underset{G_i}{\times} X_{i+1} \underset{G_{i+1}}{\times} \cdots \underset{G_{n-1}}{\times} X_n / G_n$$

其中我们假设 $[x_1 \colon \cdots \colon x_n]\!] = [x_1 \colon \cdots \colon x_i \colon 1 \colon x_{i+1} \colon \cdots \colon x_n]\!]$。在适当情况下，我们将采用这一识别。

2.7. 拓扑学。拓扑群是一个群 G，同时也是一个拓扑空间，并且其乘法和取逆运算都是连续映射。我们称 G 在拓扑空间 X 上连续作用，如果 G 以集合论的方式作用于 X，使得乘法$G \times X \to X$（分别地，$X \times G \to X$）是连续的。在这种情况下，我们也称 X 是一个左（分别地，右） G-空间。

下文将用到以下拓扑结果。

命题 1. 设 X 和 Y 是拓扑空间，且 $f\colon X \to Y$ 是连续双射。假设存在一个开覆盖$Y = \bigcup_{i\in I} U_i$，并且对每个 $i \in I$，都存在连续函数 $g_i\colon U_i \to X$，使得对于任意 $i \in I$ 和 $y \in U_i$，均有 $fg_i(y) = y$。那么，f 是一个同胚。

设 E 和 B 是 G-空间，且 $p\colon E \to B$ 是连续的 G-等变映射。若对每个点 $b \in B$，都存在一个开邻域$U \subset B$ 以及一个 G-等变同胚 $h\colon G \times U \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$（对应左侧 G-作用），或$h\colon U \times G \xrightarrow{\sim} p^{-1}(U)$（对应右侧 G-作用），使得相应的交换图

$$\begin{array}{ccc} G\times U & \xrightarrow[\sim]{h} & p^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & U & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} U\times G & \xrightarrow[\sim]{h} & p^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & U & \end{array}$$

是交换的。h 的 G-等变性实际上意味着，对于任意的 $u \in U$ 和 g_1，$g_2 \in G$，都有

$$h(g_1g_2, u) = g_1h(u, g_2)$$

对于左 G-作用，有

$$h(u, g_1g_2) = h(u, g_1)g_2$$

对于右 G-作用，有。滥用记号时，我们在上面的交换图中写作 p，而非将 p 限制到$p^{-1}(U)$。在本文的其他交换图中，我们也会采用类似的简写。

下面给出一个众所周知的结果，参见例如 [J，第 1.4] 节。

命题 2. 设 X 和 E 是左 G-空间。假设商映射 $E \to G \setminus E$ 是一个主 G-丛。那么典范投影 $X \times_G E \to G \setminus E$ 是一个以 X 为纤维的纤维丛。

我们也可以利用已有的主丛构造新的主丛。

引理3. 设 X 和 Y 分别为右 G-空间和左 G-空间。此外，设 H 在 Y 上连续地右作用，且此作用与 G 的左作用交换。假设商映射 $X \to X/G$ 和 $Y \to Y/H$ 分别为主 G-丛和主 H-丛。那么商映射

$$X \underset{G}{\times} Y \to X \underset{G}{\times} Y/H \tag{4}$$

对于右作用 (3)，是一个主 H-丛。

证明. 我们用 f 表示映射 (4)。因此 $f([x\colon y]) = [x\colon y]$。我们还分别用 p 和 q 表示商映射 $X \to X/G$ 和 $Y \to Y/H$。

令 $[x_0\colon y_0]$ 是 $X \underset{G}{\times} Y/H$ 的任意一点。根据引理的假设，存在 x_0G 的一个开邻域 U，以及一个 G-等变同胚 σ，使得交换图

$$\begin{array}{ccc} U\times G & \xrightarrow[\sim]{\sigma} & p^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & U & \end{array}$$

是交换的。令 $\mathbf{g} = \mathrm{pr}_2 \sigma^{-1}$。这是一个从 $p^{-1}(U)$ 到 G 的连续映射，满足对任意 $x \in p^{-1}(U)$ 和 $g \in G$，$\mathbf{g}(xg) = \mathbf{g}(x)g$。

存在一个 $\mathbf{g}(x_0)y_0H$ 的开邻域 V，以及一个 H-等变同胚 τ，使得交换图

$$\begin{array}{ccc} V \times H & \xrightarrow[\sim]{\tau} & q^{-1}(V) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle q} & \\ & V & \end{array}$$

可交换。令 $\mathbf{h} = \mathrm{pr}_2 \tau^{-1}$。这是一个从 $q^{-1}(V)$ 到 H 的连续映射，使得对于任意 $y \in q^{-1}(V)$ 和 $h \in H$，$\mathbf{h}(yh) = \mathbf{h}(y)h$。

令 $\lambda\colon X \times Y/H \to X/G$ 为由 $\lambda([x\colon y]) = xG$ 给出的映射，并令 $\mu\colon \lambda^{-1}(U) \to Y/H$ 为由 $\mu([x\colon y]) = \mathbf{g}(x)yH$ 给出的映射。显然，这两个映射都是良定义且连续的。我们设 $W = \mu^{-1}(V)$。根据我们对 U 和 V 的选择，得到 $[x_0\colon y_0] \in W$。我们定义函数 $\xi\colon W \times H \to X \times Y$，其定义为[G]

$$([x : y], h) \mapsto [x : y\mathbf{h}(\mathbf{g}(x)y)^{-1}h].$$

容易验证，此映射良定义、连续且是 H-等变的。将其与 f 复合，得到

$$([x : y], h) \xmapsto{\xi} [x : y\mathbf{h}(\mathbf{g}(x)y)^{-1}h] \xmapsto{f} [x : y\mathbf{h}(\mathbf{g}(x)y)^{-1}hH] = [x : y].$$

这一计算证明，ξ 实际上是一个到 $f^{-1}(W)$ 的映射，并且下图交换：

$$\begin{array}{ccc} W \times H & \xrightarrow{\xi} & f^{-1}(W) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle f} & \\ & W & \end{array}$$

还需证明 ξ 是一个同胚。这是成立的，因为其逆映射为

$$\xi^{-1}([x : y]) = \big([x : y], \mathbf{h}(\mathbf{g}(x)y)\big).$$

□

2.8. 等变上同调。设 G 是一个拓扑群。称主 G-丛 $E \to B$ 为万有丛，如果总空间 E 可缩。我们默认假设，对于这里讨论的任意拓扑群，这样的丛都存在。对于左 G-空间 X，取系数为交换环 $\Bbbk$，我们将 G-等变上同调定义为

$$H^\bullet_G(X, \Bbbk) = H^\bullet(X \times_G E, \Bbbk).$$

考虑典范投影 $\mathrm{can} : X \times_G E \to G \setminus E \cong \mathrm{pt} \times_G E$，我们得到映射 $\mathrm{can}^*\colon H^\bullet_G(\mathrm{pt}, \Bbbk) \to H^\bullet_G(X, \Bbbk)$。该映射使 $H^\bullet_G(X, \Bbbk)$ 成为一个左 $H^\bullet_G(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-模，其定义如下

$$am = \mathbf{can}^*(a) \cup m,$$

其中 $a \in H^\bullet_G(\mathrm{pt}, \Bbbk)$、$m \in H^\bullet_G(X, \Bbbk)$，而 $\cup$ 表示杯积。该模不依赖于万有丛 $E \to B$ 的选取。我们将在推论 5 中讨论这一事实。我们称 $H^\bullet_G(\mathrm{pt}, \Bbbk)$ 的这一左作用为典范。

$H^\bullet_G(\mathrm{pt}, \Bbbk)$ 在 $H^\bullet_G(X, \Bbbk)$ 上的类似右作用由 $ma = m \cup \mathrm{can}^*(a)$ 给出，也称为典范作用。我们将在第 6.1 节中使用它。

如果 X' 是另一个左 G-空间，且 $f\colon X \to X'$ 是一个连续的 G-等变映射，那么我们有连续映射 $f \times_G \mathrm{id}\colon X \times_G E \to X' \times_G E$。此映射诱导出拉回

$$(f \times_G \mathrm{id})^* : H^\bullet_G(X', \Bbbk) \to H^\bullet_G(X, \Bbbk)$$

上同调之间的映射。我们使用记号 $f^\star = (f_G \times \mathrm{id})^*$ 来区分普通拉回与等变拉回。例如 $a_X^\star = \mathrm{can}^*$，其中 $a_X\colon X \to \mathrm{pt}$ 是常值映射。

2.9. 扭曲作用。设 G 为一个拓扑群，L 和 R 为它的子群。假设 L 和 R 分别通过乘法在 G 上从左侧和右侧作用。由于这两个作用交换，群 L 在商空间 G/R 上连续地从左侧作用。

设 X 为另一个左 L-空间，且 $A : X \to G/R$ 是一个 L-等变连续映射。我们称 A 为扭曲映射。对于任意左 G-空间 E，映射 A 使我们能够定义映射

$$v_A : X \times_L E \to R \setminus E$$

by

$$L(x, e) \mapsto A(x)^{-1} e. \tag{5}$$

注意，$A(x)^{-1} \in R \setminus G$。读者可以很容易地验证，$v_A$ 是良定义且连续的。我们称此映射为由 A 扭曲的投影。

设商映射 $E \to L \setminus E$ 和 $E \to R \setminus E$ 分别为万有主 L-丛和 R-丛。于是我们得到上同调之间的映射 $v_A^*\colon H_R^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk) \to H_L^\bullet(X, \Bbbk)$，它诱导出 $H_L^\bullet(X, \Bbbk)$ 上的如下右 $H_R^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-作用：

$$mb = m \cup v_A^*(b). \tag{6}$$

我们称此作用为由 A扭曲的作用。

乍看之下，这种右模的构造取决于 E的选择。不过，我们得到以下结果。

引理 4. 在同构意义下，右 $H_R^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-模 $H_L^\bullet(X, \Bbbk)$与 E的选择无关。

证明。设 E是另一个左 G-空间，使得 $E \to L \setminus E$和 $E \to R \setminus E$分别为万有主 L-丛和 R-丛。我们仅在本证明中使用以下记号：

$$\widetilde{H}_L^\bullet(X, \Bbbk) = H^\bullet(X \times_L \widetilde{E}, \Bbbk), \quad \widetilde{H}_R^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk) = H^\bullet(R \setminus \widetilde{E}, \Bbbk).$$

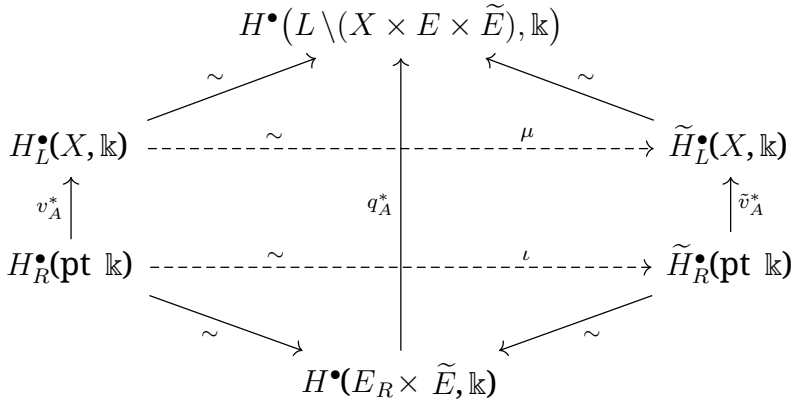
我们还有映射 $\tilde{v}_A\colon X \times_L E \to R \setminus E$，它与 v_A类似，也由式 (5) 给出。此映射通过以下方式在 $H_L^\bullet(X, \Bbbk)$上定义右 $H_R^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-模结构：

$$\tilde{m}\tilde{b} = \tilde{m} \cup \tilde{v}_A^*(\tilde{b}). \tag{7}$$

令 L和 R分别以对角方式作用于乘积 $X \times E \times E$和 $E \times E$：$l(x, e, \tilde{e}) = (lx, le, l\tilde{e})$ 和 $r(e, \tilde{e}) = (re, r\tilde{e})$。于是得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L \setminus (X \times E \times \widetilde{E}) & & \\
 & \swarrow^{L \setminus \mathrm{pr}_{1,2}} & \downarrow & \searrow^{L \setminus \mathrm{pr}_{1,3}} & \\
X_L \times E & & & & X_L \times \widetilde{E} \\
\downarrow{\scriptstyle v_A} & & \downarrow{\scriptstyle q_A} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{v}_A} \\
R \setminus E & & & & R \setminus \widetilde{E} \\
 & \nwarrow_{R \setminus \mathrm{pr}_1} & \downarrow & \nearrow_{R \setminus \mathrm{pr}_2} & \\
 & & E_R \times \widetilde{E} & &
\end{array} \tag{8}$$

其中 q_A 是由 $L(x,e,\tilde{e}) \mapsto A(x)^{-1}(e,\tilde{e})$ 给出的映射。因此得到如下上同调交换图：



(9)

如果忽略虚线箭头，就得到一个交换图。因此，中间的矩形（含虚线箭头）也是交换的，因为所有斜积映射都是同构。由于所有映射都保持上同调上的加法结构，接下来只需验证条件 (1)：对于 $m \in H_L^\bullet(X,\Bbbk)$ 和 $b \in H_R^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$，我们得到

$$\mu(mb) = \mu(m \cup v_A^*(b)) = \mu(m) \cup \mu v_A^*(b) = \mu(m) \cup \tilde{v}_A^* \iota(b) = \mu(m)\iota(b),$$

这里用到了乘法规则 (6) 和 (7)，以及 μ 保持杯积这一事实。□

推论 5（由引理 4 得出）。在同构意义下，$H_L^\bullet(X,\Bbbk)$ 作为 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-$H_R^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-双模，与 E 的选择无关。

证明。只需证明对于典范作用也有与引理 4 类似的结论。若在 (8) 中作如下替换即可：将 R 换成 L；将 v_A 和 $\tilde{v}_A$ 分别换成典范投影 $X \times_L E \to L\setminus E$ 和 $X \times_L \widetilde{E} \to L\setminus E$；将 q_A 换成 $L\setminus \mathrm{pr}_{2,3}$。□

注 6. 上述规定 $E \to L\setminus E$ 和 $E \to R\setminus E$ 均为万有主 L丛和 R丛，通常是因为 G 是一个李群，L 和 R是其闭子群，且商映射 $E \to G\setminus E$ 是一个万有主 G丛。我们将在第 4 节讨论这种情形。

注 7. 如果对任意 $x \in X$，$R = L$ 和 $A : X \to G/L$ 由 $A(x) = L$ 定义，那么 v_A就是典范投影。在此情形下，$H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$ 在 $H_L^\bullet(X,\Bbbk)$ 上的相应右作用 (6) 是典范的。

2.10. 拉回作为双模同态。沿用上一节的记号，另设 Y 为另一个 G-空间，且 $f : Y \to X$ 是一个 L-等变连续映射。那么复合 $Af : Y \to G/R$ 也是 L-等变的。

引理 8. 等变拉回 $f^\star : H_L^\bullet(X,\Bbbk) \to H_L^\bullet(Y,\Bbbk)$ 是双模同态，其中左作用是典范的，而定义域和陪域上的右作用分别由 A 和 Af 扭曲。

证明. 关于左作用，结论众所周知；我们只证明有关右作用的断言。由定义可直接得出

$$v_{Af} = v_A(f \times_L \mathrm{id}). \tag{10}$$

因此，对于任意 $m \in H_L^\bullet(X,\Bbbk)$ 和 $b \in H_R^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$，我们得到

$$f^\star(mb) = f^\star(m \cup v_A^*(b)) = f^\star(m) \cup f^\star v_A^*(b) = f^\star(m) \cup v_{Af}^*(b) = f^\star(m)b.$$

□

3. The tensor product morphism

本节中，我们固定本文的主要对象：拓扑空间 X 和 Y，群 G,L,R,P,Q，以及映射 α：$X \to G$。

3.1. 博雷尔构造的嵌入。再次设 L, R, P, Q 为拓扑群 G 的子群，使得 $R \subset P$ 且 $Q \subset P$。设 X 和 Y 为拓扑空间，使得

(i) L 在 X 上左作用；
(ii) R 在 X 上右作用；(iii)
Q 在 Y 上左作用。

假设 R 和 Q 分别通过乘法在 P 上左作用和右作用，我们可以将这些数据写成如下形式：

$$L \circlearrowright X \circlearrowleft R \circlearrowright P \circlearrowleft Q \circlearrowright Y.$$

我们还假设

(iv) L和 R 在 X 上的作用交换。

此外，设

(v) $\alpha : X \to G$ 是一个连续的 R-L-等变映射。

在这种情况下，我们得到左 L-空间的态射 $A\colon\ X/R \to G/R$，其定义为

$$A(xR) = \alpha(x)R. \tag{11}$$

因此，我们处于第 2.9 节的情形（其中 X 被 X/R替换），并且有映射$\upsilon_A : (X/R)\ {}_L\!\times\ E \to R \setminus E$，其由 (5) 给出。

设 E 是一个左 G-空间。鉴于 (iv)，我们可以定义 L 在 $X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y$上的左作用 by (2)，也就是说，$l[x :\ p :\ y] = [lx :\ p :\ y]$. 我们考虑映射

$$\varphi : \left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y\right) {}_L\!\times E \to ((X/R)_L \times E) \times (Y_Q \times E)$$

定义如下

$$L([x : p : y], e) \mapsto \big(L(xR, e), Q(y, p^{-1}\alpha(x)^{-1}e)\big). \tag{12}$$

读者很容易验证该映射是良定义且连续的。

我们得到如下交换图：

$$\begin{array}{ccccc}
\left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y\right) {}_L\!\times E & \xrightarrow{\varphi} & ((X/R)_L \times E) \times (Y_Q \times E) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} & (X/R)_L \times E \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & & \downarrow{\scriptstyle \upsilon_A} \\
 & & Y_Q \times E & & R \setminus E \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{can}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_R} \\
 & & Q \setminus E & \xrightarrow{\pi_Q} & P \setminus E
\end{array} \tag{13}$$

其中 π_R 和 π_Q 是自然商映射。一般来说，右侧的矩形不交换。但我们可以得到如下结果。

引理 9. 交换图 (13) 的两条极大路径交换，也就是说，

$$\pi_R\, \upsilon_A\, \mathrm{pr}_1\, \varphi = \pi_Q\, \mathbf{can}\, \mathrm{pr}_2\, \varphi.$$

证明。该结果可直接由 (12) 得出。 □

现在我们将研究 φ的像。

引理 10. 假设 P 在 E上的作用是自由的。那么， φ 是一个嵌入，其像与 $((X/R) \times_L E) \times_{\pi_R v_A \mathrm{pr}_1 = \pi_Q \mathbf{can} \mathrm{pr}_2} (Y \times_Q E)$ 相同。

证明. 设 $L([x:p:y],e)$ 和 $L([x':p':y'],e')$ 是两个轨道，且它们经由 φ 映射到同一对元素。由于 $L(xR, e) = L(x'R, e')$，存在 $l \in L$ 使得 $lxR = x'R$ 且 $le = e'$。由第一个等式可知，存在 $r \in R$ 使得 $lxr = x'$。于是

$$\begin{aligned} L([x:p:y],e) = L([lx:p:y],le) = L([lxr:r^{-1}p:y],e') \\ = L([x':r^{-1}p:y],e') \xmapsto{\mathrm{pr}_2 \varphi} Q(y, p^{-1}r\alpha(x')^{-1}e'). \end{aligned} \tag{14}$$

由于 $L([x':p':y'],e')$ 经 $\mathrm{pr}_2 \varphi$ 映射到同一轨道，我们得到

$$Q(y, p^{-1}r\alpha(x')^{-1}e') = Q(y', (p')^{-1}\alpha(x')^{-1}e').$$

因此，存在 $q \in Q$ 使得 $qy = y'$，并且 $qp^{-1}r\alpha(x')^{-1}e' = (p')^{-1}\alpha(x')^{-1}e'$。由最后一个等式以及 P 在 E 上作用的自由性可得 $qp^{-1}r = (p')^{-1}$。因此，$r^{-1}p = p'q$，并应用 (14)，得到

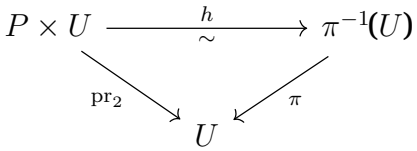
$$\begin{aligned} L([x:p:y],e) = L([x':r^{-1}p:y],e') = L([x':p'q:y],e') \\ = L([x':p':qy],e') = L([x':p':y'],e') \end{aligned}$$

如所要求的。

现在我们来证明关于像的断言。由引理 9 可知，$\mathrm{im}\,\varphi$ 包含于纤维积中。设 $a = (L(xR, e)\ Q(y, e'))$ 是其中任意一点。因此$P\alpha(x)^{-1}e = Pe'$。于是存在一个元素 $p \in P$，使得 $pe' = \alpha(x)^{-1}e$。我们得到$\varphi(L([x:p:y],e)) = a$。□

定理11. 假设商映射 $E \to P \backslash E$是一个主 P-丛。那么 φ是一个拓扑嵌入。

证明。我们将这个商映射记为 π，并将引理 10 表述中的纤维积记为 D。设 a是 D中的任意一点。根据此引理的假设，存在点 $\pi_R v_A$的一个开邻域 $U \subset P \backslash E$，使得 $\mathrm{pr}_1(a) = \pi_Q \mathrm{can}\, \mathrm{pr}_2(a)$，以及一个$P$-等变同胚 $h\colon P \times U \xrightarrow{\sim} \pi^{-1}(U)$，使得交换图



是交换的。我们记作 $\mathrm{p} = \mathrm{pr}_1 h^{-1}$。显然，对于任意 $p \in P$ and$e \in \pi^{-1}(U)$，都有 $\mathrm{p}(pe) = p\mathrm{p}(e)$。

我们定义连续函数

$$\xi : (\pi_R v_A)^{-1}(U) \times (\pi_Q \mathbf{can})^{-1}(U) \to (X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y) \times_L E$$

如下。设 $d = (L(xR, e)\ Q(y, e'))$ 是 ξ 的定义域中的一个点。令

$$\xi(d) = L\big([x : \mathbf{p}(\alpha(x)^{-1}e)\mathbf{p}(e')^{-1} : y], e\big).$$

容易验证，这一定义与 d 的表示中 x、y、e、e' 的选取无关。

现在假设 $d \in D$。于是我们得到 $P\alpha(x)^{-1}e = Pe'$。我们用 $\alpha(x)^{-1}e = pe'$ 表示相应的 $p \in P$。于是得到

$$\varphi\xi(d) = \Big(L(xR,e), Q\big(y, \mathbf{p}(e')\mathbf{p}(\alpha(x)^{-1}e)^{-1}\alpha(x)^{-1}e\big)\Big) = \big(L(xR,e), Q\big(y, \mathbf{p}(e')\mathbf{p}(pe')^{-1}pe'\big)\big)$$
$$= \big(L(xR,e), Q\big(y, \mathbf{p}(e')\mathbf{p}(e')^{-1}p^{-1}pe'\big)\big) = \big(L(xR,e), Q\big(y,e'\big)\big) = d.$$

该计算证明，ξ 到 $(\pi_R v_A)^{-1}(U) \times (\pi_Q$ 可以$)^{-1}(U) \cap D$ 取逆 φ 的限制。由于 a 属于最后一个子集，所有此类子集覆盖 D。因此，所需结论由引理 10 和命题 1 得出。□

3.2. 三重乘积的典范投影与扭曲投影。由 (12)，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y\right) {}_L\!\times E & \xrightarrow{\varphi} & ((X/R) {}_L\!\times E) \times (Y {}_Q\!\times E) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{can}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \\ L \setminus E & \xleftarrow[\mathbf{can}]{} & ((X/R) {}_L\!\times E) \end{array} \tag{15}$$

现在设 M 是 G 的一个子群，且 $B\colon Y \to G/M$ 是一个 Q-等变连续映射。我们考虑映射 $\alpha B\colon \ X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y \to G/M$，其定义如下：

$$[x : p : y] \mapsto \alpha(x)pB(y). \tag{16}$$

容易验证，该映射是良定义的、连续的，并且是 L-等变的。由 (12)，我们得到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y\right) {}_L\!\times E & \xrightarrow{\varphi} & ((X/R) {}_L\!\times E) \times (Y {}_Q\!\times E) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle v_{\alpha B}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \\ M \setminus E & \xleftarrow[v_B]{} & Y {}_Q\!\times E \end{array} \tag{17}$$

3.3. 差异。本节中，我们想研究差异

$$((X/R) {}_L\!\times E) \times (Y {}_Q\!\times E) - \operatorname{im}\varphi.$$

为此，我们将说明 E 的一些附加性质。

引理 12. 假设 P 在 E 上自由作用。设 U 是一个紧李群，连续地右作用于 E，且此作用与 G 的左作用交换。假设空间 $R \setminus E$ 是豪斯多夫空间，且 U 在其上具有传递作用。那么到第一个分量的投影

$$\omega : ((X/R) {}_L\!\times E) \times (Y {}_Q\!\times E) - \operatorname{im}\varphi \to (X/R) {}_L\!\times E$$

是一个纤维与下列空间同胚的纤维丛

$$F_{\bar{e}} = \{Q(y,e) \in Y {}_Q\!\times E \mid \bar{e} \neq Pe\} = Y {}_Q\!\times E - (\pi_Q \mathbf{can})^{-1}(\bar{e}),$$

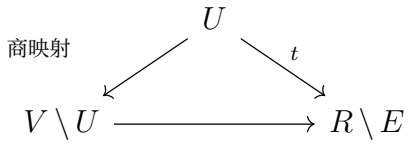
其中 $\bar{e}$ 是 $P \setminus E$ 中的任意一点。

证明。我们将用 $\cdot$ 表示 U 的作用。我们按照规则 $Q(y,e) \cdot u = Q(y, e \cdot u)$ 令 U 在 $Y {}_Q\!\times E$ 上右作用。显然可得 $F_{\bar{e}} \cdot u = F_{\bar{e}\cdot u}$。由于 U 在 $R \setminus E$ 上传递作用，它在 $P \setminus E$ 上也传递作用。因此，对于不同的点 $\bar{e}$，空间 $F_{\bar{e}}$ 同胚。我们将沿用图 (13) 的记号。

令 $a \in (X/R)_L \times E$ 为任意一点。由引理 10 可得

$$\omega^{-1}(a) = \{a\} \times F_{\pi_R v_A(a)} \cong F_{\pi_R v_A(a)} \cong F_{\bar{e}}.$$

我们考虑映射 $t\colon U \to R \setminus E$，其定义为 $t(u) = v_A(a)u$。令 V为 $v_A(a)$ 在 U中的稳定子。注意到，V是李群，因为它是 U中的闭子群。考虑以下交换图



底部的映射由 $Vu \mapsto v_A(a) \cdot u$给出，它是连续且双射的。由于它是从紧空间到豪斯多夫空间的映射，因此是一个同胚。由于自然投影 $U \to V \setminus U$是一个主 V-丛，它在 $V \setminus U$的任意一点的某个开邻域内都有连续截面。由上面的交换图可知，映射 t也具有相同的性质。特别地，存在 $R \setminus E$中 $v_A(a)$的一个开邻域 W，以及 t的一个连续截面 s: $W \to U$。换句话说，我们有

$$w = t(s(w)) = v_A(a) \cdot s(w) \tag{18}$$

对任意 $w \in W$。

设 $H = v_A^{-1}(W)$。它是 $(X/R)_L \times E$ 的一个开子集，包含 a。我们按如下方式构造映射 $\sigma\colon H \times \omega^{-1}(a) \to ((X/R)_L \times E) \times (Y_Q \times E)$

$$\Big(h, \big(a, Q(y,e)\big)\Big) \mapsto \Big(h, Q\big(y, e \cdot sv_A(h)\big)\Big).$$

这个映射显然是良定义且连续的。我们来证明 $\operatorname{im}\sigma \cap \operatorname{im}\varphi = \varnothing$。根据引理 10，我们需要证明不等式

$$\pi_R v_A(h) \neq \pi_Q(Qe \cdot sv_A(h)) = Pe \cdot sv_A(h). \tag{19}$$

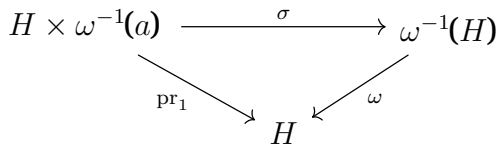
由于 E 上的 G-作用和 U-作用交换，映射 π_R 是 U-等变的。因此，(19) 等价于

$$\pi_R\big(v_A(h) \cdot sv_A(h)^{-1}\big) \neq Pe.$$

对 $w = v_A(h)$ 应用 (18) 来计算左边，得到等价的不等式

$$\pi_R v_A(a) \neq Pe,$$

根据引理 10，该式成立，因为 $(a, Q(y,e)) \notin \operatorname{im}\varphi$。因此，我们可以将 σ 视为从 $H \times \omega^{-1}(a)$ 到 $\omega^{-1}(H)$ 的连续映射。交换图



显然是交换的。

为了证明 σ 是一个同胚，我们注意到其逆映射 $\omega^{-1}(H) \to H \times \omega^{-1}(a)$ 由下式给出

$$\big(h, Q(y,e)\big) \mapsto \Big(h, \big(a, Q(y, e \cdot sv_A(h)^{-1})\big)\Big).$$

□

让我们更仔细地考察纤维 $F_{\bar{e}}$。在对参与初始构造的空间施加某些限制后，我们将证明其奇数次紧支撑上同调的消失定理。我们需要以下结果。

引理 13. 假设商映射 $E \to P \setminus E$ 是一个主 P-丛。那么复合映射

$$Y \times_Q E \xrightarrow{\mathbf{can}} Q \setminus E \xrightarrow{\pi_Q} P \setminus E.$$

是一个以 $Y \times_Q P$ 为纤维的纤维丛。

证明。我们再次将商映射 $E \to P \setminus E$ 记为 π。设 $\bar{e}$ 是 $P \setminus E$ 中任意一点。根据引理的假设，存在 $\bar{e}$ 的一个开邻域 $U \subset P \setminus E$，以及一个 P-等变同胚 h，使得交换图

$$\begin{array}{ccc} P \times U & \xrightarrow[\sim]{h} & \pi^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi} & \\ & U & \end{array}$$

我们定义映射 $f\colon U \times (Y \times_Q P) \to Y \times_Q E$，如下：

$$f(u, Q(y,p)) = Q(y, h(p,u)).$$

我们有

$$\pi_Q \,\mathbf{can}\, f(u, Q(y,p)) = \pi_Q(Qh(p,u)) = Ph(p,u) = \pi h(p,u) = \mathrm{pr}_2(p,u) = u.$$

这一计算证明，f 的像包含于 $(\pi_Q \,\mathbf{can})^{-1}(U)$ 中，并且交换图

$$\begin{array}{ccc} U \times (Y \times_Q P) & \xrightarrow{f} & (\pi_Q \,\mathbf{可})^{-1}(U) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \pi_Q\,\mathbf{可}} & \\ & U & \end{array}$$

是交换的。

为了证明 f 是同胚，我们来计算它的逆映射。我们将 h 的逆映射写作如下 $h^{-1}(e) = (\mathbf{p}(e), \mathbf{u}(e))$。容易验证，

$$\mathbf{u}(pe) = \mathbf{u}(e), \qquad \mathbf{p}(pe) = p\mathbf{p}(e)$$

对于任意 $e \in \pi^{-1}(U)$ 和 $p \in P$。采用此记号，我们得到

$$f^{-1}(Q(y,e)) = \big(\mathbf{u}(e), Q(y, \mathbf{p}(e))\big).$$

□

3.4. 张量积。上述结果可应用于等变上同调。设所有商映射 $E \to L \setminus E$, $E \to P \setminus E$, $E \to R \setminus E$, $E \to Q \setminus E$,$E \to M \setminus E$ 都是相应群的万有主丛。我们将以下复合记为 Θ：

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet_L(X/R, \Bbbk) \otimes_\Bbbk H^\bullet_Q(Y, \Bbbk) & \xrightarrow{\times} & H^\bullet\big((X/R) \times_L E) \times (Y \times_Q E) \Bbbk\big) \\ & {\scriptstyle \Theta} \searrow & \downarrow {\scriptstyle \varphi^*} \\ & & H^\bullet_L\left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y, \Bbbk\right). \end{array} \tag{20}$$

映射 $\times$ 是交叉积，由 $a \otimes b \mapsto \mathbf{pr}_1^*(a) \cup \mathbf{pr}_2^*(b)$ 给出。

根据第 2.9 节，左因子 $H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)$ 是右 $H_R^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模，其作用由 A扭曲。另一方面，右因子 $H_Q^\bullet(Y,\Bbbk)$ 是左 $H_Q^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模，其作用为典范作用（第 2.8 节）。此外，商映射 π_R和 π_Q（见图 (13)）给出以下映射：

$$\pi_R^* : H_P^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk) \to H_R^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk), \quad \pi_Q^* : H_P^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk) \to H_Q^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk).$$

它们使我们能够在 $H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)$ 上定义右 $H_P^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模结构，并在 $H_Q^\bullet(Y,\Bbbk)$ 上定义左 $H_P^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模结构。

引理14。映射 Θ 经由 $H_L^\bullet(X/R,\Bbbk) \otimes_{H_P^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)} H_Q^\bullet(Y,\Bbbk)$ 分解。

证明。设 $m \in H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)$、$n \in H_Q^\bullet(Y,\Bbbk)$ 和 $a \in H_P^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$。由引理 9 及定义 Θ 的图 (20)，可得

$$\begin{aligned}
&\Theta(ma \otimes n) = \Theta(m\pi_R^*(a) \otimes n) = \Theta(m \cup v_A^*\pi_R^*(a) \otimes n) = \varphi^*(\mathrm{pr}_1^*(m \cup v_A^*\pi_R^*(a)) \cup \mathrm{pr}_2^*(n)) \\
&= \varphi^* \mathrm{pr}_1^*(m) \cup (\pi_R v_A \mathrm{pr}_1 \varphi)^*(a) \cup \varphi^* \mathrm{pr}_2^*(n) = \varphi^* \mathrm{pr}_1^*(m) \cup (\pi_Q \mathbf{can} \mathrm{pr}_2 \varphi)^*(a) \cup \varphi^* \mathrm{pr}_2^*(n) \\
&= \varphi^*(\mathrm{pr}_1^*(m) \cup \mathrm{pr}_2^* \mathbf{can}^* \pi_Q^*(a) \cup \mathrm{pr}_2^*(n)) = \varphi^*(\mathrm{pr}_1^*(m) \cup \mathrm{pr}_2^*(\mathbf{can}^* \pi_Q^*(a) \cup n)) \\
&= \Theta(m \otimes \mathbf{can}^* \pi_Q^*(a) \cup n) = \Theta(m \otimes \pi_Q^*(a)n) = \Theta(m \otimes an).
\end{aligned}$$

□

我们将由 Θ 诱导的映射记作如下

$$\theta : H_L^\bullet(X/R,\Bbbk) \otimes_{H_P^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)} H_Q^\bullet(Y,\Bbbk) \to H_L^\bullet\left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y, \Bbbk\right).$$

我们按照经典规则使左侧成为一个环

$$(m \otimes n)(m' \otimes n') = (-1)^{ij}(m \cup m' \otimes n \cup n')$$

对于 $n \in H_Q^i(Y,\Bbbk)$ 和 $m \in H_L^j(X/R,\Bbbk)$。

在下一个引理中，我们使用第3.2节的记号。

定理 15. 映射 θ 是一个环同态，也是左 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模的同态，其中所取的是典范作用。对于任意 Q-等变连续映射 $B: Y \to G/M$，映射 θ也是右 $H_M^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模的同态，其中所取的作用分别是在 θ的定义域和陪域上由 B 和 αB扭曲得到的作用。

证明. θ 是环同态这一事实，可参照 Ha 的定理 3.16] 之前的计算证明。

设 $a \in H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$、$m \in H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)$ 和 $n \in H_Q^\bullet(Y,\Bbbk)$。由于交换图 (15) 是交换的，我们得到

$$\begin{aligned}
&\theta(am \otimes n) = \Theta\big((\mathbf{can}^*(a) \cup m) \otimes n\big) = \varphi^*\big(\mathrm{pr}_1^*(\mathbf{can}^*(a) \cup m) \cup \mathrm{pr}_2^*(n)\big) \\
&= (\mathbf{can}\, \mathrm{pr}_1 \varphi)^*(a) \cup \varphi^*(\mathrm{pr}_1^*(m) \cup \mathrm{pr}_2^*(n)) = \mathbf{can}^*(a) \cup \Theta(m \otimes n) = a\theta(m \otimes n).
\end{aligned}$$

现在令 $m \in H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)$、$n \in H_Q^\bullet(Y,\Bbbk)$ 和 $b \in H_M^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$。由于交换图 (17) 可交换，我们得到

$$\begin{aligned}
&\theta(m \otimes nb) = \Theta\big(m \otimes (n \cup v_B^*(b))\big) = \varphi^*\big(\mathrm{pr}_1^*(m) \cup \mathrm{pr}_2^*(n \cup v_B^*(b))\big) \\
&= \varphi^*\big(\mathrm{pr}_1^*(m) \cup \mathrm{pr}_2^*(n)\big) \cup \big(v_B \mathrm{pr}_2 \varphi\big)^*(b) = \Theta(m \otimes n) \cup v_{\alpha B}^*(b) = \theta(m \otimes n)b.
\end{aligned}$$

□

4. The case of a compact Lie group

在本节中，我们考虑 G 是一个紧李群的情形。

4.1. 斯蒂费尔流形。由于当 $\mathfrak{n}$ 足够大时， G 可以视为酉群 $U(\mathfrak{n})$ 的闭子群，因此我们将说明如何找到一个万有主 $U(\mathfrak{n})$-丛。对于任意自然数 $N > \mathfrak{n}$，我们考虑斯蒂费尔流形 [2]

$$E^N = \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathfrak{n},N}(\mathbb{C}) \mid A\bar{A}^T = I_{\mathfrak{n}}\},$$

其中 $\mathrm{Mat}_{\mathfrak{n},\,N}(\mathbb{C})$ 是关于度量拓扑的 $\mathfrak{n}\times N$复矩阵空间，而 $I_{\mathfrak{n}}$是单位 $\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}$矩阵。群 $U(\mathfrak{n})$ 通过乘法在 E^N上施加左作用。同样， $U(N)$ 通过乘法在 E^N上施加右作用。后一作用是传递的，并且与 $U(\mathfrak{n})$ 的左作用交换。商空间 $\mathbf{Gr}^N = U(\mathfrak{n}) \setminus E^N$称为格拉斯曼流形，相应的商映射 $E^N \to \mathbf{Gr}^N$ 是一个主 $U(\mathfrak{n})$-丛。注意，群 $U(N)$ 也通过右乘法作用在 $\mathbf{Gr}^N$上。对于 $N < N'$，通过在右侧添加 $N' - N$ 个零列，我们得到光滑嵌入 $E^N \hookrightarrow E^{N'}$ 。

取直接极限

$$E = \varinjlim E^N, \quad \mathrm{Gr} = \varinjlim \mathrm{Gr}^N,$$

我们得到一个万有主 $U(\mathfrak{n})$-丛 $E \to \mathbf{Gr}$。这些空间满足以下性质 [Bo，命题 9.1]。

命题16. (1) E^N 是单连通的。

(2) 对于 $N - \mathfrak{n}$， $H^n(E^N, \Bbbk) = 0$。(3) 对任意 n， $H^n(E^N, \Bbbk)$ 是有限秩自由的。

推论 17. 对于 G 的任意连通闭子群 L，空间 $L \setminus E^N$ 是单连通的。

证明. 由于 $E^N \to L \setminus E^N$ 是以 L 为纤维的纤维丛，结论由命题 16(1) 和同伦群长正合列得出

$$\{1\} = \pi_1(E^N) \to \pi_1(L \setminus E^N) \to \pi_0(L) = \{1\}.$$

□

命题 18. 设 L 是 G 的闭子群，且 X 是左 L-空间。那么限制映射

$$H^n_L(X, \Bbbk) \to H^n(X \times_L E^N, \Bbbk) \tag{21}$$

对于 $n \leqslant 2(N - \mathfrak{n})$ 是一个同构。

推论 19。设 L 是 G 的闭子群， X 是一个左 L-空间，且 $\mathfrak{n} < N' < N$。则限制映射

$$H^n(X \times_L E^N, \Bbbk) \to H^n(X \times_L E^{N'}, \Bbbk)$$

是 $n \leqslant 2(N' - \mathfrak{n})$ 的同构。

注 20. 在论文余下部分，我们始终指的是 E 的这一选择。不过，如果将其替换为 E^N，那么我们将分别用 v_A^N、 φ^N和 $F_{\bar{e}}^N$代替 v_A、 φ和 $F_{\bar{e}}$。我们将这些对象称为相应无限维对象的紧致版本。

[2]这个空间通常记作 $W_{N,\,\mathfrak{n}}$ 或 $V_{\mathfrak{n}}(\mathbb{C}^N)$ 或 $\mathbb{C}V_{N,\,\mathfrak{n}}$。我们还对矩阵进行转置，因为我们希望具有 $U(\mathfrak{n})$ 的左作用。

4.2. 推前。对于任意拓扑空间 X，我们考虑对偶化复形 $\omega_X = a_X^! \Bbbk$。该复形使我们能够定义博雷尔-穆尔同调 $H_i^{\mathrm{BM}}(X, \Bbbk) = \mathbb{H}^{-i}(X, \omega_X)$。任意真映射 $f\colon X \to Y$都会诱导推前映射 $f_*\colon H_i^{\mathrm{BM}}(X, \Bbbk) \to H_i^{\mathrm{BM}}(Y, \Bbbk)$。

进一步假设 X 和 Y 可定向，其维数分别为 n 和 m。这意味着存在同构 $\omega_X \cong \Bbbk[n]$ 和 $\omega_Y \cong \Bbbk[m]$，我们将其固定下来。于是得到下面这个上同调之间的映射：

$$H^{n-i}(X, \Bbbk) \cong H_i^{\mathrm{BM}}(X, \Bbbk) \xrightarrow{f_*} H_i^{\mathrm{BM}}(Y, \Bbbk) \cong H^{m-i}(X, \Bbbk),$$

我们也将其记为 f_*。这个映射也称为 Gysin映射。

4.3. 商空间的定向。回顾一下，有限维实向量空间 V 的定向是其基的一个等价类，其中两个基等价，当且仅当它们之间的过渡矩阵的行列式为正。属于所选等价类的任意基称为定向基。如果为 V选定了一个定向，则称 V 为定向的。

假设 U 是定向向量空间 V的一个定向子空间。那么我们将为商空间 V/U固定如下定向：设 $v_1, \dots, v_n$是 V的一个定向基，使得对于某个 $m \leqslant n$， $v_1, \dots, v_m$是 U的一个定向基。那么 V/U的定向就是包含基 $v_{m+1} + U, \dots, v_n + U$的那个定向。利用分块矩阵的论证可以证明，该定义与基的选取无关。

如果按照上述规则定义定向向量丛每个纤维的定向，我们就可以定义其商空间的定向。

4.4. 相容定向的方块。这里我们将遵循 Fulton [F] 对这一主题的阐述。考虑一个笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

其中 X、X'、Y、Y' 是紧致光滑定向流形， f、f'、g、g' 是光滑映射。将 f 分解为先经过闭嵌入 $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{R}^N$，再经过到 Y 的投影。若上述方块满足

$$\nu_{X', Y' \times \mathbb{R}^N} \cong (g')^* \nu_{X, Y \times \mathbb{R}^N}$$

作为定向向量丛，其中定义法丛时涉及的商空间 $\nu_{X',\, Y' \times \mathbb{R}^N}$ 和 $\nu_{X,\, Y \times \mathbb{R}^N}$ 按照第 4.3 节所述赋予定向。如果这一同构成立且 $\dim X - \dim Y = \dim X' - \dim Y'$，那么我们得到

$$f'_* (g')^* = g^* f_*. \tag{22}$$

我们将这一性质称为推前的自然性。

4.5. Borel构造上的光滑结构。设 L 是 G 的闭连通子群。根据商流形定理，空间 $L \setminus E^N$ 是一个光滑流形。根据推论 17，它是单连通的，因而是可定向的。

设 X 是一个任意的光滑流形， L 在其上进行左光滑作用。再次应用商流形定理，我们得到空间 $X \times_L E^N$ 是一个光滑流形。其光滑结构可描述如下。设 $L(x, e)$ 是 $X \times_L E^N$ 中的任意一点。存在 $L \setminus E^N$ 的一个包含 Le 的坐标图 (U, φ)。如有必要，缩小 U，我们可以假设纤维丛 $E^N \to L \setminus E^N$ 在 U 上的限制是一个平凡丛。于是，纤维丛 can：$X \times_L E^N \to L \setminus E^N$ 到 U 的限制也

是平凡的。设 $h\colon X\times U\xrightarrow{\sim}\mathsf{can}^{-1}(U)$ 是这样一个平凡化。对于某个 $x'\in Lx\subset X$，我们得到 $h^{-1}(L(x,e))=(x',Le)$。存在 X 的一个包含 x' 的坐标图 (V,ψ)。现在，我们得到坐标图 $(h(V\times U),(\psi\times\varphi)h^{-1})$，它包含原来的点 $L(x,e)$。当 X 带有定向时，这些坐标图是一致定向的，因为 L 通过保向微分同胚作用于 X。

4.6. 等变推前。设 X 和 Y 是紧致光滑可定向流形，闭连通子群 $L\subset G$ 在其上光滑地左作用。设 $f\colon Y\to X$ 是光滑的 L-等变映射。对任意 $N>\mathfrak{n}$，我们得到光滑真映射 $f_L\times\mathsf{id}\colon Y_L\times E^N\to X_L\times E^N$，记作 f^N。由于该映射的定义域和陪域都是第 4.5 节所述的光滑可定向流形，因此我们可以考虑通常的（非等变）推前

$$f_*^N\colon H^n(Y_L\times E^N,\Bbbk)\to H^{n+d}(X_L\times E^N,\Bbbk),$$

其中 $d=\dim X-\dim Y$。因此，根据命题 18，我们实际上得到映射

$$f_\star\colon H_L^n(Y,\Bbbk)\to H_L^{n+d}(X,\Bbbk)$$

只要 $n\leqslant\min\{2(N-\mathfrak{n}),2(N-\mathfrak{n})-d\}$ 已定义

$$f_\star(m)=(i_X^*)^{-1}f_*^Ni_Y^*(m)\tag{23}$$

对于 $m\in H_L^n(Y,\Bbbk)$，其中 $i_X\colon X_L\times E^N\hookrightarrow X_L\times E$ 和 $i_Y\colon Y_L\times E^N\hookrightarrow Y_L\times E$ 是自然嵌入。根据推前的自然性，这个 $f_\star$ 的定义与 N 无关，因为对于任意 $N'>N$，都有以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y_L\times E^{N'},\Bbbk) & \xrightarrow{f_*^{N'}} & H^{n+d}(X_L\times E^{N'},\Bbbk)\\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr\\ H^n(Y_L\times E^N,\Bbbk) & \xrightarrow{f_*^N} & H^{n+d}(X_L\times E^N,\Bbbk)\end{array}$$

w这里的竖直映射是限制映射，根据推论 1，它们是同构 9.

根据投影公式，如果上同调 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$ 在奇数次次数上消失，则推前 $f_\star$ 关于规范左作用是左 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模的态射。设 R 是 G 的闭子群，且 $A\colon X\to G/R$ 是一个 L-等变连续映射（如第 2.9 节所述）。那么复合 $Af\colon Y\to G/R$ 也是 L-等变的。我们得到如下交换图[3]

$$\begin{array}{ccc} X_L\times E & \xrightarrow{v_A} & R\setminus E\\ {\scriptstyle i_X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_R}\\ X_L\times E^N & \xrightarrow{v_A^N} & R\setminus E^N\end{array}\qquad\begin{array}{ccc} Y_L\times E & \xrightarrow{v_{Af}} & R\setminus E\\ {\scriptstyle i_Y}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i_R}\\ Y_L\times E^N & \xrightarrow{v_{Af}^N} & R\setminus E^N\end{array}\tag{24}$$

令 $m\in H_L^n(Y,\Bbbk)$ 且 $b\in H_R^l(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$。当 N 足够大时[4]，由 (23)、交换图 (24) 的交换性、投影公式以及 (10) 的紧致版本可得

$$\begin{aligned} f_\star(mb)&=f_\star(m\cup v_{Af}^*(b))=(i_X^*)^{-1}f_*^Ni_Y^*(m\cup v_{Af}^*(b))\\ &=(i_X^*)^{-1}f_*^N\big(i_Y^*(m)\cup(v_{Af}i_Y)^*(b)\big)=(i_X^*)^{-1}f_*^N\big(i_Y^*(m)\cup(v_{Af}^N)^*i_R^*(b)\big)\\ &=(i_X^*)^{-1}f_*^N\big(i_Y^*(m)\cup(f^N)^*(v_A^N)^*i_R^*(b)\big)=(i_X^*)^{-1}\big(f_*^Ni_Y^*(m)\cup(i_Rv_A^N)^*(b)\big)\\ &=(i_X^*)^{-1}\big(f_*^Ni_Y^*(m)\cup i_X^*v_A^*(b)\big)=(i_X^*)^{-1}f_*^Ni_Y^*(m)\cup v_A^*(b)=f_\star(m)b.\end{aligned}$$

[3]关于记号的说明，见注 20。[4]这意味着 $n,n+l\leqslant\min\{2(N-\mathfrak{n}),2(N-\mathfrak{n})-d\}$。

因此，我们证明了引理 8 的以下对应结论。

引理 21. 等变推前 $f_\star\colon H_L^\bullet(Y,\Bbbk)\to H_L^{\bullet+\dim X-\dim Y}(X,\Bbbk)$ 是右 $H_R^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模的同态，其中定义域和陪域上的右作用分别由 Af 和 A 扭曲。

此外，若上同调 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$ 在奇数次数上消失，则 $f_\star$ 是左 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$-模的同态，其中 $H_L^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$ 的两个左作用均为典范作用。

4.7. 半单群。假设 G 是半单的。那么， G 可外在地描述为相应切瓦莱群 [St 中某个解析自同构的不动点集合，定理 16]。

我们考虑极大环面 $K<G$ 和 Weyl群 $W=N_G(K)/K$。对于任意 $w\in W$，我们任意选取其提升 $\dot w\in N_G(K)$。我们将使用缩写 $wK=\dot wK$。

群 G 具有布鲁哈分解 $G=\bigsqcup_{w\in W}K_w$，参见 [St 引理 45] 的推论 5。取商空间后，我们得到分解 $G/K=\bigsqcup_{w\in W}K_w/K$ 为舒伯特胞腔。它们的闭包称为舒伯特簇，可按如下方式计算 $\overline{K_w/K}=\bigsqcup_{w'\leqslant w}K_{w'}$，其中 6 表示布鲁哈序。

对于某个 d，我们有 $K\cong(S^1)^d$，其中 S^1 是圆。我们得到映射 $\rho_w\colon E\to E$，其定义为 $\rho_w(e)=\dot we$。此映射可分解为经过 K 的作用，因此得到映射$K\setminus\rho_w\colon K\setminus E\to K\setminus E$，进而得到其拉回 $(K\setminus\rho_w)^*\colon H_K^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)\to H_K^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$。我们将把此映射视为 W 在 $H_K^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$ 上的左作用：

$$w^{-1}(\mu)=(K\setminus\rho_w)^*(\mu). \tag{25}$$

该公式与万有主K-丛的标准选取 $(S^\infty)^d\to\mathbf{P}^\infty(\mathbb{C})^d$ 一致，也与将 $H_K^\bullet(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$ 表示为多项式环的相应表示一致，参见 [S, (20)]。

对于任意根 α，我们将由根同态 $\varphi_\alpha\colon\mathrm{SU}_2\to G$ 的像和环面 K生成的 G 的子群记作 G_α，参见 [BS, Chapter III (3.1)]。该子群的另一种（外在）描述见 [St, Lemma 45]。按照 $G_\alpha=G_{-\alpha}$，我们可以记作 $G_{\omega_\alpha}=G_\alpha$，其中 $\omega_\alpha\in W$ 是垂直于 α 的平面上的反射。我们将称元素 ω_α 为反射。

5. The isomorphism

我们将证明，在某些限制条件下，第3节中引入的映射 θ 是一个同构，具体条件如下。首先，我们假设以下两个条件：

(I) 环 $\Bbbk$ 具有有限全局维数 $\mathrm{gld}(\Bbbk)$；

(II) G 是一个紧李群， L、 R、 P、 Q、 M 是它的闭子群；

本文余下部分均假设这些条件成立。

5.1. K¨unneth 公式。设 X_1、.....、 X_m为拓扑空间，使得对所有 $n\leqslant N$和 $j=2$、.....、 m， $H^n(X_j,\Bbbk)$ 均为有限秩自由。则对于任意 $n\leqslant N-\mathrm{gld}(\Bbbk)$，我们有如下同构

$$\bigoplus_{i_1+\cdots+i_m=n} H^{i_1}(X_1,\Bbbk)\otimes\cdots\otimes H^{i_m}(X_m,\Bbbk)\xrightarrow{\sim}H^n(X_1\times\cdots\times X_m,\Bbbk) \tag{26}$$

它由交叉积 $a_1\otimes\cdots\otimes a_m\mapsto p_1^*(a_1)\cup\cdots\cup p_m^*(a_m)$ 给出。

这个同构和命题16证明，对于任意 $0<n\leqslant 2(N-\mathfrak{n})$ 及自然数 m， $H^n((E^N)^m,\Bbbk)=0$。此外，空间 E^m 是可缩的。因此，我们得到如下类似于命题 18 的结果。

命题 22. 假设对于每个 $i = 1, \dots, m$，存在一个闭子群 $L^{(i)}$ of G 的左 $L^{(i)}$-空间 $X^{(i)}$。那么限制映射

$H^n((X^{(1)}{}_{L^{(1)}} \times E) \times \cdots \times (X^{(m)}{}_{L^{(m)}} \times E), \Bbbk) \to H^n((X^{(1)}{}_{L^{(1)}} \times E^N) \times \cdots \times (X^{(m)}{}_{L^{(m)}} \times E^N), \Bbbk)$

是 $n \leqslant 2(N - \mathfrak{n})$的同构。

5.2. 一个辅助引理。我们将使用 [S, 引理 18] 中证明的以下结果。

命题 23。设 S 是一个局部紧豪斯多夫空间，$p : S \to T$ 是一个纤维为 F 的纤维丛，$t \in T$ 是一个点，$\Bbbk$ 是一个交换环。假设 T 是紧致、豪斯多夫、连通且单连通的，所有 $H_c^n(F, \Bbbk)$ 都是有限秩自由的，$H_c^n(F, \Bbbk) = 0$ 对奇数 n 成立，且 $H_c^n(T, \Bbbk) = 0$ 对奇数 $n \leqslant N$ 成立。

那么以下结论成立：

(1) 对所有 $n < N$，限制映射 $H_c^n(S, \Bbbk) \to H_c^n(p^{-1}(t), \Bbbk)$ 都是满射。(2) 对奇数 $n < N$，$H_c^n(S - p^{-1}(t), \Bbbk) = 0$。

(3) 如果对 $n \leqslant N$，$H_c^n(T, \Bbbk)$ 是有限秩自由的，那么 $\Bbbk$-模 $H_c^n(S - p^{-1}(\text{对 } n < N \quad t), \Bbbk)$ 也有限秩自由。

5.3. 群与空间的限制。我们考虑以下附加条件：

(III) P 和 L 是连通的；

(IV) $H_P^n(\text{pt}, \Bbbk)$ 和 $H_L^n(\text{pt}, \Bbbk)$ 是有限秩自由的，并且在奇数 n 时为零；

（V） X 和 Y 是紧致且 Hausdorff 的；

（VI） X/R、P/Q和 Y 的系数取自 $\Bbbk$ 的上同调是有限秩自由的，且在奇数次消失；

（VII） X/R 和 P/Q 是单连通的；

（VIII）商映射 $X \to X/R$ 是一个主 R-丛。

B由命题 2 和（VIII），这些条件推出自然投影 s[5]

$$X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y \to X/R, \qquad P \underset{Q}{\times} Y \to P/Q$$

分别是纤维为 $P \underset{Q}{\times} Y$和 Y的纤维丛。由（II）和（V）可知，上述公式左右两边的四个空间都是紧致的。

依次对这些纤维丛应用紧支撑上同调的 Leray 谱序列，并利用 (VI) 和 (VII)，我们得到

$$\begin{aligned} H^\bullet\left(X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y, \Bbbk\right) &\cong H^\bullet(X/R, \Bbbk) \otimes_\Bbbk H^\bullet\left(P \underset{Q}{\times} Y, \Bbbk\right) \\ &\cong H^\bullet(X/R, \Bbbk) \otimes_\Bbbk H^\bullet(P/Q, \Bbbk) \otimes_\Bbbk H^\bullet(Y, \Bbbk). \end{aligned} \tag{27}$$

[5]这些投影由 $[x : p : y] \mapsto xR$ 和 $[p : y] \mapsto pQ$给出。为了应用命题 2，我们可以分别考虑由 $[x : p : y] \mapsto R([p : y], x)$ 和 $[p : y] \mapsto Q(y, p^{-1})$ 给出的同构 $X \underset{R}{\times} P \underset{Q}{\times} Y \cong (P \underset{Q}{\times} Y)_R \times X$ 和 $P \underset{Q}{\times} Y \cong Y_Q \times P$。这里，我们将 X 视为左 R-空间，其作用如下$rx = xr^{-1}$。我们还有分别由 $Rx \mapsto xR$和$Qp \mapsto p^{-1}Q$给出的同构 $R \setminus X \cong X/R$和 $Q \setminus P \cong P/Q$。如果应用上文所述的识别，我们的投影便具有第 2.4 节意义下的典范性。

引理 24. 空间 $(X/R)\,{}_L\!\times\, E^N$ 是单连通的。

证明。由命题 2，$(X/R)\,{}_L\!\times\, E^N \to L\setminus E^N$ 是一个纤维为 X/R 的纤维丛。因此，由 (VII) 和同伦群长正合列可得所需结论

$$\{1\}=\pi_1(X/R)\to\pi_1((X/R)\,{}_L\!\times\, E^N)\to\pi_1(L\setminus E^N)=\{1\}.$$

最后一个等式由推论 17 得出。 □

5.4. 满射性。这里我们将使用以下缩写

$$Z=X\underset{R}{\times}P\underset{Q}{\times}Y,\quad C^N=((X/R)\,{}_L\!\times\, E^N)\times(Y\,{}_Q\!\times\, E^N)-\operatorname{im}\varphi^N.$$

引理 25. $H^n((X/R)\,{}_L\!\times E^N,\Bbbk)=H^n(Z\,{}_L\!\times E^N,\Bbbk)=0$，当 $n\leqslant 2(N-\mathfrak{n})$ 为奇数时。

证明。由于证明过程相似，我们只证明最后一个等式。考虑典范投影 $Z\,{}_L\!\times E^N\to L\setminus E^N$ 所对应的紧支撑上同调 Leray 谱序列。由于该映射是一个纤维为 Z 的纤维丛，其第二页如下

$$E_2^{p,q}=H^p(L\setminus E^N,\Bbbk)\otimes_{\Bbbk}H^q(Z,\Bbbk)$$

鉴于推论 17。由 (IV) 和命题 18，以及由 (27) 和 (VI) 还可得，对于任意有限的 $r\geqslant 2$，如果 $p+q\leqslant 2(N-\mathfrak{n})$ 且 p 或 q 中有一个为奇数，则 $E^{p,q}_r=0$。因此，这一事实对于 $r=\infty$ 也成立。□

我们将研究空间 C^N 的紧支撑上同调。首先，研究纤维 $F^N_{\bar e}$ 的上同调，见引理 12 和注 20。

引理 26。对于任意 $n<2(N-\mathfrak{n})$ 和 $\bar e\in P\setminus E^N$，上同调 $H^n_c(F^N_{\bar e},\Bbbk)$ 是有限秩自由模，且当 n 为奇数时消失。

证明。只需将命题 23 的第 (2) 和第 (3) 部分应用于纤维丛 $\pi_Q\mathrm{can}: Y\,{}_Q\!\times E^N\to P\setminus E^N$，其纤维为 $Y\,{}_Q\!\times P$，见引理 13。前一个引理的大多数假设都可以常规验证。由 (VI) 以及应用于纤维丛 $Y\,{}_Q\!\times P\to Q\setminus P$ 的 Leray 谱序列可知，$H^n(Y\,{}_Q\!\times P)$ 是有限秩自由模，且在奇数次数时消失。最后，对于 $n\leqslant 2(N-\mathfrak{n})$，可得 $H^n(P\setminus E^N)=H^n_P(\mathrm{pt}\ \Bbbk)$。最后一个模是有限秩自由模，且由 (IV) 可知在奇数 n 时消失。□

引理 27. $H^n_c(C^N,\Bbbk)=0$ 对于奇数 $n<2(N-\mathfrak{n})$。

证明. 由引理24和引理26可知，对于引理 12中所述纤维丛的紧支撑上同调，其 Leray 谱序列的第二页等于

$$E_2^{p,q}=H^p((X/R)\,{}_L\!\times\, E^N,\Bbbk)\otimes_{\Bbbk}H^q_c(F^N_{\bar e},\Bbbk)$$

若 $q<2(N-\mathfrak{n})$。由引理25和引理26可知，对于任意有限 $r\geqslant 2$，若$p+q<2(N-\mathfrak{n})$且 p 或 q中的任一个为奇数，则 $E^{p,q}_r=0$。因此，对于 $r=\infty$，这一事实同样成立。□

推论28. 对于任意 $n<2(N-\mathfrak{n})-1$，映射

$$H^n\left(((X/R)\,{}_L\!\times\, E^N)\times(Y\,{}_Q\!\times\, E^N),\Bbbk\right)\xrightarrow{(\varphi^N)^*}H^n\left(Z\,{}_L\!\times E^N,\Bbbk\right)$$

是满射。

证明. 根据定理11，我们得到正合序列

$$H^n\left(((X/R)\,{}_L\!\times\, E^N)\times(Y\,{}_Q\!\times\, E^N),\Bbbk\right)\xrightarrow{(\varphi^N)^*}H^n\left(Z\,{}_L\!\times E^N,\Bbbk\right)\longrightarrow H^{n+1}_c\left(C^N,\Bbbk\right).$$

现在，结论由引理25和引理27得出。 □

推论29。映射 θ 是满射。

证明。在我们的假设 (VI) 下，由 K¨unneth 公式，(20) 中的左侧映射（交叉积）是一个同构。因此，只需证明 φ^* 是满射。对每个次数，当 N 足够大时，这一事实可由推论28和命题 22 得出。□

引理30. 对每个次数，同态 θ 在有限秩相同的自由 $\Bbbk$模之间诱导一个映射。

证明. 结论由以下计算得出：

$$\begin{aligned} H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)\otimes_{H_P^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)} H_Q^\bullet(Y,\Bbbk) &\cong H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)\otimes_{H_P^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)} H_Q^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet(Y,\Bbbk)\\ &\cong H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)\otimes_{H_P^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)} H_P^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet(P/Q,\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet(Y,\Bbbk)\\ &\cong H_L^\bullet(X/R,\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet(P/Q,\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet(Y,\Bbbk)\\ &\cong H_L^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet(X/R,\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet(P/Q,\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet(Y,\Bbbk)\\ &\cong H_L^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)\otimes_\Bbbk H^\bullet\left(X\underset{R}{\times}P\underset{Q}{\times}Y,\Bbbk\right)\cong H_L^\bullet\left(X\underset{R}{\times}P\underset{Q}{\times}Y,\Bbbk\right). \end{aligned}$$

□

定理31. 假设条件（I）–（VIII）成立。那么 θ 是环同构，也是左 $H_L^\bullet$(pt $\Bbbk$)-模同构。若 M 是 G 的另一个闭子群，且 $B\colon\ Y\to G/M$ 是一个 Q-等变连续映射，那么 θ 是环同构，也是 $H_L^\bullet$(pt $\Bbbk$)-$H_M^\bullet$(pt $\Bbbk$)-双模同构。

证明. 将 θ 与引理30的同构复合，可得一个从有限生成 $\Bbbk$模到其自身的满射同态。现在只需应用 [R，定理3.6], ，即可证明 θ 是双射。其余结论由引理15得出。□

6. Basic examples

6.1. 旗簇的等变上同调。假设 Weyl群的阶 $|W|$ 在 $\Bbbk$中可逆。映射 $\pi_K\colon\ K\setminus E\to G\setminus E$ 由 $\pi_K(Ke)=Ge$ 给出，它诱导出同构

$$\pi_K^*:H_G^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)\xrightarrow{\sim}H_K^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)^W, \tag{28}$$

其中右侧是 W-不变量子环（参见 [Br 的证明，命题 1]）。

我们将把前几节的结果应用于以下数据 $X=G$、$Y=G/K$、 $P=R=Q=G$、$L=M=K$ 和 $\alpha\colon\ X\to G$ 和 $B\colon\ Y\to G/M$ 分别是 G和 G/K上的恒等映射。于是诱导映射 $A\colon\ X/R\to G/R$ 是 G/G上的恒等映射。由定理31，条件 (IV) 由 (28) 保证，同态 θ 是一个同构，因此我们得到

$$H_K^\bullet\left(G\underset{G}{\times}G\underset{G}{\times}G/K,\Bbbk\right)\cong H_K^\bullet(G/G,\Bbbk)\otimes_{H_G^\bullet(\mathrm{pt},\Bbbk)}H_G^\bullet(G/K,\Bbbk). \tag{29}$$

Le让我们来看左侧。我们有如下交换图[6]:

$$\begin{array}{ccc} \left(G\underset{G}{\times}G\underset{G}{\times}G/K\right)\ {}_K\!\times E & \xrightarrow{\upsilon_{\alpha B}} & K\setminus E\\ \wr\downarrow & \nearrow_{\upsilon_B} & \\ G/K\ {}_K\!\times E & & \end{array}$$

[6]回顾一下， $\alpha B\colon\ G\underset{G}{\times}G\underset{G}{\times}G/K\to G/K$ 是根据 16 给出的映射 $[g_1\colon\ g_2\colon\ g_3]\mapsto g_1g_2g_3K$ 。

其中，垂直同构由 $K([g_1 : g_2 : g_3], e) \mapsto K(g_1g_2g_3K, e)$ 给出。因此，根据引理 8，我们得到 $H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-$H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-双模之间的同构

$$H_K^\bullet\left(G \underset{G}{\times} G \underset{G}{\times} G/K, \Bbbk\right) \cong H_K^\bullet(G/K, \Bbbk)$$

其中两个左作用均为典范作用，而左侧和右侧的右作用分别是由 αB 和 B 扭曲的作用。

我们来看 (29) 右侧张量积的第一个因子。考虑交换图，

$$\begin{array}{ccc} G/G \underset{K}{\times} E & \xrightarrow{v_A} & G \setminus E \\ {\scriptstyle \mathbf{can}}\downarrow \wr & \nearrow_{\pi_K} & \\ K \setminus E & & \end{array}$$

由引理 8，我们得到 $H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-$H_G^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-双模的同构

$$H_K^\bullet(G/G, \Bbbk) \cong H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk),$$

其中左作用为典范作用，左侧的右作用是由 A 扭曲的作用，而右侧的右作用如下:

$$mb = m \cup \pi_K^*(b)$$

对于 $m \in H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$ 和 $b \in H_G^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$。

最后，我们来看 (29) 右侧张量积的第二个因子。容易注意到，映射 v_B: $(G/K) \underset{G}{\times} E \to K \setminus E$ 是一个同胚。 [J, (1.5)] 中已经提到这一事实。考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} G/K \underset{G}{\times} E & \xrightarrow{\mathbf{can}} & G \setminus E \\ {\scriptstyle v_B}\downarrow \wr & \nearrow_{\pi_K} & \\ K \setminus E & & \end{array}$$

我们得到 $H_G^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-$H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-双模的同构 $(v_B^*)^{-1}$

$$H_G^\bullet(G/K, \Bbbk) \cong H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk),$$

其中，左侧的左作用和右作用分别是典范作用和经 B 扭曲的作用；右侧的右作用是典范作用，而右侧的左作用如下

$$am = \pi_K^*(a) \cup m$$

对任意 $a \in H_G^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$ 和 $m \in H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$。

应用所有这些同构，由 (29) 可得 $H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-$H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-双模（以及环）的同构

$$H_K^\bullet(G/K, \Bbbk) \cong H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk) \otimes_{H_G^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)} H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$$

在上述左作用和右作用下。应用 (28)，我们得到$H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-$H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$-双模的同构

$$H_K^\bullet(G/K, \Bbbk) \cong H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk) \otimes_{H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)^W} H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk),$$

其中 $H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$ 和 $H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)^W$以典范方式作用。

6.2. 标准双模。记

$$\mathcal{R} = H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk). \tag{30}$$

这是关于杯积的 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模。对于任意 $w \in W$，我们将 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模记为$\mathcal{R}_w$，它作为阿贝尔群等于 $\mathcal{R}$，其左作用 $\cdot$ 未扭曲，而右作用 $\cdot_w$ 由 w扭曲：

$$r' \cdot r = r'r, \quad r \cdot_w r'' = rw(r'').$$

这个双模的构造自然是第 2.9 节所述扭曲作用的一个特例。事实上，设 $A_w : \mathrm{pt} \to G/K$ 是取值为 wK的映射。那么我们得到映射 $v_{A_w} : K \setminus E \cong \mathrm{pt} \times_K E \to K \setminus E$，它与第4.7节所述的映射 $K \setminus \rho_{w^{-1}}$一致。根据 (25)，我们得到，在自身上由 A_w 扭曲的 $H_K^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk)$ 的右作用与 $\cdot_w$一致。

现在借助同构 θ来计算这些双模的张量积。设 $X = K$、$Y = \mathrm{pt}$、$L = R = P = Q = N = K$ 和 $\alpha : X \to G$ 是由 $\alpha(k) = \dot{w}k$定义的映射。若考虑 K 通过乘法对 X 的右作用，并将左作用定义为 $k' * k = \dot{w}^{-1}k'\dot{w}k$，则最后一个映射成为 K-K-等变映射。利用此映射 α，我们根据 (11) 定义映射 $A : \mathrm{pt} \cong K/K \to G/K$。显然，$A = A_w$。

任取 $w' \in W$ 并设 $B = A_{w'}$。由（16），我们得到

$$\alpha B([k : 1 : \mathrm{pt}]) = \dot{w}k\dot{w}'K = \dot{w}\dot{w}'(\dot{w}'^{-1}k\dot{w}')K = \dot{w}\dot{w}'K = ww'K.$$

因此，在识别 $K \times K \times \mathrm{pt} \cong \mathrm{pt}$ 下，$\alpha B = A_{ww'}$。根据定理31，同胚$K \times_K \mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$态射 θ 是一个同构，它就是经典的 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模同构

$$\mathcal{R}_w \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}_{w'} \cong \mathcal{R}_{ww'}.$$

7. Bott-Samelson varieties

7.1. 等变上同调的计算。设 G 是一个半单紧李群。我们将使用缩写（30）。此外，假设 2 在 $\Bbbk$中可逆。对于任意反射 s，我们有两个环

$$\mathcal{R}(s) = H_{G_s}^\bullet(\mathrm{pt}, \Bbbk), \quad \mathcal{R}^s = \{r \in \mathcal{R} \mid s(r) = r\}.$$

引理 32. 对于任意反射 s，商映射 $\pi_s : K \setminus E \to G_s \setminus E$ 诱导同构 $\pi_s^* : \mathcal{R}(s) \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}^s$。

证明。该结果可由引理3Br 的命题 1] 的证明得出，将其应用于群 G_s 即可，因为该群的 Weyl群由2个元素组成，且 2 在 $\Bbbk$ 中可逆。□

对于反射序列 $s = (s_1, \dots, s_n)$，使用第2.6节的记号，我们定义如下空间

$$\mathrm{BS}(s) = G_{s_1} \underset{K}{\times} G_{s_2} \underset{K}{\times} \cdots \underset{K}{\times} G_{s_n}/K$$

称为序列 s 的 Bott-Samelson簇。序列 s 可以为空，此时 BS(s) 就是单元素集。下文中，我们使用自然识别 $\mathrm{pt} \times_K E \cong K \setminus E$，由 $K(pt, e) = Ke$ 给出。

环面 K 在 BS(s) 上从左作用（当 s 非空时，通过第一个因子作用）。因此，我们可以考虑等变上同调，记作如下：

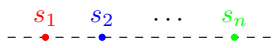
$$H(s) = H_K^\bullet(\mathrm{BS}(s), \Bbbk).$$

相对于典范作用，它是一个左 $\mathcal{R}$-模。另一方面，存在一个K-等变映射

$$A_s : \mathrm{BS}(s) \to G/K \tag{31}$$

由 $[g_1\colon \cdots\colon g_{n-1}\colon g_n]\!] \mapsto g_1\cdots g_{n-1}g_nK$ 给出。因此，根据第 2.9 节， $H(s)$ 也是一个右 $\mathcal{R}$-模，其作用由 A_s 扭曲。

我们用图形表示 $H(s)$:



其中，每个反射都用不同的颜色标记。

我们考虑以下映射 $\varphi_s\colon \mathrm{BS}(s)\underset{K}{\times} E \to (K\setminus E)^{n+1}$:

$$K([g_1:\cdots:g_{n-1}:g_n]\!], e) \mapsto (Ke, Kg_1^{-1}e, \ldots, K(g_1\cdots g_n)^{-1}e).$$

借助第 3.1 节中构造的嵌入 φ ，可以归纳地构造此映射，如下所示。若 $s=\varnothing$，则 φ_s 是恒等映射。

现在假设 s非空。那么我们考虑以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BS}(s)\underset{K}{\times} E & = & \left(G_{s_1}\underset{K}{\times}G_{s_2}\underset{K}{\times}\cdots\underset{K}{\times}G_{s_{n-1}}\underset{K}{\times}G_{s_n}\underset{K}{\times}\mathrm{pt}\right)\underset{K}{\times} E \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_s} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ (K\setminus E)^{n+1} & \xleftarrow{\varphi_{s'}\times \mathrm{id}} & (\mathrm{BS}(s')\underset{K}{\times} E)\times(\mathrm{pt}\underset{K}{\times} E) \end{array} \tag{32}$$

这里， $s'=(s_1,\ldots,s_{n-1})$ 是截断序列，而映射 φ 是第 3.1 节中针对以下数据集合定义的映射:

$$X = G_{s_1}\underset{K}{\times}G_{s_2}\underset{K}{\times}\cdots\underset{K}{\times}G_{s_{n-1}},\quad Y=\mathrm{pt},\quad P=G_{s_n},\quad L=R=Q=K$$

以及由 $[g_1\colon \cdots\colon g_{n-1}] \mapsto g_1\cdots g_{n-1}$ 给出的 $\alpha\colon X\to G$。我们断言这个交换图是可交换的。事实上，我们得到

$$K([g_1:g_2:\cdots:g_n]\!],e) = K([\underbrace{g_1:g_2:\cdots:g_{n-1}}_{x}:\underbrace{g_n}_{p}:\underbrace{pt}_{y}],e) \overset{\varphi}{\longmapsto}$$

$$\Big(K([g_1:g_2:\cdots:g_{n-1}]\!],e), K(pt, g_n^{-1}(g_1\cdots g_{n-1})^{-1}e)\Big) =$$

$$\Big(K([g_1:g_2:\cdots:g_{n-1}]\!],e), K(g_1\cdots g_{n-1}g_n)^{-1}e\Big) \overset{\varphi_{s'}\times\mathrm{id}}{\longmapsto} (Ke, Kg_1^{-1}e,\ldots,K(g_1\cdots g_n)^{-1}e)$$

$$= \varphi_s\Big(K([g_1:g_2:\cdots:g_n]\!],e)\Big).$$

这里，我们像（12）中那样用下括号标出了变量 x、 p 和 y 。

引理 33. 映射 φ_s 是一个拓扑嵌入。

证明. 该结果可由交换图（32）和定理11归纳得到。 □

利用这个嵌入，我们可以将映射 Θ_s 定义为以下复合 :

$$\mathcal{R}^{\otimes_{\Bbbk} n+1} \xrightarrow{\times} H^\bullet((K\setminus E)^{n+1},\Bbbk) \xrightarrow{\varphi_s^*} H(s),$$

其中第一个映射是交叉积，见第 3.4 节。我们考虑以下交换图:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{\otimes_{\Bbbk} n+1} & \xrightarrow{\Theta_{s'}\otimes\mathrm{id}} & H(s')\otimes_{\Bbbk}\mathcal{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \Theta_s} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta} \\ H(s) & = & H^\bullet_K\left(G_{s_1}\underset{K}{\times}\cdots\underset{K}{\times}G_{s_n}\underset{K}{\times}\mathrm{pt},\Bbbk\right) \end{array} \tag{33}$$

其中 Θ 是与 φ 对应的映射 (20)。由于交换图 (32) 是交换的，因此该图也是交换的。事实上，我们得到

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \xmapsto{\Theta_{s'} \otimes \mathrm{id}} \varphi_{s'}^*(\mathrm{pr}_1^*(a_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{n+1}^*(a_1)) \otimes a_{n+1} \xmapsto{\Theta}$$

$$\varphi^*\big(\mathrm{pr}_1^*\, \varphi_{s'}^*(\mathrm{pr}_1^*(a_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{n+1}^*(a_1)) \cup \mathrm{pr}_2^*(a_{n+1})\big),$$

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \xmapsto{\Theta_s} \varphi_s^*(\mathrm{pr}_1^*(a_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{n+1}^*(a_{n+1})).$$

因此，我们需要证明

$$\mathrm{pr}_i\, \varphi_{s'}\, \mathrm{pr}_1\, \varphi = \mathrm{pr}_i\, \varphi_s \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant n, \quad \mathrm{pr}_2\, \varphi = \mathrm{pr}_{n+1}\, \varphi_s.$$

将 pr_i 应用于交换图 (32)，即可得到这两个等式。由于 $\Theta_\varnothing = \mathrm{id}$，我们可以利用此交换图归纳地计算 Θ_s。这一计算以及定理 15 证明了 Θ 是环同态，并且是 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模。

现在考虑张量积:

$$\mathcal{R}^{\otimes s} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}(s_1)} \cdots \otimes_{\mathcal{R}(s_n)} \mathcal{R},$$

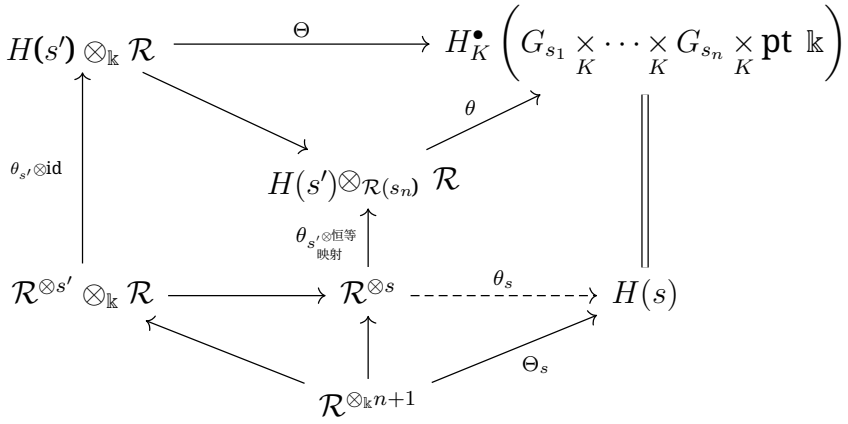
其中，每个 $\mathcal{R}(s_i)$ 通过 π_{s_i} 在 $\mathcal{R}$ 上进行左作用和右作用，即，$bm = \pi_{s_i}^*(b) \cup m$和 $mb = m \cup \pi_{s_i}^*(b)$。对于任意 $m \in \mathcal{R}$ 和 $b \in \mathcal{R}(s_i)$。根据引理 32，我们得到

$$\mathcal{R}^{\otimes s} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}^{s_1}} \cdots \otimes_{\mathcal{R}^{s_n}} \mathcal{R},$$

在应用第 3.4 节中引入的（同构）态射 θ 时，我们将使用第一个等式，并使用第二个等式进行代数计算。

定理 34。映射 Θ_s 经由自然投影 $\mathcal{R}^{\otimes_{\mathbb{k}} n+1} \to \mathcal{R}^{\otimes s}$ 因子化为环同构以及 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模 θ_s：$\mathcal{R}^{\otimes s} \xrightarrow{\sim} H(s)$。

证明。我们对 s 的长度应用归纳法。若 $s = \varnothing$，则无须证明，因为 $\Theta_\varnothing = \mathrm{id}$。现在假设 s 非空。我们考虑如下交换图:



其中，θ 是第 3.4 节所述图表（33）中与 Θ 对应的映射，虚线箭头的定义使得包含它的梯形具有交换性。我们需要证明，包含此箭头的三角形也具有交换性。确实如此，因为其他所有三角形、梯形以及外周都具有交换性。最后这一点可由图表（33）的交换性以及$\theta_{s'}$的归纳定义推出。注意，根据定理31，θ 是一个同构，而（VIII）的有效性则由引理3归纳保证。□

7.2. 拼接。我们的下一个目标是证明定理 34 中的同构 θ_s 在序列拼接下表现良好。设 $s = (s_1, \dots, n)$ 和 $t = (t_1, \dots, t_m)$ 为反射序列。与第 3.1 节一样，我们考虑嵌入

$$\varphi_{s,t} : \mathrm{BS}(st) \underset{K}{\times} E \to (\mathrm{BS}(s) \underset{K}{\times} E) \times (\mathrm{BS}(t) \underset{K}{\times} E)$$

对于以下数据集合:

$$X = G_{s_1} \underset{K}{\times} G_{s_2} \underset{K}{\times} \cdots \underset{K}{\times} G_{s_n}, \quad Y = \mathrm{BS}(t), \quad L = R = P = Q = K,$$

以及 $\alpha\colon\ X \to G$ 由 $[g_1\colon\ \cdots\colon\ g_n] \mapsto g_1 \cdots g_n$ 定义。此处我们使用表示

$$\mathrm{BS}(st) = X \underset{K}{\times} K \underset{K}{\times} Y,$$

从而假设

$$[g_1 : \cdots : g_{n+m}] = [g_1 : \cdots : g_n : 1 : g_{n+1} : \cdots : g_{n+m}]. \tag{34}$$

因此，根据定理31，我们得到以下 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模的同构:

$$H(s) \otimes_{\mathcal{R}} H(t) \xrightarrow[\sim]{\theta_{s,t}} H(st),$$

其中 $\theta_{s,\ t}$ 由 $\varphi_{s,\ t}$ 诱导，如第 3.4 节所述。

定理 35. 存在如下交换图:

$$\begin{array}{ccc} H(s) \otimes_{\mathcal{R}} H(t) & \xrightarrow[\sim]{\theta_{s,t}} & H(st) \\ {\scriptstyle \theta_s \otimes \theta_t}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \theta_{st}} \\ \mathcal{R}^{\otimes s} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}^{\otimes t} & \xrightarrow[\sim]{} & \mathcal{R}^{\otimes st} \end{array}$$

其中底部箭头的同构由下式给出

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \otimes (b_1 \otimes \cdots \otimes b_{m+1}) \mapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \cup b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_{m+1}. \tag{35}$$

证明. 沿上方路径可得

$$\begin{aligned} &(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \otimes (b_1 \otimes \cdots \otimes b_{m+1}) \xmapsto{\theta_s \otimes \theta_t} \\ &\quad \varphi_s^*(\mathrm{pr}_1^*(a_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{n+1}^*(a_{n+1})) \otimes \varphi_t^*(\mathrm{pr}_1^*(b_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{m+1}^*(b_{m+1})) \xmapsto{\theta_{s,t}} \\ &\quad \varphi_{s,t}^*\big(\mathrm{pr}_1^*\, \varphi_s^*(\mathrm{pr}_1^*(a_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{n+1}^*(a_{n+1})) \cup \mathrm{pr}_2^*\, \varphi_t^*(\mathrm{pr}_1^*(b_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{m+1}^*(b_{m+1}))\big). \end{aligned}$$

沿下方路径可得

$$\begin{aligned} &(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \otimes (b_1 \otimes \cdots \otimes b_{m+1}) \longmapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \cup b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_{m+1} \\ &\longmapsto \varphi_{st}^*\big(\mathrm{pr}_1^*(a_1) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_n^*(a_n) \cup \mathrm{pr}_{n+1}^*(a_{n+1} \cup b_1) \cup \mathrm{pr}_{n+2}^*(b_2) \cup \cdots \cup \mathrm{pr}_{n+m+1}^*(b_{m+1})\big). \end{aligned}$$

比较右端可知，我们需要证明

$\mathbf{pr}_i\, \varphi_s\, \mathbf{pr}_1\, \varphi_{s,t} = \mathbf{pr}_i\, \varphi_{st}$ 对于 $1 \leqslant i \leqslant n+1$, $\mathbf{pr}_j\, \varphi_t\, \mathbf{pr}_2\, \varphi_{s,t} = \mathbf{pr}_{j+n}\, \varphi_{st}$ 对于 $1 \leqslant j \leqslant m+1$.证明第一个公式。利用识别式 (34)，可得

$$\begin{aligned} K\big([g_1 : \cdots : g_n : g'_1 : \cdots : g'_m], e\big) &= K([\underbrace{g_1 : \cdots : g_n}_{x} : \underbrace{1}_{p} : \underbrace{g'_1 : \cdots : g'_m}_{y}], e) \\ &\xmapsto{\mathrm{pr}_1\, \varphi_{s,t}} K\big([g_1 : \cdots : g_n], e\big) \xmapsto{\mathrm{pr}_i\, \varphi_s} K(g_1 \cdots g_{i-1})^{-1} e. \end{aligned}$$

可以看出，右侧恰好是将 $\mathbf{pr}_i\, \varphi_{s,t}$ 作用于左侧所得的结果。与通常一样，我们按照式 (12) 的做法，在变量 x、y 和 p 下方加了下划线。

下面证明第二个公式。利用识别 (34)，我们得到

$$K\big([g_1:\cdots:g_n:g'_1:\cdots:g'_m]\!],e\big)=K([\underbrace{g_1:\cdots:g_n}_{x}:\underbrace{1}_{p}:\underbrace{g'_1:\cdots:g'_m}_{y}]\!],e)$$

$$\xmapsto{\mathrm{pr}_2\,\varphi_{s,t}} K\big([g'_1:\cdots:g'_m]\!],(g_1\cdots g_n)^{-1}e\big)\xmapsto{\mathrm{pr}_j\,\varphi_t} K(g'_1\cdots g'_{j-1})^{-1}(g_1\cdots g_n)^{-1}e.$$

$$=K(g_1\cdots g_ng'_1\cdots g'_{j-1})^{-1}e.$$

可以看出　右侧恰好是将 $\mathrm{pr}_{n+j}\,\varphi_{s,t}$ 作用于左侧所得的结果。 □

注 36. 映射 $\varphi_{s,t}$ 是为万有主丛 E引入的。我们还将使用它们的有限维版本 $\varphi^N_{s,t}$，其中 E 由 E^N代替。

7.3. 不动点。设 t是一个反射。在这种情况下，提升 $\dot{t}$ （见第4.7节）可以选在 G_t内。本文其余部分均假定采用这一选择。此外，我们假定 W 的单位元提升为 G的单位元。

设 $s=(s_1,\dots,s_n)$ 是一个反射序列。我们用 Γ_s 表示广义组合廊的集合，其元素是序列 $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$，其中对每个 i，$\gamma_i=s_i$ 或 $\gamma_i=1$。我们将 γ 与点 $[\dot\gamma_1:\cdots:\dot\gamma_{n-1}:\dot\gamma_n]\!]$ 对应起来，该点属于 $\mathrm{BS}(s)$。此点不依赖于提升的选择，且被 K固定。此外，${}^K\mathrm{BS}(s)$中的任意点都具有这种形式。对于每个 $x\in W$，我们用 $\Gamma_{s,x}$ 表示 Γ_s 的子集，该子集由满足 $\gamma_1\cdots\gamma_n=x$的 γ 组成。

根据引理 8，取值为 $\gamma\in\Gamma_{s,x}$ 的嵌入 $i_\gamma:\mathrm{pt}\hookrightarrow\mathrm{BS}(s)$ 诱导出 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模的同态

$$i^\star_\gamma:H(s)\to\mathcal{R}_x,$$

注意，在此公式中，左作用是典范的，而定义域和陪域上的右作用分别由 A_s 和 A_si_γ 扭曲（见引理 8）。最后一个映射仅取值 xK。我们可以用坐标计算 $i^\star_\gamma$。

定理 37. 对每个 $\gamma\in\Gamma_{s,x}$，复合

$$\mathcal{R}^{\otimes s}\xrightarrow{\theta_s}H(s)\xrightarrow{i^\star_\gamma}\mathcal{R}_x$$

由 $a_1\otimes\cdots\otimes a_{n+1}\mapsto a_1\cup\gamma_1(a_2)\cup\cdots\cup\gamma_1\cdots\gamma_n(a_{n+1})$ 给出。

证明. 将 θ_s 替换为 Θ_s 后，只需计算以下复合：

$$\mathcal{R}^{\otimes_{\Bbbk}n+1}\xrightarrow{\times}H^\bullet((K\setminus E)^{n+1},\Bbbk)\xrightarrow{\varphi^*_s}H(s)\xrightarrow{\iota^\star_\gamma}\mathcal{R}_x.$$

沿着这些映射，我们得到

$$\begin{aligned}a_1\otimes\cdots\otimes a_{n+1}&\xmapsto{\times}\mathrm{pr}_1^*(a_1)\cup\cdots\cup\mathrm{pr}_{n+1}^*(a_{n+1})\\&\xmapsto{\iota^*_\gamma\varphi^*_s}(\mathrm{pr}_1\,\varphi_s(i_\gamma\times\mathrm{id}))^*(a_1)\cup\cdots\cup(\mathrm{pr}_{n+1}\,\varphi_s(i_\gamma\times\mathrm{id}))^*(a_{n+1}).\end{aligned}\tag{36}$$

容易注意到，$\mathrm{pr}_j\,\varphi_s(i_\gamma\times\mathrm{id})=K\setminus\rho_{(\gamma_1\cdots\gamma_{j-1})^{-1}}$，其中最后一个映射在第4.7节中定义。因此，由（25）可得

$$(\mathrm{pr}_i\,\varphi_s(i_\gamma\times\mathrm{id}))^*(a_i)=(K\setminus\rho_{(\gamma_1\cdots\gamma_{i-1})^{-1}})^*=\gamma_1\cdots\gamma_{i-1}(a_i).$$

由此公式和（36）可得该结果。 □

利用 Mayer-Vietoris 同构，我们得到限制到 ${}^K\mathrm{BS}(s)$ 的映射，它是如下的 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模同态：

$$H_K^\bullet(\mathrm{BS}(s),\Bbbk) \to H_K^\bullet({}^K\mathrm{BS}(s),\Bbbk) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{x\in W}\bigoplus_{\gamma\in\Gamma_{s,x}} \mathcal{R}_x.$$

我们并不声称这个同态是单态射。不过，在对 $\Bbbk$ 施加某些限制时，这一结论成立；此时我们称局部化定理成立。

8. 态射

8.1. 基本设定。本节将构造 Bott-Samelson 簇 $H(s)$ 的上同调之间的态射。这些态射可以是等变拉回、推前，或二者的复合。为了正确处理推前，我们假设 2 在 $\Bbbk$ 中可逆。出于同样的考虑，我们只考虑由简单反射序列 s 给出的簇 $\mathrm{BS}(s)$。在这种情况下，

$$\mathrm{BS}(s) \cong P_{s_1} \underset{B}{\times} P_{s_2} \underset{B}{\times} \cdots \underset{B}{\times} P_{s_n}/B, \tag{37}$$

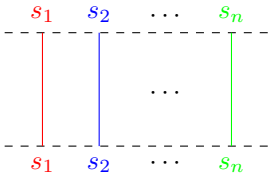
其中，B 和 P_{s_i} 分别是 G 的复化 G^c 的 Borel 子群和极小抛物子群。这样，$\mathrm{BS}(s)$ 便获得了复结构，因而也获得了定向。我们还得到 $G/K \cong G^c/B$，因此商空间 G/K 也获得了复结构。

在下文中，我们将用单括号代替双括号。例如，

$$\mathrm{BS}(s_1,\dots,s_n) = \mathrm{BS}((s_1,\dots,s_n)), \quad H(s_1,\dots,s_n) = H((s_1,\dots,s_n)).$$

此外，我们将用序列中唯一的元素代替长度为 1 的序列。例如$\varphi_{t,\,s} = \varphi_{t,\,(s)}$、$\theta_{t,\,s} = \theta_{t,\,(s)}$、$\mathcal{R}^{\otimes s} = \mathcal{R}^{\otimes(s)}$，等等。我们也将不再在 $\mathcal{R}$的元素之间写出杯积符号。

我们按照惯例，从下往上画双模 $H(s)$ 之间的态射。最简单的情形由平凡态射表示，它们画成竖线，颜色与反射的颜色对应：



我们用 α_s 表示满足 $s = \omega_{\alpha_s}$ 的简单根，见第4.7节，并令

$$P_s(f) = \frac{f + s(f)}{2}, \qquad \partial_s(f) = \frac{f - s(f)}{\alpha_s}.$$

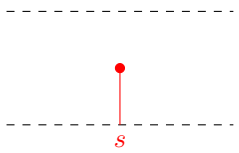
最后一个公式中的算子 ∂_s 称为 Demazure 算子。我们得到 $P_s(f) \in \mathcal{R}^s$、$\partial_s(f) \in \mathcal{R}^s$，以及

$$f = P_s(f) + \partial_s(f)\,\frac{\alpha_s}{2}. \tag{38}$$

8.2. 单色态射。固定一个反射 s。考虑自然嵌入ι_s：$\mathrm{pt} \to \mathrm{BS}(s)$，它将 pt 映射到 $[1] = 1K$。按照第 7.3 节的记号，我们得到 $\iota_s = i_{(1)}$。我们得到等变拉回

$$\iota_s^\star : H(s) \to \mathcal{R},$$

我们将其表示为交换图



$(\iota_s^\star)$

根据引理 8，该映射是 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模的同态。由定理 37 可得，复合映射

$$\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}(s)} \mathcal{R} \xrightarrow[\sim]{\theta_s} H(s) \xrightarrow{\iota_s^\star} \mathcal{R}$$

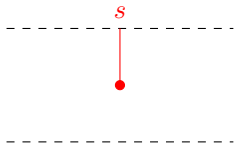
由下式给出

$$\iota_s^\star \theta_s (a \otimes b) = ab. \tag{39}$$

现在我们考虑取负的等变推前

$$-\iota_{s\star} : \mathcal{R} \to H(s)(2).$$

此处及下文中，圆括号中的数字表示次数移位。我们将上述态射表示如下：



$(-\iota_{s\star})$

根据引理 21，该映射是 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模的同态。我们希望计算以下复合：

$$\mathcal{R} \xrightarrow{-i_{s\star}} H(s)(2) \xrightarrow[\sim]{\theta_s^{-1}} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}(s)} \mathcal{R}(2). \tag{40}$$

只需计算 1 的像。由于元素 $-\theta_s^{-1} i_{s\star}(1)$ 是中心元且次数为 2，标准论证表明

$$-\theta_s^{-1} i_{s\star}(1) = c\alpha_s \otimes 1 + c \otimes \alpha_s$$

对某个 $c \in \Bbbk$ 成立。为了计算这个常数，我们先应用 $-\theta_s$，再应用 $\iota_s^\star$ 到上面的公式。根据定理 37 和 (39)，可得

$$-\alpha_s = \mathrm{Eu}_K(1K, G_s/K) = \iota_s^\star \iota_{s\star}(1) = -\iota_s^\star \theta_s (c\alpha_s \otimes 1 + c \otimes \alpha_s) = -2c\alpha_s,$$

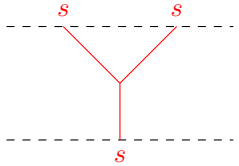
其中，从左数第二项表示 $1K$ 作为 G_s/K 的子流形时的法丛的等变欧拉类。因此 $c = 1/2$。由于 (40) 中的所有映射都是双模同态，可得

$$\theta_s^{-1}(-i_{s\star})(d) = d\frac{\alpha_s}{2} \otimes 1 + d \otimes \frac{\alpha_s}{2}.$$

令 $\mu_s : \mathrm{BS}(s,s) \to \mathrm{BS}(s)$ 为由 $\mu_s([g_1 : g_2]) = [g_1 g_2]$ 给出的映射。取拉回后，我们得到映射

$$\mu_s^\star : H(s) \to H(s,s).$$

我们将如下绘制这个交换图：



$(\mu_s^\star)$

根据引理 8，这个映射是 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模的同态。我们将计算复合

$$\mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}(s)} \mathcal{R} \xrightarrow{\theta_s} H(s) \xrightarrow{\mu^*} H(s,s) \xrightarrow{\theta^{-1}_{(s,s)}} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}(s)} \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{R}(s)} \mathcal{R}. \tag{41}$$

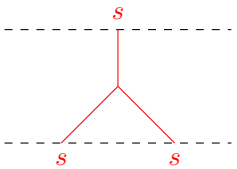
计算零次部分，得到

$$\mu^\star \theta_s(1 \otimes 1) = 1 = \theta_{(s,s)}(1 \otimes 1 \otimes 1),$$

其中，中心单位元是 $\mathrm{BS}(s,s)_K \times E$ 上的常值单位函数。由于 (41) 中的所有映射都是双模同态，我们得到

$$\theta^{(-1)}_{(s,s)} \mu^\star \theta_s(a \otimes b) = a \otimes 1 \otimes b.$$

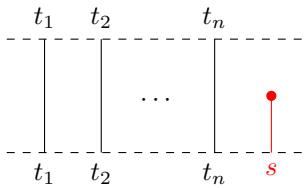
如预期，合并图



$(-\mu_{s\star})$

由负推前映射 $-\mu_{s\star} \colon H(s,s) \to H(s)(-2)$ 给出。我们将推迟计算其坐标形式，直到能够将图 $(-\iota_{s\star})$ 以及本节中的其他所有图作水平扩张。

8.3. 水平扩张。我们将应用第 7.2 节中证明的拼接性质。首先，考虑平面图



$(\iota^\star_{t,s})$

对于简单反射 s 和简单反射序列 $t = (t_1, \ldots, t_n)$（黑色字符串可以是任意颜色）。令 $ts = (t_1, \ldots, t_n, s)$ 为拼接序列，并令 $\iota_{t,s} \colon \mathrm{BS}(t) \hookrightarrow \mathrm{BS}(ts)$ 为由 $\iota_{t,s}([g_1 : \ldots : g_n]) = [g_1 : \ldots : g_n : 1]$ 给出的嵌入。我们断言交换图

$$\begin{array}{ccc} H(t) \otimes_{\mathcal{R}} H(s) & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \iota^\star_s} & H(t) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{t,s}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{t,\varnothing}} \\ H(ts) & \xrightarrow{\iota^\star_{t,s}} & H(t) \end{array}$$

是可交换的。事实上，对于任意 $a \in H(t)$ 和 $b \in H(s)$，我们得到

$$\theta_{t,\varnothing}(\mathrm{id} \otimes \iota^\star_s)(a \otimes b) = \theta_{t,\varnothing}(a \otimes \iota^\star_s(b)) = \varphi^*_{t,\varnothing}(\mathrm{pr}_1^*(a) \cup \mathrm{pr}_2^* \iota^\star_s(b)).$$

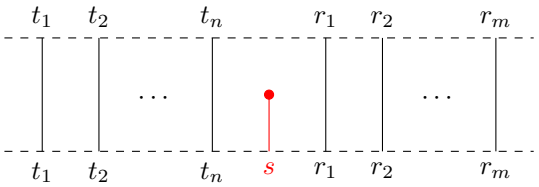
$$\iota^\star_{t,s} \theta_{t,s}(a \otimes b) = \iota^\star_{t,s} \varphi^*_{t,s}(\mathrm{pr}_1^*(a) \cup \mathrm{pr}_2^*(b)).$$

比较结果可知，只需证明以下等式

$$\mathrm{pr}_1 \varphi_{t,\varnothing} = \mathrm{pr}_1 \varphi_{t,s}(\iota_{t,s\,K} \times \mathrm{id}), \quad (\iota_{s\,K} \times \mathrm{id}) \mathrm{pr}_2 \varphi_{t,\varnothing} = \mathrm{pr}_2 \varphi_{t,s}(\iota_{t,s\,K} \times \mathrm{id}). \tag{42}$$

它们直接由连接算子的拼接识别规则（34）和定义（12）得出。

现在，让我们将交换图 $(\iota^\star_{t,\,s})$ 向右延伸



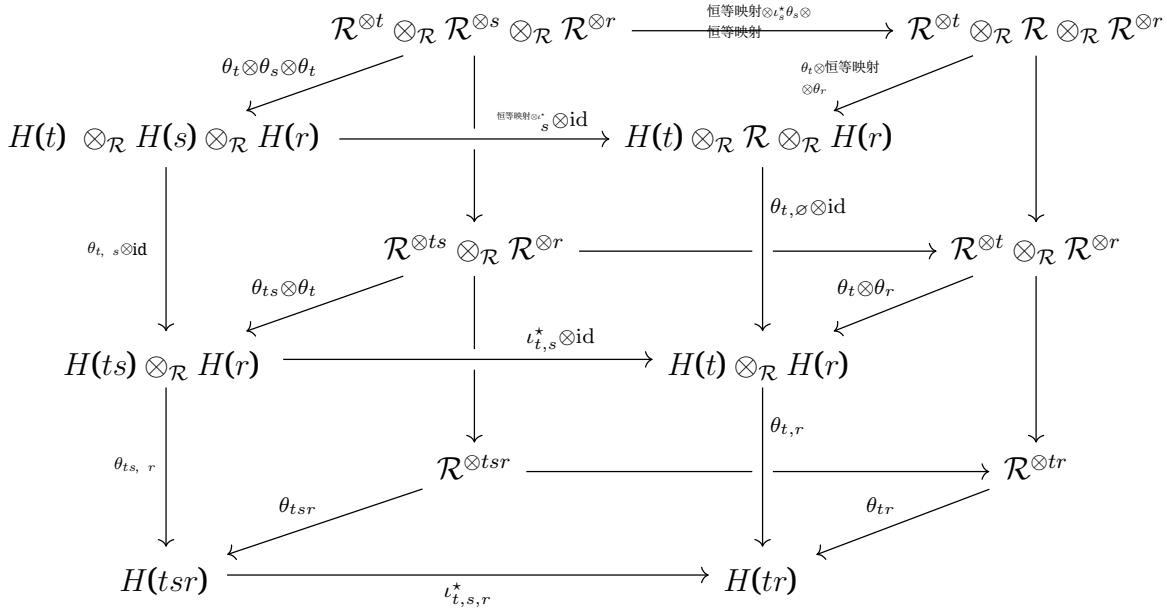
$(\iota^\star_{t,s,r})$

对于另一个反射序列 $r=(r_1,\dots,r_m)$。令 $tsr=(t_1,\dots,t_n,s,r_1,\dots,r_m)$ 为拼接序列，并令 $\iota_{t,\ s,\ r}$：$\mathrm{BS}(tr)\hookrightarrow\mathrm{BS}(tsr)$ 为由 $\iota_{t,\ s,\ r}([g_1:\dots:g_n:g'_1:\cdots:g'_m])=[g_1:\dots:g_n:1:g'_1:\cdots:g'_m]$ 定义的映射。我们得到交换图

$$\begin{array}{ccc} H(ts)\otimes_{\mathcal{R}}H(r) & \xrightarrow{\iota^\star_{t,s}\otimes\mathrm{id}} & H(t)\otimes_{\mathcal{R}}H(r) \\ \downarrow{\scriptstyle\theta_{ts,r}}\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle\theta_{t,r}} \\ H(tsr) & \xrightarrow{\iota^\star_{t,s,r}} & H(tr) \end{array}$$

其交换性的证明与前一个交换图的类似证明相似。

通过常规（但繁琐）的检验，可以证明以下三维交换图的交换性[7]：



因此

$\theta_{tr}^{-1}\iota^\star_{t,\ s,\ r}\theta_{tsr}(a_1\otimes\cdots\otimes a_{n+1}\otimes b_1\otimes\cdots\otimes b_{m+1})=a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes a_{n+1}b_1\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_{m+1}$.我们将交换图（$-\iota_{s\star}$）沿水平方向延伸。为此，我们首先证明该交换图

$$\begin{array}{ccc} H(t)\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{R} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\iota_{s\star}} & H(t)\otimes_{\mathcal{R}}H(s)(2) \\ \downarrow{\scriptstyle\theta_{t,\varnothing}} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_{t,s}} \\ H(t) & \xrightarrow{\iota_{t,s\star}} & H(ts)(2) \end{array} \tag{43}$$

[7]这归结为检验涉及第 7.1 节中引入的相应坐标化映射 φ_s、φ_t、……、第 7.2 节中引入的拼接映射 $\varphi_{t,\ s}$、$\varphi_{ts,\ r}$、……，以及各种到因子的投影的等式，并应用第 2.5 节和第2.6节中所述的适当识别。

是交换的。这更为困难，因为其中涉及推前算子。对于任意 $a \in H(t)$ 和 $b \in \mathcal{R}$，由（42）的第一个等式和投影公式可得

$$\begin{aligned}\iota_{t,s\star}\theta_{t,\varnothing}(a\otimes b) &= \iota_{t,s\star}\varphi_{t,\varnothing}^{*}(\mathrm{pr}_1^{*}(a)\cup \mathrm{pr}_2^{*}(b)) = \iota_{t,s\star}((\mathrm{pr}_1\,\varphi_{t,\varnothing})^{*}(a)\cup(\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,\varnothing})^{*}(b))\\ &= \iota_{t,s\star}\big(\iota_{t,s}^{\star}(\mathrm{pr}_1\,\varphi_{t,s})^{*}(a)\cup(\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,\varnothing})^{*}(b)\big) = (\mathrm{pr}_1\,\varphi_{t,s})^{*}(a)\cup\iota_{t,s\star}(\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,\varnothing})^{*}(b).\end{aligned} \tag{44}$$

考虑相容定向的笛卡尔方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{BS}(t)\times_K E^N & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,\varnothing}^{N}} & K\setminus E^N \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_{t,s}\times_K \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_s\times_K \mathrm{id}} \\ \mathrm{BS}(ts)\times_K E^N & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,s}^{N}} & \mathrm{BS}(s)\times_K E^N \end{array}$$

由 (22)，可得 ($\iota_{t,s}\times_K$恒等态射)$_*$($\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,\varnothing}^{N}$)* = ($\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,s}^{N}$)*($\iota_s\times_K$恒等态射)$_*$。取极限 $N\to\infty$，可得 $\iota_{t,s\star}(\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,\varnothing})^{*} = (\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,s})^{*}\iota_{s\star}$。将此代换应用于 (44) 的右端，得到

$$\begin{aligned}\iota_{t,s\star}\theta_{t,\varnothing}(a\otimes b) &= (\mathrm{pr}_1\,\varphi_{t,s})^{*}(a)\cup(\mathrm{pr}_2\,\varphi_{t,s})^{*}\iota_{s\star}(b)\\ &= \varphi_{t,s}^{*}(\mathrm{pr}_1^{*}(a)\cup\mathrm{pr}_2^{*}\,\iota_{s\star}(b)) = \theta_{t,s}(a\otimes\iota_{s\star}(b)) = \theta_{t,s}(\mathrm{id}\otimes\iota_{s\star})(a\otimes b).\end{aligned}$$

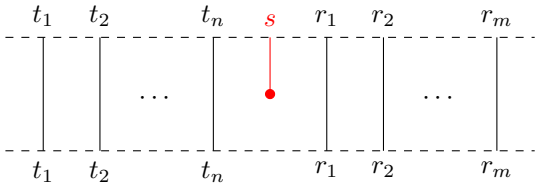
这个等式证明了交换图 (43) 的交换性。类似地，我们证明交换图

$$\begin{array}{ccc} H(t)\otimes_{\mathcal{R}} H(r) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\iota_{s\star}} & H(ts)\otimes_{\mathcal{R}} H(r)(2) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{t,r}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{ts,r}} \\ H(tr) & \xrightarrow{\iota_{t,s,r\star}} & H(tsr)(2) \end{array}$$

是交换的。按照上面的三维图表，在坐标中计算，可得

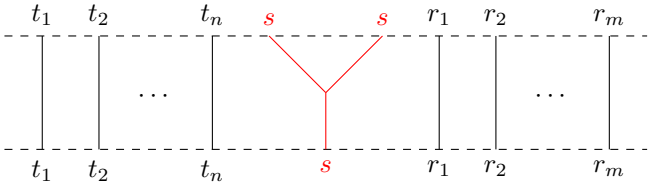
$$\begin{aligned}&\theta_{tsr}^{-1}(-\iota_{t,s,r\star})\theta_{tr}(a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes d\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_{m+1})\\ &\qquad = a_1\otimes\cdots\otimes a_n\otimes\left(d\frac{\alpha_s}{2}\otimes 1 + d\otimes\frac{\alpha_s}{2}\right)\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_{m+1}.\end{aligned} \tag{45}$$

这个态射由交换图表示



$(-\iota_{t,s,r\star})$

分裂　映射 $\mu_s^{\star}$ 可以用相同的方式沿水平方向延拓。考虑交换图



$(\mu_{t,s,r}^{\star})$

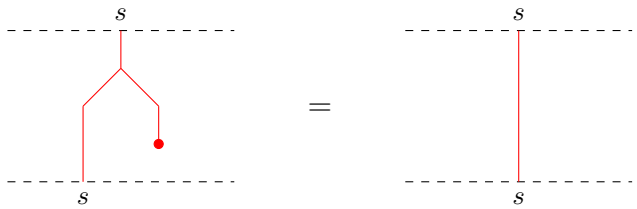
对于简单反射的序列 $t=(t_1,\ldots,t_n)$ 和 $r=(r_1,\ldots,r_m)$。令 $\mu_{t,s,r}\colon \mathrm{BS}(tssr)\to\mathrm{BS}(tsr)$ 为由 $\mu_{t,s,r}([g_1\colon\cdots\colon g_n\colon g_1'\colon g_2'\colon g_1''\colon\cdots\colon g_m''])=[g_1\colon\cdots\colon g_n]$ 给出的映射

[8]这里 $tssr=(t_1,\ldots,t_n,s,s,r_1,\ldots,r_m)$。

$g'_1 g'_2 \colon g''_1 \colon \cdots \colon g''_m]\!]$。仿照 $\iota^{\star}_{t,s,r}$ 的论证，可得

$$\theta^{(-1)}_{tssr}\mu^{\star}_{t,s,r}\theta_{tsr}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{m+1}) = a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes 1 \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{m+1}.$$

此时，我们可以计算合并图 $(-\mu_{s\star})$ 的坐标形式。显然有 $\mu_s \iota_{s,\ s,\ \varnothing} = \mathrm{id}$。取推前后，得到 $(-\mu_{s\star})(-\iota_{s,\ s,\ \varnothing\star}) = \mathrm{id}$。以图示方式表示，我们得到第一个关系：



请注意，我们证明这个关系时并未借助坐标化。由 (45)，得到

$$1 \otimes 1 = \theta_s^{-1}\mu_{s\star}\iota_{s,s,\varnothing\star}\theta_s(1 \otimes 1) = \theta_s^{-1}(-\mu_{s\star})\theta_{(s,s)}\left(1 \otimes \frac{\alpha_s}{2} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \frac{\alpha_s}{2}\right)$$

$$= \theta_s^{-1}(-\mu_{s\star})\theta_{(s,s)}\left(1 \otimes \frac{\alpha_s}{2} \otimes 1\right) - \theta_s^{-1}\mu_{s\star}\theta_{(s,s)}\,(1 \otimes 1 \otimes 1)\,\frac{\alpha_s}{2}.$$

由于 $\theta_s^{-1}\mu_{s\star}\theta_{(s,s)}(1 \otimes 1 \otimes 1) = 0$ 是出于次数的原因，我们得到

$$\theta_s^{-1}(-\mu_{s\star})\theta_{(s,s)}\left(1 \otimes \frac{\alpha_s}{2} \otimes 1\right) = 1 \otimes 1.$$

任取 $b \in H(s)$。应用 (38) 和上述公式，得到

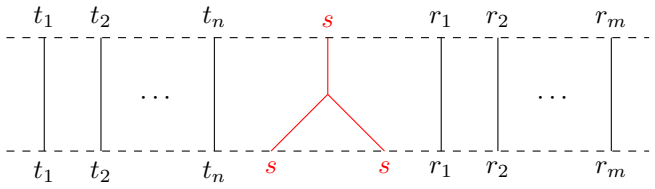
$$\theta_s^{-1}(-\mu_{s\star})\theta_{(s,s)}(1 \otimes b \otimes 1) =$$

$$-\,P_s(b)\,\theta_s^{-1}\mu_{s\star}\theta_{(s,s)}(1 \otimes 1 \otimes 1) + \partial_s(b)\,\theta_s^{-1}(-\mu_{s\star})\theta_{(s,s)}\left(1 \otimes \frac{\alpha_s}{2} \otimes 1\right) = \partial_s(b) \otimes 1.$$

由于此映射是双模同态，我们得到

$$\theta_s^{-1}(-\mu_{s\star})\theta_{(s,s)}(a \otimes b \otimes c) = a\partial_s(b) \otimes c.$$

本节所述的论证使我们能够将 $-\mu_{s\star}$ 扩展为态射 $-\mu_{t,\ s,\ r\star}$，该态射由以下交换图表示



$(-\mu_{t,s,r\star})$

并证明坐标公式

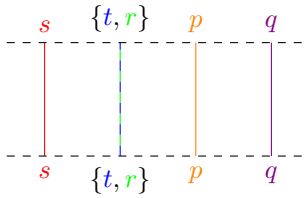
$$\theta^{-1}_{tsr}(-\mu_{t,s,r\star})\theta_{tssr}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a \otimes b \otimes c \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_{m+1})$$

$$= a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a\partial_s(b) \otimes c \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_{m+1}.$$

8.4. 广义博特-萨梅尔森簇。对于任意非空的单反射集合 S，令 G_S 为由所有群 G_s 生成的 G 的子群，其中 $s \in S$。令 $S = (S_1, \ldots, S_n)$ 为由非空反射集组成的序列。于是我们定义

$$\mathrm{BS}(S) = G_{S_1} \underset{K}{\times} G_{S_2} \underset{K}{\times} \cdots \underset{K}{\times} G_{S_n}/K$$

显然，若每个 S_i 都是单元素集，则 $\mathrm{BS}(S) = \mathrm{BS}(s)$，其中 $S_i = \{s_i\}$ 且 $s = (s_1, \dots, s_n)$。鉴于此，我们将省略单元素集的括号。例如，我们将 $\mathrm{BS}(\{s\}, \{t, r\}, \{p\}, \{q\})$ 简写为 $\mathrm{BS}(s, \{t, r\}, p, q)$。我们用 $H(S) = H_K^\bullet(\mathrm{BS}(S), \Bbbk)$ 表示等变上同调，采用类似的简写，并以与通常 Bott-Samelson 簇的上同调及态射类似的方式绘制 $H(S)$ 以及它们之间相同的态射。例如，恒等映射 $H(s, \{t, r\}, p, q) \to H(s, \{t, r\}, p, q)$ 表示为



这里我们只考虑这样的情形：每个集合 S_i 都是单元素集，只有一个例外；该例外中的集合由两个不同的简单反射组成（如上例所示）。这些簇也具有由类似于 (37) 的代数实现所赋予的复结构。

8.5. 双色态射。为使叙述简洁，我们将省略坐标化映射 θ_s，因而将它们视为恒等映射。记

$$x_s = \frac{\alpha_s}{2}, \quad c_s = x_s \otimes 1 + 1 \otimes x_s$$

对任意简单反射 s。

若将 $H(s)$ 视为左 $\mathcal{R}$-模，则它具有如下 $\mathcal{R}$-基：

$$\{1 \otimes x_{s_1}^{\varepsilon_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_n}^{\varepsilon_n} \mid \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}\}.$$

它由 2^n 个元素组成，其中 n 是 s 的长度。我们用 $H(s)^<$ 表示由上述所有满足对某个 i 有 $\varepsilon_i = 0$ 的基元素生成的 $H(s)$ 的左 $\mathcal{R}$-子模。剩下的基元素 $1 \otimes x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_n}$ 称为 $H(s)$ 的正规元素，见 [L，D´efinition 4.6]。

以下结果的证明留给读者。

命题 38. $c_{s_1} \cdots c_{s_n} = 1 \otimes x_{s_1} \otimes \cdots \otimes x_{s_n} + h$ 对于某个 $h \in H(s)^<$。

对于任意两个不同的简单反射 s 和 t，我们用 $m_{s,t}$ 表示乘积 st的阶。我们有 $m_{s,t} = m_{t,s} \in \{2, 3, 4, 6\}$。我们定义如下序列

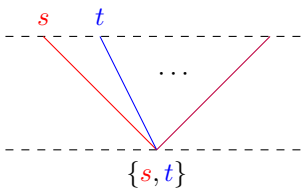
$$[s, t] = \begin{cases} (s, t), & \text{if } m_{s,t} = 2, \\ (s, t, s), & \text{if } m_{s,t} = 3, \\ (s, t, s, t) & \text{if } m_{s,t} = 4, \\ (s, t, s, t, s, t) & \text{if } m_{s,t} = 6. \end{cases}$$

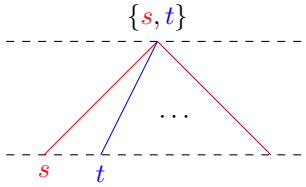
$[s, t]$ 的反射之积记作 $w_{s,t}$。这对反射的辫关系写作 $w_{s,t} = w_{t,s}$。我们将使用记号 $\mathrm{BS}(s, t, \dots) = \mathrm{BS}([s, t])$ 和 $H(s, t, \dots) = H([s, t])$，并用 $1 \otimes x_s \otimes x_t \otimes \cdots$ 表示 $H(s, t, \dots)$ 的正规元。类似地，$c_s c_t \cdots$表示乘积 $c_s c_t$, $c_s c_t c_s$, $c_s c_t c_s c_t$, $c_s c_t c_s c_t c_s c_t$ 中的一个，具体取决于 $m_{s,t}$。

扭曲映射 $A_{[s,t]}$ 的像（见 (31)）实际上包含于舒伯特簇 $X_{s,t} = K_{w_{s,t}}/K = \mathrm{BS}(\{s, t\})$ 中。因此我们得到映射 $\eta_{s,t} : \mathrm{BS}(s, t, \dots) \to X_{s,t}$。两侧的扭曲映射分别为 $A_{[s,t]}$ 和到 G/K 的自然包含。还请注意，这两个空间都是实维数为 $2m_{s,t}$ 的光滑流形。因此，我们得到以下两个 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模的态射：

$$\eta_{s,t}^\star : H_K^\bullet(X_{s,t}, \Bbbk) \to H(s, t, \dots), \quad \eta_{s,t\star} : H(s, t, \dots) \to H_K^\bullet(X_{s,t}, \Bbbk)$$

由交换图表示

$(\eta^{\star}_{s,t})$ 



$(\eta_{s,t\star})$

这里的紫线可以是红色或蓝色，这取决于 $m_{s,\,t}$ 的奇偶性。首先，我们计算以下复合。

引理 39。$\eta_{s,\,t\star}\eta^{\star}_{s,\,t} = \mathrm{id}$。

证明。应用投影公式，我们得到

$$\eta_{s,t\star}\eta^{\star}_{s,t}(h) = \eta_{s,t\star}(1 \cup \eta^{\star}_{s,t}(h)) = \eta_{s,t\star}(1) \cup h$$

对于任意 $h \in H^{\bullet}_{K}(X_{s,\,t}, \Bbbk)$。因此，只需证明 $\eta_{s,\,t\star}(1) = 1$。存在一个开子集 $V \subset X_{s,\,t}$，使得 $\eta_{s,\,t}$ 诱导出保定向微分同胚 $\eta'_{s,\,t}\colon U \xrightarrow{\sim} V$，其中 $U = \eta^{-1}_{s\,t,}(V)$。考虑以下笛卡尔方块

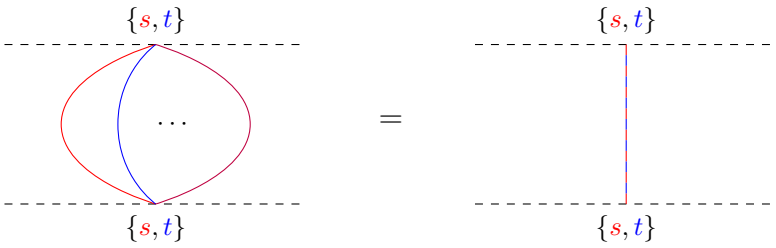
$$\begin{array}{ccc} U & \xhookrightarrow{j_U} & \mathrm{BS}(s,t,\ldots) \\ {\scriptstyle \eta'_{s,t}}\downarrow\wr & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{s,t}} \\ V & \xhookrightarrow{j_V} & X_{s,t} \end{array}$$

根据（等变版本的）(22)，我们得到

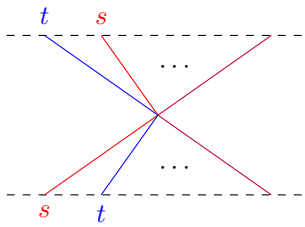
$$j^{\star}_{V}\eta_{s,t\star}(1) = \eta'_{s,t\star}j^{\star}_{U}(1) = \eta'_{s,t\star}(1) = 1.$$

由于 $X_{s,t}$ 是连通的，上述计算证明了 $\eta_{s,t\star}(1) = 1$。 □

以交换图表示，这个引理如下所示：



8.6. $2m_{s,t}$-价顶点。这里，我们将考虑复合 $\eta^{\star}_{t,s}\eta_{s,t\star}\colon H(s,t,\ldots) \to H(t,s,\ldots)$，它是一个 $\mathcal{R}$-$\mathcal{R}$-双模之间的态射。图示如下：



$(\eta^{\star}_{t,s}\eta_{s,t\star})$

注意，所有这类态射都与 [L 成比例，命题 4.3]。

引理 40. $\ker \mu_{s,t\star} \subset H(s,t,\ldots)^{<}$.

证明. 令 $h \in \ker \mu_{s,t\star}$. 我们有 $h = \alpha \otimes x_s \otimes x_t \otimes \cdots + h'$ 对于某个 $h' \in H(s,t,\ldots)^<$. 由次数的原因，我们得到 $\eta^\star_{t,s}\eta_{s,t\star}(h') \in H(t,s,\ldots)^<$. 因此，由 $\eta^\star_{t,s}\eta_{s,t\star}(h) = 0$可知

$$\alpha\, \eta^\star_{t,s}\eta_{s,t\star}(1 \otimes x_s \otimes x_t \otimes \cdots) \in H(t,s,\ldots)^<.$$

根据 [L、命题 4.3 和引理 4.7], ，这只有在 $\alpha = 0$ 时才有可能。 □

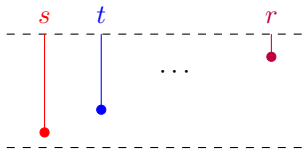
我们的下一个目标是证明以下归一化条件。

引理 41. $\eta^\star_{t,\ s}\eta_{s,\ t\star}(1 \otimes x_s \otimes x_t \otimes \cdots) = 1 \otimes x_t \otimes x_s \otimes \cdots + h$ 对某个 $h \in H(t,s,\ldots)^<$。

证明. 考虑以下包含链:

$$\mathrm{pt} \xrightarrow{\iota_{\varnothing,s,\varnothing}} \mathrm{BS}(s) \xrightarrow{\iota_{(s),t,\varnothing}} \mathrm{BS}(s,t) \xrightarrow{\iota_{(s,t),s,\varnothing}} \cdots \xrightarrow{\iota_{(s,t,\ldots),r,\varnothing}} \mathrm{BS}(s,t,\ldots),$$

其中 $r = s$ 或 $r = t$，具体取决于 $m_{s,\ t}$ 的奇偶性。我们将所得的复合记为 ι。它的像为 $[1 : 1 : \cdots : 1]$。取等变推前



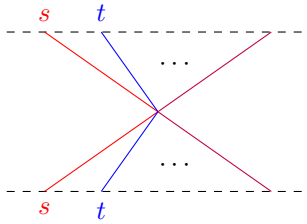
由（45）可得，$(-1)^{m_{s,\ t}}$ 的像等于 $c_s c_t \cdots$。因此$\eta_{s,\ t\star}(c_s c_t \cdots) = (\eta_{s,\ t}\iota)_\star((-1)^{m_{s,\ t}})$。同理可得$\eta_{t,\ s\star}(c_t c_s \cdots) = (\eta_{t,\ s}\iota)_\star((-1)^{m_{s,\ t}})$。由于$\eta_{s,\ t}\iota = \eta_{t,\ s}\iota$，由引理 39 和引理 40 可得

$$\eta^\star_{t,s}\eta_{s,t\star}(c_s c_t \cdots) - c_t c_s \cdots \in \ker \eta_{t,s\star} \subset H(t,s,\ldots)^<.$$

要完成证明，只需应用命题 38，以及如下事实：$\eta^\star_{t,\ s}\eta_{s,\ t\star}$是一个保持次数的同态 $H(s,t,\ldots) \to H(t,s,\ldots)$，它是左 $\mathcal{R}$- 模之间的同态，并将 $H(s,t,\ldots)^<$ 映射到 $H(t,s,\ldots)^<$。□

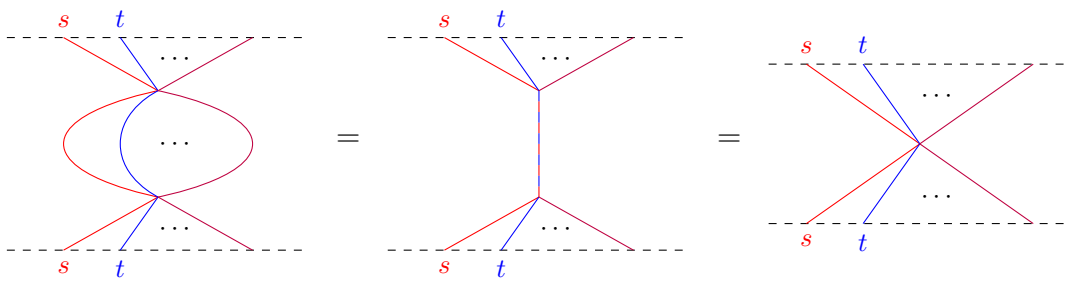
因此，复合 $\eta^\star_{t,\ s}\eta_{s,\ t\star}$ 恰好是映射 $f_{s,\ t}$，如 [L, Lemme 4.7]中所示。

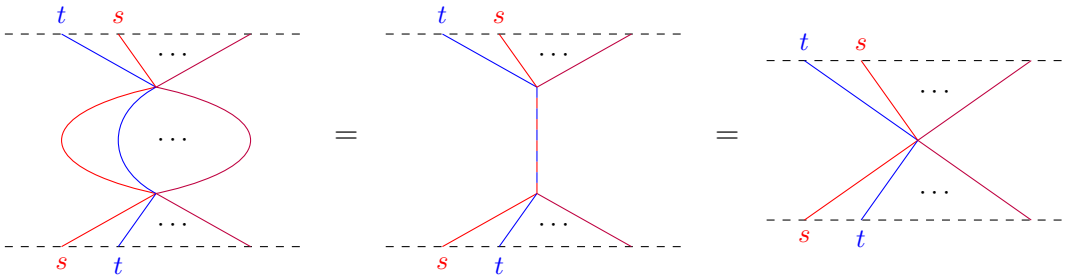
8.7. 琼斯-温策尔投影算子。这个映射由复合 $\eta^\star_{s,t}\eta_{s,t\star}$ 给出，并由以下交换图表示:



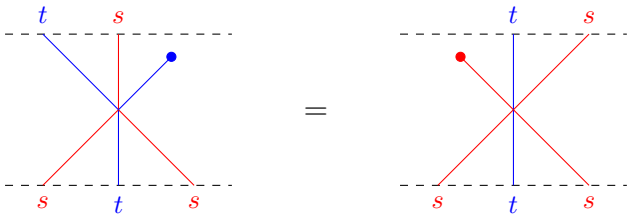
$(\eta^\star_{s,t}\eta_{s,t\star})$

由引理 39，我们立即得到以下关系





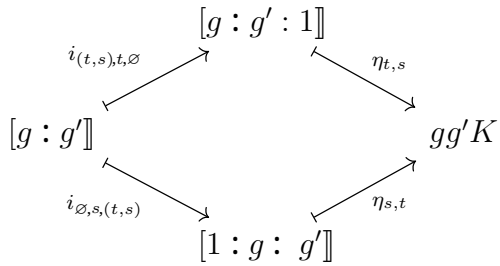
8.8. 双色点收缩。作为 $m_{s,t}=3$ 的一个例子，我们来证明以下关系



事实上，左边和右边分别等于

$$i^{\star}_{(t,s),t,\varnothing}\eta^{\star}_{t,s}\eta_{s,t\star}=(\eta_{t,s}i_{(t,s),t,\varnothing})^{\star}\eta_{s,t\star},\qquad i^{\star}_{\varnothing,s,(t,s)}\eta^{\star}_{s,t}\eta_{s,t\star}=(\eta_{s,t}i_{\varnothing,s,(t,s)})^{\star}\eta_{s,t\star},$$

分别。因此，只需证明 $\eta_{t,s}i_{(t,s),t,\varnothing}=\eta_{s,t}i_{\varnothing,s,(t,s)}$。这可由以下计算得出：



对于$m_{s,t}$ 的其他取值，证明类似。

8.9. 双色态射的水平扩张。最后，还需要将态射$\eta^{\star}_{s,t}$ 和$\eta_{s,t\star}$ 水平扩张。这可以仿照第 8.3 节来完成。首先，设$p=(p_1,\dots,p_n)$为一个简单反射序列。然后我们定义映射

$$\eta_{p,s,t}:\mathrm{BS}(p_1,\dots,p_n,s,t,\dots)\to\mathrm{BS}(p_1,\dots,p_n,\{s,t\})$$

通过 $[g_1:\ \cdots:\ g_n:\ g'_1:\ \cdots:g'_{m_{s,t}}]\mapsto[g_1:\ \cdots:\ g_n:g'_1\cdots g'_{m_{s,t}}]$。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} H(p)\otimes_{\mathcal{R}}H^{\bullet}_{K}(X_{s,t},\Bbbk) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta^{\star}_{s,t}} & H(p)\otimes_{\mathcal{R}}H(s,t,\dots)\\ \downarrow{\scriptstyle\theta_{p,s,t}}\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle\theta_{p,[s,t]}}\\ H(p_1,\dots,p_n,\{s,t\}) & \xrightarrow{\eta^{\star}_{p,s,t}} & H(p_1,\dots,p_n,s,t,\dots)\end{array}$$

其中$\theta_{p,s,t}$ 对应于

$$\varphi_{p,s,t}:\mathrm{BS}(p_1,\dots,p_n,\{s,t\})\,{}_K\!\times E\to(\mathrm{BS}(p)\,{}_K\!\times E)\times(X_{s,t}\,{}_K\!\times E)$$

如第 3.1 节中的处理方式，对以下数据集合：

$$X=G_{p_1}\underset{K}{\times}G_{p_2}\underset{K}{\times}\cdots\underset{K}{\times}G_{p_n},\quad Y=X_{s,t},\quad L=R=P=Q=K,$$

以及由 $[g_1 \colon \cdots \colon g_n] \mapsto g_1 \cdots g_n$ 定义的 $\alpha \colon X \to G$。

现在令 $q = (q_1, \ldots, q_m)$ 为另一个简单反射序列。我们定义映射

$$\eta_{p,s,t,q} : \mathrm{BS}(p_1, \ldots, p_n, s, t, \ldots, q_1, \ldots, q_m) \to \mathrm{BS}(p_1, \ldots, p_n, \{s, t\}, q_1, \ldots, q_m)$$

by $[g_1 \colon \cdots \colon g_n \colon g'_1 \colon \cdots \colon g'_{m_{s,t}} \colon g''_1 \colon \cdots \colon g''_m] \mapsto [g_1 \colon \cdots \colon g_n : g'_1 \cdots g'_{m_{s,t}} \colon g''_1 \colon \cdots \colon g''_m]$。我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} H(p_1, \ldots, p_n, \{s, t\}) \otimes_{\mathcal{R}} H(q) & \xrightarrow{\eta^\star_{p,s,t} \otimes \mathrm{id}} & H(p_1, \ldots, p_n, s, t, \ldots) \otimes H(q) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_{p,s,t,q}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{p[s,t],q}} \\ H(p_1, \ldots, p_n, \{s, t\}, q_1, \ldots, q_m) & \xrightarrow{\eta^\star_{p,s,t,q}} & H(p_1, \ldots, p_n, s, t, \ldots, q_1, \ldots, q_m) \end{array}$$

其中 $\theta_{p,s,t,q}$ 的定义方式与 $\theta_{p,s,t}$ 类似。推前对应的类似交换图、绘制相应的图并将它们复合，留给读者完成（参见引言中的图示示例）。

References

[Bo] A. Borel, 《紧致李群的主纤维空间与齐性空间的上同调》, 《数学年刊》, 1953, 57, 115–207。[Br] M. Brion, 《等变上同调与等变交理论》, 载于: Broer, A., Daigneault, A., Sabidussi, G.（编）, 《表示理论与代数几何》。北约高级研究所系列, 第514卷。Springer, Dordrecht, 1998, 1–37。[BS] R. Bott, H. Samelson, 《莫尔斯理论在对称空间中的应用》, Am. J. Math., 80（1958）964–1029。[F] W. Fulton, 《代数拓扑中的等变上同调》, 哥伦比亚大学讲义, D. Anderson 笔记, 附录A。[Ha] A. Hatcher, 《代数拓扑》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2002。[J] J. C. Jantzen, 《矩图与表示》, 傅里叶研究所, 《表示理论中的几何方法》暑期学校论文集, 2008。[L] N. Libedinsky, 《Soergel双模范畴》, J. Algebra, 2008, 320(7):2675–2694。[R] J. Rotman, 《同调代数导论》, Academic Press, 纽约, 1979。[S] V. Shchigolev, 《Bott-Samelson簇中的嵌套纤维丛》, J. Algebra, 605（2022）, 296–338。[St] R. Steinberg, 《Chevalley群讲义》, 纽黑文, 1968。[WW] B. Webster, G. Williamson, 《Soergel双模的 Hochschild 同调几何模型》, Geometry & Topology, 12(2), （2008）, 1243–1263。[EW] B. Elias, G. Williamson, 《Soergel演算》, Represent. Theory, 20, 295–374（2016）。

俄罗斯联邦政府财政大学, 列宁格勒大街49号, 莫斯科, 125993, 俄罗斯, shchigolev vladimir@yahoo.com