arXiv:2301.10751v1 [math.CT] 25 Jan 2023

树状 Segal 对象的幺半包络与 Grothendieck 构造

David Kern

2023年1月26日

我们提出了在 Segal 树状空间模型中构造 ∞-幺半群的幺半包络的方法，并据此定义此类对象的余笛卡尔纤维化。我们通过将树状范畴视为带基点有限集范畴的“plus 构造”来实现这一点，并在更一般的代数模式语言中处理 Segal 条件。最后，我们重新表述 Lurie 对笛卡尔结构的定义，将其视为由包络产生的范畴纤维化，并由此推出树状空间的直化/反直化等价。

目录

1 引言 **2**

2 代数模式语言回顾 5
2.1 代数模式与 Segal 对象.5 2.2 代数模式的态射 I：（弱）Segal 纤维化 . . . . . 7 2.3 代数模式的态射 II：可丰化结构的组合学 9

3 加号构造及其 Segal 对象 11
3.1 带模式树的范畴.11 3.2 加号构造上的模式结构.12

4 M幺半包络与 Grothendieck 余纤维化 1 **5**
4.1 幺半包络函子的构造.15 4.2 余纤维化与可表单幺性.19

5 笛卡尔幺半结构及其在 Grothendieck 构造中的应用 **22**
5.1 笛卡尔幺半结构.22 5.2 直化余笛卡尔纤维化.23

1 引言

任意幺半范畴 $V^{\otimes}$ 都定义了一个厄米环，其颜色是 V 的对象，而其多元态射 $C_1,\cdots,C_n \to D$ 由态射 $C_1\otimes\cdots\otimes C_n \to D$给出。以这种方式得到的厄米环称为可表的；为避免混淆——因为我们将把厄米环建模为某些预层——我们将其称为可表幺半的。事实上，典范多元态射 $C_1,\cdots,C_n \to C_1\otimes\cdots\otimes C_n$（对应于 $\mathrm{id}_{C_1\otimes\cdots\otimes C_n}$）具有这样的泛性质：每个源为 $(C_1,\cdots,C_n)$ 的多元态射都必须通过它分解，且分解由一个源为 $C_1\otimes\cdots\otimes C_n$的唯一一元态射给出。这一泛性质可视为余笛卡尔性条件。

确实，回顾一下：若 $p\colon E \to B$ 是一个余纤维化（或余笛卡尔纤维化），则 E 上存在一个分解系统，其左类由 p-余笛卡尔态射组成，右类由纯粹的 p-垂直态射组成。也可以定义多范畴的余纤维化概念，例如 [Her04] 对广义多范畴所做的那样；更一般地，也可以定义其中的余笛卡尔（多）态射，使得一个多范畴可表幺半，当且仅当它到终对象拟 operad 的态射是余纤维化。一般而言，多范畴的余纤维化可以视为一个态射，其纤维是幺半范畴：由于颜色的选取来自由无节点边 η 生成的 operad，而它只有一元态射，因此垂直态射始终是一元态射，而余笛卡尔态射则体现张量积。

在同伦情形下，建模 ∞-厄米环有多种方式，各有优缺点。 [Lur17], 偏好的模型用其算子范畴表示一个 ∞-厄米环，因此可以直接处理余笛卡尔纤维化和幺半包络；但要从任何构造中恢复对厄米环的直观理解，就需要处理纠缠复杂的组合学。另一方面，树状模型以树范畴作为 ∞-厄米环的形状，更贴近图表式的厄米环直觉，但通常需要更多工作才能实现各种构造。例如， [Heu11] 在树状集合这一模型中研究了余笛卡尔纤维化及其直化；树状集合是一种点集模型，其模型不变性并非显而易见。

一个在同伦意义上更稳健的模型是 Segal 树状空间，或者更一般地，任意完备 $(\infty,1)$-范畴中的 Segal树状对象。这个模型清楚地表明，要为幺半群等代数对象建模，只需一个一般的“形状”范畴及其 Segal分解。这一理念在 [CH21] 中得以实现：该文定义了代数模式的概念，即一个基础形状范畴，并可在其上定义 Segal预层。

因此，我们希望为代数模式上的 Segal 对象定义余笛卡尔运算和纤维化的概念，并进一步构造由任意态射生成的自由纤维化。在这里，我们不会达到如此一般的程度，而是采用更简单的途径来定义余纤维化。在 [Her04], 中，多范畴的余纤维化被刻画为这样一些态射：它们在取幺半包络的函子下的像，是底层范畴的余纤维化（或余笛卡尔纤维化）。我们将沿用这一思路，专注于构造一个包络 ∞-函子，并利用它来

定义余笛卡尔纤维化。

方向问题与加号构造

要实现上述目标，需要为 Segal 对象的运算引入方向的概念：在范畴中，笛卡尔性有两个方向，即从源出发或从目标出发（分别产生笛卡尔态射和余笛卡尔态射）；而对于幺半群或其“多对象”推广——虚拟双范畴——迄今探讨的（余）笛卡尔态射概念采用的是从目标出发的方向（如 [CS10，定义 5.1]），但我们预计，选取任意一个输入进行分离，都可能导出笛卡尔性的概念。然而，并非所有方向的选择都同样合适：对于幺半群，单独保留输出的选择会使复合具有函子性，而其他选择则不会（因为这里不像范畴那样存在对偶运算）。因此，研究可能需要局限于“良好”的定向；对于模拟序而言，似乎很难找到这样的定向。

在本文中，我们选择通过以一种更实用的定义取代或许更为典范的可定向性定义，来避开这个问题。运算具有方向这一概念意味着，我们可以将它们的任意复合视为具有某种推进顺序。单纯形范畴的对象所刻画的正是这一点Δ：它们是从起点到终点的态射链。因此，我们将以这个范畴为基础来定义方向，并称一个代数模式为**良定向的**，如果它可以表示为某种涉及 Δ的构造的输出。事实证明，适当的构造是 Baez–Dolan 提出的加号构造的一种变体，曾由包括 [Bar18] 和 [Ber22]在内的学者加以研究。

模式 O 的加号构造具有这样的特征：其 Segal 对象就是弱 Segal O-纤维化，或称“O-拟序”。在这一术语体系下，模式的弱 Segal 纤维化的包络最近已在 [BHS22]，中构造出来；该工作以 [Lur17] 的构造及其在 [HK21] 中展现的性质为基础。尽管这一构造所处的背景与我们的等价，但其目标与本文所进行的构造截然不同，因为我们希望始终保持在 Segal 对象的显式框架中。

构造思路

为了理解我们构造幺半包络函子的思路，我们在模式 Γ^{op} 的情形下对其进行描述。该模式的 Segal 对象是交换幺半群，其加号构造以厄米环为参数。

设 O 为一个幺半群。其幺半包络构造为一个幺半范畴 $\mathbf{Env}(O)$，其对象集是由 O 的颜色生成的自由幺半群，其元素记作 $C_1 \otimes \cdots \otimes C_n$，或简记为 $C_1 \cdots C_n$。若 $C_1 \otimes \cdots \otimes C_n$ 是 O 的一串颜色，且 D 是一个颜色，则态射 $C_1 \otimes \cdots \otimes C_n \to D$ 由 O 中的一个多重态射 $C_1, \ldots, C_n \to D$ 给出。若 $C_1 \otimes \cdots \otimes C_n$ 和 $D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$ 是 O 的两串颜色，要定义态射 $C_1 \otimes \cdots \otimes C_n \to D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$，还需将输入 $(C_1, \ldots, C_n)$ 划分为 m 个部分（可以为空）。

到目前为止，上述内容只是对 O 的包络的底层范畴 $\mathrm{Env}(O)$ 的描述；要将其定义为一个幺半范畴，或可表幺半歌剧，还必须在歌剧结构中定义更高元数的多重态射。设 $(C_1^i \otimes \cdots \otimes C_{p_i}^i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ 是 $\mathrm{Env}(O)$ 的 n 个颜色，并设 $D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$ 是另一个颜色。根据可表性条件，多重态射 $(C_1^1 \cdots C_{p_1}^1, \ldots, C_1^n \cdots C_{p_n}^n) \to D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$ 由态射 $C_1^1 \otimes \cdots \otimes C_{p_n}^n \to D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$ 给出，也就是说，需要对各项进行划分，并为每个 D_i 选取一个多重态射。

在树枝模型中，只需定义由所有 n-元态射组成的对象 $\mathrm{Env}(O)(\star_n)$，而不指定它们的源和目标。为了描述这一点，逆向思考会很有帮助：给定 O 的一族多重态射，我们可以问如何将其解释为 $\mathrm{Env}(O)$ 中的多重态射。若 $C_1, \cdots, C_r$ 是所考虑这族多重态射的定义域的并集，那么按族分解便给出了一个以目标为指标的 p 划分；然而，从 $\mathrm{Env}(O)$ 的角度来看，这个划分完全是人为的，因为它仅用于构造一个目标可能由多个颜色组成的态射。因此必须将其遗忘。与此同时，若要将这族多重态射解释为 $\mathrm{Env}(O)$ 中一个指定元数为 n 的多重态射，颜色集合 $(C_i)_{i\in[\![1,r]\!]}$ 就必须配备一个划分为 n 个部分的划分。

用公式表示，我们有

$$\mathcal{E}nv(\mathcal{O})(\star_n) = \coprod_{r\in\mathbb{N}} \coprod_{\lambda \text{ partition of } r \text{ in } n} \prod_{i=1}^{m} \mathcal{O}(\star_{\lambda(i)}). \tag{1}$$

回想一下，划分与 Γ^{op} 中的活态射是一回事（加号构造的强大之处正在于此：它将 Γ^{op} 与歌剧模式联系起来）。于是，我们可以将划分上的余积解释为对 $(\Gamma^{\mathrm{op}})^{\mathrm{act}}$ 中态射取余极限。

从这个角度来看，这个公式与计算（逐点）oplax 延拓的公式[1]，十分相似，区别在于：余极限仅取遍高度与花冠相同的树，即与到 Δ 的投影相容。为此，需要将延拓的概念细化为“逐纤维”的延拓。

论文提纲

在第 3 节中，我们为适当的代数模式定义加号构造，并以与研究 $\Gamma^{\mathrm{op}\natural}$ 所进行的加号构造非常相似的方式，建立其主要性质；相关研究见 [CHH18] 或 [CH20]。随后，在第 4 节中，我们将用它构造 Segal 对象的“可表幺半”包络。虽然这一构造对一般的良定向模式都有意义，但我们只有在将模式限制为类似于 $\Omega^{\mathrm{op}\flat}$ 中关于幺半群的模式时，才能展示其良好的幺半性质。最后，在第 5 节中，我们进一步利用这个包络函子 $|_!$ 为 ∞-幺半群定义直化/反直化的 Grothendieck 构造；这些

[1]通常称为左 Kan 延拓

节中的结果并非新结果，只是 [Lur17]，中已有结果的变体，其证明中的组合论事实上直接沿用了原有证明；不过，这种表述为它们提供了一个更新颖、更具幺半性的视角。

致谢

本文的核心结果是在我攻读博士学位期间与 Étienne Mann 合作完成的，感谢他与我进行了许多有益的讨论。

我谨此致谢，本文获得了法国国家研究署（Agence Nationale de la Recherche）资助项目“代数几何中的范畴化”（ANR-17-CE40-0014）的支持，以及欧盟地平线2020研究与创新计划下欧洲研究理事会（ERC）的资助（项目“导出辛几何及其应用”，协议编号 768679）。

2 代数模式语言回顾

2.1 代数模式与 Segal 对象

定义 2.1.1（代数模式）。代数模式是一个带有唯一分解系统并选定一类称为**基本**对象的 $(\infty,1)$-范畴。分解系统左类中的态射称为**惰性**态射，右类中的态射称为**活性**态射。

记号 2.1.2。代数模式中的惰性映射通常记作 $\rightarrowtail$，而活性映射记作 $\twoheadrightarrow$。

若 $\mathcal{O}$ 是所考虑的代数模式的底层 $(\infty,1)$-范畴，则将宽子-$(\infty,1)$-范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{inrt}}$ 和局部满子-$(\infty,1)$-范畴 $\mathcal{O}^{\mathrm{act}}$ 分别记作；它们的态射分别是惰性态射和活态射。

我们还将 $\mathcal{O}^{\mathrm{el}}$ 记作 $\mathcal{O}^{\mathrm{inrt}}$ 中由选定的初等对象构成的全子-$(\infty,1)$-范畴。对于任意对象 $O \in \mathcal{O}$，我们进一步将从 O 到一个初等对象的惰性态射的 $(\infty,1)$-范畴记作 $\mathcal{O}^{\mathrm{el}}_{O/} := \mathcal{O}^{\mathrm{el}} \times_{\mathcal{O}^{\mathrm{inrt}}} \mathcal{O}^{\mathrm{inrt}}_{O/}$。

例 2.1.3。Segal 范畴 Γ（其骨架）是范畴 $\mathfrak{FinSet}_*$（带基点有限集范畴）的反范畴，它具有一个活跃-惰性分解系统，其中带基点有限集之间的态射 $f\colon (S,s_0) \to (T,t_0)$ **是惰性的**，当且仅当对每个 $t \in T \setminus \{t_0\}$，原像 $f^{-1}(t)$恰好包含一个元素；而当且仅当 **是活性的**，若 S 中映到 t_0 的唯一元素是 s_0 ——因此，特别地，活态射的子范畴 $\Gamma^{\mathrm{op}_{\mathrm{act}}}$ 与有限集范畴相同（通过将 (S,s_0) 映到 $S \setminus \{s_0\}$）。

Γ^{op} 上诱导出的惰性-主动分解系统产生了两种代数模式结构，分别对应两种初等对象的选择。代数模式 $\Gamma^{\mathrm{op}^\flat}$ 的初等对象是二元集合（与 $\langle 1\rangle$ 同构），而模式 $\Gamma^{\mathrm{op}^\natural}$ 的初等对象是单元素集合（与 $\langle 0\rangle$ 同构）和二元集合。

例 2.1.4.（非增广）单纯形指标范畴 Δ，可识别为有序非空有限集及其间保序映射所成的范畴，

具有一个分解系统，其中映射若保持最大元和最小元，则称为**活性**；若对应于线性子集的包含函子，则称为**惰性**。

在 Δ^{op} 上诱导的惰性-主动分解系统产生了两种代数模式结构：代数模式 $\Delta^{\mathrm{op}\flat}$ 的初等对象是二元集合（同构于 $[1]$），而模式 $\Gamma^{\mathrm{op}\natural}$ 的初等对象是单元素集合（同构于$[0]$）和二元集合。

例 2.1.5。我们尤其感兴趣的是，Moerdijk–Weiss 的树状范畴 Ω 可以描述为一个由（非平面）有根树构成的范畴，其态射是由这些树生成的自由（带颜色、对称）厄米环之间的态射。我们将在第 3 节中给出它（某个足够大的子范畴）的另一种构造。

可以区分出一些特别有趣的树：

自由边 是由一条边但没有顶点构成的树，记作 η（因此它自由生成的幺半群只有一个颜色，且只有恒等一元态射）；

花冠 是指只有一个顶点、并有 $n \in \mathbb{N}$ 条 $n+1$ 边（其中一条为根）连接到该顶点的树，记作 $\star_n$。注意，具有 n 个叶的花冠 $\star_n$ 的自同构群是对称群 S_n。

范畴 Ω 具有一个分解系统，其中若态射保持边界，则称其为**活性** 态射；若态射对应于子树包含（特别是，它在顶点上保持度数），则称其为**惰性** 态射。

Ω^{op} 上诱导出的惰性-主动分解系统又带来两种代数模式结构：代数模式 $\Omega^{\mathrm{op}\flat}$ 以花冠 $\star_n$ 为初等对象，而模式 $\Omega^{\mathrm{op}\natural}$ 则以花冠和自由边 η 为初等对象。

定义 2.1.6（代数模式的态射）。设 O 和 P 为代数模式。从 O 到 P 的**代数模式态射** 是一个保留活性态射、惰性态射和初等对象的 $(\infty,1)$-函子 $\mathrm{O} \to \mathrm{P}$。

例 2.1.7：存在一个函子 $\Delta \to \Omega$，它取 Δ 的标准骨架，并将 $[n]$ 发送到具有 n 个节点和 $n+1$ 条边的线性树。可以注意到，该函子是完全忠实的，也可以将其识别为典范投影函子 $\Omega_{/\eta} \to \Omega$。通过翻译给定 Δ^{op} 上分解系统中惰性态射和活性态射的定义，可以立即看出，该函子诱导出代数模式的态射 $\Delta^{\mathrm{op}\natural} \to \Omega^{\mathrm{op}\natural}$ 和 $\Delta^{\mathrm{op}\flat} \to \Omega^{\mathrm{op}\flat}$。

定义 2.1.8（Segal 对象）：设 O 为一个代数模式。如果一个 $(\infty,1)$-范畴 C 对于任意 $\mathrm{O} \in \mathrm{O}$，都具有形状为 $\mathrm{O}^{\mathrm{el}}_{\mathrm{O}/}$ 的图表的极限，则称其为 **O-完备的**。

设 C 是一个 O-完备的 $(\infty,1)$-范畴。C 中的一个 **Segal O-对象** 是一个 $(\infty,1)$-函子 $\mathrm{X}\colon \mathrm{O} \to \mathrm{C}$，使得 $\mathrm{X}|_{\mathcal{O}^{\mathrm{inrt}}}$ 是 $\mathrm{X}|_{\mathcal{O}^{\mathrm{el}}}$ 的松扩张（沿包含函子）。具体而言，这意味着对于任意 $\mathrm{O} \in \mathrm{O}$，典范映射

$$\mathcal{X}(\mathrm{O}) \to \lim_{\mathrm{E} \in \mathcal{O}^{\mathrm{el}}_{\mathrm{O}/}} \mathcal{X}(\mathrm{E}) \tag{2}$$

是可逆的。

C 中 Segal O-对象构成的 $(\infty,1)$-范畴 $\mathrm{Seg}_{\mathcal{O}}(\mathbb{C})$，是由这些 Segal 对象张成的 $\mathbb{C}^{\mathcal{O}}$ 的全子-$(\infty,1)$-范畴。

例 2.1.9. • Segal $\Gamma^{\mathrm{op}\flat}$-对象是交换代数对象（或 $\mathscr{E}_\infty$-代数对象）。

- Segal $\Delta\mathrm{op}^{\flat}$-对象是结合代数对象（或 A_∞-代数对象，或 E_1-代数），而 Segal $\Delta\mathrm{op}^{\natural}$-对象是内部范畴。
- Segal $\Omega\mathcal{O}\mathrm{p}^{\flat}$-对象是内部单色幺半群，而 Segal $\Omega\mathrm{op}^{\natural}$-对象是内部（带颜色的）幺半群。

注 2.1.10. 设 O 是一个代数模式，且包含函子 $\mathbb{O}^{\mathrm{el}} \hookrightarrow \mathbb{O}^{\mathrm{inrt}}$ 是余稠密的。那么对于任意 $O \in \mathbb{O}$，余表示对象 $y_{\mathcal{O}^{\mathrm{op}}}(O):\mathbb{O} \to \infty\text{-Grpd}$ 是一个 Segal O-∞-群胚——这是 hom ∞-函子的极限保持性质的直接推论。应将其视为由 O 生成的 Segal 对象。

例 2.1.11。 在 Δ^{op} 上，Segal 对象 $y[n]$ 对应于具有 n 个连续箭头的线性范畴 $n+\mathbb{1}$。

例 2.1.12。 在 Ω^{op} 上，由具有 $n+1$ 个旗标的花冠生成的 Segal 对象 $y_{\star_n}$ 也记作 $\star_n$，并称为花冠。它对应于一个具有 $n+1$ 个颜色 $O_1,\dots,O_{n+1}$ 的幺半群；对于每个置换 $\sigma \in \Sigma_n$，都有一个型为 $(O_{\sigma(1)},\dots,O_{\sigma(n)};O_{n+1})$ 的运算。

2.2 代数模式的态射 I：（弱）Segal 纤维化

定义 2.2.1（代数模式的 Segal 态射）。 若代数模-式态射 $F:\mathbb{O} \to \mathbb{P}$ “保持 Segal 条件”，则称其为 **Segal 态射**；也就是说，对于任意 P-完备的 $(\infty,1)$-范畴 $\mathbb{C}$，诱导的 $(\infty,1)$-函子 $F^*|_{\mathrm{Seg}_{\mathbb{P}}}:\mathrm{Seg}_{\mathbb{P}}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{P}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$ 可分解为 $\mathrm{Seg}_{\mathbb{O}}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{O}}$。

注 2.2.2。 根据 [CH21，引理 4.5]，只需检验 $\mathbb{C} = \infty\text{-Grpd}$ 中态射的 Segal 性，也就是检验其是否保持 Segal ∞-群胚。于是，F 为 Segal 态射的条件可以写成如下公式：对于每个 $O \in \mathbb{O}$，以及每个 Segal P-∞-群胚 X，∞-群胚的态射

$$\lim_{\mathbb{P}^{\mathrm{el}}_{\mathscr{F}(O)/}} \mathscr{X} \to \lim_{\mathbb{O}^{\mathrm{el}}_{O/}} \mathscr{X} \circ \mathscr{F}^{\mathrm{el}} \tag{3}$$

由 $(\infty,1)$-函子 $\mathbb{O}^{\mathrm{el}}_{O/} \to \mathbb{P}^{\mathrm{el}}_{\mathscr{F}(O)/}$ 诱导，是一个等价。

构造 2.2.3。 设 $V:\mathbb{O} \to (\infty,1)\text{-Cat}$ 是一个 O-幺半 $(\infty,1)$-范畴。对该函子的 Grothendieck 构造得到一个余笛卡尔纤维化 $\int^{\mathrm{co}} V \to \mathbb{O}$。我们将称一个在 O 上的余笛卡尔纤维化为 O 上的 **Segal 纤维化**，如果其关联的 $(\infty,1)$-函子 $\mathbb{O} \to (\infty,1)\text{-Cat}$ 满足 Segal 条件。

根据 [Lur17，命题 2.1.2。5], 如果 $\int^{co} V \to O$ 是一个 Segal O-纤维化，则 O 上的惰性-主动分解系统可提升为 $\int^{co} V$ 上的分解系统，从而赋予其代数模式的结构。如果 $P \to O$ 是 O 上的另一个代数模式，我们将 **P-代数** 定义为$\int^{co} V$ 中从 P 到 $\int^{co} V$ 的 O 上代数模式态射。

定义 2.2.4 （弱 Segal 纤维化）。 设 O 为一个代数模式。弱 **Segal**O**-纤维化** （也称为 O-运算子）是一个 $(\infty,1)$-函子 $p: X \to O$，满足：

1. 对于每个对象 $X \in X$，每个惰性态射 $i: pX \to O$ in O 都存在一个 p-余笛卡尔提升 $i_!: X \to i_! X$；2. 对于每个对象 $O \in O$，由惰性态射上的余笛卡尔态射诱导的 $(\infty,1)$-函子 $X_O \to \lim^{E \in \mathcal{O}^{el}_{O/}} X_E$ 是可逆的；3. 对于每个 $X \in X$，以及典范图表 $i: O^{el}_{p X/} \to O$（由 pX 出发的惰性态射）的任意 p-余笛卡尔提升，该提升到达一个将锥点取为 X 的 $i_!: (O^{el}_{p X/})^{\triangleleft} \to X$；对于每个 $Y \in X$，交换方框

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(Y,X) & \longrightarrow & \lim_{E \in \mathcal{O}^{el}_{pX/}} \mathfrak{X}(Y, i_!(E)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}(pY, pX) & \longrightarrow & \lim_{E \in \mathcal{O}^{el}_{pX/}} \mathcal{O}(pY, i(E) = E) \end{array} \tag{4}$$

是笛卡尔的。

例 2.2.5。• 弱 Segal $\Gamma^{op}_{\downarrow}$-纤维化是 $(\infty,1)$Lur17《定义 2.1.1》意义下的一个 ∞么半群的算子 [-范畴。10], 而弱 Segal $\Gamma^{op\flat}_{\natural}$-纤维化是 [Lur17《定义 2.3.2》意义下的一个广义 ∞-么半群。1]

• 弱 Segal $\Delta^{op\flat}$-纤维化是 [GH15《定义 2.2.6，定义 3.1》意义下的一个非对称∞-么半群的 $(\infty,1)$-范畴算子。3] 而弱 Segal $\Delta^{op\natural}$-纤维化是一个虚拟双 ∞-范畴，或 [GH15《定义 2.4.1，定义 3.1》中的广义 ∞-么半群。13]

定义 2.2.6 （弱 Segal 纤维化之间的态射）。 根据 [CH21], ，弱 Segal O-纤维化 $p: X \to O$ 的源 X 继承了一种代数模式结构，其中活态射是那些位于 O 中某个活态射之上的态射，惰性态射是那些位于 O 的惰性态射之上的 p-余笛卡尔态射，而初等对象是那些位于初等对象之上的对象。

弱 Segal O-纤维化的 $(\infty,2)$-范畴 $\mathbf{WkSegFib}_{/\mathcal{O}}$ 是 $(\infty,1)$-$\mathbf{Cat}_{/\mathcal{O}}$ 的局部满子-$(\infty,2)$-范畴，其对象由弱 Segal O-纤维化及其 Segal 态射构成。

可以直接验证，构造 2.2.3 中的任意 Segal 纤维化特别也是弱 Segal 纤维化。事实上，Segal O-纤维化恰好是那些同时为弱 Segal 纤维化和余笛卡尔纤维化的到 O 的 $(\infty,1)$-函子。这给出了一个包含 Segal 纤维化的 $(\infty,2)$-范畴到弱 Segal 纤维化的 $(\infty,2)$-范畴中的（非满）包含 $(\infty,2)$-函子。

2.3 代数模式的态射 II：可充实结构的组合学

作为本预备章节的收尾，我们陈述即将发表的论文 [CH22]中的一些定义（及其变体）[2]。

定义 2.3.1 (组合结构)。 一个 **组合模式** 是一个代数模式 $\mathcal{O}$，并配备一个态射 $|-|:\mathcal{O} \to \Gamma^{op\flat}$。

当 $(\mathcal{O} \ |-|)$ 是一个组合模式时，我们用 $\mathcal{O}^\flat \to \Gamma^{op\flat}$ 表示基变换

$$\mathcal{O}^\flat := \mathcal{O} \times_{\Gamma^{op\sharp}} \Gamma^{op\flat}. \tag{5}$$

得益于 [CH21，推论 5.5]，，我们看到，等式 (5) 中出现的纤维积有一个非常简单的描述：它由范畴 $\mathcal{O}$（配备其原有的分解系统）以及仅选择那些位于 $\langle 1\rangle \in \Gamma^{op}$ 上方的初等对象组成（即 排除位于 $\langle 0\rangle$ 上方的对象）。

定义 2.3.2 (可丰富图式)。 代数模式 $\mathcal{O}$ 上的组合结构 $|-|$ 称为**可丰富的**，如果对于任意 $O \in \mathcal{O}$，态射 $\mathcal{O}^\flat_{O/} \to \Gamma^{op\flat}_{/|O|/}$ 都是等价。

注 2.3.3。 将 Γ^{op} 视为带基点有限集范畴的（标准骨架），可以验证，任意 $\langle n\rangle \in \Gamma^{op}$ 都恰好有 n 个惰性态射指向唯一的初等对象 $\langle 1\rangle$；这些带基点态射 $\rho_i : \langle n\rangle \to \langle 1\rangle$ 将 i 映到 1，并将 $\langle n\rangle$ 的所有其他元素映到基点。于是，可丰富图式的条件意味着，对于任意 $O \in \mathcal{O}$，$(\infty, 1)$-范畴 $\mathcal{O}^\flat_{O/}$，必须等价于离散

集，即 ρ_i的（本质上唯一的）提升 $\rho_{i,!}$ 所成的集合。特别地，$\mathcal{O}$ 上预余层 X 的 $\mathcal{O}^\flat$-Segal 条件被限制为有限积条件

$$\mathcal{X}(O) \simeq \prod_{i=1}^{|O|} \mathcal{X}(\rho_{i,!}O). \tag{6}$$

例 2.3.4。 选取对象 $\langle 1\rangle$ 的函子 $\ast \to \Gamma^{op}$ 在终端代数模式上定义了一种可丰富图式结构。

例 2.3.5。 存在一个函子 $\Delta^{op} \to \Gamma^{op}$，它将 $[n]$ 映射到 $\langle n\rangle$，并将 Δ^{op} 中对应于 Δ 中 $\phi : [n] \to [m]$ 的态射映射为 $|\phi| : \langle m\rangle \to \langle n\rangle$，其定义如下：

$$|\phi|(i) = \begin{cases} j & \text{if } \phi(j-1) < i \le \phi(j) \\ * & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

可以直接验证，这给 $\Delta^{op\flat}$赋予了可丰富图式的结构。

例 2.3.6。 函子 $\Omega^{op} \to \Gamma^{op} \backsimeq \mathrm{FinSet}_*$ 在 [CH20, Definition 4.1.16]中定义如下。将一个顶点集为 $V(T)$ 的树 T 映射为自由加基点集 $V(T)_+$。将 Ω^{op} 中的一个态射 $T' \leftarrow T$ 映射为基于点的态射 $V(T')_+ \to$

[2]，这些内容在研讨会报告中作了介绍，报告可见 https://www.msri.org/seminars/25057

$V(T)_+$ 它将一个顶点 $v \in V(T')$ 映射到 T 中唯一的顶点，该顶点的像树包含 v；如果不存在这样的顶点，则将其映射到基点。根据 [loc. cit., Lemma 4.1.18], ，该函子保持惰性-主动分解系统，因而定义了一个代数模式态射。直接检查可知，它是一个可丰富结构。

在命题 3.2.9 中，我们将从以下角度给出这种可丰富结构的另一种构造：Ω 它是通过加号构造得到的。

我们回顾 [Lur17] 中 Γ^{op} 半惰性箭头的定义。带基点有限集之间的映射 $f\colon (S, s_0) \to (T, t_0)$ 是**半惰性的**，如果对于任意 $t \in T \setminus \{t_0\}$， $f^{-1}(t)$ 中至多有一个元素。

定义 2.3.7。设 $(O\ |\cdot|)$ 是一个组合代数模式。O 中的态射 f 是**半惰性的**，如果 $|f|$ 是 Γ^{op} 中的半惰性箭头。

例2.3.8。在 $\Delta^{op,\natural}$ 中，半惰性态射是与 Δ 的胞腔态射相对应的那些态射；这些胞腔态射按照 [Hau17] 和 [Hau16], 中的定义，是满足对所有 $s \in S$， $f(\mathrm{succ}\ s) \leq \mathrm{succ}(f(s))$ 的全序集映射 $f\colon S \to S'$。

对于配备了 $(\Delta^{op,\natural})^n \xrightarrow{|-|} (\Gamma^{op,\natural})^n \xrightarrow{\wedge} \Gamma^{op,\natural}$ 的乘积模式 $(\Delta^{op,\natural})^\natural$，我们也得到 [Hau17], 中的胞腔态射，即所有分量在 Δ^{op} 中都是胞腔的那些映射。

注 2.3.9。 正如 [Hau17], 中所观察到的，O 中的一个态射 $f\colon O \to O'$ 是半惰性的，当且仅当对于任意初等对象 E 以及任意惰性态射 $k\colon O' \rightarrowtail E$，复合态射 $O \xrightarrow{k \circ f} E$ 是半惰性的。

例 2.3.10。 在 Γ^{op} 中，任意对象 $\langle n \rangle$ 都恰好有 n 个来自唯一初等对象 $\langle 1 \rangle$ 的活性态射，即对任意 $1 \leq i \leq n$，将 $1 \in \langle 1 \rangle$ 送到 $i \in \langle n \rangle$ 的函数 $\lambda_i\colon \langle 1 \rangle \rightsquigarrow \langle n \rangle$。它们都是半惰性的。同样，唯一的映射 $\langle 0 \rangle \to \langle n \rangle$ 也是半惰性的。

因此，在任意组合模式中，从初等对象出发的任意活性态射都是半惰性的。

定义 2.3.11 （重要模式）。 若组合代数模式 $(O\ |-|)$ 中的任意一个从 $\flat$-初等对象出发的活性态射都存在本质上唯一的惰性回缩，则称其为**重要的**。

可富化的重要模式与 [Ber22] 的超矩范畴密切相关（其 ∞-范畴论版本）。

例 2.3.12。 模式 $\Gamma^{op,\natural}$ 本身就是重要的：对于任意对象 $\langle n \rangle$，例 2.3.10 中的函数 $\lambda_i\colon \langle 1 \rangle \to \langle n \rangle$ 都有唯一的惰性回缩 ρ_i。事实上， λ_i 也是 ρ_i 的唯一活跃截面，因此存在一一对应：从 $\flat$-初等对象出发的惰性态射与从 $\flat$-初等对象出发的（自动为半惰性的）活性态射。

因此，对于任意重要可丰富图式 O 和任意对象 $O \in O$，从 $\flat$-初等对象到 O 的（半惰性）活态射可以识别为 $O^{el}_{O/} \simeq \Gamma^{op,\natural}_{|O|/}$ 的一个子集。

3 加号构造及其 Segal 对象

3.1 模式树范畴

以下构造是 [Bar18] 在算子范畴背景下提出的一种构造的变体，其灵感来自 [BD98]，的加号构造或“切片拟运算”；该构造也曾用于 [CHH18]，并由 [Ber22] 在超矩范畴的背景下加以研究——此外，[BM21]，也曾以另一种形式将其用于运算子范畴。

构造 3.1.1. 设$\mathcal{O}$是一个组合代数模式。考虑由 O 表示的函子的限制$\mathcal{Y}_{(\infty,1)\text{-}\mathbb{C}\mathrm{at}}(\mathcal{O}^{\underline{\mathrm{act}}})|_{\Delta}\colon [n]\mapsto O^{\mathrm{act}[n]}$到$\Delta\subset(\infty,1)$-Cat，并令 $\Delta^{\mathrm{pre}}\,\mathcal{O}\to\Delta$ 为其 Grothendieck 构造。注意，$\Delta^{\mathrm{pre}}\,\mathcal{O}$ 等价于 $\Delta_{/\mathcal{O}^{\mathrm{act}}}$——其中$\Delta$被视为 $(\infty,1)$-Cat 的子范畴——也等价于$\Delta_{/\mathcal{N}_\bullet\mathcal{O}^{\mathrm{act}}}$，其中$\mathcal{N}_\bullet\colon(\infty,1)\text{-Cat}\hookrightarrow\infty\text{-Grpd}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$是一个神经函子（例如，可将 $(\infty,1)$-范畴实现为完备 Segal ∞-群胚，或者实现为拟范畴，读者可自行选择）。因此，一个

Δ^{pre}**对象** $([n],O_\bullet)$由一对构成，其中$[n]\in\Delta$且$O_\bullet\colon[n]\to O^{\mathrm{act}}$是$O^{\mathrm{act}}$中的一个线性图表，即由 O 中的一列$O_0\rightsquigarrow O_1\rightsquigarrow\cdots\rightsquigarrow O_n$活跃态射组成，而一个

态射$([n],O_\bullet)\to([n'],O'_\bullet)$由一对$(\phi,f_\bullet)$构成，其中$\phi\colon[n]\to[n']$是$\Delta$中的一个映射，而$f_\bullet\colon O_\bullet\Rightarrow O'_{\phi(\bullet)}=O'_\bullet\circ\phi$是$O^{\mathrm{act}}$中$[n]$形图表的一个自然变换。

我们将$\Delta_{\mathcal{O}}$定义为$\Delta^{\mathrm{pre}}\,\mathcal{O}$的宽且局部全（即包含所有对象以及所选 1-态射之间的所有高阶态射）子-$(\infty,1)$-范畴，其中的态射$(\phi,f_\bullet)$满足

- $f_\bullet$逐分量地是半惰性的（除活性外），即对任意$i\in[n]$，每个$f_i\colon O_i\rightsquigarrow O'_{\phi(i)}$都是半惰性的，并且
- $f_\bullet$是一个笛卡尔（或等纤维）自然变换，也就是说，对于$[n]$中的任意态射$i<j$，自然性方块

$$\begin{array}{ccc} O_i & \overset{f_i}{\rightsquigarrow} & O'_{\phi(i)} \\ {\scriptstyle O_{i<j}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle O'_{\phi(i<j)}} \\ O_j & \underset{f_j}{\rightsquigarrow} & O'_{\phi(j)} \end{array} \tag{8}$$

在O^{act}中是笛卡尔的。

注 3.1.2。给定固定的 $\phi\colon[m]\to[n]$在 Δ以及 $([n],P_\bullet)$在$\Delta_{\mathcal{O}}$上方的 $[n]$，态射$(\phi,f_\bullet)\colon([m],O_\bullet)\to([n],P_\bullet)$在 $\Delta_{\mathcal{O}}$提升 ϕ若存在，则基本上由其在终对象 $f_m\colon O_m\to P_{\phi(m)}$处的底层态射 $m\in[m]$决定。事实上，对于每个 $i\in[m]$对象 O_i和态射 f_i，根据式 (8) 中的拉回条件，它们必须是沿着 O_m和 f_m的 $i\le m$基变换。

定义 3.1.3。 设 $\mathcal{O}$ 是一个组合代数模式。 $(\infty,1)$范畴 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 称为 $(\infty,1)$范畴，即 **$\mathcal{O}$-森林**。

由满足条件 $O_n \in$ 的 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 的全子-$(\infty,1)$-范畴 $\Delta^{(1)}{}_{\mathcal{O}}$，称为异生树状 O-森林的 $(\infty,1)$-范畴，或称为 **O-树**。

例 3.1.4。 对于终端代数模式 $*$， $*$-森林的 $(\infty,1)$-范畴和 $*$-树的 $(\infty,1)$-范畴都还原为单纯形范畴Δ。

例 3.1.5。 对于 $\Gamma^{\mathrm{op}\natural}$，我们得到一个带有层级结构的森林范畴，即 树的不交并；其异生树状子范畴在 [Ber22] 中被识别为 Ω 的一个全子范畴。事实上，回想一下， Γ^{op} 的活跃子范畴等价于有限集范畴，因此，对象 O_n 可视为该森林根的集合，而每个 O_i 都是第 $n-i$ 层叶的集合。 $(\Gamma^{\mathrm{op}})^{\mathrm{act}}$ 中的态射给出第 ℓ 层叶的划分，这些叶对应于它们所通向的节点（该节点由其在第 $\ell+1$层唯一的输出叶识别）。

例 3.1.6。 对于 $\Delta^{\mathrm{op}\natural}$，我们同样得到一个由带层级结构的平面树（或者更准确地说，由此类平面树构成的森林）组成的范畴。

3.2 加号构造上的模式结构

引理 3.2.1。 ∞-函子 $\mathscr{d}_{\mathcal{O}}\colon \Delta_{\mathcal{O}} \subset \Delta^{\mathrm{pre}}{}_{\mathcal{O}} \to \Delta$ 是一个笛卡尔纤维化。

证明。 我们首先注意到，正如 [CHH18] 中所述，由于等式 (8) 中的拉回条件，态射 $(\phi, f_\bullet)\colon ([m],O_\bullet) \to ([n],P_\bullet)$ 属于 $\Delta_{\mathcal{O}}$，当且仅当 $f_\bullet$ 是自然等价时，它是 $\mathrm{d}_{\mathcal{O}}$-笛卡尔的。事实上，称 $(\phi, f_\bullet)\colon ([m],O_\bullet) \to ([n],P_\bullet)$ 是 $\mathrm{d}_{\mathcal{O}}$-笛卡尔的，就是说

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\mathcal{O},/([m],O_\bullet)} & \xrightarrow{(\phi,f_\bullet)\circ -} & \Delta_{\mathcal{O},/([n],P_\bullet)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta_{/[m]} & \xrightarrow[\phi\circ -]{} & \Delta_{/[n]} \end{array} \tag{9}$$

是一个笛卡尔方块。

那么，令 $([k],L_\bullet)$ 为 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 中的任意对象，并取等式 (9) 在 $([k],L_\bullet)$ 处的纤维，将其分解如下：

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{\mathcal{O}}\big(([k],L_\bullet),([m],O_\bullet)\big) & \longrightarrow & \Delta_{\mathcal{O}}\big(([k],L_\bullet),([n],P_\bullet)\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta^{\mathrm{pre}}_{\mathcal{O}}\big(([k],L_\bullet),([m],O_\bullet)\big) & \longrightarrow & \Delta^{\mathrm{pre}}_{\mathcal{O}}\big(([k],L_\bullet),([n],P_\bullet)\big) \\ \downarrow & \lrcorner\ \text{iff } f_\bullet \text{ invertible} & \downarrow \\ \Delta([k],[m]) & \longrightarrow & \Delta([k],[n]). \end{array} \tag{10}$$

由于 $\Delta^{\mathrm{pre}}{}_{\mathcal{O}} \to \Delta$ 是通过 Grothendieck 构造构造出来的——并且也以此方式描述——因此，下方的方块是笛卡尔方块，当且仅当 $f_\bullet$ 可逆。接下来只需注意

态射在 $\Delta^{\mathrm{pre}}\wr\mathcal{O}$ 中属于 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 的条件，可通过与 $\Delta_{\mathcal{O}}$中的逐分量可逆态射作后复合来判定，这一点显然。

现在，这种刻画使确定笛卡尔提升变得容易。设 $\phi\colon[m]\to[n]$是 Δ中的一个态射，且 $([n],O_\bullet)$ 是 $[n]$ 在 $\Delta_{\mathcal{O}}$中的一个提升。我们将沿着 ϕ 对$([n],O_\bullet)$的笛卡尔提升定义为满足 $(\phi,\mathrm{id}_{O_\bullet\circ\phi})$的 $([m],O_{\phi(\bullet)})$。□

推论 3.2.2. 称 $(\phi,f_\bullet)$ 是 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 中的一个态射，若 ϕ 在 Δ 中是惰性的，则称其为惰性态射；若 ϕ 在 Δ 中是活性的且 $f_\bullet$ 是一个等价，则称其为活性态射。于是，$((\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{inrt}},(\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{act}})$ 在 $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}$上定义了一个分解系统。

证明。 根据 [Lur17，命题 2.1.2.5]，，由于 $\mathrm{d}_{\mathcal{O}}\colon\Delta_{\mathcal{O}}\subset\Delta^{\mathrm{pre}}\wr\mathcal{O}\to\Delta$ 是一个笛卡尔纤维化，其基底上的分解系统可以按要求提升。□

定义 3.2.3。 设 O 是一个组合代数模式。其**加号构造**$\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$是配备推论 3.2.2 中的惰性-活性分解的 $(\infty,1)$-范畴 $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}$，其初等对象为满足 $[n]\in\Delta^{\mathrm{op}\natural,\mathrm{el}}$ （即 要么是 $[0]$，要么是 $[1]$）且 $O_n\in O^{\flat,\mathrm{el}}$的那些 $([n],O_\bullet)$。

其**misodendric 加号构造** 是由 $\Delta^{(1)}\wr\mathrm{op}$ 上诱导的代数模式。

如果一个代数模式可以写成某个组合代数模式的加号构造，我们就称其为**良定向** 。

例 3.2.4. [CHH18] 的主要结果表明， $\Delta_{\Gamma^{\mathrm{op}\natural}}\mathrm{op}^\natural$ 与$\Omega^{\mathrm{op}\natural}$ 莫里田等价，即它们的 Segal ∞-群胚 $(\infty,1)$-范畴彼此等价。今后我们将把拟 operad 对象与 Segal $\Delta_{\Gamma^{\mathrm{op}\natural}}\mathrm{op}^\natural$-对象视为同一类对象。

推论 3.2.5. *Segal* $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象 $\mathcal{X}$ 的 *Segal* 条件可以明确写成以下一组条件：

层分解 对于任意 $([n],O_\bullet)$，典范箭头

$$\mathcal{X}\big([n],O_\bullet\big)\to\mathcal{X}\big([1],(O_0\rightsquigarrow O_1)\big)\underset{\mathcal{X}([0],(O_1))}{\times}\cdots\underset{\mathcal{X}([0],(O_{n-1}))}{\times}\mathcal{X}\big([1],(O_{n-1}\rightsquigarrow O_n)\big)\tag{11}$$

是一个等价。

根分解 对于任意形如 $([0],O_0)$ 的高度为0 的森林，典范映射

$$\mathcal{X}\big([0],(O_0)\big)\to\lim_{E\rightsquigarrow O_0}\mathcal{X}\big([0],(E)\big)\tag{12}$$

是一个等价（其中极限取自 $\mathcal{O}^{\mathrm{act}}_{\mathrm{el}/O}$）

灌木分解 对于任意 $\big([1],\ (O_0\rightsquigarrow O_1)\big)$，典范箭头

$$\mathcal{X}\big([1],(O_0\rightsquigarrow O_1)\big)\to\lim_{E\rightsquigarrow O_1}\mathcal{X}\big([1],(O_{0,E}\rightsquigarrow E)\big)\tag{13}$$

是一个等价，其中 $O_{0,\ E}$ 是纤维积 $O_0\times^{\mathrm{act}}_{O_1}E$——其中 $\times^{\mathrm{act}}$ 表示它是$\mathcal{O}^{\mathrm{act}}$中的纤维积。

证明。 唯一值得说明的部分是灌木分解。回忆一下，$\Delta_{\mathcal{O}}$ 中的惰性映射恰好是那些投影到 Δ 后为惰性的映射，因此 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 中的相关惰性态射是来自 $[1] \in \Delta$上初等对象的态射。若考虑这样一个态射，并将其表示为

$$\begin{array}{ccc} P & \rightsquigarrow & O_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \rightsquigarrow & O_1, \end{array} \tag{14}$$

等纤维条件意味着 P 是主动拉回 $O_0 \times^{\mathrm{act}}_{O_1} E$。 □

例 3.2.6。 当 $\mathcal{O}$ 是 $\Gamma^{\mathrm{op}\natural}$，或者更一般地说，是一个重要可丰富图式时，根分解和灌木分解中出现的极限会呈现出更简单的形式：根分解现在变成如下条件：

$$\mathscr{X}\big([0],(O_0)\big) \to \lim_{E \rightsquigarrow O_0} \mathscr{X}\big([0],(E_i^{O_0})\big) \tag{15}$$

是一个等价（其中 $E_i^O \rightsquigarrow O$ 是沿着例 2.3.12 的映射 λ_i 对 O 的唯一提升；如果该提升不存在，则置入一个平凡因子），而灌木分解是如下条件：

$$\mathscr{X}\big([1],(O_0 \rightsquigarrow O_1)\big) \to \prod_{i=1}^{|O_1|} \mathscr{X}\big([1],(O_{0,i} \rightsquigarrow E_i^{O_1})\big) \tag{16}$$

是一个等价，其中 $O_{0,\,i}$ 是纤维积 $O_0 \times^{\mathrm{act}}_{O_1} E_i^{O_1}$；由于 O 是重要且可丰富的， $E \rightsquigarrow O_1$ 必定是 $E_i^{O_1}$中的某个提升。

命题 3.2.7 ([CHH18，引理 2。11])。 森林和树具有相同的 *Segal* 对象：沿着包含函子 $\Delta^{(1)}{}_{\mathcal{O}} \hookrightarrow \Delta_{\mathcal{O}}$ 进行限制所得到的$(\infty,1)$-函子 $\mathcal{S}\mathfrak{eg}_{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}}(\infty\text{-}\mathfrak{Grpd}) \to \mathcal{S}\mathfrak{eg}_{\Delta^{(1)}{}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}}(\infty\text{-}\mathfrak{Grpd})$ 是一个 $(\infty,1)$-范畴之间的等价。

证明。 设 $([n],O_\bullet)$ 为一片 O-森林，并记 $|O_n|$ 分解为其各个纤维。于是我们将任意森林写为树的并，并使用推论 3.2.5 的森林分解条件。

□

构造 3.2.8。 我们将 O-森林 $F \in \Delta_{\mathcal{O}}$ 的一个**花冠**定义为惰性态射 $F \to E$ 的一个等价类，其中 E 是位于 $[1] \in \Delta$ 之上的初等对象。

现在，我们可以如 [CH20，定义 2.2.10]中那样，通过计数 O-森林中的花冠数目来定义一个函子 $|-|^{\mathrm{op}} \colon \Delta_{\mathcal{O}} \to \Gamma$。

命题 3.2.9。 函子 $|-|\colon \Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}} \to \Gamma_{\mathrm{op}}$ 在$\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$上给出一个可丰富图式的结构。

证明。 通过直接验证；这本质上由花冠的定义得出。 □

命题 3.2.10 ([Bar18, Theorem 10.16])**.** $(\infty,1)$-范畴中， $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\flat}$-*Segal* 对象与弱 *Segal* $\mathcal{O}$-纤维化之间存在等价。

证明（构造概要）。该证明是对 [HM22, The- orem 3.1.1]，中证明的直接推广；其技术细节相当复杂，因此这里不再重述。不过，由于后文会用到，我们回顾一下这个伴随的构造。

我们首先说明，就我们的目的而言，最重要的部分是什么：如何从 Segal 对象得到弱纤维化。

我们从构造一个 ∞-函子 $\omega^*\colon \infty\text{-}\mathfrak{Grpd}^{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}} \to \infty\text{-}\mathfrak{Grpd}^{\Delta_{/\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}}$开始。回顾一下，$\Delta_{\mathcal{O}}$ 上的预层也可以等价地看作满足可表性条件（即保余极限）的 ∞-$\mathfrak{Grpd}^{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}}$ 上的预层。现在，我们将通过复合定义一个 ∞-函子$\omega\colon \Delta_{/\mathcal{O}} \to \infty\text{-}\mathfrak{Grpd}^{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}}$：$i^* \circ y^{\Delta_{/\mathcal{O}}}$，其中 i^* 是沿着典范函子 i 的预层限制（或逆像）∞-函子 $\mathrm{i}\colon \Delta_{\mathcal{O}} \hookrightarrow \Delta_{/\mathcal{O}^{\mathrm{act}}} \xrightarrow{(\mathcal{O} \xrightarrow{\mathrm{act}} -)_!} \Delta_{/\mathcal{O}}$。

由此得到一个逆像 ∞-函子 $\omega^*\colon \infty\text{-}\mathbf{Grpd}^{\infty\text{-}\mathfrak{Grpd}^{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}}{}_{\mathrm{op}}} \to \infty\text{-}\mathbf{Grpd}^{\Delta_{/\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}}$，并可将其限制到由那些可表且满足 Segal 条件的预层组成的（满）子-$(\infty,1)$-范畴。最后还需回顾（参见 [Lur09, 推论 5.1.6.12]），$\infty\text{-}\mathbf{Grpd}^{\Delta_{/\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}} \simeq \infty\text{-}\mathbf{Grpd}^{\Delta^{\mathrm{op}}_{/\mathcal{N}_\bullet\mathcal{O}}}$，因此最终得到

$$\omega^*\colon \mathfrak{Seg}_{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}}(\infty\text{-}\mathfrak{Grpd}) \to \infty\text{-}\mathfrak{Grpd}^{\Delta^{\mathrm{op}}_{/\mathcal{N}_\bullet\mathcal{O}}}. \tag{17}$$

在 $\mathrm{O} = \Gamma^{\mathrm{op}\natural}$ 的情形下，我们的函子 ω corresponds to the one described in [HHM16, §5.1]。根据 [HM22, §3.3],，此函子确实首先落在子范畴 $\mathrm{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}\natural}}(\infty\text{-}\mathbf{Grpd})_{/\mathcal{N}_\bullet\mathcal{O}}$ 中，我们将其解释为 $(\infty,1)$-$\mathbf{Cat}_{/\mathcal{O}}$，实际上还落在其更小的子范畴中，该子范畴由那些指向 O 的 ∞- 函子组成，且这些函子是弱 Segal 纤维化。

反过来，我们考虑 $\varpi\colon \Delta_{\mathcal{O}} \xrightarrow{y} \infty\text{-}\mathbf{Grpd}^{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{WkSegFib}_{/\mathcal{O}}$ 以及它所余表示的“共轭”预函子：那么 $(\omega^*)^{-1}$ 就是将 $(\mathrm{E} \to \mathrm{O})$ 映射到预层 $\mathbf{WkSegFib}_{/\mathcal{O}}(\varpi(-), \mathrm{E})\colon \Delta_{\mathcal{O}} \to \infty\text{-}\mathbf{Grpd}$ 的 ∞-函子。 □

注意——同样在 $\mathrm{O} = \Gamma^{\mathrm{op}\natural}$ 的情形下，另一种证明见于 [HK21, 推论 4.2.8]，该证明使用幺半包络∞-函子。然而，这个证明关键性地依赖于 $\mathbf{Env}(\mathbb{1})$ 的 Grothendieck 构造的显式描述，并将其视为 Segal O-∞- 范畴；而我们一般并没有这种描述。

4 幺半包络与 Grothendieck 上伪纤维化

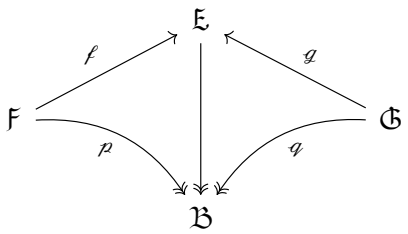
4.1 幺半包络函子的构造

如引言中所述，我们希望将计算幺半群包络的常用公式，诠释为沿某个适当融入划分的函子的纤维化余松弛扩张。为了定义所需的纤维化扩张，我们需要简要讨论 [RV22], 引入的形式 ∞-范畴论的一般情形，也就是在 ∞-宇宙的框架下对 ∞-范畴的 $(\infty,2)$-范畴进行建模。回想一下，根据 [RV22，命题 9.1.8、定理 9.3.3]，沿 ∞-函子的（逐点）oplax 扩张可以表示为以该函子的共轭为权的余极限：

我们将以类似方式定义纤维逐点扩张，用相对版本替换该共轭。

不想接触太多抽象概念的读者，可以将公式 (23) 作为定义，并相信它具有函子性。

构造 4.1.1（相对逗号 ∞-范畴）。 在一个 ∞-宇宙 K 中，考虑切片 ∞-宇宙 $\mathrm{K}_{/\mathfrak{B}}$ 中的一个余对应：



(18)

我们用 $\mathrm{f} \downarrow_{/\mathfrak{B}} \mathrm{g}$ 表示 $\mathrm{K}_{/\mathfrak{B}}$ 中的逗号对象，并称其为位于 B 上的**相对逗号 ∞-范畴**。

注 4.1.2。 根据 [RV22，命题 1.2.22 的 (iv)–(vi)]，，相对逗号 ∞-范畴可以构造为

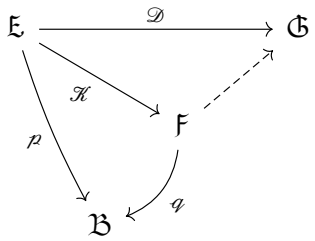
$$f \downarrow_{/\mathfrak{B}} g \simeq (\mathfrak{F} \times_{\mathfrak{B}} \mathfrak{G}) \underset{(\mathfrak{E}\times_{\mathfrak{B}}\mathfrak{E})}{\times} (\mathfrak{B} \times_{\mathfrak{B}^2} \mathfrak{E}^2) \tag{19}$$

（其中映射 $\mathrm{B} \to \mathrm{B}^2$ 是对角线）。也就是说，非正式地讲，$\mathrm{f} \downarrow_{/\mathfrak{B}} \mathrm{g}$ 的一个对象由一个三元组 $(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \alpha)$ 构成，其中 F 和 G 分别是 F 和 G 中的对象，而 $\alpha\colon \mathrm{f}(\mathrm{F}) \to \mathrm{g}(\mathrm{G})$ 是 E 中的一个态射，且所有数据都位于 B 的同一个对象之上（即 存在一个对象 $\mathrm{B} \in \mathrm{B}$，以及同构 $\mathrm{p}\mathrm{F} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{B}$、$\mathrm{q}\mathrm{G} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{B}$ 和 $\alpha \xrightarrow{\simeq} \mathrm{id}_{\mathrm{B}}$）。

引理 4.1.3. 典范投影 $f \downarrow_{/\mathfrak{B}} g \to \mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ 是$\mathfrak{K}$中的离散双侧纤维化。

证明。 如 [RV22，命题 7.4.6] 所述。 □

定义 4.1.4（纤维式（余）松扩张）。设 $\mathrm{E} \xrightarrow{p} \mathrm{B}$ 和 $\mathrm{F} \xrightarrow{q} \mathrm{B}$ 是定义在基底 B 上的两个 ∞-范畴，且 $\mathrm{K}\colon \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ 是定义在 B 上的一个 ∞-函子。设 $\mathrm{D}\colon \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ 是一个 $(\infty, 1)$-函子，从而我们有如下实线图表



(20)

D 沿 K（相对于 B）的一个**纤维化松弛扩张**是一个极限

$$\mathrm{Lex}_{\mathscr{K}/\mathfrak{B}}\mathscr{D} \coloneqq \left\{\mathscr{K}_{*}^{/\mathfrak{B}}, \mathscr{D}\right\} : \mathsf{F} \to \mathfrak{G} \tag{21}$$

由与相对逗号范畴$\mathrm{id}_{\mathsf{F}} \downarrow_{/\mathfrak{B}} \mathsf{K}$相关联的 ∞-预函子$\mathsf{K}_{*}^{/\mathfrak{B}} \colon \mathsf{E} \nrightarrow \mathsf{F}$加权的D。

D 沿 K（相对于 B）的**纤维化余松弛扩张**是一个余极限

$$\mathrm{Opex}_{\mathscr{K}/\mathfrak{B}}\mathscr{D} \coloneqq \mathscr{K}^{*}_{/\mathfrak{B}} \star \mathscr{D} \colon \mathsf{F} \to \mathfrak{G} \tag{22}$$

由与相对逗号范畴 $\mathsf{K} \downarrow_{/\mathfrak{B}} \mathrm{id}_{\mathsf{F}}$对应的 ∞-预函子$\mathsf{K}^{*}_{/\mathfrak{B}} \colon \mathsf{F} \nrightarrow \mathsf{E}$加权的D。

注4.1.5。我们有显式公式，这些公式由 [RV22, 引理 9.5.5], 推导而来，用于计算纤维化扩张：D 沿 K 的纤维化余松弛扩张在F处的取值为

$$\mathrm{Opex}_{\mathscr{K}/\mathfrak{B}}\mathscr{D}(\mathsf{F}) = \operatorname*{colim}_{\substack{\mathscr{K}(\mathsf{E})\to\mathsf{F} \\ \mathsf{E}\in\mathfrak{E}_{q(\mathsf{F})}}} \mathscr{D}(\mathsf{E}), \tag{23}$$

D 沿 K 的纤维化松弛扩张在 F处的取值为

$$\mathrm{Lex}_{\mathscr{K}/\mathfrak{B}}\mathscr{D}(\mathsf{F}) = \lim_{\substack{\mathsf{F}\to\mathscr{K}(\mathsf{E}) \\ \mathsf{E}\in\mathfrak{E}_{q(\mathsf{F})}}} \mathscr{D}(\mathsf{E}). \tag{24}$$

定义 4.1.6 (包络**)**。设 $\mathscr{X} \colon \Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}} \to \infty\text{-}\mathfrak{Grpd}$ 是 $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}$上的一个预余层。它的**包络**是预余层

$$\mathscr{E}nv(\mathscr{X}) = i^{*}\,\mathrm{Opex}_{i/\Delta^{\mathrm{op}}}\mathscr{X} \tag{25}$$

其中，i^{*}表示沿 $\mathsf{i} \colon \Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow (\Delta^{\mathrm{pre}}{}_{\mathcal{O}})^{\mathrm{op}}$ 进行（纤维逐点）限制的 $(\infty,1)$-函子，它是纤维化余松弛扩张的右伴随。

注 4.1.7。 由纤维化扩张的公式（式 (23)）可知，$\mathsf{X} \in \mathsf{Seg}_{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}}(\mathsf{C})$ 的包络在长度为 $[\mathrm{n}]$ 的 O- 树 $\mathsf{T}_{\bullet}$ 处取值，可由下式计算：

$$\mathscr{E}nv(\mathscr{X})(\mathsf{T}_{\bullet}) = \operatorname*{colim}_{\substack{\mathsf{B}_{\bullet}\rightsquigarrow\mathsf{T}_{\bullet} \\ \in((\Delta^{\mathrm{pre}}_{\mathcal{O}})_{[\mathrm{n}]})_{/\mathsf{T}_{\bullet}}}} \lim_{\mathsf{E}\rightsquigarrow\mathsf{B}_{\mathrm{n}}} \mathscr{X}(\mathsf{B}_{\bullet,\mathsf{E}}) \tag{26}$$

其中，$(\mathsf{B}_{\bullet,\mathsf{E}})_{\mathsf{E}\rightsquigarrow\mathsf{B}_{\mathrm{n}}}$ 表示纤维中的森林分解（如式 (13)），而我们将余极限的指标态射记为，以强调我们将它们视为 O 的 n 个活箭头族。

注 4.1.8。 在 $\mathsf{O} = \Gamma^{\mathrm{op}\flat}$ 的情形下，我们可以通过以下方式理解包络。回想一下，Γ^{op} 中的活态射可以看作是由其目标索引的源对象划分（可能包含空部分）。然后，余极限会创建多个 $\mathsf{X}(\star_{\mathrm{n}})$ 的副本，每个副本都配有一个新的划分，用以指定如何分配其输入。

为了以直观的方式处理包络，引入以下术语会很方便。

定义 4.1.9（O-分划）。设 O 是一个代数模式，且 O 和 P 是 O 中的对象。O 被 P 的 O-分划，或在没有歧义时简称 P-**分划** O，是一个活性态射 $O \rightsquigarrow P$。

例 4.1.10。若 $\mathbb{1}$ 表示终端 $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-Segal ∞-群胚，则其包络 $\mathrm{Env}(\mathbb{1})$ 在任意长度为 n 的森林 $T_\bullet$ 上的取值，是 $(\Delta^{\mathrm{pre}}{}_{\mathcal{O}})_{[n]/T_\bullet}$ 的群胚化局部化。

证明。根据定义，$\mathrm{Env}(\mathbb{1})(T_\bullet)$ 由余极限给出

$$\mathscr{E}nv(\mathbb{1})(T_\bullet) = \operatorname*{colim}_{B_\bullet \rightsquigarrow T_\bullet} \mathbb{1} \tag{27}$$

（其中最后一个 1 是终端 ∞-群胚）。

现在 $\mathrm{Env}(\mathbb{1})(T_\bullet)$ 是一个 ∞-群胚，因此等价于其局部化；此外，局部化函子 $L : (\infty,1)\text{-Cat} \to \infty\text{-Grpd}$ 是包含函子 $I\colon \infty\text{-Grpd} \hookrightarrow (\infty,1)\text{-Cat}$ 的左伴随，故保余极限，因此我们可以先在 $(\infty,1)$-Cat 中计算右侧的余极限，再进行局部化。

作为一个常值图表的 $(\infty,1)$-范畴的余极限，$(\infty,1)$-Cat 中的余极限等价于以指标 $(\infty,1)$-范畴 $(\Delta^{\mathrm{pre}}{}_{\mathcal{O}})_{[n]/T_\bullet}$ 张量常值 1。

由伴随 $L \dashv I$ 和张量-余张量伴随可知，对于任意$(\infty,1)$-范畴 C 以及任意 ∞-群胚 G 和 H，

$$\infty\text{-}\mathfrak{Grpd}\big((\mathscr{L}\mathcal{C})\otimes\mathfrak{G},\mathfrak{H}\big) \simeq \infty\text{-}\mathfrak{Grpd}\big(\mathscr{L}\mathcal{C},\mathfrak{H}^{\mathfrak{G}}\big) \simeq (\infty,1)\text{-}\mathfrak{Cat}\big(\mathcal{C},\mathscr{I}(\mathfrak{H}^{\mathfrak{G}})\big). \tag{28}$$

由于 ∞-群胚之间的函子 $(\infty,1)$-范畴自动是 ∞-群胚，因此 $I(H^{\mathfrak{G}})$ 也是 $(\infty,1)$-范畴的余张量 $(IH)^{\mathscr{I}\mathfrak{G}}$，于是

$$\begin{aligned}(\infty,1)\text{-}\mathfrak{Cat}\big(\mathcal{C},\mathscr{I}(\mathfrak{H}^{\mathfrak{G}})\big) &\simeq (\infty,1)\text{-}\mathfrak{Cat}\big(\mathcal{C},(\mathscr{I}\mathfrak{H})^{\mathscr{I}\mathfrak{G}}\big) \simeq (\infty,1)\text{-}\mathfrak{Cat}\big(\mathcal{C}\otimes\mathscr{I}\mathfrak{G},\mathscr{I}\mathfrak{H}\big)\\ &\simeq \infty\text{-}\mathfrak{Grpd}\big(\mathscr{L}(\mathcal{C}\otimes\mathscr{I}\mathfrak{G}),\mathfrak{H}\big),\end{aligned} \tag{29}$$

这表明 $L(C \otimes IG) \simeq (LC)\otimes G$。

因此，在我们的情形中，我们得到——现在用 $C[^{-1}] = LC$ 表示一个 $(\infty,1)$-范畴 C 的整体局部化—— ∞-群胚的张量 $(\Delta^{\mathrm{pre}}{}_{\mathcal{O}})_{[n]/T_\bullet}{}^{[-1]} \otimes \mathbb{1}$，它就是$(\Delta^{\mathrm{pre}}{}_{\mathcal{O}})_{[n]/T_\bullet}{}^{[-1]}$。 □

定义 4.1.11（可线性化模式）。范畴论 C 中对象的集合 $\{C_i\}_{i\in I}$ 是 **拟多终端**的，当且仅当投影 $C_{/\{C_i\}_i} \to C$ 是一个等价。

组合代数模式 $O \xrightarrow{|-|} \Gamma^{\mathrm{op}\natural}$ 是可线性化的，当且仅当 $\flat$- 初等对象的集合在 O^{act} 中是拟多终端的。

我们注意到，显然，如果一个集合 $\{C_i\}_{i\in I}$ 是多终端的，那么它特别是拟多终端的，但这并非唯一情况：如果 $\{C_i\}_i$ 中对象之间的唯一态射都是同构，也可能出现这种情况。

记号 4.1.12。 当$\mathcal{O}$ 可线性化时，我们可以对 $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$ 的初等对象作出简单分类。回想一下，它们定义为长度为 $[0]$ 且 $[1]$ 的树（即 终值在 $\mathcal{O}^\flat$ 中为初等对象的森林）。

若 $E_\bullet$ 的长度为 $[0]$，，则它由 $O^\flat$ 的一个初等对象给出，因此我们将这些对象记为 η_E，其中 $E \in O^{\flat,\,\mathrm{el}}$，并称它们为**边**。

若 $E_\bullet$ 的长度为 $[1]$，，则它必须由 O^{act} 中如下形式的一个图表给出： $O \rightsquigarrow E$，其中 $E \in O^{\flat,\,\mathrm{el}}$。可线性化条件确保，对于任意给定的 O，本质上只有一个这样的态射，因此我们将相应的对象记为 $\star_O$，并称这类初等对象为**花冠** （因为它们正是构造 3.2.8 中所考虑的初等对象）。

命题 4.1.13。 对于任意组合模式 $\mathcal{O}$，*misodendric* 加号构造 $\Delta^{(1)}{}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$ 是可线性化的。

证明。 设 $([n], O_\bullet)$ 是 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 的一个对象。根据 misodendric 对象的条件， O_n 必须属于 $O^{\flat,\,\mathrm{el}}$。回想注 3.1.2，指向 $([n], O_\bullet)$ 的态射由以下数据确定：一个在 Δ 中指向 $[n]$ 的态射，以及一个指向 O_n 的（半惰性且活性的）态射。

现在， $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}^\flat}$ 的初等对象具有形式 $([1], (E_0 \rightsquigarrow E_1))$，其中 $E_1 \in O^{\flat,\,\mathrm{el}}$。只有一个活态射 $[1] \rightsquigarrow [n]$，由 $(0 < 1) \mapsto (0 < n)$ 指定。最后， $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}^\flat}$ 中的活态射必须使其到 O_n 的态射为同构，因此 E_1也必然是 O_n （而 E_0 此前已被证明等价于 O_0）。 □

特别地，当 O 可线性化时，在初等对象上计算例 4.1.10，我们得到：

- $\coprod_{E \in \mathcal{O}^{\flat,\,\mathrm{el}}} \mathrm{Env}(\mathbb{1})(\eta_E)$ 是 Oact 的局部化；
- 对于任意花冠 $C_O = \big([1],\ (O \rightsquigarrow E_O)\big)$ （其中 E_O 是唯一一个接收来自 O的活态射的初等对象），$\mathrm{Env}(\mathbb{1})(C_O)$ 的一个对象由 O 的一个活态射$P_0 \rightsquigarrow P_1$ ——一个 P_1-划分 P_0 ——以及一个 O-划分 $P_0 \rightsquigarrow O$ 组成（因此， E_{P_1} 也必然与 E_O相容等价）。

4.2 余纤维化与可表示幺半性

命题 4.2.1. 对于任意 *Segal* $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象 $\mathcal{X}$，其包络$\mathcal{E}nv(\mathcal{X})$ 是一个 *Segal* $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象。

证明。 设 $T_\bullet$ 是 $\Delta_{\mathcal{O}}$ 中长度为 $[n]$的一个对象。Segal 条件要求比较

$$\mathcal{E}nv(\mathcal{X})(T_\bullet) = \operatorname*{colim}_{B_\bullet \to T_\bullet} \mathcal{X}(B_n) = \operatorname*{colim}_{B_\bullet \to T_\bullet} \lim_{B_\bullet \to E} \mathcal{X}(E_\bullet) \tag{30}$$

and

$$\lim_{T_\bullet \to E_\bullet} \mathcal{E}nv(\mathcal{X})(E_\bullet) = \lim_{T_\bullet \to E_\bullet} \operatorname*{colim}_{B_{0,1} \to E_\bullet} \mathcal{X}(B_{0,1}). \tag{31}$$

它们的相等性正是 [CH21，定义 7.12], 中明确表述的极限对余极限的分配律条件；并利用 [CH21，推论 7.17] ，其表明 ∞-Grpd

是可容许的（或者甚至任何 $(\infty,1)$-拓扑斯，只要从 O 的给定对象到某个初等对象的活映射的 ∞-范畴是有限的）。

或者，我们可以使用推论 3.2.5 中给出的 Segal 条件的显式形式，并直接验证。 □

现在，为了讨论包络的余笛卡尔性质，我们需要将情形限定为$\mathcal{O}$ 可线性化的情形。事实上，按照 [Her04，定理 2。4]，我们将用其包络底层的$\mathfrak{p}$-对象的余笛卡尔纤维化来刻画 Segal $\mathfrak{p}$ $= \Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$ -对象（其中$\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_0/}$是良定向代数模式）的余笛卡尔纤维化。这需要我们已经充分理解$\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_0/}$-对象的余笛卡尔纤维化，而只有当$\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}_0/}$ 是$\Delta^{\mathrm{op}\natural}$时才是如此，尤其是在$\mathfrak{p}$ $= \Omega^{\mathrm{op}\natural}$（且$\mathfrak{p}_0 = \{\eta\}$）时。 ||

注4.2.2。在组合模式 O 中，$\flat$-初等对象位于 $\langle 1\rangle \in \Gamma^{\mathrm{op}}$ 上。到 $\langle 1\rangle$ 的活态射和半惰性态射，其源只能是 $\langle 1\rangle$ 或 $\langle 0\rangle$。因此，若 O 可线性化，则对任意对象 O，到一个初等对象的唯一活态射只有在 $|O|$ 是 $\langle 1\rangle$ 或 $\langle 0\rangle$ 时才会是半惰性的；此时它之所以是半惰性的，是因为不存在非半惰性态射 $\langle 0\rangle \to \langle 1\rangle$ 或 $\langle 1\rangle \to \langle 1\rangle$。

引理 4.2.3. 设 $\mathcal{O}$ 是可线性化的，且$\mathcal{O}^{\langle 1\rangle}$ 是一个 ∞-群胚。切片 $(\Delta_{\mathcal{O}})_{/\eta}$ 等价于 $\Delta \times \mathcal{O}^{\langle 1\rangle}$，而后者又等价于 $\mathrm{colim}_{\mathcal{O}_{\langle 1\rangle}} \Delta$。

证明。 考虑一个态射 $T \to \eta$，它来自某棵树 $T = ([n], O_\bullet)$，由一个映射$\phi\colon [n] \to [0]$和一个变换 $O_\bullet \to \phi^* E$ 组成，其中 E 是一个初等对象，定义了边 $\eta_E = ([0], (E))$。现在，$\phi^* E$ 是一个常值图表，因此变换的等纤维条件意味着 $O_\bullet$的所有分量都必须等于 O_n。根据前面的注，O_n 只有在位于 $\langle 1\rangle$ 之上时，才存在到某个 E 的半惰性活态射（根据可线性化条件，该态射唯一存在）。 □

根据 [Bar22，命题 2.37]，，模式的余切片上存在一个典范的模式结构。范畴的等价构成了代数模式之一的基础。

注 4.2.4。 由于 hom ∞-函子保持极限，因此 $\mathrm{Seg}_{\mathrm{colim}_{\mathcal{O}_{\langle 1\rangle}} \Delta^{\mathrm{op}\natural}}(C) \simeq \lim^{\mathcal{O}^{\langle 1\rangle}} \mathrm{Seg}_{\Delta^{\mathrm{op}\natural}}(C)$。换言之，Segal $(\Delta_{\mathcal{O}})^{\mathrm{op}}_{\eta/}$ -对象可以看作由 ∞-群胚 $O^{\langle 1\rangle}$ 索引的一族范畴对象，我们将其简称为 $O^{\langle 1\rangle}$**-范畴**。

定义 4.2.5 （底层 $O^{\langle 1\rangle}$-范畴）。 设 O 可线性化，且 $O^{\langle 1\rangle}$ 是一个∞-群胚，并记 $p : (\Delta_{\mathcal{O}})^{\mathrm{op}}_{\eta/} \to \Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}$。Segal $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象 X 的**底层** $O^{\langle 1\rangle}$**-范畴**，或简称底层范畴对象，是沿 p 的限制。

若 F 是 Segal $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象的名称，我们通常将其底层范畴对象记作 F。

注 4.2.6。 函子 p 显然具有惰性态射的唯一提升，并且是可延拓的，因此根据 [CH21，命题 7.13] 限制 ∞-函子 p^* 有一个左伴随（由 oplax 延拓给出），该左伴随是完全忠实的，其本质像是那些在任意非线性树上取值为空的预层。

定义 4.2.7（余笛卡尔纤维化）。 态射 $\mathscr{X} \to \mathscr{B}$ 的 Segal $\Delta_{\Gamma^{op}\flat}op^\sharp$-$\infty$-群胚称为**Segal 对象的余笛卡尔纤维化**，如果 Env(X) $\to$ Env(B) 是一个（$(\infty,1)$-范畴中的）余笛卡尔纤维化，其中 Env(X) 表示 Env(X)的底层 $(\infty,1)$-范畴。

如果唯一的态射 X $\to \mathbb{1}$ 是 Segal 对象的余笛卡尔纤维化，那么 Segal 对象 X 就是**可表幺半** 的。

命题 4.2.8. 对于任意 *Segal* 对象$\mathscr{X}$，$\mathscr{E}nv(\mathscr{X})$ 是可表幺半的。

证明. 由于可以逐分量检验余笛卡尔纤维化族，我们不妨假设 O$^{\langle 1\rangle}$ 仅由一个 $\flat$-初等对象组成。

设 $\phi\colon O \rightsquigarrow O'$ 是 Env($\mathbb{1}$)中的一个态射，将其视为由 O' 对 O 的一个 O-分拆；再设 $C \in \mathrm{Env}(\mathrm{Env}(X))$ 位于 O之上。在如下识别下

$$\begin{aligned}\mathscr{E}nv\big(\mathscr{E}nv(\mathscr{X})\big)(\eta) &\simeq \operatorname*{colim}_{P\in\mathcal{O}^{act}} \mathscr{E}nv(X)([0],P)\\ &\simeq \operatorname*{colim}_{P\in\mathcal{O}^{act}} \operatorname*{colim}_{Q\rightsquigarrow P} \lim_{E\rightsquigarrow Q} \mathscr{X}(\eta),\end{aligned} \tag{32}$$

其中，“位于 O之上”这一条件表示第一个余极限中的指标 P 固定为 O，于是通过将第二个余极限中的映射 $Q \rightsquigarrow O$ 与 $O \rightsquigarrow O'$复合，可得到位于 O' 之上的 $\phi_! C$。

为清楚起见，我们在重要的可丰富情形下将其写出，此时它简化为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}nv\big(\mathscr{E}nv(\mathscr{X})\big)(\eta) &\simeq \operatorname*{colim}_{P\in\mathcal{O}^{act}} \prod_{i=1}^{|P|} \mathscr{E}nv(X)(\eta)\\ &\simeq \operatorname*{colim}_{P\in\mathcal{O}^{act}} \prod_{i=1}^{|P|} \operatorname*{colim}_{Q_i\in\mathcal{O}^{act}} \prod_{j=1}^{|Q_i|} \mathscr{X}(\eta),\end{aligned} \tag{33}$$

因此我们将 C 写作

$$(C_{1,1}\cdots C_{1,|Q_1|})\cdots(C_{|O|,1}\cdots C_{|O|,|Q_{|O_0|}|}) \tag{34}$$

对于某个 $(Q_i)_{i=1}^{|O|}$的选取。

我们设

$$\phi_! C = (C_{1,1}\cdots C_{n_1,i_{n_1}})\cdots(C_{n_{m-1}+1,1}\cdots C_{n_m,i_{n_m}}) \tag{35}$$

$\langle m\rangle = |O'|$之上的对象，其中 $(n_1,\dots,n_m)$ 是由 $|O \rightsquigarrow O'|$给出的 m 中 n 的划分。

Env(Env(X)) 中的一个态射 $C \to \phi_! C$ 由 Env(X) 中的一个态射 $C_{1,1}\cdots C_{n_m,i_{n_m}} \to C_{1,1}\cdots C_{n_m,i_{n_m}}$ 以及将 $\sum_{k=1}^{m} i_{n_k}$ 划分为 n 个部分的一个划分给出。我们将 ϕ 的提升 $C \to \phi_! C$ 定义为由 $C_{1,1}\cdots C_{n_m,i_{n_m}}$ 的恒等箭头以及等式 (34) 中给出的划分组成。这个提升是余笛卡尔的。

□

因此，构造 X $\mapsto$Env(X) 定义了一个 $(\infty,1)$-函子 Env :Seg$_{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{op\sharp}}(\infty$-Grpd) $\to$O$^{\langle 1\rangle}$-Mon$(\infty,1)$-Cat。

注 4.2.9（幺半 ∞-范畴上的幺半结构）。 利用命题 4.2.8 的证明思路，我们可以在一个可表示幺半 ∞-幺半群 X 的颜色上构造一个乘积。首先注意到（不论是否具有幺半性），$\mathrm{Env}(X)$ 中处于单位映射 $X \to \mathrm{Env}(X)$ 像内的颜色，恰好是那些在态射 $\mathrm{Env}(X) \to \mathrm{Env}(\mathbb{1})$ 下的像为 1 的颜色。

考虑 X 的一个 n 元颜色组，即 n 态射 $C_1, \cdots, C_n : y\eta \to X$。它们定义了一个态射 $(C_1, \cdots, C_n) : y\eta \to \mathrm{Env}(X)$，其像位于 $\mathrm{Env}(\mathbb{1})$ 中的颜色 n 之上。现在，由于 X 是可表幺半的，$\mathrm{Env}(\mathbb{1})$ 中的态射 $n \to 1$ 有一个从 $(C_1, \cdots, C_n)$ 出发的余笛卡尔提升，其目标因而是 X 的一个颜色 $C_1 \otimes \cdots \otimes C_n$。显然，同样的构造也可用于得到态射的乘积，并具有适当的函子性。

定理 4.2.10. $(\infty,1)$-函子 $\mathscr{E}nv$ 是包含函子 $\mathfrak{Mon}(\infty,1)\text{-}\mathfrak{Cat} \hookrightarrow \infty\text{-}\mathfrak{Oprd}$ 的左伴随。

证明。 由包络的构造可知，对于任意 ∞-幺半群 X，都有一个单位态射 $\eta_{\mathscr{X}} : X \to \mathrm{Env}(X)$。我们需要为任意可表幺半的 ∞-幺半群 V 构造一个余单位 $\varepsilon_{\mathscr{V}} : \mathrm{Env}(V) \to V$，它是幺半范畴 ∞ 的一个态射。

这个态射由注记 4.2.9 的构造给出：由于 V 是可表幺半的，它具有幺半乘积，而其包络则恰好对应于在积上再添加一层括号化。

我们将逐分量构造 $\varepsilon_{\mathscr{V}}$，作为 ∞函子 $\Delta_{\Gamma^{\mathrm{op}\flat}\mathrm{op}} \to \infty\text{-}\mathrm{Grpd}$ 的自然变换。设 $T_\bullet$ 是一棵树。根据公式 (26)，给出一个映射 $\mathrm{Env}(V)(T_\bullet) \to V(T_\bullet)$，等价于对每个态射 $B_\bullet \rightsquigarrow T_\bullet$，给出一个映射 $X(B_\bullet) \to X(T_\bullet)$。但请回想，$B_\bullet \rightsquigarrow T_\bullet$ 可以解释为 $B_\bullet$的一个 $T_\bullet$-划分。沿用前面的注记，我们可以利用乘积，根据该划分重新整理括号化层次，从而得到所需的态射。

最后，直接验证可得 ε 和 η 满足三角恒等式，因此它们确实构成一个伴随。

□

5 笛卡尔幺半结构及其在 Grothendieck 构造中的应用

5.1 笛卡尔幺半结构

定义与一个具有有限余积的 $(\infty,1)$-范畴相关联的幺半 $(\infty,1)$-范畴并不难：根据 [Lur17，命题 2.4.3，9]，实现这一构造的 ∞-函子是将 $(\infty,1)$-幺半群的底层范畴取出的函子的右伴随。然而，对于笛卡尔幺半 ∞-范畴来说，事情就没那么简单了。

我们在此沿用 [BGS20] 和 [DK19] 各自独立采用的思路来定义笛卡尔幺半 ∞-范畴：不将它们定义为 ∞-幺半群，而定义为“∞-反幺半群”，即 ∞-幺半群的一种变体，其运算只有一个输入，却有多个输出。

构造 5.1.1（反加构造）。 令 $\overline{\Delta}^{\mathrm{pre}}_{\mathcal{O}}$ 表示 $y_{(\infty,1)\text{-}\mathfrak{Cat}}(O^{\mathrm{act}})|_{\Delta} \circ (-)^{\mathrm{op}}$ 的 Grothendieck 构造，并定义一个局部满的子-$(\infty,1)$-范畴 $\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}$

通过施加与加号构造中相同的条件。

评注 5.1.2. 存在一个等价，介于 $(\infty,1)$-范畴之间：*Segal* $\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象与$(\infty,1)$-函子 $p\colon \mathfrak{P}\to\mathcal{O}^{\mathrm{op}}$，且满足 p^{op} 是弱 *Segal* 纤维化。

定义 5.1.3 (约化模式**)。** 若组合模式 $\mathrm{O}_{0}^{\mathrm{el}}$是终端 ∞-群胚，则称其为**约化的**。记其（本质上）唯一的对象为 $\emptyset$。

定义 5.1.4 (幺元性**)。** 设 O 是一个约化模式。若 $\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象 X 关于（反）态射 $\star_{\emptyset}\leftarrow\eta$ 是局部的，则称其为**反幺元**。

注 5.1.5。 在一个 $(\infty,1)$-范畴 C 中，反幺元 Segal $\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象所构成的 $(\infty,1)$-范畴显然是 $\mathrm{Seg}_{\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}}(\mathrm{C})$ 的局部化。它也可以看作是针对另一种模式的 Segal 对象范畴。

反幺元 $\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象的模式与 $\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$ 相同，只是从初等对象中移除了 $\star_{\emptyset}$。

引理 5.1.6. 限制态射 $\mathcal{S}\mathfrak{eg}_{\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural},\mathrm{unit.}}(\mathcal{C})\to\mathcal{S}\mathfrak{eg}_{\overline{\Delta}_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}_{\eta/}}(\mathcal{C})$（取底层 ∞-范畴）保留 *Segal* 等价，因此存在一个右伴随（通过松扩张）。

现在我们按照 [Lur17] 的思路，给出一种将笛卡尔结构构造为 $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象的替代方法。

构造 5.1.7. 设 $\mathcal{U}_{\leq -1}$ 是$(\infty,1)$-topos $\infty\text{-}\mathrm{Grpd}^{\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}}}$ 中的子对象分类器（(-1)-截断宇宙）。通过如下规定，定义一个位于 $\mathrm{Env}(\mathbb{1})$ 之上的预层 $\widetilde{\mathrm{Env}}(\mathrm{C}^{\times})$：对任意预层 K，$\hom(\mathcal{K},\mathrm{Env}(\mathrm{C}^{\times}))\simeq\hom(\mathrm{K}\times_{\mathcal{E}\mathrm{nv}(\mathbb{1})}\mathrm{Env}(\mathcal{U}_{\leq -1}),\mathrm{C})$。注意，典范（单）态射 $\mathrm{true}:\mathbb{1}\rightarrowtail\mathcal{U}_{\leq -1}$ 诱导出一个变换 $\mathrm{Env}(\mathrm{C}^{\times})\to\mathrm{C}$。

当 $\mathcal{K}$ 为 $\mathrm{y}\eta$，且变换 $\eta\to\mathrm{Env}(1)$ 选取 $\mathrm{O}^{\mathrm{act}}$的一个对象 O 时，我们得到从 O 的子对象偏序集到 C 的函子。我们将 $\mathrm{Env}(\mathrm{C}^{\times})$ 定义为 $\mathrm{Env}(\mathrm{C}^{\times})$ 的子函子，它由上述函子中将其像展示为其源中的初等对象之积的函子组成。

命题 5.1.8。 结构态射 $\mathcal{E}\mathrm{nv}(\mathcal{C}^{\times})\to\mathcal{E}\mathrm{nv}(\mathbb{1})$ 是一个 $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-对象的余笛卡尔纤维化的像。

证明。 如同 [Lur17，命题 2.4.1.5.]。 □

5.2 余笛卡尔纤维化的直线化

定义 5.2.1（弱笛卡尔结构）。 设 X 是一个 Segal $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-$\infty$-群胚，且 D 是一个 Segal $\Delta_{\mathcal{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}_{\eta/}$-$\infty$-群胚。从 O 到 D 的一种**松弛笛卡尔结构** 是一个态射 $\mathrm{Env}(\mathrm{X})\to\mathrm{D}$，它将分解映射为积。

如果它诱导出底层 $(\infty,1)$-范畴之间的等价，则称其为强笛卡尔结构。

引理 5.2.2. 变换 $\mathfrak{Env}(\mathcal{C}^{\times}) \to \mathcal{C}$ 是一个强笛卡尔结构。

证明。 与 [Lur17, 命题 2.4.1.5.] 中一样。 □

命题 5.2.3。 从 $\mathscr{X}$ 到 $\mathcal{D}$ 的松弛笛卡尔结构与态射 $\mathscr{X} \to \mathcal{D}^{\times}$之间存在一个 $(\infty,1)$-范畴的等价。

证明。 与 [Lur17, 命题 2.4.1.7] 中一样。 □

注 5.2.4。 考虑 D 为 $(\infty,1)$-Cat（或 ∞-Grpd）时的松弛笛卡尔结构 $\varphi\colon \mathrm{Env}(X) \to D$。它由余笛卡尔纤维化 $p\colon \Phi \coloneqq \int^{co} \varphi \to \mathrm{Env}(X)$ 分类。我们称 Env(X) 上的余笛卡尔纤维化为 **松弛笛卡尔** 的，若它所分类的 ∞-函子 $\mathrm{Env}(X) \to (\infty,1)$-Cat 是一个松弛笛卡尔结构。

引理 5.2.5。 $\mathit{Env}_{\mathscr{E}nv}(\mathscr{X})$ 上的余笛卡尔纤维化是松弛笛卡尔幺半的，当且仅当它属于函子$\mathscr{E}nv$的本质像。

证明。 根据 [HK21] 或 [BHS22],，一个在 Env(X) 上的余笛卡尔纤维化属于 Env 的像，当且仅当它作为自然变换是等纤维的（或笛卡尔的）。 □

由此我们得到以下（反）直化对应。

推论 5.2.6。 对于每个 *Segal* $\Delta_{\mathfrak{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-$\infty$-群胚 $\mathscr{X}$，在 $(\infty,1)$ 范畴$\mathscr{X}$ 上的余笛卡尔纤维化与态射$\mathscr{X} \to (\infty,1)$--之间存在等价。 □

注 5.2.7。 Segal $\Delta_{\mathfrak{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}$-$\infty$-群胚的直化/反直化等价以 $\Delta_{\mathfrak{O}}{}^{\mathrm{op}\natural}_{\eta/}$-$\infty$-群胚的直化/反直化等价为输入。这让人联想到 [Nui21] 对 Segal $(\Delta^{n})^{\mathrm{op}\natural}$-$\infty$-群胚的直化对应，该对应是关于 n 的归纳定义。

参考文献

[Bar18] Clark Barwick. “从算子范畴到高阶拟运算子”。载于：《几何与拓扑》22 (4 2018), 第 1893–1959 页。DOI：10.2140/gt.2018.22.1893。arXiv：1302.5756 [math.AT].[Bar22] Shaul Barkan. “厄米环的元数近似”。载于：*arXiv* 电子预印本（2022年）。DOI：10.48550/arXiv.2207.07200。arXiv：2207.07200 [math.AT].[BD98] John C. Baez 和 James Dolan. “高维代数 III. n-范畴与 Opetope 代数”。载于：《数学进展》135.2（1998），第145–206页。ISSN：0001-8708。DOI：10.1006/aima.1997.1695。arXiv：q-alg/9702014 [ma

[Ber22] Clemens Berger：《矩范畴与幺半群》。载于：《范畴论及其应用》38.39（2022年12月）。arXiv：2102.00634 [范畴论]。网址：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/38/39/38-39abs.html。[BGS20] Clark Barwick、Saul Glasman 和 Jay Shah：《谱 Mackey 函子与等变代数 K 理论，II》。载于：《突尼斯数学杂志》2（2020年第1期）。DOI：10.2140/tunis.2020.2.97。arXiv：1505.03098 [math.AT]。

[BHS22] Shaul Barkan、Rune Haugseng 和 Jan Steinebrunner：《代数模式的包络》。载于：*arXiv* 预印本（2022年）。DOI：10.48550/arXiv.2208.07183。arXiv：2208.07183 [范畴论]。[BM21] Michael Batanin 和 Martin Markl：《运算子范畴作为 Koszul 对偶的自然环境》。载于：*arXiv* 预印本（2021年5月）。arXiv：1812.02935 [范畴论]。[CH20] Hongyi Chu 和 Rune Haugseng：《富集的 ∞-厄米环》。载于：《数学进展》361（2020年）。DOI：10.1016/j.aim.2019.106913。arXiv：1707.08049 [math.A

[CH21] Hongyi Chu 和 Rune Haugseng。“通过 Segal 条件实现同伦相干代数”。载于：《数学进展》385（2021），第 107733 页。ISSN：0001-8708。DOI：10.1016/j.aim.2021.107733。arXiv：1907.03977 [math.AT].[CH22] Hongyi Chu 和 Rune Haugseng。“富集同伦相干结构”。2022 年。[CHH18] Hongyi Chu、Rune Haugseng 和 Gijs Heuts。“ ∞-厄米环的同伦理论的两个模型”。载于：《拓扑学杂志》11.4（2018），第 857–873 页。DOI：10.1112/topo.12071。arXiv：1606.03826 [math.AT].[CS10] Geoffrey S.H. Cruttwell 和 Michael A. Shulman。“广义多范畴的统一框架”。载于：《范畴理论与应用》24.21（2010），第 580–655 页。URL：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/24/21/24-21a

[DK19] Tobias Dyckerhoff 和 Mikhail Kapranov。《高阶 Segal 空间》。第 2244 卷。数学讲义。2019年。DOI：10.1007/978-3-030-27124-4。arXiv：1212.3563 [math.AT].[GH15] David Gepner 和 Rune Haugseng。“通过非对称∞-厄米环研究富集 ∞-范畴”。载于：《数学进展》279（2015），第 575–716 页。ISSN：0001- 8708。DOI：10.1016/j.aim.2015.02.007。arXiv：1312.3178 [math.AT].[Hau16] Rune Haugseng。“富集 ∞-范畴的双模与自然变换”。载于：《同调、同伦与应用》18.1（2016），第 71–98 页。DOI：10.4310/HHA.2016.v18.n1.a5。arXiv：1506.07341 [math.AT].[Hau17] Rune Haugseng。“E_n–代数的高阶 Morita 范畴”。载于：《几何与拓扑》21（3 17），第 1631–1730 页。DOI：10.2140/gt.2017.21.1631。arXiv：1412.8459 [math.AT].[Her04] Claudio Hermida。“抽象多范畴的纤维化”。载于：《伽罗瓦理论、Hopf 代数与半阿贝尔范畴》。第 43 卷。Fields Institute Communications，2004年，第 281–293 页。URL：http://sqig.math.ist.utl.pt/pub/HermidaC/f

[Heu11] Gijs Heuts。《无穷运算子上的代数》。载于：*arXiv* 电子预印本（2011年）。arXiv：1110.1776 [math.AT].[HHM16] Gijs Heuts、Vladimir Hinich 和 Ieke Moerdijk。《Lurie模型与无穷运算子的树枝模型之间的等价》。载于：《数学进展》302（2016年），第869–1043页。DOI：10.1016/j.aim.2016.07.021。arXiv：1305.3658 [math.AT]。

[HK21] Rune Haugseng 和 Joachim Kock。《∞-运算子作为对称幺半∞-范畴》。载于：*arXiv* 电子预印本（2021年6月）。arXiv：2106.12975 [math.CT].[HM22] Vladimir Hinich 和 Ieke Moerdijk。《Lurie的 ∞-运算子与树枝 ∞-运算子之间的等价》。载于：*arXiv* 电子预印本（2022年6月）。arXiv：2206.14033 [math.CT].[Lur09] Jacob Lurie。高阶托普斯理论。第170卷。《数学年刊研究》。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009年，第xviii+925页。ISBN：978-0- 691-14049-0。DOI：10.1515/9781400830558。[Lur17] Jacob Lurie。高阶代数。2017年。网址：http://math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。[Nui21] Joost Nuiten。《Segal 空间的直化》。载于：*arXiv* 电子预印本（2021年8月）。arXiv：2108.11431 [math.CT].[RV22] Emily Riehl 和 Dominic Verity。《 ∞-范畴论要素。第194卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2022年。ISBN：9781108936880。DOI：10.1017/9781108936880。网址：https://elements-boo

DAVID KERN，IMAG，蒙彼利埃大学，法国国家科学研究中心，法国蒙彼利埃电子邮箱：david.kern@umontpellier.fr网址：https://dskern.github.io/