arXiv:2301.10806v2 [math.AG] 3 Apr 2023

约旦代数簇的矩映射

CLAUDIO GORODSKI 和 IRYNA KASHUBA 以及 MAR´IA EUGENIA MARTIN

摘要。我们运用几何不变理论的技术研究复 n 维约旦代数的簇。具体而言，我们使用 Kirwan-Ness 定理，依据与典范矩映射相关联的能量泛函，将约旦代数簇分层为有限个不变光滑子簇，且该分层具有 Morse 型。特别地，我们为半单约旦代数广为人知的刚性给出了一个全新的无上同调证明。

1. 引言

本文的主要目标是在有限维复约旦代数的研究中引入几何不变理论（GIT）的技术。具体而言，我们考察仿射簇中一个自然定义的 n 维约旦代数矩映射及其相关的能量泛函，并利用它定义孤子约旦代数的概念。从某种对偶意义上说，在一个约旦代数同构类中寻找孤子约旦代数，也可以视为在约旦代数中寻找一个“最佳的”（厄米）度量。本文还尝试将新的几何不变量与约旦代数的“旧”代数不变量联系起来（取得了部分成功）。

1.1. 基本设置。 在本文中，我们只考虑 $\mathbb{C}$上的有限维代数。约旦代数是满足以下约旦恒等式的交换代数 $\mathfrak{A}$：

$$[L_a, L_{a^2}] = 0$$

对所有 $a \in \mathfrak{A}$均成立，其中 L_a： $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ 表示关于 a的左乘， $[,]$ 表示交换子。这里我们只需指出，约旦代数一般是非结合的。有关约旦代数及其重要性的更多内容，请参阅 [McC04] 。

我们可以将一个维数为 n 的交换代数视为 $\mathbb{C}^n$中的交换乘法，即视为一个张量 $\mu \in S^2(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathbb{C}^n \cong S^2(\mathbb{C}^{n*}) \otimes \mathbb{C}^n =: V_n$（关于前两个自变量对称）。此外，约旦恒等式等价于其线性化形式

$$(ab, c, d) + (bd, c, a) + (da, c, b) = 0,$$

对所有 a、 b、 c、 $d \in \mathfrak{A}$均成立，其中（a， b， c） $= (ab)c - a(bc)$是 a、 b、 c的结合子。这些都是 V_n中的多项式方程，因此，维数为 n 的约旦代数空间 $\mathcal{J}_n$ 可以自然地识别为 V_n中的一个仿射簇。值得注意的是，这些多项式是齐次的，因此我们也可以将约旦代数空间模去复数缩放后视为$\mathbb{P}V_n$中的一个射影簇；不过，我们更倾向于在向量空间 V_n中进行计算。

群 $G := GL(n, \mathbb{C})$ 在空间 V_n 上有一个自然作用，对应于“基变换”。具体而言，对于 $g \in G$ 和 $\mu \in V_n$，定义

$$g \cdot \mu(a, b) = g(\mu(g^{-1}a, g^{-1}b)) \tag{1}$$

对所有 a、 $b \in \mathbb{C}^n$。显然，轨道 $G \cdot \mu$ 给出了 μ 的同构类。特别地， $\mathcal{J}_n$是一个不变子簇。

日期：2023年4月5日。2010 年 数学主题分类。17C55（主要）；14J10、14L30、17C10、53D20（次要）。第一作者感谢 CNPq（资助编号 304252/2021-2）和 FAPESP（资助编号 16/23746-6）提供的部分经费支持。第二作者感谢 FAPESP（资助编号 2021/14716-4）提供的部分经费支持。

为了使用几何不变理论中的方法，我们需要在 $\mathbb{C}^n$ 上固定一个背景厄米内积 Q （而在李代数的情形下， Q 将对应于相应单连通复李群上的左不变厄米度量；但在我们的情形中，没有明显的附属于 Q 的整体对象）。不过，我们将看到，对于约旦代数同构类所得出的结果，并不会实质性地依赖于 Q 。$(\mathbb{C}^n, Q)$ 的酉变换群是 G 的极大紧子群 $K \cong U(n)$；如果赋予 V_n 由此诱导的厄米内积（我们仍以同一符号表示），该群也通过酉变换作用于 V_n。注意，固定 Q 等价于固定 K。现在，紧群 *compact* K 在射影簇 $\mathbb{P}V_n$ 上的作用给出了一个矩映射 $\mathbb{P}V_n \to \mathfrak{k}^*$，其中 $\mathfrak{k}$ 是 K 的李代数，星号表示对偶空间；我们更倾向于在向量空间 V_n 中进行计算，并采用不同的归一化方式，因此等价地考虑尺度不变矩映射 $m\colon V_n \setminus \{0\} \to i\mathfrak{k}$ （精确定义见下文）；注意， $i\mathfrak{k}$ 是 $(\mathbb{C}^n, Q)$ 的厄米变换空间。平方范数 $E_n = ||m||^2$（我们称之为 *energy*能量）具有一个非常有趣的性质：其梯度流线包含于 G 的轨道中，因此这些流线的极限定义了初始代数的退化。这将我们引向对 E_n 临界点的研究，我们称这些临界点为 *solitons* 孤子（原因稍后将会明白）。

Kempf-Ness定理 [KN79] 为复约化线性代数群 G的有理表示 V的闭轨道提供了一个精妙的刻画：这些轨道恰好是包含一个极小向量的轨道，也就是说，该向量实现了轨道到原点的距离（相对于一个固定的厄米内积 Q）。由于与 Q相关联的矩映射控制着向量范数的无穷小变化，因此极小向量恰好对应于矩映射（或能量泛函）的零点。Kempf-Ness定理还蕴含，距离原点为正的非闭轨道在其闭包中包含一个非平凡的闭轨道。特别地，这给出了范畴商 $V/\!/G$ 的刻画（按定义，它是由 V中 G-不变多项式定义的仿射簇）。

另一方面，闭包包含原点的轨道之并称为该表示的零锥 N，其元素称为不稳定向量。在我们的情形中， $GL(n,\mathbb{C})$作用于 V_n，每个向量都是不稳定的，因为我们总能对定义该代数的乘法重新缩放，也就是说， $N = V_n$。尽管如此，Kirwan [Kir84] 和 Ness [Nes84] 展示了如何利用矩映射研究 N的轨道空间，其中 N是复约化线性代数群 G的一个一般表示 V；这里我们关注的并非这个轨道空间本身，而是与之相关的 N分层。考虑 V上的一个厄米内积、与之相关联的 G的极大紧子群 K ，以及相应的矩映射、能量和孤子。Kirwan和Ness证明，所有非极小孤子，也就是能量为正的孤子，都会出现在 N中。此外，在 N 中包含孤子的 G-轨道只有有限多个；而且，对于每个这样的轨道 $G \cdot v$，孤子集构成单个 K-轨道（相差一个缩放因子），并且它们是 $G \cdot v$上的能量极小值。最后，尽管能量并非 Morse（-Bott）函数，Kirwan-Ness 定理仍给出了 N 的 Morse型分层，将其分为有限多个不变光滑子簇，每个子簇都是某一类型孤子集的稳定流形。

本文将此类几何不变量理论方法应用于约旦代数的背景，与 Lauret 针对李代数所做的部分工作 [Lau 03], 相呼应，并利用这些方法证明若干结果，后文将对此加以说明。我们还提出了一些猜想和开放问题。

下文中，若不会引起混淆，我们将 Q 简记为 $\langle \cdot$，并将相应的范数记为 $||\cdot||$。

1.2. 主要结果。 回顾一下，约旦代数 $\mu \in \mathcal{J}_n$ 的（几何）变形 是指一个约旦代数 $\nu \in \mathcal{J}_n$ ，其 G-轨道的扎里斯基闭包中包含 μ （这与豪斯多夫拓扑中的闭包相同），即 $\mu \in \overline{G \cdot \nu}$。在这种情况下，我们也称 μ 是 ν 的退化 ，并记作 $\nu \to \mu$。若 μ 与 ν同构，则称退化 $\nu \to \mu$ 为平凡 的。若约旦代数$\mu \in \mathcal{J}_n$ 的 G-轨道是扎里斯基开集，则称其为（几何）刚性 ； 在我们的语境下（有限维，

同构类	乘法表	性质
$\mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1$	A, S

表 1. 复一维约当代数及其孤子。

基域 $\mathbb{C}$），这等价于不存在 μ 的非平凡变形；也等价于 μ 在 $\mathcal{J}_n$ 中的轨道闭包与某个不可约分支 $\mathcal{J}_n$重合。

交换代数 $\mu \in V_n$ 若满足 μ 是 E_n的临界点，则称为孤子。若 G在 V_n 中的轨道（或交换代数的同构类）包含一个孤子，则称该轨道为特征的。对于 $\mu \in V_n \setminus \{0\}$，记作 $M_\mu = ||\mu||^2 m(\mu)$，并称其为 μ的矩矩阵。关于约当孤子，我们有一个结构性结果。

命题 1.1. 设 $\mu \in V_n$，并将相应的交换代数记作 $\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$。则：

(a) μ 是孤子，当且仅当其矩矩阵 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$ 满足以下条件：其中 $c_\mu < 0$、I 表示单位矩阵，且 D_μ 是 μ 的导子，并且相对于 Q是厄米矩阵；此外，在此情形下，D_μ 的某个正倍数具有有理特征值。(b) 若 μ 是约当孤子，则 $\mathfrak{A}$ 存在一个极大半单子代数 $\mathfrak{S}$，使得 $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$ 是一个 D_μ-不变分解，其中 $\mathfrak{N}$表示 $\mathfrak{A}$的根基。此外，$D_\mu|\mathfrak{S} = 0$。

利用这一结构性结果和半单约当代数经典理论（见 [BK66]），我们证明：

定理 1.2. 每个复半单约当代数的同构类都是可区分的。此外，在每个维数下，半单约当孤子在约旦代数中可由其能量在该维数下取可能的最低值来刻画。

关系 $\mu \to \nu$ 在 $\mathcal{J}_n$上定义了一个偏序，而由分层的性质可知，函数 E_n 相对于这个偏序具有良好的性质：

命题 1.3. 设 $\mu, \nu \in \mathcal{J}_n$。如果 $G \cdot \mu$ 是一个特征轨道，且 $G \cdot \mu$ 中孤子的能量大于 ν的能量，那么 μ 不可能退化为 ν。

我们应用定理 1.2，对以下著名结果给出一个简单的无上同调证明 [Gla70, Fin90]。

定理 1.4 (Glassman, Finston)。每个有限维复半单约旦代数都是刚性的。

维数为 n 的幂零约当代数类构成了 G-不变闭子集 $\mathcal{N}_n$，它包含于 $\mathcal{J}_n$。众所周知，不存在非平凡的 n维复约旦代数同时属于 $\mathcal{J}_n$ 的所有不可约分支（参见 [Mar13, 定理 4.65]）。另一方面，通过研究一些具体的退化情形，我们证明：

定理1.5. 对于所有 $n \geq 2$，都存在一个非平凡的 n 维复幂零约当代数，它属于 $\mathcal{N}_n$ 的所有不可约分支；此外，该代数的轨道具有 E_n 能量的可能最高值。由此可知，当 $n \geq 2$ 时，射影化 $\mathbb{P}\mathcal{N}_n$ 是连通的。

最后，我们对 $n \leq 4$ 的情形给出完整的显式描述，见下表。孤子 μ 的类型为（$d_1 < \cdots < d_r$; $m_1, \ldots, m_r$），其中 $d_1, \ldots, d_r$ 是与 $m(\mu) + E_n(\mu)I = \frac{1}{||\mu||^2} D_\mu$ 的特征值成比例的互素整数序列，而 $m_1, \ldots, m_r$ 分别是相应的重数。分层是有限的，各分层由 $\beta = m(\mu)$ 参数化，或者等价地，由孤子类型参数化。我们推得：

定理 1.6. 维数至多为4 的每个复 *Jordan* 代数同构类均可区分，但幂零 *Jordan* 代数 $\mathfrak{A}_{4,63}$ 除外，它不可区分。

G-轨道	孤子类型	β	E_1
$\mathfrak{A}_{1,1}$	(0; 1)	diag(-1)	1

表2. $\mathcal{J}_1$的分层。

同构类	乘法表	性质
$\mathfrak{A}_{2,1}$	$e_1e_1 = e_1, e_1n_1 = n_1$	A, U
$\mathfrak{A}_{2,2}$	$e_1e_1 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1$	-
$\mathfrak{A}_{2,3}$	$n_1^2 = n_2$	A, N
$\mathfrak{A}_{2,4} = (\mathfrak{A}_{1,1})^2$	$e_1e_1 = e_1, e_2e_2 = e_2$	A, SS, D
$\mathfrak{A}_{2,5} = \mathfrak{A}_{1,1} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, n_1^2 = 0$	A, D

表 3. 复 2 维约旦代数及其孤子。

G-轨道	孤子类型	β	E_2
$\mathfrak{A}_{2,4}$	(0; 2)	diag$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$1/2$
$\mathfrak{A}_{2,1}$, $\mathfrak{A}_{2,5}$,$\mathfrak{A}_{2,2}$	$(0 < 1; 1, 1)$	diag$(-1, 0)$	1
$\mathfrak{A}_{2,3}$	$(1 < 2; 1, 1)$	diag$(-2, 1)$	5

表4。 $\mathcal{J}_2$的分层。

同构类	乘法表	性质
$\mathfrak{A}_{3,1} = (\mathfrak{A}_{1,1})^3$	$e_1e_1 = e_1, e_2e_2 = e_2, e_3e_3 = e_3$	SS, A, D
$\mathfrak{A}_{3,2}$	$e_1e_1 = e_1, e_2e_2 = e_3e_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}e_1, e_1e_2 = e_2, e_1e_3 = e_3$	S
$\mathfrak{A}_{3,3} = \mathfrak{A}_{2,1} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{3}e_2, e_1n_1 = n_1$	A, U, D
$\mathfrak{A}_{3,4}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{\frac{5}{3}}e_1, e_1e_2 = e_2, e_1n_1 = n_1$	U
$\mathfrak{A}_{3,5} = \mathfrak{A}_{2,2} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}e_2, \quad e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1$	D
$\mathfrak{A}_{3,6} = (\mathfrak{A}_{1,1})^2 \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_2^2 = e_2, \quad n_1^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{3,7}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1n_1 = n_1, \quad e_1n_2 = n_2, \quad n_1^2 = n_2$	A, U
$\mathfrak{A}_{3,8}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1n_1 = n_1, \quad e_1n_2 = n_2$	A, U
$\mathfrak{A}_{3,9} = \mathfrak{A}_{2,1} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1n_1 = n_1, \quad n_2^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{3,10}$	$e_1e_1 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1n_2 = n_2, n_1^2 = \sqrt{\frac{7}{10}}n_2$	-
$\mathfrak{A}_{3,11}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1n_2 = n_2$	-
$\mathfrak{A}_{3,12}$	$e_1e_1 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1n_2 = \frac{1}{2}n_2$	-
$\mathfrak{A}_{3,13}$	$e_1e_1 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, \quad n_1^2 = \sqrt{\frac{3}{10}}n_2$	-
$\mathfrak{A}_{3,14} = \mathfrak{A}_{2,2} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, \quad n_2^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{3,15} = \mathfrak{A}_{2,3} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = \sqrt{5}e_1, \quad n_1^2 = n_2$	A, D
$\mathfrak{A}_{3,16} = \mathfrak{A}_{1,1} \times (\mathfrak{T})^2$	$e_1^2 = e_1, \quad n_1^2 = n_2^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{3,17}$	$e_1e_1 = e_1, \quad n_1n_2 = n_3$	A, N
$\mathfrak{A}_{3,18}$	$n_1n_2 = n_3$	A, N
$\mathfrak{A}_{3,19} = \mathfrak{A}_{2,3} \times \mathfrak{T}$	$n_1^2 = n_2, \quad n_3^2 = 0$	A、N、D

表 5. 复三维约当代数及其孤子。

G-轨道	孤子类型	β	E_3
$\mathfrak{A}_{3,1}$, $\mathfrak{A}_{3,2}$	(0; 3)	diag$(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$	$1/3$
$\mathfrak{A}_{3,3}$,$\mathfrak{A}_{3,4}$, $\mathfrak{A}_{3,5}$, $\mathfrak{A}_{3,6}$	$(0 < 1; 2, 1)$	diag$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$	$1/2$
$\mathfrak{A}_{3,7}$,$\mathfrak{A}_{3,10}$, $\mathfrak{A}_{3,13}$,$\mathfrak{A}_{3,15}$	$(0 < 1 < 2; 1, 1, 1)$	diag$(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, 1_6)$	$5/6$
$\mathfrak{A}_{3,8}$, $\mathfrak{A}_{3,9}$, $\mathfrak{A}_{3,11}$, $\mathfrak{A}_{3,12}$, $\mathfrak{A}_{3,14}$,$\mathfrak{A}_{3,16}$	$(0 < 1; 1, 2)$	diag$(-1, 0, 0)$	1
$\mathfrak{A}_{3,17}$	$(1 < 2 < 3; 1, 1, 1)$	diag$(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 2_8)$	$7/3$
$\mathfrak{A}_{3,18}$	$(1 < 2; 2, 1)$	diag$(-1, -1, 1)$	3
$\mathfrak{A}_{3,19}$	$(3 < 5 < 6; 1, 1, 1)$	diag$(-2, 1, 0)$	5

表 6. $\mathcal{J}_3$ 的分层。

同构类	乘法表	性质
$\mathfrak{A}_{4,1}$	$e_2 = e_1, e_2^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}e_1, e_1e_2 = e_2, e_1e_3 = e_3, e_4^2 = \sqrt{\frac{5}{2}}e_4$	SS, D
$\mathfrak{A}_{4,2}$	$e_1^2 = e_1, e_1e_2 = e_2, e_1e_3 = e_3, e_1e_4 = e_4, e_2e_3 = \sqrt{\frac{7}{5}}e_1, e_4^2 = \sqrt{\frac{7}{5}}e_1$	S
$\mathfrak{A}_{4,3} = (\mathfrak{A}_{1,1})^4$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_3^2 = e_3, e_4^2 = e_4$	SS, A, D
$\mathfrak{A}_{4,4} = \mathfrak{A}_{2,1} \times (\mathfrak{A}_{1,1})^2$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_2^2 = \sqrt{3}e_2, e_3^2 = \sqrt{3}e_3$	U, A, D
$\mathfrak{A}_{4,5} = (\mathfrak{A}_{1,1})^3 \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_3^2 = e_3, n_1^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,6} = \mathfrak{A}_{2,2} \times (\mathfrak{A}_{1,1})^2$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}e_2, e_3^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}e_3, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1$	D
$\mathfrak{A}_{4,7} = \mathfrak{A}_{3,4} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{\frac{5}{3}}e_1, e_1e_2 = e_2, e_1n_1 = n_1, e_3^2 = \sqrt{\frac{10}{3}}e_3$	U, D
$\mathfrak{A}_{4,8} = \mathfrak{A}_{3,2} \times \mathfrak{T}$	$e_2 = e_1, e_2^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}e_1, e_3^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}e_1, e_1e_2 = e_2, e_1e_3 = e_3, n_1^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{4,9}$	$e_2 = e_1, e_2^2 = \frac{\sqrt{7}}{2}e_1, e_3^2 = \frac{\sqrt{7}}{2}e_1, e_1e_2 = e_2, e_1e_3 = e_3, e_1n_1 = n_1$	U
$\mathfrak{A}_{4,10} = \mathfrak{A}_{2,2} \times \mathfrak{A}_{1,1} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_2^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}e_2, n_2^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{4,11} = \mathfrak{A}_{3,4} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{\frac{5}{3}}e_1, e_1e_2 = e_2, e_1n_1 = n_1, n_2^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{4,12} = \mathfrak{A}_{3,12} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{2}e_2, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1n_2 = \frac{1}{2}n_2$	D
$\mathfrak{A}_{4,13} = (\mathfrak{A}_{2,2})^2$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_2n_2 = \frac{1}{2}n_2$	D
$\mathfrak{A}_{4,14} = \mathfrak{A}_{3,11} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1n_2 = n_2, e_2^2 = \sqrt{\frac{7}{2}}e_2$	D
$\mathfrak{A}_{4,15} = \mathfrak{A}_{2,1} \times \mathfrak{A}_{2,2}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{2}e_2, e_1n_1 = n_1, e_2n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}n_2$	D
$\mathfrak{A}_{4,16}$	$e_1^2 = k(\cos^3 t - \sin^3 t)e_1 + k^2 \cos t \sin t(\cos t + \sin t)e_2,$ $e_2^2 = k^{-1}$余弦 t正弦 t（−余弦 t+正弦 t）e_1+（余弦$^3 t$+正弦$^3 t$）e_2, $e_1e_2 =$余弦 t正弦 t((余弦 t+正弦 t)$e_1 + k$(−余弦 t+正弦 t)e_2), $e_1n_1 = \frac{k}{2}$(余弦 t − 正弦 t)$n_1, e_1n_2 = \frac{k}{2}$余弦 tn_2, $e_2n_1 = \frac{1}{k-2}$(余弦 t + 正弦 t)$n_1, e_2n_2 = \frac{1}{2}$正弦 tn_2	$k \approx 1.20577$, $t \approx 1.22166$
$\mathfrak{A}_{4,17}$	$e_1^2 = k$(余弦$^3 t$ − 正弦$^3 t$)$e_1 + k^2$余弦t正弦 t(余弦 t + 正弦 t)e_2, $e_2^2 = k^{-1}$余弦 t正弦 t（−余弦 t+正弦 t）e_1+（余弦$^3 t$+正弦$^3 t$）e_2, $e_1e_2 =$余弦 t正弦 t（余弦 t + 正弦 t）$e_1 + k$余弦 t正弦 t（−余弦 t + 正弦 t）e_2, $e_1n_1 = \frac{k}{2}$（余弦 t − 正弦 t）$n_1, e_1n_2 = k$余弦 tn_2, $e_2n_1 = \frac{1}{k-2}$（余弦 t + 正弦 t）$n_1, e_2n_2 =$正弦 tn_2	$k \approx 1.54492$ $t \approx 1.45358$, U
$\mathfrak{A}_{4,18}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{\frac{7}{3}}e_1, e_1e_2 = e_2, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2$	U
$\mathfrak{A}_{4,19} = (\mathfrak{A}_{1,1})^2 \times (\mathfrak{T})^2$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, n_1^2 = n_2^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,20} = \mathfrak{A}_{2,1} \times \mathfrak{A}_{1,1} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{3}e_2, e_1n_1 = n_1, n_2^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,21} = \mathfrak{A}_{3,8} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = \sqrt{5}e_2, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2$	A, U, D
$\mathfrak{A}_{4,22} = (\mathfrak{A}_{2,1})^2$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1n_1 = n_1, e_2n_2 = n_2$	A, U, D
$\mathfrak{A}_{4,23} = \mathfrak{A}_{3,13} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, n_1^2 = \sqrt{\frac{3}{10}}n_2, e_2^2 = \sqrt{\frac{3}{2}}e_2$	D
$\mathfrak{A}_{4,24} = \mathfrak{A}_{3,10} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1n_2 = n_2, n_1^2 = \sqrt{\frac{7}{10}}n_2, e_2^2 = \sqrt{\frac{7}{2}}e_2$	D
$\mathfrak{A}_{4,25}$	$e_1^2 = k(\cos^3 t - \sin^3 t)e_1 + k^2 \cos t \sin t(\cos t + \sin t)e_2,$ $e_2^2 = k^{-1}$余弦 t正弦 t(− 余弦 t+正弦 t)e_1+(余弦$^3 t$+正弦$^3 t$)e_2, $e_1e_2 =$余弦 t正弦 t(余弦 t + 正弦 t)$e_1 + k$余弦 t正弦 t(− 余弦 t + sin t)e_2, $e_1n_1 = \frac{k}{2}$(余弦 t − 正弦 t)$n_1, e_1n_2 = k$余弦tn_2, $e_2n_1 = \frac{1}{k-2}$(余弦 t + 正弦 t)$n_1, e_2n_2 =$正弦 $tn_2, n_1^2 = \ell n_2$	$k \approx 1.54492$, $t \approx 1.45358$, $\ell \approx 0.836502$, U
$\mathfrak{A}_{4,26} = \mathfrak{A}_{2,3} \times (\mathfrak{A}_{1,1})^2$	$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, n_1^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}n_2, n_2^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,27} = \mathfrak{A}_{3,7} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2, n_1^2 = n_2, e_2^2 = \sqrt{5}e_2$	U, A, D
$\mathfrak{A}_{4,28} = \mathfrak{A}_{2,2} \times (\mathfrak{T})^2$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, n_2^2 = n_3^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{4,29} = \mathfrak{A}_{3,11} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1n_2 = n_2, n_3^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{4,30} = \mathfrak{A}_{3,12} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = \frac{1}{2}n_1, e_1n_2 = \frac{1}{2}n_2, n_3^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{4,31}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2, e_1n_3 = n_3$	-
$\mathfrak{A}_{4,32}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = \frac{1}{2}n_2, e_1n_3 = n_3$	-
$\mathfrak{A}_{4,33}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = \frac{1}{2}n_3$	-
$\mathfrak{A}_{4,34} = \mathfrak{A}_{1,1} \times (\mathfrak{T})^3$	$e_1 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2, e_1n_3 = n_3$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,35} = \mathfrak{A}_{2,1} \times (\mathfrak{T})^2$	$e_1^2 = e_1, n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,36}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2, e_1n_3 = n_3$	U, A
$\mathfrak{A}_{4,37} = \mathfrak{A}_{3,8} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2, n_3^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,38} = \mathfrak{A}_{3,17} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = \sqrt{7}e_1, n_1^2 = n_2, n_1n_2 = n_3$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,39}$	$e_1^2 = e_1, e_1n_1 = n_1, e_1n_2 = n_2, e_1n_3 = n_3, n_1^2 = n_2, n_1n_2 = n_3$	U, A
$\mathfrak{A}_{4,40} = \mathfrak{A}_{2,3} \times \mathfrak{A}_{1,1} \times \mathfrak{T}$	$n_1^2 = n_2$, $e_1^2 = \sqrt{5}e_1, n_3^2 = 0$	D

表 7. 复4维约旦代数及其孤子，第一部分。

同构类	乘法表	性质
$\mathfrak{A}_{4,41} = \mathfrak{A}_{3,18} \times \mathfrak{A}_{1,1}$	$e_1^2 = \sqrt{6}e_1, \quad n_1 n_2 = n_3$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,\ 42}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1 n_1 = n_1, \quad e_1 n_2 = n_2, \quad e_1 n_3 = n_3, \quad n_1^2 = \sqrt{\frac{7}{5}} n_2$	U, A
$\mathfrak{A}_{4,43}$	$e_1^2 = e_1, e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2, e_1 n_3 = n_3, n_1^2 = n_2^2 = \sqrt{\frac{7}{6}} n_3$	U, A
$\mathfrak{A}_{4,44} = \mathfrak{A}_{3,13} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = \sqrt{\frac{10}{3}} e_1, e_1 n_1 = \sqrt{\frac{5}{6}} n_1, n_1^2 = n_2, n_3^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{4,45}$	$e_1^2 = 2e_1, e_1 n_1 = n_1, n_1^2 = n_2^2 = \sqrt{\frac{3}{10}} n_3$	-
$\mathfrak{A}_{4,46} = \mathfrak{A}_{2,2} \times \mathfrak{A}_{2,3}$	$e_1 = e_1, \quad e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, \quad n_2^2 = \sqrt{\frac{3}{10}} n_3$	D
$\mathfrak{A}_{4,\ 47} = \mathfrak{A}_{2,\ 1} \times \mathfrak{A}_{2,\ 3}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1 n_1 = n_1, \quad n_2^2 = \sqrt{\frac{3}{5}} n_3$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,\ 48}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, \quad e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, \quad n_1^2 = \sqrt{\frac{2}{5}} n_3$	-
$\mathfrak{A}_{4,49}$	$e_1^2 = e_1, e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, n_1 n_2 = \sqrt{3} n_3$	-
$\mathfrak{A}_{4,50}$	$e_1 = e_1, e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, e_1 n_3 =$	-
$\mathfrak{A}_{4,51} = \mathfrak{A}_{3,10} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, \quad e_1 n_2 = n_2, \quad n_1^2 = \sqrt{\frac{7}{10}} n_2, \quad n_3^2 = 0$	D
$\mathfrak{A}_{4,\ 52}$	$e_1 = e_1, \quad e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, \quad e_1 n_2 = n_2, \quad n_1^2 = \sqrt{\frac{7}{10}} n_3$	-
$\mathfrak{A}_{4,\ 53}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, \quad e_1 n_2 = \frac{1}{2}(n_2 + \alpha n_3) = \alpha e_1 n_3, \quad n_1^2 = \beta n_3$	$\alpha^2 = \frac{\sqrt{345}-5}{20}, \quad \beta^2 = \frac{\sqrt{345}+45}{80}$
$\mathfrak{A}_{4,54} = \mathfrak{A}_{3,7} \times \mathfrak{T}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1 n_1 = n_1, \quad e_1 n_2 = n_2, \quad n_1^2 = n_2, \quad n_3^2 = 0$	A, D
$\mathfrak{A}_{4,\ 55}$	$e_1^2 = e_1, \quad e_1 n_1 = n_1, \quad e_1 n_2 = n_2, \quad e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, \quad n_3^2 = \sqrt{\frac{11}{10}} n_2$	-
$\mathfrak{A}_{4,\ 56}$	$e_1^2 = e_1, e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2, e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_1^2 = \sqrt{\frac{11}{10}} n_2$	-
$\mathfrak{A}_{4,57}$	$e_1^2 = e_1, e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2, e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_1^2 = n_3^2 = \sqrt{\frac{11}{12}} n_2$	-
$\mathfrak{A}_{4,58}$	$e_1^2 = e_1, e_1 n_1 = \frac{1}{2} n_1, e_1 n_2 = \frac{1}{2} n_2, e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_1^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} n_1$	-
$\mathfrak{A}_{4,59}$		-
$\mathfrak{A}_{4,60}$	$e_1^2 = e_1, e_1 n_1 = n_1, e_1 n_2 = n_2, e_1 n_3 = \frac{1}{2} n_3, n_1 n_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} n_3$	-
$\mathfrak{A}_{4,61}$	$n_1^2 = n_2, n_2^2 = n_4, n_1 n_2 = n_3, n_1 n_3 = n_4$	A, N
$\mathfrak{A}_{4,62}$	$n_1^2 = n_2, \quad n_4 = 2n_2, \quad n_1 n_2 = \sqrt{3} n_3$	N
$\mathfrak{A}_{4,\ 63}$	$n_1 n_2 = n_3, \quad n_1 n_3 = n_4, \quad n_2^2 = n_4$	N，未区分
$\mathfrak{A}_{4,64}$	$n_1 n_2 = n_3, \quad n_1 n_3 = n_4$	N
$\mathfrak{A}_{4,\ 65}$	$n_1^2 = \sqrt{3} n_2, n_2 n_3 = n_4$	N
$\mathfrak{A}_{4,66}$	$n_1^2 = n_2, n_3^2 = n_4, n_1 n_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} n_4$	A, N
$\mathfrak{A}_{4,67} = \mathfrak{A}_{3,17} \times \mathfrak{T}$	$n_1^2 = n_2, n_1 n_2 = n_3, n_3^2 = 0$	A, N, D
$\mathfrak{A}_{4,68} = (\mathfrak{A}_{2,3})^2$	$n_1^2 = n_2, n_2 n_3 = n_4$	A、N、D
$\mathfrak{A}_{4,69}$	$n_1^2 = n_2, n_1 n_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} n_4$	A, N
$\mathfrak{A}_{4,70}$	$n_1^2 = n_3 n_4 = n_2$	A, N
$\mathfrak{A}_{4,71} = \mathfrak{A}_{3,18} \times \mathfrak{T}$	$n_1 n_2 = n_3, n_4^2 = 0$	A, N
$\mathfrak{A}_{4,72} = \mathfrak{A}_{2,3} \times (\mathfrak{T})^2$	$n_1^2 = n_2, n_3^2 = n_4^2 = 0$	A, N

表8. 复4维约旦代数及其孤子，第二部分。

在表1、3、5、7和8中，我们列出了维数至多为4的复约旦孤立子。乘法表中的系数经过选择，使每种同构类型中的代数都是孤子，但$\mathfrak{A}_{4,\ 63}$除外，因为它不存在孤子。在性质栏中，我们标明代数是否为结合的（A）、单的（S）、半单的（SS）、幂零的（N）、含幺的（U）或可分解的（D）；未标注此类性质表示该性质不成立，但单约旦代数是半单的，半单 Jordan 代数是含幺的情况除外。对于可分解的情形，我们列出其最小分解；记号 $\mathfrak{T}$ 表示平凡的（一维）代数。在表2、4、6、9中，我们描述了 $\mathcal{J}_n$ 在 $n \leq 4$下的分层：其中包含的轨道、孤子类型、参数（β）以及能量值（$E_n = ||\beta||^2$）。

G-轨道$\mathfrak{a}_{4,\ k}$	孤子类型	β	E_4
$1 \le k \le 3$	$(0; 4)$	$\mathrm{diag}(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	$1/4$
$4 \le k \le 9$	$(0 < 1; 3, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$	$1/3$
$23 \le k \le 27$	$(0 < 1 < 2;\ 2,\ 1,\ 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{5}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{2}{11}, \frac{1}{11})$	$5/11$
$10 \le k \le 22$	$(0 < 1; 2, 2)$	$\mathrm{diag}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0)$	$1/2$
$38 \le k \le 39$	$(0 < 1 < 2 < 3; 1, 1, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{7}{10}, -\frac{4}{10}, -\frac{1}{10}, \frac{2}{10})$	$7/10$
$k \in \{41, 43, 45, 49, 50, 57, 59, 60\}$	$(0 < 1 < 2; 1, 2, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$3/4$
$k = 53$	$(0 < 1 < 2; 1, 1, 2)$	$\mathrm{diag}(-\frac{9}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11})$	$9/11$
$k \in \{40, 42, 44, 46, 47, 48, 51, 52, 54, 55, 56, 58\}$	$(0 < 3 < 5 < 6; 1, 1, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6})$	$5/6$
$28 \le k \le 37$	$(0 < 1; 1, 3)$	$\mathrm{diag}(-1, 0, 0, 0)$	1
$k = 62$	$(1 < 2 < 3; 2, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{8}{11}, -\frac{8}{11}, -\frac{1}{11}, \frac{6}{11})$	$15/11$
$k = 65$	$(3 < 4 < 6 < 10; 1, 1, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$	$7/5$
$k = 61, 63, 64$	$(1 < 2 < 3 < 4; 1, 1, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-1, -1/2, 0, 1/2)$	$3/2$
$k = 66$	$(2 < 3 < 4 < 6; 1, 1, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-1, -\frac{1}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{5}{7})$	$13/7$
$k = 70$	$(1 < 2; 3, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$	$7/3$
$k = 67$	$(3 < 6 < 7 < 9; 1, 1, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$	$7/3$
$k = 68$	$(1 < 2; 2, 2)$	$\mathrm{diag}(-1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$5/2$
$k = 69$	$(3 < 4 < 6 < 7; 1, 1, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$	$11/4$
$k = 71$	$(2 < 3 < 4; 2, 1, 1)$	$\mathrm{diag}(-1, -1, 0, 1)$	3
$k = 72$	$(3 < 5 < 6; 1, 2, 1)$	$\mathrm{diag}(-2, 0, 0, 1)$	5

表9。 $\mathcal{J}_4$的分层。

G-轨道是否具有特殊性，与厄米内积 Q的选取无关。事实上， G 在 $\mathbb{C}^n$ 上的厄米内积空间上有如下作用:

$$g \cdot Q(a, b) = Q(g^{-1}a, g^{-1}b))$$

对于 $g \in G$ 和 $a, b \in \mathbb{C}^n$。此作用是传递的，因此，若固定 Q，则 $\mathbb{C}^n$ 上的任意其他厄米内积都可写成 $g \cdot Q$ ，其中 $g \in G$。用上标表示与不同厄米内积相关的矩矩阵，很容易看出

$$M_{\mu}^{g \cdot Q} = g M_{g^{-1} \cdot \mu}^{Q} g^{-1}. \tag{2}$$

He因此，结论由孤子的结构结果（命题 1.1(a)）得出。

从对偶的角度来看，固定 Q ，并假设约旦代数 $\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ 的同构类是特殊的。那么，对于某个 $g \in G$， $g \cdot \mu$ 是一个孤子；利用关系式 (2) 可以看出， μ 相对于 $g^{-1} \cdot Q$也是一个孤子，也就是说， $g^{-1} \cdot Q$ 是 $\mathfrak{A}$上的一个“最佳”度量。由 Kirwan-Ness理论可知，若 E_n 在一个 G-轨道上的临界集非空，则它是单个 K-轨道，因此，若 $\mathfrak{A}$上存在最佳度量，则该度量唯一。

我们指出，本文中的若干公式和结果与李代数中的相应内容 [Lau03]相似。约旦代数与李代数的一个重要区别在于，一般而言，左乘并非导子。因此，李代数中依赖这一性质的论证，在约旦代数的情形下行不通。当然，这不应被视为一个问题，而应视为约旦代数的核心特征；真正的问题是如何善用这一特征。

作者谨向 I. Shestakov 致谢，感谢他所进行的启发性讨论。

2. 预备知识

2.1. 约旦代数的半单性与根基。 本小节的大部分结果归功于 Albert。可参阅 [Sch95，第 IV 章]。

复约旦代数 $\mathfrak{A}$称为单，如果 $\mathfrak{A}^2 \neq 0$ 和 $\mathfrak{A}$没有非平凡理想；如果它是若干单约旦代数的直积，则称为半单。半单 Jordan 代数有单位元。

设 $\mathfrak{A}$ 是一个复约旦代数。若元素 $x \in \mathfrak{A}$ 满足幂零条件，即对某个整数 $k \geq 2$有 $x^k = 0$，则称其为幂零元；这等价于左乘算子 L_x 是幂零算子。存在一个理想 Rad($\mathfrak{A}$)，称为 $\mathfrak{A}$的根基，它是 $\mathfrak{A}$ 唯一的极大幂零理想（也就是说，它是完全由幂零元构成的极大理想）。此外，Rad($\mathfrak{A}$)是幂零的，即存在整数 t，使得由 Rad($\mathfrak{A}$) 中的 t 个元素构成的任意乘积 $x_1 \cdots x_t$ 均为零；因此，Rad($\mathfrak{A}$)也是 $\mathfrak{A}$唯一的极大幂零理想。按照此根基定义，商代数 $\mathfrak{A}$/Rad($\mathfrak{A}$)总是半单的，并且 $\mathfrak{A}$ 是半单的，当且仅当 Rad($\mathfrak{A}$) $= 0$。

Albert 的一个结果将根基 Rad($\mathfrak{A}$)刻画为对称双线性型τ的核：$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$，该双线性型由 $\tau(x, y) = \mathrm{Tr}(L_{xy})$ 定义，其中 $x, y \in \mathfrak{A}$。

约旦代数的 Wedderburn–Principal 定理由 Albert 和 Penico [Pen51],证明，它指出，任意复约旦代数 $\mathfrak{A}$ 都可以写成向量空间直和 $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$，其中 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的某个极大半单子代数，且 $\mathfrak{S}$ 同构于 $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$，其中 $\mathfrak{N} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{A})$。

2.2. **几何不变理论回顾**。设 $\pi\colon G \to GL(V)$ 是连通复线性约化群 G 在有限维复向量空间 V上的有理表示。固定 G 的一个极大紧子群 K（它必然连通，且在 G的内自同构下唯一），并在 V上固定一个 K-不变的厄米内积 $\langle , \rangle$。那么， K 的李代数 $\mathfrak{k}$ 是 G的李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个实形式，即 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i\mathfrak{k}$。我们还在 $\mathfrak{g}$上固定一个 Ad_K-不变的厄米内积，记作 $(,)$，它在 $i\mathfrak{k}$ （在 $\mathfrak{k}$上）是正定（负定）的。

矩映射是由 $m\colon V \setminus \{0\} \to \mathfrak{g}$ 定义的映射

$$(m(v), X) = \frac{1}{2||v||^2} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ||e^{tX} \cdot v||^2 = \frac{\langle X \cdot v, v\rangle}{\langle v, v\rangle}, \tag{3}$$

其中，对所有 $g \in G, X \in \mathfrak{g}, v \in V \setminus \{0\}$，记 $g \cdot v := \pi(g)v$ 和 $X \cdot v := d\pi(X)v$。我们有，$m(v)$控制轨道 $G \cdot v$ 中与 v正交的 v 邻域内向量的范数，而$-m(v)v$ 是范数下降最快的方向。注意， $m(v) \in i\mathfrak{k}$，且由于 $\langle , \rangle$的 K-不变性， m 是 K-不变的。极小向量是其轨道中长度最小的向量。Kempf-Ness定理指出，极小向量对应于矩映射的零点，并且一个轨道是闭的，当且仅当它包含一个极小向量；此外， V中任意一个 G-轨道的闭包恰好包含一个由极小向量构成的 K-轨道 [KN79]。m 的平方范数给出能量泛函

$$E : V \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad E(v) = ||m(v)||^2.$$

当然， E 是 K-不变且尺度不变的。由上述结论可知， V中的一个 G-轨道是闭的，当且仅当它与 $E^{-1}(0)$相交。

另一方面，所有包含原点于其闭包中的轨道的并集构成所谓的 零锥 N V。Kirwan-Ness 定理指出，E的非极小临界点，即那些 v 的临界点 E 满足 $E(v) > 0$者，均出现在零锥 N 中，并确定了 $N \setminus \{0\}$ [的分层 Kir84, Nes84]。因此，在 N中存在一组特殊轨道，即那些包含 E的临界点的轨道，它们在 $V \setminus N$中发挥着类似于闭轨道的作用。

由于 $(dm_v(\xi)\ X) = 2\Re\langle X \cdot v, \xi\rangle / ||v||^2$ 对于 $X \in i\mathfrak{k}, \xi \in T_vV = V, \xi \perp v$，我们很容易得到 E 在点 $v \in V \setminus \{0\}$处的微分：

$$dE_v(\xi) = 2\Re(dm_v(\xi), m(v)) = \frac{4\Re\langle m(v) \cdot v, \xi\rangle}{||v||^2}.$$

现在， E 在复径向方向上为常数，而 $m(v)\cdot v$ 沿 v 方向的分量为 $\frac{\langle m(v)\cdot v, v\rangle}{||v||^2}v = ||m(v)\cdot v||^2 v$，因此 E 在 v 处的梯度为

$$\nabla E(v) = \frac{4}{||v||^2}(m(v)\cdot v - ||m(v)||^2 v). \tag{4}$$

因此， $v \in V\setminus\{0\}$ 是 E 的临界点，当且仅当

$$m(v)\cdot v \in \mathbb{R}v. \tag{5}$$

由于这种自相似性特征， E 的临界点被称为孤子（沿用 [Lau20]的说法）。我们还称包含孤子的 G-轨道为特殊的。当然，每个极小向量都是孤子。为方便读者，下面汇总我们将要用到的与孤子相关的Kirwan-Ness理论结果。

定理2.1(Kirwan-Ness)。 沿用上述记号，有：

(a) 给定 G-轨道中的孤子集合要么为空，要么恰好由一个 K-轨道（在缩放意义下）组成。*(b)* 每个孤子 v 都是 $G\cdot v$上 E 的最小值。因此，孤子是在其 G-轨道中最接近极小向量的向量。*(c)* 不是极小向量的孤子都出现在 V的零锥 N 中。*(d)* 从 v 出发的 $-\nabla E$ 流始终留在 $G\cdot v$ 中，并且当 $t\to\pm\infty$时收敛于孤子 $w\in\overline{G\cdot v}$。在缩放意义下，恰好存在一个孤子的 K-轨道，使得 $m(z)\in Ad_K m(w)$，该轨道由 $G\cdot v$的极限集组成。*(e)* E 的临界集是有限个互不相交的闭子集的并 $\{C_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$，这些子集由 $\mathcal{B}$中有限个伴随 K-轨道（或正*Weyl*室中的点）进行索引。相应的稳定流形$\{S_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ 构成 $N\setminus\{0\}$ 的有限个 G-不变分层，这些分层由局部闭的不可约光滑子簇组成。

3. 交换代数的矩映射

本节我们专门讨论 n 维交换代数的情形，尤其是约旦代数。令 $V_n = S^2(\mathbb{C}^{n*})\otimes\mathbb{C}^n$ 表示对称双线性映射 $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 所构成的空间，我们将其等同于维数为 n 的（不必结合的）交换代数。$G = GL(n,\mathbb{C})$ 在 V_n 上有一个由 (1) 给出的自然作用。由对 (1) 求导得到的 G 在 V_n 上的李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 的作用为

$$A\cdot\mu(x,y) = A(\mu(x,y)) - \mu(Ax,y) - \mu(x,Ay) \tag{6}$$

对所有 $A\in\mathfrak{g}$、 $\mu\in V_n$ 以及 x、 $y\in\mathbb{C}^n$ 均成立。注意， μ 的各向同性代数，即由满足 $A\cdot\mu = 0$ 的元素 $A\in\mathfrak{g}$ 构成的 $\mathfrak{g}$ 子代数，同构于 μ 的导子李代数 $\mathrm{Der}(\mu)$。

考虑 $\mathbb{C}^n$ 上的典范厄米内积 $\langle,\rangle$。酉群 $K = U(n)$ 是 G 的极大紧子群，其李代数 $\mathfrak{k}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个实形式。厄米内积可典范地扩张为 V_n 上的厄米内积，仍用同一符号表示，即

$$\langle\mu,\nu\rangle = \sum_{ijk}\langle\mu(x_i,x_j),x_k\rangle\overline{\langle\nu(x_i,x_j),x_k\rangle},$$

其中 $x_1,\dots,x_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的任意固定正交归一基。 K 的元素通过酉变换作用于 V_n，而 $\mathfrak{k}$（分别为 $i\mathfrak{k}$）的元素则通过斜厄米（分别为厄米）自同态作用于 V_n。我们还考虑 $\mathfrak{g}$ 上的 Ad_K- 不变厄米内积，其定义为 $(A,B) = \mathrm{Tr}(AB^*)$，其中 $A,B\in\mathfrak{g}$。

矩映射 $m\colon V_n\setminus\{0\}\to i\mathfrak{k}$ 按照 (3) 定义，其形式为 $m(\mu) = \frac{1}{||\mu||^2}M_\mu$，其中$M_\mu$ 是 μ 的矩阵。我们将根据代数

结构以及厄米内积，求出 μ 的显式公式。结果发现，它与 [Lau03] 中反对称代数所用的公式相同。

回忆一下，对于所有 $A \in i\mathfrak{k}$，$(M_\mu, A) = \langle A \cdot \mu, \mu\rangle$。

引理 3.1. 对于所有 $\mu \in V_n$ 和 $D \in \mathrm{Der}(\mu)$，我们有：

(a) $\mathrm{Tr}(M_\mu) = -||\mu||^2$;

(b) $(M_\mu, D) = 0$.

证明。(a) 注意到 $\mathrm{Tr}(M_\mu) = (M_\mu, I) = \langle I \cdot \mu, \mu\rangle = -||\mu||^2$，因为 $I \cdot \mu = -\mu$。

(b) 我们有 $(M_\mu, D) = \langle D \cdot \mu, \mu\rangle = 0$，因为根据 (6) 和导子性质，$D \cdot \mu = 0$。 □

对于 $\mu \in V_n$，令 $L^\mu_x\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 表示代数 μ 中由 $x \in \mathbb{C}^n$ 给出的左乘，也就是说，对所有 $y \in \mathbb{C}^n$，$L^\mu_x y = \mu(x, y)$。我们还用上标 $()^*$ 表示映射 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 相对于固定厄米内积的伴随。

命题 3.2. $\mu \in V_n \setminus \{0\}$ 的矩矩阵为

$$M_\mu = -2\sum_{i=1}^n L^{\mu*}_{x_i} L^\mu_{x_i} + \sum_{i=1}^n L^\mu_{x_i} L^{\mu*}_{x_i},$$

其中 $(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ 是 $\mathbb{C}^n$的一组正交归一基。

证明。设 $\mu \in V_n$ 和 $A \in i\mathfrak{k}$。我们有

$$\begin{aligned}
(M_\mu, A) &= \langle A \cdot \mu, \mu\rangle \\
&= \sum_{ijs} \langle (A\mu)(x_s, x_i), x_j\rangle \overline{\langle \mu(x_s, x_i), x_j\rangle} \\
&= \sum_{ijs} \langle A(\mu(x_s, x_i)) - \mu(Ax_s, , x_i) - \mu(x_s, Ax_i), x_j\rangle \overline{\langle \mu(x_s, x_i), x_j\rangle} \\
&= \sum_{ijs} \left(\langle \mu(x_s, x_i), Ax_j\rangle - \langle \mu(Ax_s, x_i), x_j\rangle - \langle \mu(x_s, Ax_i), x_j\rangle\right) \overline{\langle \mu(x_s, x_i), x_j\rangle} \\
&= \sum_{ijrs} \Big(\overline{\langle Ax_j, x_r\rangle} \langle \mu(x_s, x_i), x_r\rangle - \langle Ax_s, x_r\rangle \langle \mu(x_r, x_i), x_j\rangle - \langle Ax_i, x_r\rangle \langle \mu(x_s, x_r), x_j\rangle\Big) \\
&\qquad \times \overline{\langle \mu(x_s, x_i), x_j\rangle} \\
&= \sum_{ijrs} \overline{\langle \mu(x_i, x_j), x_s\rangle} \langle \mu(x_i, x_j), x_r\rangle \overline{\langle Ax_s, x_r\rangle} - 2\overline{\langle \mu(x_s, x_i), x_j\rangle} \langle \mu(x_r, x_i), x_j\rangle \langle Ax_s, x_r\rangle \\
&= -2\sum_{ijrs} \overline{\langle L^\mu_{x_s} x_i, x_j\rangle} \langle L^\mu_{x_r} x_i, x_j\rangle \langle Ax_s, x_r\rangle + \sum_{ijrs} \underbrace{\overline{\langle L^\mu_{x_i} x_j, x_s\rangle}}_{\langle x_j, L^{\mu*}_{x_i} x_s\rangle} \underbrace{\langle L^\mu_{x_i} x_j, x_r\rangle}_{=\langle x_j, L^{\mu*}_{x_i} x_r\rangle} \overline{\langle Ax_s, x_r\rangle} \\
&= -2\sum_{irs} \langle L^\mu_{x_r} x_i, L^\mu_{x_s} x_i\rangle \langle x_s, Ax_r\rangle + \sum_{irs} \langle L^{\mu*}_{x_i} x_s, L^{\mu*}_{x_i} x_r\rangle \overline{\langle Ax_s, x_r\rangle} \\
&= -2\sum_{irs} \langle L^\mu_{x_i} x_r, L^\mu_{x_i} x_s\rangle \overline{\langle Ax_r, x_s\rangle} + \sum_{irs} \langle L^{\mu*}_{x_i} x_s, L^{\mu*}_{x_i} x_r\rangle \overline{\langle Ax_s, x_r\rangle} \\
&= -2\sum_i (L^{\mu*}_{x_i} L^\mu_{x_i}, A) + \sum_i (L^\mu_{x_i} L^{\mu*}_{x_i}, A),
\end{aligned}$$

如所愿。 □

推论 3.3. 对于所有 $x,\ y \in \mathbb{C}^n$ 我们有

$$\langle M_\mu x, y\rangle = -2\sum_{ij} \langle L_x x_i, x_j\rangle \overline{\langle L_y x_i, x_j\rangle} + \sum_{ij} \overline{\langle L_{x_i} x_j, x\rangle} \langle L_{x_i} x_j, y\rangle.$$

3.1. **孤子的结构**。接下来，我们证明命题 1.1。设 $\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ 是一个交换代数，其中 $\mu \in V_n$。我们在 (5) 中已经看到， μ 是孤子，当且仅当 $D_\mu := M_\mu - c_\mu I$ 消去 μ，对于 $c_\mu = -||M_\mu||^2/||\mu||^2 \in \mathbb{R}$ （回忆 $I \cdot \mu = -\mu$）；由 (6) 可知，这等价于 D_μ 是 μ 的导子。由于 $M_\mu^* = M_\mu$ 且 $c_\mu \in \mathbb{R}$，也有 $D_\mu^* = D_\mu$。对于 (a) 部分，只需证明：若 μ 是孤子，则 D_μ 的某个正整数倍具有有理特征值。

不失一般性，我们可以假设 $D_\mu \neq 0$。令 $x_1, \ldots, x_n$ 为 D_μ 的特征向量的一组正交归一基；那么它也是 M_μ 的特征向量的一组基。考虑由 $\mu(x_i, x_j) = \sum_k \mu_{ij}^k x_k$（对所有 i, j）给出的"结构常数"μ_{ij}^k。令 $\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的子空间，由在该基下为对角的 $\mathbb{C}^n$ 的自同态组成；令 $\alpha_{ij}^k \in \mathfrak{h}$ 在该基下的矩阵为 $-E_{ii} - E_{jj} + E_{kk}$，其中 E_{ab} 在 (a, b)-项上为 1，其余位置为 0；并考虑由所有满足 $\mu_{ij}^k \neq 0$ 的 α_{ij}^k 张成的 $\mathfrak{h}$ 的子空间 F。

注意， $A \in \mathfrak{h}$ 是 μ 的导子，当且仅当对所有 i, j， $\mu(x_i, x_j)$ 属于 A 的 $(a_i + a_j)$-特征子空间；这等价于当 $\mu_{ij}^k \neq 0$ 时有 $a_k = a_i + a_j$。因此 $\mathrm{Der}(\mu) \cap \mathfrak{h} = F^\perp \cap \mathfrak{h}$。由 $M_\mu \in \mathfrak{h}$ 和引理 3.1(b)，可得 $M_\mu \in F$。现在令 $P\colon \mathfrak{h} \to F$ 为正交投影。在方程 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$ 中处处应用 P，得到

$$M_\mu = c_\mu P(I).$$

因此

$$-\frac{1}{c_\mu} D_\mu = I - \frac{1}{c_\mu} M_\mu = I - P(I).$$

由于 F 由整系数矩阵张成， $P(I)$具有有理系数，故此即完成了 (a) 部分的证明。

接下来讨论命题 1.1 的 (b) 部分。根据 [Jac49，第 869] 页， $\mathfrak{A}$ 的根基 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{A}$的特征理想，因此在 D_μ下不变。接着，利用 Mostow 和 Auslander-Brezin 的结果，我们证明存在 $\mathfrak{A}$ 的一个极大半单子代数 $\mathfrak{S}$，它在 D_μ下不变。首先注意到，D_μ 是半单的，因为它是厄米的。因此，由 D_μ 生成的 $\mathfrak{A}$ 的单维导子李代数 $\mathfrak{d}$ 完全可约。其代数包 $\mathfrak{d}^\#$ 由导子 [AB68, (1.2)] 构成，并且它也完全可约 [AB68, (1.5)]。现在，与之对应的 $GL(\mathfrak{A})$的连通代数子群是 $\mathfrak{A}$ [的一个完全可约自同构群]AB68, (1.6)。然而，约旦代数的完全可约自同构群会保持某个极大半单子代数 $\mathfrak{S}$ [Mos56，第 215] 页，因此 D_μ也同样如此。

最后，我们证明 $D_\mu|\mathfrak{S} = 0$。由于 D_μ 是 $\mathbb{C}^n$的厄米自同态，它是半单的，且特征值均为实数。设 $x \in \mathbb{C}^n$ 是 D_μ 的一个特征向量，对应的特征值为 $d \in \mathbb{R}$。导子性质意味着，对于每个整数 $k \geq 2$， x^k 都是 D_μ 的特征向量，其特征值为 kd。由有限维性可知，若 $d \neq 0$，则 x 是幂零的；由此可得 $x \in \mathfrak{N}$。这表明，对于 $\mathfrak{S}$ 中的特征向量， D_μ 可能出现的特征值只有零，从而完成了命题的证明。

4. 半单约旦代数

本节将证明，对于所有 n，半单约旦代数在基变换意义下实现能量 E_n 的最小值（命题 4.5）；定理 1.2 是其推论。本节中有关约旦代数的结果可参见 [BK66，第八章]。

4.1. **Peirce 分解**。设 $\mathfrak{A}$ 是一个复半单 Jordan 代数。则存在一个完备正交幂等元系，或称 *Jordan* 标架，即由 $\mathfrak{A}$ 的幂等元组成的集合 $\{e_1, \ldots, e_r\}$，满足 $e_1 + \cdots + e_r$ 是 $\mathfrak{A}$的单位元，且 $e_i e_j = 0$ 若 $i \neq j$。Jordan 标架在 $\mathfrak{A}$的自同构意义下唯一，而 Jordan 标架中元素的个数 $r \geq 2$ 称为 $\mathfrak{A}$的次数 。

如上所述，Jordan标架给出了 $\mathfrak{A}$ 的典范分解，将其分解为向量空间直和，具体如下。幂等元 e_k 的特征值只能是 0、$\frac{1}{2}$ 和 1，我们将相应的特征子空间记为

$\mathfrak{A}_0(e_k)$、$\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(e_k)$ 和 $\mathfrak{A}_1(e_k)$。$\mathfrak{A}$ 的 ***Peirce*分解** 为

$$\mathfrak{A} = \oplus_{i\le j}\mathfrak{A}_{ij},$$

其中

$$\mathfrak{A}_{ii} = \mathfrak{A}_1(e_i)$$

对所有 i以及

$$\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(e_i)\cap\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(e_j)$$

对于 $i\neq j$。

4.2. **Killing 型**。 接下来，除上述条件外，再假设 $\mathfrak{A}$ 是维数为n的单代数。固定一个 Jordan标架及相应的 Peirce分解。已知若 $r\ge 3$，则对所有 i,j，$\dim\mathfrak{A}_{ij}=d\in\{1,2,4,8\}$。此外，在 $r=2$的情况下，令 $d=n-2$。现在我们有

$$n = r+\frac{r(r-1)}{2}d. \tag{7}$$

若元素 $a\in\mathfrak{A}$满足 $\mathbb{C}[a]:=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{1,a,\dots,a^{r-1}\}$的维数为$r$（等价地，对所有 $b\in\mathfrak{A}$，$\dim\mathbb{C}[a]$ 在所有 $\dim\mathbb{C}[b]$中取最大值），则称其为正则。正则元 $a\in\mathfrak{A}$的约化迹为

$$\mathrm{tr}(x) = \mathrm{Tr}(L|_{\mathbb{C}[x]}),$$

并且"约化迹"函数可以唯一地延拓为线性映射 $\mathrm{tr}:\ \mathfrak{A}\to\mathbb{C}$ （比-较 [FK94，第2章，§2]）。由于 $\mathfrak{A}$ 是单的，我们有

$$\mathrm{tr}(ab) = \frac{r}{n}\tau(a,b). \tag{8}$$

$\mathfrak{A}$ 的***Killing* 型** 是由以下公式定义的对称双线性型 $K:\ \mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to\mathbb{C}$

$$K(a,b) = \mathrm{Tr}(L_aL_b),$$

对 $a,b\in\mathfrak{A}$ 成立。由迹公式可知， [BK66, Satz 9.4, 第八章]

$$K(a,b) = \left(1+(r-2)\frac{d}{4}\right)\mathrm{tr}(ab)+\frac{d}{4}\mathrm{tr}(a)\mathrm{tr}(b). \tag{9}$$

4.3. **矩映射**。 设 $\mathfrak{A}$ 是一个由 $\mu\in\mathcal{J}_n$给出的复半单 Jordan 代数。那么，迹型 τ 是非退化对称双线性型。此外，存在 $\mathfrak{A}$的一个欧几里得实形式 $\mathfrak{A}_0$，也就是说， $\mathfrak{A}_0$ 是形式实Jordan代数，使得 $\mathfrak{A}_0\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=\mathfrak{A}$ （[BK66, Satz 5.6, 第九章] 或 [FK94, Thm. 8.5.2]）。 τ 在 $\mathfrak{A}_0$ 上的限制是一个正定欧几里得内积（[BK66, Satz 3.4, 第九章] 或 [FK94, Prop. 3.1.5]）；我们将其扩展为 $\mathfrak{A}$上的厄米内积，记作 $\langle,\rangle$。

引理 4.1。 设 $a\in\mathfrak{A}$。那么，相对于 $\langle,\ \rangle$， $L_a:\ \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ 的伴随为 $L_{\bar a}$，其中 $\bar a\in\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{A}_0$上 a的复共轭。特别地， L_a 是关于 $a\in\mathfrak{A}_0$的厄米算子。

证明。对于 b、 $c\in\mathfrak{A}$，我们计算得

$$\langle L_ab,c\rangle = \tau(ab,\bar c) = \tau(b,a\bar c) = \tau(b,\overline{L_{\bar a}c}) = \langle b,L_{\bar a}c\rangle,$$

因为 L_a 关于 τ是自伴的，由此可证得结论。 □

下一个结果表明，复半单 Jordan 代数 $\mathfrak{A}$ 的矩矩阵本质上由其 Killing 型给出。

命题 4.2。 设 M_μ 为 $\mathfrak{A}=(\mathbb{C}^n,\ \mu)$的矩矩阵，即厄米矩阵，并设 K_μ 为 $\mathfrak{A}$的 ***Killing* 型**。那么

$$\langle M_\mu a,b\rangle = -K_\mu(a,\bar b)$$

对所有 a、 $b\in\mathfrak{A}$。

证明。设 $\{x_1,\dots,x_n\}$ 是 $\mathfrak{A}_0$中包含的 $\mathbb{C}^n$ 关于 $\langle\ ,\ \rangle$ 的正交归一基。利用命题 3.2和引理 4.1, 我们可以写成

$$\begin{aligned}\langle M_\mu a,b\rangle &= -\sum_i \langle (L^\mu_{x_i})^2 a,b\rangle\\ &= -\sum_i \langle L^\mu_{x_i}a, L^\mu_{x_i}b\rangle\\ &= -\sum_i \langle L^\mu_a x_i, L^\mu_b x_i\rangle\\ &= -\sum_i \langle L^\mu_{\bar b} L^\mu_a x_i, x_i\rangle\\ &= -\mathrm{Tr}(L^\mu_{\bar b}L^\mu_a)\\ &= -K_\mu(a,\bar b),\end{aligned}$$

如所需。 □

引理 4.3。 设 $\mathfrak{A}$ 是由 $\mu\in\mathcal{J}_n$表示的复单 ***Jordan*** 代数。分别用 r 和 d表示 $\mathfrak{A}$ 的次数以及非对角皮尔斯分量 $\mathfrak{A}_{ij}\,(i\neq j)$ 的维数，其中我们固定一个包含在欧几里得实形式中的 ***Jordan***标架 $(e_1,\dots,e_r)$。同时在 $\mathbb{C}^n$ 上固定一个厄米内积，定义如下（见 *(8)*）

$$\langle x,y\rangle := \frac{r}{n}\mathrm{Tr}(L^\mu_{x\bar y}) = \mathrm{tr}^\mu(x\bar y)$$

对于 $x,y\in\mathbb{C}^n$。那么 ***Jordan***标架是一个正交归一集，并且可以通过添加元素 $e^k_{ij}\in\mathfrak{A}_{ij}$, $k=1,\dots,d$（对所有 $i\neq j$），将其补成 $\mathbb{C}^n$的正交归一基。在此基下， $\mathfrak{A}=(\mathbb{C}^n,\mu)$的矩矩阵为

$$M_\mu = -\alpha I - \frac{d}{4}N$$

其中 $\alpha = 1+(r-2)\frac{d}{4}$并且

$$N=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 1 & \\ \vdots & & \vdots & \mathbf{0}\\ 1 & \cdots & 1 & \\ \hline & & & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0}\\ & {\scriptstyle r} & & {\scriptstyle n-r}\end{array}\right).$$

证明。考虑相对于 Jordan标架 $(e_1,\dots,e_r)$ 的 Peirce分解 $\mathfrak{A}=\oplus_{i\le j}\mathfrak{A}_{ij}$。那么

$$\mathfrak{A}_0(e_k)=\oplus_{i,j\neq k}\mathfrak{A}_{ij},\ \mathfrak{A}_{\frac12}(e_k)=\oplus_{i\neq k}\mathfrak{A}_{ik},\ \text{and}\ \mathfrak{A}_1(e_k)=\mathfrak{A}_{kk},$$

其中对所有 $i\neq j$, $\dim\mathfrak{A}_{ij}=d$，且对所有 k, $\mathfrak{A}_{kk}=\mathbb{C}\cdot e_k$。利用 $e_k^2=e_k$、(7) 和 (8)，我们立即得到

$$\langle e_k,e_k\rangle = \mathrm{tr}^\mu(e_k)=\frac{r}{n}\mathrm{Tr}(L^\mu_{e_k})=\frac{r}{n}\left(\frac12(r-1)d+1\right)=1$$

对所有 k 均成立。此外，利用

$$\mathfrak{A}_{ij}\cdot(\mathfrak{A}_{ii}+\mathfrak{A}_{jj})\subset\mathfrak{A}_{ij},\ \mathfrak{A}_{ij}\cdot\mathfrak{A}_{ij}\subset\mathfrak{A}_{ii}+\mathfrak{A}_{jj}$$
$$\mathfrak{A}_{ij}\cdot\mathfrak{A}_{jk}\subset\mathfrak{A}_{ik},\ \mathfrak{A}_{ij}\cdot\mathfrak{A}_{ik}\subset\mathfrak{A}_{jk},$$

对于彼此不同的 i、 j、 k，我们看到，对于 $e^k_{ij}\in\mathfrak{A}_{ij}\,(i\neq j)$,

$$\mathrm{tr}^\mu(e^k_{ij})=\frac{r}{n}\mathrm{Tr}(L^\mu_{e^k_{ij}})=0.$$

最后，由公式 (9) 和命题 4.2 可得：

$$\langle M_\mu x, y\rangle = -\alpha\langle x, y\rangle - \frac{d}{4}\mathrm{tr}^\mu(x)\mathrm{tr}^\mu(\bar{y}).$$

因此

$$\langle M_\mu e_i, e_j\rangle = -\alpha\delta_{ij} - \frac{d}{4},$$
$$\langle M_\mu e_\ell, e_{ij}^k\rangle = 0,$$

and

$$\langle M_\mu e_{ij}^k, e_{rs}^t\rangle = -\alpha\delta_{ir}\delta_{js}\delta_{kt},$$

如愿。 □

注 4.4. 利用引理 4.3 证明中的计算，容易看出

$$E_n(\mu) = \frac{\mathrm{Tr}M_\mu^2}{(\mathrm{Tr}M_\mu)^2} = \frac{n\alpha^2 + \frac{r^2d^2}{16} + \frac{r\alpha d}{2}}{(n\alpha + \frac{rd}{4})^2} = \frac{n\alpha^2 + \frac{r\alpha d}{2} + \frac{r^2d^2}{16}}{n\alpha^2 + \frac{r\alpha d}{2} + \frac{r^2d^2}{16n}} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{n},$$

其中 $n \geq 2$。在命题4.5中，我们将看到，可以稍微调整 Peirce 基，以降低 E_n 的值。

定理 1.2 可由以下结果推出。

命题 4.5. 对于所有 n， $E_n : \mathcal{J}_n \to \mathbb{R}$ 的最小值为 $1/n$，且仅当约旦代数为半单时才能取到该值。反过来，如果 μ 是半单的，那么对于某个 $g \in G$，有 $E_n(g \cdot \mu) = 1/n$ 。

证明。注意， $E_n(\mu) = \frac{1}{n}$ 当且仅当 $M_\mu = c_\mu I$。事实上，若 c_1、.....、 c_n 是 M_μ 的（实）特征值，并且我们要在满足条件 $c_1+\cdots+c_n$ =1 的前提下使 $c_1^2+\cdots+c_n^2$ 的值最小，那么立即可得 $c_1 = \cdots = c_n = 1/n$。

我们首先证明，复半单约当代数的矩矩阵经过基变换后是标量矩阵。只需考虑复单 Jordan 代数 μ。我们从引理 4.3 中欧几里得实形式的基 $\{e_i\} \cup \{e_{ij}^k\}$ 及其对应的矩矩阵 $M_\mu = -\alpha I - \frac{d}{4}N$ 开始。设 $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ 是 $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(e_1 \ldots, e_r)$ 的一个（正向定向的）实正交归一基，且其第一个元素平行于单位元 $1 = e_1 + \ldots + e_r$。那么 $\{f_i\} \cup \{e_{ij}^k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的正交归一基。设 $k \in SO(n)$、$k = \left(\begin{smallmatrix} k' & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$，其中 $k' \in SO(r)$，使得 k 将 $f_i \mapsto e_i$ 映到 $e_{ij}^k \mapsto e_{ij}^k$，并令 $\nu = k \cdot \mu$。由于矩映射是 $U(n)$- 等变的，我们有

$$M_\nu = kM_\mu k^{-1} = -\alpha I - \frac{d}{4}\left(\begin{array}{ccc|c} r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}\right). \tag{10}$$

接下来我们将证明，可以对基（实际上只需对 f_1）重新缩放，使矩矩阵成为标量。

我们需要对 ν_{ij}^k 作一些说明。记 $\{f_1, \ldots, f_n\}$ 为上文构造的 $\mathbb{R}^n$ 的正交归一基，使得 f_1 与 1 平行，$\{f_1, \ldots, f_r\}$ 张成 $\mathfrak{A}_{11}+\ldots+\mathfrak{A}_{rr}$，而 $\{f_{r+1}, \ldots, f_n\}$ 张成 $\oplus_{ij}\mathfrak{A}_{ij}$。设 $x \in \mathbb{R}^n$ 为单位向量。则 ($x^2 = \mu(x, x)$)

$$x^2 = \frac{\langle x^2, 1\rangle}{||1||^2}1 + y, \quad y \perp x.$$

注意，$\langle x^2、\ 1\rangle = ||x||^2 = 1$ 和 $||1||^2 = \frac{r}{n}\mathrm{Tr}(I) = r$。由此可得

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{r}} f_1 + y, \quad y \perp f_1. \tag{11}$$

我们还有 $\langle \mu(f_i, f_j)\ 1\rangle = \langle f_i, f_j\rangle = 0$，若 $i \neq j$。由于 $\nu(e_i, e_j) = k(\mu(f_i, f_j))$，因此可得

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^{n} e_1' e_i' \otimes e_i + \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{i=2}^{n} e_i'^2 \otimes e_1 + \text{terms not involving } e_1, e_1'; \tag{12}$$

这里我们用 $e_1', \ldots, e_n'$ 表示 $e_1, \ldots, e_n$的对偶基。

接下来我们考虑 ν的如下一个参数变形，并证明对于某个参数值，矩矩阵是标量的。令 $\nu_t = g_t^{-1} \cdot \nu$，其中

$$g_t = \exp(-tE_{11}) = \begin{pmatrix} e^{-t} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

我们可以写成 $\nu = \sum_{ijk} \nu_{ij}^k v_k^{ij}$，其中 $v_k^{ij} = e_i' e_j' \otimes e_k$，求和遍历 $i \leq j$，并且 n

$$||v_k^{ij}||^2 = 2\ (i \neq j) \text{ and } ||v_k^{ii}||^2 = 1.$$

此外，v_k^{ij} 是 $S^2(\mathbb{C}^{n*}) \otimes \mathbb{C}^n$ 的权向量，其权为 $\alpha_{ij}^k = -\theta_i - \theta_j + \theta_k$；这里相对于 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数而言，该子代数由对角矩阵组成，其中我们用 θ_i 表示投影到第 i个对角项上的投影。现在

$$\nu_t = \sum_{ijk} e^{t\alpha_{ij}^k(E_{11})} \nu_{ij}^k v_k^{ij}$$

and

$$E_{\ell\ell} \cdot \nu_t = \sum_{ijk} e^{t\alpha_{ij}^k(E_{11})} \alpha_{ij}^k(E_{\ell\ell}) \nu_{ij}^k v_k^{ij}.$$

因此，对于 $\ell \geq 2$,

$$\begin{aligned}
(M_{\nu_t}, E_{\ell\ell}) &= \langle E_{\ell\ell} \cdot \nu_t, \nu_t \rangle \\
&= \sum_{ijk} e^{2t\alpha_{ij}^k(E_{11})} \alpha_{ij}^k(E_{\ell\ell}) |\nu_{ij}^k|^2 ||v_k^{ij}||^2 \\
&= 0 + \frac{1}{r} e^{2t}(-2) \cdot 1 + \underbrace{\sum_{ijk \neq 1} \alpha_{ij}^k(E_{\ell\ell}) |\nu_{ij}^k|^2 ||v_k^{ij}||^2}_{=:c_\ell} \\
&= -\frac{2}{r} e^{2t} + c_\ell,
\end{aligned} \tag{13}$$

其中我们使用了形式（12）。由于（M_{ν_0}, $E_{\ell\ell}$）$= -\frac{2}{r} + c_\ell$与 $\ell \geq 2$无关，根据（10）可推得，对于某个 $c \in \mathbb{R}$，有 $c_2 = \cdots = c_n = c$。

接下来，我们再次利用（12）来描述 M_{ν_t} 的第一项:

$$\begin{aligned}
(M_{\nu_t}, E_{11}) &= \sum_{ijk} e^{2t\alpha_{ij}^k(E_{11})} \alpha_{ij}^k(E_{11}) |\nu_{ij}^k|^2 ||v_k^{ij}||^2 \\
&= \frac{1}{r} e^{-2t}(-1)(1 + (n-1)2) + \frac{1}{r} e^{2t} \cdot 1 \cdot ((n-1) \cdot 1) \\
&= -\frac{2n-1}{r} e^{-2t} + \frac{n-1}{r} e^{2t}.
\end{aligned} \tag{14}$$

利用（13）和（14）考察（$\ell \geq 2$）

$$\gamma(t) = (M_{\nu_t}, E_{11}) - (M_{\nu_t}, E_{\ell\ell}) = \frac{n+1}{r}e^{2t} - \frac{2n-1}{r}e^{-2t} - c.$$

由于 $\lim_{t\to-\infty}\gamma(t) = -\infty$ 且 $\lim_{t\to+\infty}\gamma(t) = +\infty$，因此存在 $t_0 \in \mathbb{R}$，使得 $\gamma(t_0) = 0$。我们已经证明，$M_{\nu_{t_0}}$ 的所有对角元都相等。最后一步是证明$M_{\nu_{t_0}}$（实际上，对于所有 t，M_{ν_t}）的非对角元均为零。

由于 M_ν 是一个对角矩阵，只需证明$(1 \leq p < q \leq n)$：

$$\frac{d}{dt}(M_{\nu_t}, E_{pq} + E_{qp}) = 2\Re\langle (E_{pq} + E_{qp}) \cdot \nu_t, E_{11} \cdot \nu_t\rangle \tag{15}$$

为零。

注意

$$E_{11} \cdot \nu_t = -\frac{e^{-t}}{\sqrt{r}}\sum_{i=1}^{n} v_i^{1i} + \frac{e^t}{\sqrt{r}}\sum_{i=2}^{n} v_1^{ii}$$

因此我们只需知道$(E_{pq} + E_{qp}) \cdot \nu_t$的 v_i^{1i}-和 v_1^{ii}-分量。

我们计算

$$\langle((E_{pq} + E_{qp}) \cdot \nu_t)(e_1, e_i), e_i\rangle = -\delta_{p1}\langle\nu_t(e_q, e_i), e_i\rangle,$$
$$\langle(E_{11} \cdot \nu_t)(e_1, e_i), e_i\rangle = -\langle\nu_t(e_1, e_i), e_i\rangle,$$

并且，对于 $i = 2, \ldots, n$,

$$\langle((E_{pq} + E_{qp}) \cdot \nu_t)(e_i, e_i), e_1\rangle = \delta_{p1}\langle\nu_t(e_i, e_i), e_q\rangle,$$
$$\langle(E_{11} \cdot \nu_t)(e_i, e_i), e_1\rangle = \langle\nu_t(e_i, e_i), e_1\rangle.$$

将这些公式代入 (15) 后，除非 $p = 1$，否则结果已为零，其中

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(M_{\nu_t}, E_{1q} + E_{q1}) = \Re\sum_{i=2}^{n}\langle\nu_t(e_q, e_i), e_i\rangle\overline{\langle\nu_t(e_1, e_i), e_i\rangle} + \langle\nu_t(e_i, e_i), e_q\rangle\overline{\langle\nu_t(e_i, e_i), e_1\rangle}. \tag{16}$$

注意，利用 $i, q \geq 2$,

$$\langle\nu_t(e_i, e_i), e_q\rangle = \langle\nu(e_i, e_i), e_q\rangle,$$
$$\langle\nu_t(e_i, e_i), e_1\rangle = e^t\langle\nu(e_i, e_i), e_1\rangle,$$
$$\langle\nu_t(e_q, e_i), e_i\rangle = \langle\nu(e_i, e_i), e_q\rangle,$$
$$\langle\nu_t(e_1, e_i), e_i\rangle = e^{-t}\langle\nu(e_i, e_i), e_1\rangle,$$

so

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(M_{\nu_t}, E_{1q} + E_{q1}) &= \sum_{i=2}^{n} e^{-t}\langle\nu(e_i, e_i), e_q\rangle\langle\nu(e_i, e_i), e_1\rangle + e^t\langle\nu(e_i, e_i), e_q\rangle\langle\nu(e_i, e_i), e_1\rangle \\ &= \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{r}}(e^t + e^{-t})\langle\nu(e_i, e_i), e_q\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}}(e^t + e^{-t})\left\langle\sum_{i=2}^{n}\nu(e_i, e_i), e_q\right\rangle.\end{aligned}$$

最后，我们断言可以选择基 $f_1, \ldots, f_n$，使得 $\sum_{i=2}^{n}\mu(f_i, f_i) \in \mathbb{R} \cdot 1$。这将推出 $\sum_{i=2}^{n}\nu(e_i, e_i) \in \mathbb{R} \cdot e_1 \perp e_q$，从而得到 $\frac{d}{dt}(M_{\nu_t}, E_{1q} + E_{q1}) = 0$。

该断言分两步证明。第一步，回顾幂等元 $e_1 \ldots, e_r$，其中 $e_i e_j = 0$ 对于 $i \neq j$ 和 $e_1 + \ldots + e_r = 1$ 成立。令 $f_1 = \frac{1}{\sqrt{r}}$，并

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}}(e_1 + \ldots + e_{i-1} - (i-1)e_i)$$

对 $i = 2, \ldots, r$。于是，经过简单计算可得

$$\sum_{i=2}^{r} f_i^2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot 1.$$

第二步，我们使用 [BK66, 第八章命题 9.1]。该命题指出，对于所有满足 $||u|| = 1$ 的 $u \in \mathfrak{A}_{ij}$ $(i \neq j)$，都有 $u^2 = \frac{1}{2}(e_i + e_j)$。最后，

$$\sum_{i=r+1}^{n} f_i^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq r} \frac{d}{2}(e_i + e_j) = \frac{(r-1)d}{2} \sum_{i=1}^{r} e_i = \frac{(r-1)d}{2} \cdot 1,$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = (r-1)\left(\frac{1}{r} + \frac{d}{2}\right) \cdot 1,$$

如所愿。

在证明的其余部分，我们将证明反过来，如果 M_μ 是标量矩阵，那么 $\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ 是半单的。

写作 $\mathfrak{A} = \mathfrak{N} + \mathfrak{S}$（向量空间的直和），其中 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的根基，而 $\mathfrak{S}$ 是一个半单 Jordan 代数。反设 $\mathfrak{N} \neq 0$。则

$$\mathfrak{N}^{[0]} = \mathfrak{N},\ \mathfrak{N}^{[k+1]} = (\mathfrak{N}^{[k]})^3,$$

对于 $k \geq 0$，定义了 $\mathfrak{A}$ 的一个递减理想序列（[Pen51，引理 2.2]; 另见 [ZSSS82，注释 3，第 3 节，第 4] 章）。由 $\mathfrak{N}$ 的幂零性，可得满足 $\mathfrak{N}^{[k_0+1]} = 0$ 的最小 $k_0 \geq 0$。令 $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}^{[k_0]} \neq 0$。于是

$$\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B},\ \mathfrak{B}_{k+1} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_k^2 + \mathfrak{B}_k^2,$$

对于 $k \geq 0$，这是 $\mathfrak{A}$ [的一个递减理想序列（Pen51，引理 2.2]）。根据 [Pen51，定理 2.5],，存在满足 $\mathfrak{B}_{k_1} \subset \mathfrak{B}^2$ 的最小 $k_1 \geq 1$。现在有两种情况。

若 $\mathfrak{B}_{k_1} \neq 0$，则 $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_{k_1}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个非零理想，且

$$\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{B}_{k_1}^2 \subset \mathfrak{B}^2\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^3 = (\mathfrak{N}^{[k_0]})^3 = \mathfrak{N}^{[k_0+1]} = 0.$$

若 $\mathfrak{B}_{k_1} = 0$，则 $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_{k_1-1}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个非零理想，且

$$\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{B}_{k_1-1}^2 = 0$$

因为 $0 = \mathfrak{B}_{k_1} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}_{k_1-1}^2 + \mathfrak{B}_{k_1-1}^2$。

无论如何，我们已经找到了一个非零理想 $\mathfrak{C}$ of $\mathfrak{A}$，满足 $\mathfrak{C}^2 = 0$。现在可以完成证明。设 $x_1, \ldots, x_m$ 是 $\mathfrak{C}$ 的一组正交归一基，设 $y_1, \ldots, y_{n-m}$ 是 $\mathfrak{C}^\perp$ 的一组正交归一基。对于任意 $x \in \mathfrak{C}$，由推论 3.3，以及对所有 i 都有 $L_x^\mu x_i = 0$ 且 L_x^μ 的像包含于 $\mathfrak{C}$ 这一事实，可得：

$$\begin{aligned} 0 &> \langle M_\mu x, x \rangle \\ &= -2\sum_{ij} |\langle L_x^\mu y_i, x_j \rangle|^2 + \sum_{ij} |\langle L_{x_i}^\mu y_j, x \rangle|^2 + \sum_{ij} |\langle \underbrace{L_{y_i}^\mu x_j}_{= L_{x_j}^\mu y_i}, x \rangle|^2 + \sum_{ij} |\langle L_{y_i}^\mu y_j, x \rangle|^2. \end{aligned}$$

我们令 $x = x_k$，并对 $k = 1, \ldots, m$ 求和，得到

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_k \langle M_\mu x_k, x_k \rangle \\ &= -2\sum_{ijk} |\langle L^\mu_{x_k} y_i, x_j\rangle|^2 + 2\sum_{ijk} |\langle L^\mu_{x_i} y_j, x_k\rangle|^2 + \sum_{ijk} |\langle L^\mu_{y_i} y_j, x_k\rangle|^2 \\ &= \sum_{ijk} |\langle L^\mu_{y_i} y_j, x_k\rangle|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

矛盾。因此 $\mathfrak{N} = 0$，正如所需。 □

5. E_n的最大值

由于能量 E_n 沿着 $V_n \backslash \{0\}$中的射线保持不变，因此它能取得最大值。本节中，我们确定这些最大值点，并证明定理1.5。

我们引入两个重要的复 Jordan 代数。我们仿照李代数的命名方式为它们命名:

(*a*) 海森堡型 ***Jordan*** 代数 μ_{Heis} 有一组基 $\{n_1, \ldots, n_n\}$ ($n \geq 2$)，满足 $n_1^2 = n_2$，其余乘积均为零。这是一个幂零 Jordan 代数。(*b*) 双曲 ***Jordan*** 代数 μ_{hyp} 有一组基 $\{e, n_1, \ldots, n_{n-1}\}$ ($n \geq 2$)，满足 $e^2 = e$,$en_i = \frac{1}{2}n_i$ 对所有 i成立，其余乘积均为零。文献 [Mar13, Teorema 4.65], 中曾研究过此代数，并证明了它具有刚性。

命题 5.1. 每个维数至少为二且不同构于 μ_{hyp} 的约旦代数都退化为 μ_{Heis}。此外，在 $\mathcal{J}_n$ ($n \geq 2$) 中，唯一非平凡退化为平凡 ***Jordan*** 代数（所有乘积均为零）的约旦代数只有 μ_{Heis} 和 μ_{hyp}。

证明。设 $\mu \in \mathcal{J}_n$。假设存在 $x_1 \in \mathbb{C}^n$，使得 x_1、$x_2 := \mu(x_1, x_1)$ 线性无关；将此组向量补成一组基 $x_1, \ldots, x_n$。定义 $g_t \in G$，令 $g_t x_1 = t x_1$, $g_t x_i = t^2 x_i$ 对于 $i = 2, \ldots, n$ 成立，并设 $\mu_t = g_t^{-1} \cdot \mu$。于是，对所有 $t \neq 0$，都有 $\mu_t(x_1, x_1) = x_2$。此外，对于 $(i, j) \neq (1, 1)$，存在 $m \in \{3, 4\}$，使得

$$\mu_t(x_i, x_j) = t^{m-1}\mu^1_{ij} x_1 + t^{m-2}(\mu^2_{ij} x_2 + \cdots + \mu^n_{ij} x_n) \to 0$$

如 $t \to 0$。换言之，$\mu \to \mu_{Heis}$。

若上文不存在 x_1 as a，则存在非零线性映射 $\ell : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$，使得 $\mu(x, x) = \ell(x)x$。由极化，$\mu(x, y) = \frac{1}{2}(\ell(x)y + \ell(y)x)$。令 $n_1, \ldots, n_{n-1}$ 为 ker ℓ 的一组基，并选取 e使得 $\ell(e) = 1$。于是，对所有 i, j，均有 $\mu(e, e) = e$, $\mu(e, n_i) = \frac{1}{2}n_i$ 且 $\mu(n_i, n_j) = 0$，这表明$\mu \cong \mu_{hyp}$。

此外，dim Der(μ_{hyp}) $= n^2 - n$，且 dim Der(μ_{Heis}) $= n + (n-2)(n-1) = n^2 - 2n + 2$；事实上，若 $d \in$ Der(μ_{Heis})，则 $d(n_1)$ 可任意取值，$d(n_i) \in$ span$(n_2, \ldots, n_n)$ 对于 $i \geq 2$成立，且 $d(n_2) = 2n_1 d(n_1)$。由于对于 $n \geq 2$, dim Der(μ_{Heis}) $\leq$ dim Der(μ_{hyp})，故由 KM14, p. 284] 可得 $\mu_{hyp} \not\to \mu_{Heis}$ [。此外，$\mu_{Heis} \not\to \mu_{hyp}$，因为 dim $\mu_{hyp}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n) = n > 1 =$ dim $\mu_{Heis}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$（或者说，$\mu_{Heis}$是结合的，但$\mu_{hyp}$ 不是）。□

由于 μ_{hyp} 不是幂零 Jordan 代数，根据命题 5.1，μ_{Heis} 属于 $\mathcal{N}_n$ 中每个 G-轨道的闭包，由此证明了定理1.5的第一项断言。第二项断言是以下结果的推论。

推论5.2。约旦代数 μ_{Heis} 和μ_{hyp} 是孤子。此外，E_n 的最大值为5，且当且仅当在 μ_{Heis}的 G-轨道上取到。

证明。设 μ 是 E_n的极大点。这意味着 μ 是 E_n 在$G\cdot\mu$上的临界点，因而也是 V_n上的临界点。根据 Kirwan-Ness理论（定理2.1）， μ 是 E_n 在$G\cdot\mu$上的极小点，这意味着 E_n沿着 $G\cdot\mu$保持不变。现在， $G\cdot\mu$中的每一点都是 E_n 在 $G\cdot\mu$上的极小点，因此经过 μ 的 G-轨道与 K-轨道除比例因子外相同，即 $G\cdot\mu=\mathbb{C}^\times\cdot K\cdot\mu$，这同样可由 Kirwan-Ness理论得出。由此可知， μ 唯一可能的退化是退化为平凡代数。根据定理5.1， μ 与 μ_{Heis} 或μ_{hyp}之一同构。简单计算可得:

$$M_{\mu_{Heis}}=-5I+\begin{pmatrix}3&&&&\\&6&&&\\&&5&&\\&&&\ddots&\\&&&&5\end{pmatrix},\quad E_n(\mu_{Heis})=5,$$

and

$$M_{\mu_{hyp}}=-\left(\frac{n+1}{2}\right)I+\begin{pmatrix}0&&&&\\&\frac{n+1}{2}&&&\\&&\ddots&&\\&&&\frac{n+1}{2}\end{pmatrix},\quad E_n(\mu_{hyp})=1.$$

证明至此完成。 □

6. 分层

本节回顾交换代数情形下零锥的 Kirwan-Ness分层。我们采用 [Lau03, LW11] 的表述和记号（关于下文省略的证明，请读者参阅该文），并指出这些结果与反对称代数情形完全相同。

再次考虑 $G=GL(n,\mathbb{C})$ 对 $V_n=S^2(\mathbb{C}^{n*})\otimes\mathbb{C}^n$ 的作用。由于对于 $g_t=tI$，$\lim_{t\to0}g_t^{-1}\cdot\mu=\lim_{t\to0}t\mu=0$，每个交换代数都会退化为平凡代数，因此零锥 $N=V_n$。令 $\mathfrak{h}$ 为 $i\mathfrak{k}$的对角矩阵子代数，选取 $\mathfrak{h}$ 中的一个正Weyl室 $\mathfrak{h}^+$，并以 $\overline{\mathfrak{h}^+}$表示其闭包。 E 的临界集是 K-不变的，并分解为有限个互不相交的闭子集 $\{C_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$，其中 $\mathcal{B}$ 是$\overline{\mathfrak{h}^+}$的有限子集，使得 C_β 在 m 作用下映到 $i\mathfrak{k}$中的伴随轨道 $K\cdot\beta$。令 S_β 为 $V_n\setminus\{0\}$ 中在 $-\nabla E_n$ 作用下流入 C_β 的所有点构成的集合（ C_β的稳定流形）。那么 S_β 是 G-不变的、扎里斯基局部闭、不可约且非奇异的，并且有:

$$V_n\setminus\{0\}=\dot{\bigcup}_{\beta\in\mathcal{B}}S_\beta\qquad\text{(disjoint union)},\tag{17}$$

其中

$$\bar{S}_\beta\setminus S_\beta\subset\bigcup_{||\beta'||>||\beta||}S_{\beta'}.\tag{18}$$

记 $\mu=\sum_{ijk}\mu_{ij}^k e_i'e_j'\otimes e_k$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的一组正交归一基 $e_1,\dots,e_n$，其对偶基为 $e_1',\dots,e_n'$。对于 $\mu\in V_n\setminus\{0\}$，定义

$\beta_\mu=$ 为满足 $\mu_{ij}^k\neq0$ 的元素 $\alpha_{ij}^k\in\mathfrak{h}$ 的最小范数凸组合。

回忆 $\alpha_{ij}^k=-E_{ii}-E_{jj}+E_{kk}$，因此 $\mathrm{Tr}\beta_\mu=-1$。另一种描述是

$$S_\beta=\{\mu\in V_n\setminus\{0\}\mid\beta\text{ is of maximal norm in }\{\beta_{g\cdot\mu}\mid g\in G\}\},$$

并定义 $\mathcal{B}=\{\beta\in\bar{\mathfrak{h}}^+\mid S_\beta\neq\varnothing\}$。另定义

$$W_\beta=\{\mu\in V_n\mid(\beta,\alpha_{ij}^k)\geq||\beta||^2\text{ for all }\mu_{ij}^k\neq0\},$$

也就是说， $d\pi(\beta)$的特征值为 $\geq ||\beta||^2$的特征子空间之和，其子集

$$Y_\beta = \{\mu \in W_\beta \mid (\beta, \alpha_{ij}^k) = ||\beta||^2 \text{ for at least one } \mu_{ij}^k \neq 0\},$$

and

$$Y_\beta^{ss} = Y_\beta \cap S_\beta.$$

然后证明

$$\begin{aligned} Y_\beta^{ss} &= S_\beta \cap W_\beta \\ &= \{\mu \in S_\beta \mid \beta = \beta_\mu\}, \end{aligned} \tag{19}$$

and

$$S_\beta = K \cdot Y_\beta^{ss}. \tag{20}$$

最后,

$$W_\beta \setminus \{0\} \subset S_\beta \cup \bigcup_{||\beta'||>||\beta||} S_{\beta'}. \tag{21}$$

引理 6.1。若 $M_\mu \in \mathfrak{h}$，则

$$M_\mu = \sum_{ijk} |\mu_{ij}^k|^2 \, \alpha_{ij}^k.$$

证明。对于 $\mathbb{C}^n$ 的标准基 $e_1, \ldots, e_n$，我们有

$$\langle M_\mu e_k, e_k\rangle = -2\sum_{ij} |\langle L_{e_k}^\mu e_i, e_j\rangle|^2 + \sum_{ij} |\langle L_{e_i}^\mu e_j, e_k\rangle|^2,$$

so

$$\begin{aligned} M_\mu &= \sum_k \langle M_\mu e_k, e_k\rangle E_{kk} \\ &= -\sum_{ijk} |\langle L_{e_i}^\mu e_j, e_k\rangle|^2 E_{ii} - \sum_{ijk} |\langle L_{e_i}^\mu e_j, e_k\rangle|^2 E_{jj} + \sum_{ijk} |\langle L_{e_i}^\mu e_j, e_k\rangle|^2 E_{kk} \\ &= \sum_{ijk} |\mu_{ij}^k|^2 \, \alpha_{ij}^k, \end{aligned}$$

如所需。 □

推论 6.2。若 $m(\mu) \in \mathfrak{h}$，则 $m(\mu) \in$ 凸包 $\left(\{\alpha_{ij}^k : \ \mu_{ij}^k \neq 0\}\right)$ *(凸包)*；特别是，

$$E(\mu) = ||m(\mu)||^2 \geq ||\beta_\mu||^2,$$

且当且仅当 $m(\mu) = \beta_\mu$ 当且仅当 μ 是一个孤子时等号成立；在这种情况下， $\mu \in S_\beta$ 对于 $\beta \in \mathcal{B}$ $\bar{\mathfrak{h}}^+$ Ad_K-共轭于 β_μ的唯一元素。一般而言，由于 E 是 K-不变的，由方程 *(19)* 和 *(20)* 可得

$$E(\mu) \geq ||\beta||^2 \textit{ for all } \mu \in S_\beta, \tag{22}$$

且当且仅当等号成立，当且仅当 μ 是一个孤子；此时 $m(\mu)$ 既 Ad_K-共轭于 β，也共轭于 β_μ。

推论 6.3. 若 μ是一个孤子，且 D_μ的一个特征值为0，则 $||\beta_\mu|| \leq 1$。

证明。将 μ 替换为一个 Ad_K-共轭元后，不妨设 $\beta_\mu = m(\mu)$，因此 $\beta_\mu + ||\beta_\mu||^2 I = \frac{1}{||M_\mu||^2} D_\mu$有一个特征值为 0，也就是说，$(\beta_\mu, E_{ii}) = -||\beta_\mu||^2$，其中 $i = 1, \ldots, n$。最后， $||\beta_\mu|| \geq |(\beta_\mu, E_{ii})| = ||\beta_\mu||^2$。 □

由于分层 (17) 是 G-不变的，它自然会在 $V_n \setminus \{0\}$ 的任意 G-不变子簇上诱导出一个分层。

命题 6.4. $\beta = -\frac{1}{n}I$ 的分层 $S_\beta \cap \mathcal{J}_n$ 恰好由 n维半单约旦代数组成。

证明。由命题 4.5 可知，若 $\mu \in \mathcal{J}_n$ 是半单的，则存在 $g \in G$，使得 $M_{g\cdot\mu}$ 是标量矩阵。因此 $\mu \in S_\beta \cap \mathcal{J}_n$。反过来，假设 $\mu \in S_\beta \cap \mathcal{J}_n$。则由 $(-\nabla E_n)$-流生成的积分曲线 $\{\mu(t)\}$，其中 $\mu(0) = \mu$，包含于 $G\cdot\mu$ 中，并收敛到 S_β 中的一个孤子。特别地，当 t 充分大时，$M_{\mu(t)}$ 的所有特征值均为负。在命题 4.5 证明的后半部分，论证只需用到这一信息，即可推出当 t 充分大时，$\mu(t)$ 必须是半单的。因此 μ 也是半单的。□

6.1. **命题 1.3 和定理 1.4 的证明**。若 $\mu \to \nu$，则 $G\cdot\nu \subset \overline{G\cdot\mu}$。设 $\mu \in S_\beta$，其中 $\beta \in \mathcal{B}$。那么 (18) 推出 $\nu \in S_\beta \cup \bigcup_{||\beta'||>||\beta|} S_{\beta'}$。根据推论 6.2，我们有

$$E(\nu) \geq ||\beta||^2 = E(\mu),$$

证明命题 1.3。

我们开始证明该定理。回顾一下，$S_\beta \cap \mathcal{J}_n$ 对于 $\beta = -\frac{1}{n}I$ 恰好由 n维半单约旦代数组成（命题 6.4），因此它在 $\mathcal{J}_n$中是开集；这归功于阿尔伯特判据，该判据通过迹型刻画半单性（第 2.1 小节）。设 μ 是半单的，且 $\nu \to \mu$。那么 ν也是半单的。此外，$\mu \in \overline{G\cdot\nu}$意味着 dim $G\cdot\mu \leq$ dim $G\cdot\nu$，因此 dim 导子(μ) $\geq$ dim 导子(ν)。我们将利用 Jacobson 的一个结果证明反向不等式，即 [Jac49] 断言，在特征为零的域上，半单约旦代数 $\mathfrak{A}$ 的每个导子 D 都是内导子的，也就是说，它可表示为 $D = \sum_i [L_{a_i}, L_{b_i}]$，其中 a_i、$b_i \in \mathfrak{A}$。这意味着

$$\dim \mathrm{Der}(\mu) = \dim \mathrm{span}\{[L^\mu_{x_i}, L^\mu_{x_j}]\}_{ij} \leq \dim \mathrm{span}\{[L^\nu_{x_i}, L^\nu_{x_j}]\}_{ij} = \dim \mathrm{Der}(\nu) \tag{23}$$

对于固定的基 x_1、...、x_n，根据由 V_n 中的乘法决定的张成空间维数的下半连续性。

现在 $G\cdot\mu$ 和 $G\cdot\nu$ 具有相同的维数，这意味着 $G\cdot\mu = G\cdot\nu$，也就是说，μ 和 ν 同构。这意味着，对于 $\beta = -\frac{1}{n}I$，$G\cdot\mu$ 在 $S_\beta \cap \mathcal{J}_n$ 中是闭的。由于在 $S_\beta \cap \mathcal{J}_n$ 中只有有限个 G-轨道（命题 6.4），它们在 $S_\beta \cap \mathcal{J}_n$ 中都是开的，因而在 $\mathcal{J}_n$ 中也是开的。特别地，$G\cdot\mu$ 在 $\mathcal{J}_n$ 中是开的，因此 μ 具有刚性。定理 1.4 的证明至此完成。

7. 低维 Jordan 代数及其他例子

关于维数至多为 4 的约旦代数的定理 1.6 的证明见表 1–9。本节将解释如何阅读这些表格，并对其中的某些情形作更详细的说明。我们先给出一些一般性的评论。

7.1. **可分解代数**。若一个约旦代数不同构于两个约旦代数的直积，则称其为不可分解的；否则称其为可分解的。下面的引理证明起来很容易，它表明我们可以将寻找孤子的范围限制在不可分解的约旦代数中。

引理 7.1。若 $\mu \in V_n$ 和 $\nu \in V_m$ 是孤子，且 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$, $M_\nu = c_\nu I + D_\nu$，那么 $\mu \times c\nu \in V_{n+m}$ 是一个孤子，其中 $c = \sqrt{\frac{c_\mu}{c_\nu}}$。

7.2. **Jordan 代数的幺元化**。下面的结果可由引理 6.1 轻松验证。

引理 7.2. 如果约旦代数 $\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ 不含单位元，且我们向 $\mathfrak{A}$ 添加一个单位元，得到 $\hat{}\,\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^{n+1}, \hat{}\,\mu)$，那么矩矩阵

$$M_{\hat{\mu}} = \begin{pmatrix} M_\mu & \\ & -(2n+1) \end{pmatrix}.$$

特别地，如果 $\mu \in \mathcal{J}_n$ 是一个孤子且 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，那么 $\sqrt{c}\mu \in \mathcal{J}_{n+1}$ 是一个孤子，其中 $c = \frac{2n+1}{-c_\mu}$，并且

$$M_{\widehat{\sqrt{c}\mu}} = -(2n+1)I + \begin{pmatrix} cD_\mu & \\ & 0 \end{pmatrix};$$

在这种情况下 $E_{n+1}(\widehat{\sqrt{c}\mu}) = \underline{E_n(\mu)\, E_n(\mu)+1}$。

基本示例为 $\mathfrak{A}_{2,\ 2} = \mathfrak{A}_{3,\ 4}$、$\mathfrak{A}_{2,\ 3} = \mathfrak{A}_{3,\ 7}$、$\mathfrak{A}_{2,\ 5} = \mathfrak{A}_{3,\ 3}$、$\mathfrak{A}_{3,\ 13} = \mathfrak{A}_{4,\ 25}$、$\mathfrak{A}_{3,\ 17} = \mathfrak{A}_{4,\ 39}$（见第 1 节中的表格）。

7.3. **半单约旦代数的正则表示**。设 $\mathfrak{S} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ 是一个半单约旦代数，并令 $\mathfrak{N}$ 为 $\mathfrak{S}$ 的底层向量空间，将其视为正则表示下的 $\mathfrak{S}$-模。置 $\mathfrak{N}^2 = 0$，使得 $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N} = (\mathbb{C}^{2n}, \tilde{\mu})$ 成为约旦代数。选取厄米内积，使得 $\mathfrak{S} \perp \mathfrak{N}$；在 $\mathfrak{S}$ 上，它是使 μ 成为具有 $M_\mu = -\frac{1}{n}I$ 的孤子的厄米内积；而在 $\mathfrak{N}$ 上，它与 $\mathfrak{S}$ 等距。于是简单计算表明 $M_{\tilde{\mu}} = -\frac{1}{n}I = -\frac{2}{2n}I$。基本示例为 $\widetilde{\mathfrak{A}_1}_{,\ 1} = \mathfrak{A}_{2,\ 1}$ 以及 $\widetilde{\mathfrak{A}_2}_{,\ 4} = \mathfrak{A}_{4,\ 22}$（见第 1 节中的表格）。

7.4. **维数为 1、2 和3的约旦代数**。除去平凡代数，复一维约旦代数有一个同构类，复二维约旦代数有五个同构类，复三维约旦代数有19个同构类 [KM14]；这些代数的孤子形式列于表1、表3和表5中。利用命题 3.2 计算矩矩阵，再利用命题 1.1 在每个同构类中找出一个孤子。基本上只需研究非半单且不可分解的代数。分层和不变量汇总于表2、表4和表6中。以三维情形为例，考虑$\mathfrak{A}_{3,\ 4}$。将 [KM14] 中给出的标准基 e_1、e_2、n_1（见其中的表2，该代数列为 $\mathcal{T}_{10}$）替换为 f_1、f_2、n_1，其中 $f_1 = e_1 + e_2$、$f_2 = e_1 - e_2$，以将矩矩阵对角化；然后将 f_2 替换为 $f_2' = kf_2$，其中 $k^4 = 5/3$，以找出一个孤子。

7.5. **4维约旦代数**。除平凡代数外，复4维约旦代数有72个同构类 [KM14]。除 $\mathfrak{A}_{4,\ 63}$ 外，其余代数均以孤子形式列于表7和表8。分层和不变量汇总于表9。我们省略繁琐的计算，只给出几个典型例子。

7.5.1. 的轨道，$_{66}$ 是特殊的。我们在形如 $n_1^2 = \alpha n_2, n_4^2 = \beta n_3, n_1 n_2 = \gamma n_3$ 的同构代数中寻找孤子。利用命题3.2和1.1，我们找到一个满足 $\alpha^2 = \beta^2 =$4 和 $\gamma^2 = 3$ 的孤子。

7.5.2. $\mathfrak{A}_4$,16、$\mathfrak{A}_4$,17 和 $\mathfrak{A}_4$,25 的轨道是特殊的。我们计算得出，在 [KM14 的基下，$\mathfrak{A}_4$,16 的能量为 $27/49$，见表 3]。考虑 $\overline{G \cdot \mu}$ 中 E_4 的一个极小点 ν。根据 [Mar13], , μ 的第一层退化为 $\mathfrak{A}_4$,28、$\mathfrak{A}_4$,31 和 $\mathfrak{A}_4$,50，其轨道分别包含能量级为1、1和 $3/4$的孤子。由于 $E(\nu) < 27/49$，ν 不能属于这些轨道。仍根据 [Mar13], , μ 仅有的其他可能退化是到 $\mathfrak{A}_{4,i}$，其中 $i = 48, 64, 66, 67, 68, 70$。然而，$\mathfrak{A}_4$,48 有一个能量级为 $5/6$ 的孤子，而其他代数的孤子能量级远高于1，因此 ν 同样不能属于这些轨道。唯一剩下的可能是 $\nu \in G \cdot \mu$。因此，$\mathfrak{A}_4$,16 是特殊的。由推论 6.2 可得 $E(\nu) = ||\beta_\nu||^2 = ||\beta_\mu||^2 = 1/2$。

我们计算得出，$\mathfrak{A}_{4,\ 17}$ 和 $\mathfrak{A}_{4,\ 25}$ 的能量分别为 $3/5$ 和 $5/9$，并以类似方式处理这些情况。

表 7 中列出了这些孤子的结构常数近似值，这些数值是通过计算机软件得到的。

7.5.3. 轨道$\mathfrak{A}_{4,63}$并非特异的。记 $(\mathbb{C}^4,\mu)=\mathfrak{A}_{4,63}$ 以及 $(\mathbb{C}^4,\nu)=\mathfrak{A}_{4,64}$。已知 $\mu\to\nu$。事实上，令 $g_t=\begin{pmatrix}1&&&\\&t&&\\&&t&\\&&&t\end{pmatrix}\in G$并设 $\mu_t=g_t^{-1}\cdot\mu$。则 $\lim_{t\to0}\mu_t=\nu$。注意，ν是一个孤子，并设 $\beta=m(\nu)$ $=\begin{pmatrix}-\frac12&&\\&0&\\&&\frac12\end{pmatrix}\in\bar{\mathfrak{h}}^+$。显然可见 $\mu\in W_\beta$。由于 $\inf\ E_4(G\cdot\mu)=||\beta||^2=\frac32$，由 (18)、(21) 和 (22) 可得 $\mu\in S_\beta$。

现在反设 $\lambda\in G\cdot\mu$ 是一个孤子。那么 $m(\lambda)$ 在 Ad_K 下与 β 共轭（推论 6.2），并且将 λ 替换为其 K-轨道中的一个元素后，我们可以假设 $m(\lambda)=\beta$。由于$\frac{1}{||\lambda||^2}D_\lambda=\beta+||\beta||^2I=\frac12\begin{pmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&4\end{pmatrix}$，这意味着该矩阵是 λ 的导子。该矩阵的特征值两两不同，因此 λ 必定为

$$\lambda(n_1,n_1)=an_2,\ \lambda(n_1,n_2)=bn_3,\ \lambda(n_1,n_3)=cn_4,\ \lambda(n_2,n_2)=dn_4, \tag{24}$$

且其他乘积均为零，其中 a、b、c、d为某些复常数。

现在假设 λ 由（24）给出。最后我们验证：（i）仅当$a=0$ 且 b、c、$d\neq0$时，λ 才可能与 μ 同构；（ii）只有当 $b=\pm c$ 且 $d=0$时，$a=0$、λ 才可能是孤子。这将证明 $G\cdot\mu$中不存在孤子。

记 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_{4,63}=(\mathbb{C}^4,\mu)$ 和 $\mathfrak{B}=(\mathbb{C}^4,\lambda)$。注意，$\mathfrak{A}^2=\mathrm{span}(n_3,n_4)$ 且 $\mathfrak{A}^3=\mathrm{span}(n_4)$，所以 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^3=\mathfrak{A}_3$,18。另一方面，$\mathfrak{B}^2=\mathrm{span}(an_2,bn_3,cn_4,dn_4)$ 且 $\mathfrak{B}^3=\mathrm{span}(abn_3,bcn_4,adn_4)$。假设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 同构。若 $a\neq0$，那么由于 $\dim\mathfrak{B}^2=2$，我们有 $b=0$ 或 $c=d=0$。两种情况下都得到 $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}^3=\mathfrak{A}_3$,19。这表明 $a=0$。现在，$\dim\mathfrak{B}^2=2$ 和 $\dim\mathfrak{B}^3=1$ 意味着 $b\neq0$ 和 $c\neq0$。我们还有 $d\neq0$，否则 $\mathfrak{B}$ 将与 $\mathfrak{A}_4$ 同构，64。这就证明了 (i)。

我们转向 (ii)。假设 $a=0$ 和 λ 是一个孤子。我们计算得

$$M_\lambda=\begin{pmatrix}-2b^2-2c^2&&&\\&-2b^2-2d^2&&\\&&-2c^2+2b^2&\\&&&2c^2+d^2\end{pmatrix}. \tag{25}$$

由于 M_λ 和 β 成比例，这立即推出 $b^2=c^2$ 和 $d=0$，从而证明了 (ii)。

8. Closed $SL(n,\mathbb{C})$-orbits in $\mathcal{J}_n$

由于在 $\mathcal{J}_n$ 中不存在闭的 $GL(n,\mathbb{C})$-轨道（即使在 $V_n\setminus\{0\}$中也不存在），这恰恰是因为恒等元的倍数，因此自然会产生这样一个问题：子群 $SL(n,\mathbb{C})$ 是否在 $\mathcal{J}_n$中存在闭轨道。

命题 8.1. 设 $\mu\in\mathcal{J}_n$, $\mu\neq0$. 则：

(a) 轨道 $SL(n,\mathbb{C})\cdot\mu$ 是闭的，当且仅当 μ 是半单约旦代数。(b) 若 μ 不是半单的，则 0 属于 $SL(n,\mathbb{C})\cdot\mu$的闭包。

证明。轨道 $SL(n,\mathbb{C})\cdot\mu$ 是闭的，当且仅当 $SL(n,\mathbb{C})$ 对 V_n 的作用所对应的矩映射 m^{SL_n} 在某点 $\nu\in SL(n,\mathbb{C})\cdot\mu$处为零。由于 m^{SL_n} 是由 m^{GL_n} 与投影 $i\mathfrak{u}(n)=\mathbb{R}\oplus i\mathfrak{su}(n)\to i\mathfrak{su}(n)$复合得到的，后一条件等价于 $m^{GL_n}(\nu)=-\frac1nI$，这意味着 ν 和 μ 是半单的，这是由命题 4.5 得出的。

现在假设 μ 不是半单的。则 $SL(n,\mathbb{C})\cdot\mu$ 不是闭的，并且 $SL(n,\mathbb{C})\cdot\mu$ 包含一个闭轨道，记为 $SL(n,\mathbb{C})\cdot\nu$。如果 $\nu\neq0$，那么由 (a) 部分可知 ν 是半单的。但这样便有 $\mu\to\nu$，这与半单 Jordan 代数的刚性相矛盾。□

值得注意的是，将几何不变理论应用于（交换）约旦代数的研究，与（反交换）李代数的情形有许多相似之处。然而，约旦恒等元（无论以何种形式出现）似乎比雅可比恒等式更难使用。特别地，对于一般的约旦代数，左乘法并非该代数的导子，这与李代数的情形形成鲜明对比。因此，那些依赖于这一性质的李代数结果的证明，不能简单地照搬到约旦代数的语境中；在这项工作中，我们一直尝试寻找替代性的论证路线，并取得了一些成功。本节汇集的部分结果与这种情况在某种程度上相关。

除非另有明确说明，本节中均设 $\mu \in \mathcal{J}_n$ 为约当孤立子，$\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$。根据命题 1.1，记矩矩阵为 $M_\mu = c_\mu I + D_\mu$，其中 D_μ 是厄米导子。另记 $\mathfrak{N}$ 为 $\mathfrak{A}$ 的根基。

9.1. 湮灭子。 $\mathfrak{A}$ 的湮灭子为 Ann($\mathfrak{A}$) $= \{x \in \mathfrak{A} : L_x^\mu = 0\}$。由$L^\mu_{D_\mu x} = [D_\mu, L_x^\mu]$ 可知，D_μ 保持 Ann($\mathfrak{A}$)，根据推论 3.3，D_μ 在 Ann($\mathfrak{A}$) 上的特征值均为正。

9.2. 基本计算。 设 x 是 D_μ 的特征向量，对应特征值为 d。于是

$$\begin{aligned}(M_\mu, [L_x^\mu, L_x^{\mu *}]) &= \mathrm{Tr}(M_\mu [L_x^\mu, L_x^{\mu *}]) \\ &= \mathrm{Tr}(D_\mu [L_x^\mu, L_x^{\mu *}]) \\ &= \mathrm{Tr}([D_\mu, L_x^\mu] L_x^{\mu *}]) \\ &= \mathrm{Tr}(L^\mu_{D_\mu x} L_x^{\mu *}) \\ &= d||L_x^\mu||^2.\end{aligned} \tag{26}$$

另一方面，由于 (3)，(26) 左边也等于 $\langle [L_x^\mu, L_x^{\mu *}] \cdot \mu, \mu \rangle$，因此我们得到

$$d||L_x^\mu||^2 = ||L_x^{\mu *} \cdot \mu||^2 - ||L_x^\mu \cdot \mu||^2. \tag{27}$$

下面我们使用这个公式及其若干变式。

引理 9.1。 设 $\mu \in \mathcal{J}_n$ 是一个孤子，且 x、$y \in \mathbb{C}^n$ 是 D_μ 的特征向量，其对应的（实）特征值分别为 d_x、d_y。若 $d_x \neq d_y$，则 $(L_x^\mu, L_y^\mu) = 0$。

证明。基本计算得到

$$d_x(L_x^\mu, L_y^\mu) = (M_\mu, [L_x^\mu, L_y^{\mu *}]) = \langle L_y^{\mu *} \cdot \mu, L_x^{\mu *} \cdot \mu \rangle - \langle L_x^\mu \cdot \mu, L_y^\mu \cdot \mu \rangle.$$

在这些方程中交换 x 和 y，可得

$$d_x(L_x^\mu, L_y^\mu) = \overline{d_y(L_y^\mu, L_x^\mu)} = d_y(L_x^\mu, L_y^\mu),$$

这就证明了所需结果。 □

9.3. 的核。 命题 1.1(b)表明，D_μ的核包含 $\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$的一个极大半单子代数。

问题 9.2。 对于孤子 $\mu \in \mathcal{J}_n$，$\ker D_\mu$ 是否为极大半单子代数？换句话说，D_μ 在 $\mathfrak{N}$ 上的特征值是否均不为零？

9.4. **在 $\mathfrak{N}$ 上的正性**。 问题 9.3 的肯定答案意味着问题 9.2 也有肯定答案。

问题 9.3： 对于一个孤子 $\mu \in \mathcal{J}_n$， D_μ 在 $\mathfrak{N}$ 上的特征值是否为正?

对于满足 $\mathfrak{A}^3 = 0$ 的孤子约旦代数 $\mathfrak{A}$，显然所有左乘算子都是该代数的导子，因此我们可以使用一个标准论证，对问题 9.3 作出肯定回答。

命题 9.4。 如果孤子 $\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ 满足 $\mathfrak{A}^3 = 0$，那么 D_μ 的所有特征值均为正。

证明。假设 $\mathfrak{A}^3 = 0$ 意味着 $\mathfrak{A}$ 是一个幂零约旦代数，因此对于所有 $x \in \mathfrak{A}$， L_x^μ 都是幂零算子。

设 $x \in \mathbb{C}^n$ 是 D_μ 的一个特征向量，对应的特征值为 $d \in \mathbb{R}$。由于 $L_x^\mu \cdot \mu = 0$，基本计算（27）立即给出 $d \geq 0$。如果进一步有 $d = 0$，那么 $L_x^{\mu *}$ 也是 μ 的一个导子，因此根据导子的定义条件，有 $[L_x^{\mu *}, L_x^\mu] = L^\mu_{L_x^{\mu *} x}$。

由于 D_μ 是厄米的，正交分解 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 \oplus \mathfrak{A}^{2\perp}$ 是 D_μ-不变的，因此我们可以假设 $x \in \mathfrak{A}^2$（分别为 $x \in \mathfrak{A}^{2\perp}$）。无论哪种情况，对于所有 $y \in \mathfrak{A}$，都有 $\langle L_x^{\mu *} x、\ y\rangle = \langle x、\ xy\rangle = 0$，因为 $xy \in \mathfrak{A}^3 = 0$（分别为 $xy \in \mathfrak{A}^2$）。这表明 $L_x^{\mu *} x = 0$。

现在 L_x^μ 是一个正规幂零算子，因此 $x \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{A})$。第 9.1 小节中的结果与我们的假设 $d = 0$ 矛盾。因此 $d > 0$。□

对于非结合 Jordan 代数，我们有如下部分结果。

命题 9.5。 设 $x、\ y \in \mathbb{C}^n$ 是 D_μ 的特征向量，其对应的特征值分别为 $d_x、\ d_y$。如果 $[L_x^\mu, L_y^\mu] \neq 0$，则 $d_x + d_y \geq 0$。

证明。我们考虑 $D := [L_x^\mu, L_y^\mu]$ 并计算

$$\begin{aligned}[D_\mu, D] &= [[D_\mu, L_x^\mu], L_y^\mu] + [L_x^\mu, [D_\mu, L_y^\mu]] \\ &= [L^\mu_{D_\mu x}, L_y^\mu] + [L_x^\mu, L^\mu_{D_\mu y}] \\ &= (d_x + d_y) D.\end{aligned}$$

我们按照基本计算的方式得到

$$(d_x + d_y)||D||^2 = \mathrm{Tr}([D_\mu, D]D^*) = \mathrm{Tr}(D_\mu [D, D^*]) = \mathrm{Tr}(M_\mu [D, D^*]) = ||D^* \cdot \mu||^2,$$

因为 D 是一个（内）导子，结论得证。 □

如果 $\mathfrak{N} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ 是由单个元素 n生成的幂零约当孤立子，那么 n 及其幂必定是 D_μ的特征向量。由于 $\mathrm{Tr}(D_\mu) = \mathrm{Tr}_{-c_\mu}^{D_\mu^2} > 0$，在此情形下我们还得到~~$D_\mu > 0$~~。

9.5. **与 $\mathfrak{N}$的正交性**。由于 D_μ 是厄米的，关于厄米内积的 $\mathfrak{N}$ 的正交补是 D_μ-不变的。

问题 9.6。对于孤子 $\mu \in \mathcal{J}_n, \mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$， $\mathfrak{N}^\perp$ 是 $\mathfrak{A}$的半单子代数吗?

如果问题 9.6 的答案是肯定的，那么 $\mathfrak{N}^\perp$ 将是极大半单的。问题 9.2 的肯定答案意味着问题 9.6 的答案也是肯定的。

9.6. **归约为幂零 Jordan 代数**。

问题 9.7。 如果 $\mathfrak{A} = (\mathbb{C}^n, \mu)$ 是一个约当孤立子，且 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的根基，那么 $\mu|_{\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}}$ 是否也是一个孤立子? 反过来，给定一个幂零约当孤立子 $\mathfrak{N}$ 和一个半单 Jordan 代数 $\mathfrak{S}$，使得 $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$ 是一个约旦代数，我们能否将度量从 $\mathfrak{N}$ 延拓到 $\mathfrak{A}$，从而使 $\mathfrak{A}$ 成为一个孤立子?

参考文献

[AB68] L. Auslander 和 J. Brezin，《几乎代数李代数》，《代数杂志》8（1968），295–313。[BK66] H. Braun 和 M. Koecher，《约当代数》，《数学科学基础丛书：特别考虑应用领域的单行本》，第128卷，施普林格出版社，柏林—纽约，1966年（德文）。[Fin90] D. R. Finston，《半单复约当代数的刚性与紧实实形式》，《通信代数》18（1990），第10期，3323–3338。[FK94] J. Faraut 和 A. Kor´anyi，《对称锥上的分析》，牛津数学专著，牛津科学出版物，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1994。[Gla70] N. D. Glassman，《约当代数的上同调》，《代数杂志》15（1970），167–194。[Jac49] N. Jacobson，《半单约当代数的导子代数与乘法代数》，《数学年刊》（第2辑）50（1949），866–874。[Kir84] F. C. Kirwan，《辛几何与代数几何中的商空间的上同调》，《数学笔记》，第31号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1984。[KM14] I. Kashuba 和 M. E. Martin，《四维约当代数的变形》，《代数杂志》399（2014），277–289。[KN79] G. Kempf 和 L. Ness，《表示空间中向量的长度》，载于《代数几何》（哥本哈根大学暑期会议，哥本哈根，1978），《数学讲义》第732卷，施普林格出版社，柏林，1979，第233–243页。[Lau03] J. Lauret，《李代数簇的矩映射》，《函数分析杂志》202（2003），第2期，392–423。[Lau20] ———，寻找孤子，《美国数学学会通告》67（2020），第5期，647–657。[LW11] J. Lauret 和 C. Will，《爱因斯坦可解流形：存在性与非存在性问题》，《数学年刊》350（2011），第1期，199–225。[Mar13] M. E. Martin，《约当代数的变形与同位》，博士论文，圣保罗大学，˜圣保罗， 2013，[葡萄牙语]。[McC04] K. McCrimmon，《约当代数浅论》，Universitext，施普林格出版社，纽约，2004。[Mos56] G. D. Mostow，《代数群的完全可约子群》，《美国数学杂志》78（1956），200–221。[Nes84] L. Ness，《通过矩映射对零锥进行分层》。附录作者为 David Mumford，《美国数学杂志》106（1984），第6期，1281–1329。[Pen51] A. J Penico，《约旦代数的韦德伯恩主定理》，《美国数学学会汇刊》70（1951），404–420。[Sch95] R. Schafer，《非结合代数导论》，多佛出版社，纽约，1995；1966年原版的修订重印本。[ZSSS82] K. A. Zhevlakov、A. M. Slin'ko、I. P. Shestakov 和 A. I. Shirshov，《近似结合的环》，《纯粹与应用数学》，第104卷，学术出版社， [Harcourt Brace Jovanovich 出版社，]，纽约—伦敦，1982年，由 Harry F. Smith 从俄文翻译。