arXiv:2301.10812v2 [cs.LO] 3 Mar 2024

多重集与分布*

Dexter Kozen 和 Alexandra Silva

康奈尔大学

摘要。我们给出一种简洁的构造方法，用于构造 Jacobs 的多重集与分布分配律，且不涉及任何组合学。我们首先给出列表与分布之间的分配律，然后应用一个关于 2-范畴的一般定理，该定理能将列表的性质自动转移到多重集上。该定理指出，在满的 2-自然变换下，2-胞腔之间的等式得以保持。在我们的应用中，恰当的满 2-自然变换是借助 Parikh 映射定义的；该映射在形式语言理论中广为人知，它将一个列表映射为其元素构成的多重集。

1 引言

概率编程语义中一个众所周知的难题，是如何结合概率与非确定性。主要困难在于，幂集单子与分布单子之间缺少恰当的分配律 [2]。多年来，许多研究者一直在努力解决这一问题，并提出了各种变通方案[1, 3, 4, 6, 7, 10–12, 14–18]。相比之下，若考虑的不是幂集单子，而是多重集单子，那么多重集单子确实可以分配到概率分布单子上，这一点早已为人所知。这一观察见于例如 [4,5,10], ，但其来源难以追溯，因为它似乎早已是流传已久的常识。虽然前述文献从操作角度相当有说服力地论证了该分配律的存在，但长期以来缺少的是对它的明确描述。

最近，Jacobs [8], 取得了一项重要突破：他为有限多重集在有限分布上的分配律提供了多种明确的描述。他的处理结合了范畴论和组合推理，涉及多项分布与超几何分布的交换性；离散概率分布则用于计算从一个小型总体中进行不放回抽样时，某一事件在 n 次试验中发生 k 次的可能性。

本文给出了一种更简洁的替代证明，不涉及任何组合学，从而取代 Jacobs 的证明。我们的方法基于这样一个前提：

*本文谨献给 Herman Geuvers，以庆祝他的 60 岁生日。两位作者都曾在奈梅亨生活过一段时间，并与 Herman 进行了许多交流。他始终对编程语义学的诸多方面以及范畴论方面充满好奇。我们希望他喜欢这篇对一个复杂定律的简化阐释，以及随后给出的范畴论推广！

列表比多重集更直观，记法也更简洁。列表与分布之间存在一种直观而简单的分配律：给定一个分布列表，独立地对它们进行抽样，得到一个结果列表；该结果列表的概率等于各分量概率的乘积。这样，我们就将一个分布列表转化成了列表上的分布。我们先通过纯粹的等式推理证明这种操作直觉是正确的，然后应用关于 2-范畴的一般定理，将列表的性质映射为多重集的性质。

一般性定理（可能本身也具有独立价值）指出，自然变换之间的等式在满的 2-自然变换下保持不变。在我们的应用中，适当的满 2-自然变换是通过 Parikh 映射定义的；该映射在形式语言理论中广为人知，它将列表映射为其元素构成的多重集。借助此定理，涉及多重集的单子和分配律可以从涉及列表的单子和分配律自动导出。

本文的贡献有两个方面。一方面，我们给出了多重集与分布之间一条重要分配律的具体构造。Jacobs [8] 提出了多种构造，但都需要更复杂的工具。本文的论点是，Beck 分配律可以用一种更简单、无需组合数学的方式来阐述，尽管 [8] 中的其他方案也各有价值（作者本人也这样认为）。特别是，我们并未声称这种方法有助于计算事件的概率；事实上，这类计算需要组合数学，而我们的方法省去了这一部分。另一方面，我们的一般性结果提供了一种有用的工具，可能适用于其他情境。

我们先在§2 中简要介绍一些预备知识，将多重集单子和分布单子作为一个共同单子的子单子。在§3 中，我们介绍定义多重集与分布之间所需分配律的必要要素，并说明如何通过 Parikh 映射，从列表与分布之间的分配律得到该分配律。在§4 中，我们给出一个关于 2-范畴的一般定理，并说明上一节中的许多具体结果都是该一般定理的实例。

2 分布单子和多重集单子

分布单子和多重集单子都是一个共同推广结构的子单子。考虑自函子

$$F : \mathsf{Set} \to \mathsf{Set} \qquad\qquad FX = \{f \in \mathbb{R}_+^X \mid |\operatorname{supp} f| < \infty\},$$

具有有限支撑的非负实值函数集合 $f\colon\ X \to \mathbb{R}$，以及对于 $h\colon\ X \to Y$，

$$Fh : FX \to FY \qquad\qquad Fh(f) = \lambda b \in Y\,.\,\sum_{h(a)=b} f(a).$$

请注意，F是协变的，这与通常的 Hom 函子 $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{R}_+)$ 不同。对于 $f \in FX$，令 $|f| = \sum_{a\in X} f(a)$。

函子 F 带有单子结构（F、μ、η），其中 $\eta : I \to F$ 和 $\mu : F^2 \to F$，对于 $a \in X$ 和 $f \in F^2X$，

$$\eta_X(a) = \lambda b \in X\,.\,[b = a]^{1}$$
$$\mu_X(f) = \lambda a \in X\,.\,\sum_{g\in FX} f(g)\cdot g(a).$$

将函数的值域限制为 $\mathbb{N}$，我们得到一个子单子（M、μ、η），其中

$$MX = \{m \in FX \mid \forall a \in X\ m(a) \in \mathbb{N}\}.$$

这就是多重集单子。值 $m(a)$ 是 $a \in X$ 在多重集 m 中的重数。另一方面，将函数限制为凸函数，我们得到一个子单子（D、μ、η），其中

$$DX = \{d \in FX \mid \sum_{a\in X} d(a) = 1\}.$$

这就是分布单子。值 $d(a)$ 是 $a \in X$ 在分布 d 下的概率。

显然 $\mu^M : M^2 \to M$，因为 $\mathbb{N}$ 在半环运算下封闭；并且 $\mu^D : D^2 \to D$，因为凸函数的凸函数复合后仍是凸函数。

有时，我们会给 η 和 μ 加上上标 M 和 D，以强调我们是在相应的子单子中解释它们，但定义相同。用更常见的记法，$\eta^D_X(a) = \delta_a$表示 $a \in X$上的狄拉克（点质量）分布，而分布可以像 [8]那样表示为系数为实数的加权形式和。

F 的Eilenberg-Moore代数是 $\mathbb{R}_+$-半模，不过我们的研究并不需要了解这一点。

在接下来的几节中，我们将构造一个分配律$\otimes^M : MF \to FM$，其中包含所需的分配律 $MD \to DM$作为特例。

3 列表和分布

本节将通过直观地阐述我们的方法，为后续内容做好铺垫。显然，仅凭本节中的论证，就可以逐步得到所需的分配律；但在 §4 中，我们将说明如何把这些论证概括为一个一般定理，从而一次性得到所有结果。尽管如此，本节的推导对于理解 §4 中更抽象的版本至关重要。

[1] *Iverson bracket*: $[\varphi] = 1$，当 φ 为真时；为假时则为 0

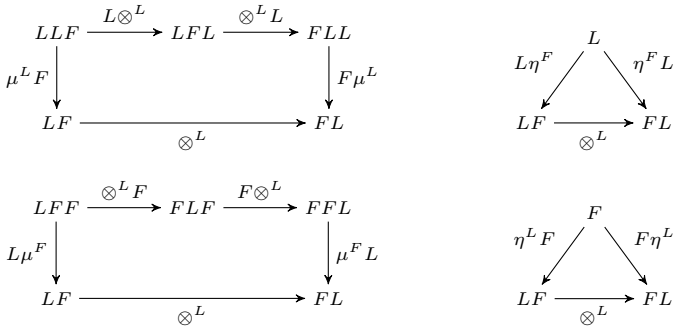


图1：分配律 $\otimes^L$ 的公理： $LF \to FL$

3.1 分配律 $\otimes^L$： $LF \to FL$

设 (L, μ^L, η^L) 为列表单子。定义 $\otimes^L_X$: $LFX \to FLX$，其中

$$\begin{aligned}&\otimes^L_X ([f_1, \ldots, f_n]) \\ &= \lambda[a_1, \ldots, a_m] \in LX . \begin{cases} \prod_{i=1}^n f_i(a_i) & \text{if } m = n \\ 0 & \text{otherwise.}^2 \end{cases}\end{aligned}$$

我们将其简写为

$$\otimes^L_X([f_1, \ldots, f_n]) = \lambda[a_1, \ldots, a_n] \in X^n . \prod_{i=1}^n f_i(a_i)$$

约定右边虽然在整个 LX 上都有定义，但在 X^n 之外取零。支撑 $\operatorname{supp} \otimes^L_X([f_1, \ldots, f_n])$ 是笛卡尔积 $\prod_{i=1}^n \operatorname{supp} f_i$。

定理 1. $\otimes^L$： $LF \to FL$ 是 (L, μ^L, η^L) 上的分配律 (F, μ, η)。也就是说，它是一个自然变换，并满足图 1中的公理。

证明。 证明仅使用初等等式推理，全文见 §A.1。

应用于一列关于 X的 n 分布 $\otimes^L_X$，可得到通过独立采样各个分布而获得的笛卡尔积 X^n 上的联合分布

[2] $[a_1, \ldots, a_n]$ 表示一个包含 n 个元素的列表，不要与艾弗森括号 $[\varphi]$混淆。我们相信读者能够通过字体差异和上下文将二者区分开来。

独立地。

$$\otimes^L_X([d_1,\ldots,d_n])([a_1,\ldots,a_n]) = \prod_{i=1}^{n} d_i(a_i).$$

当 $\otimes^L$ 作用于X上的分布列表时，会产生一个分布；它特化为 $\otimes^L : LD \to DL$。

我们希望有一个类似的分配律 $\otimes^M : MF \to FM$，它作用于分布多重集时也会特化为 $\otimes^M : MD \to DM$。我们将展示如何从分配律 $\otimes^L : LF \to FL$ 以及自然变换 $\#: L \to M$推导出 $\otimes^M$；后者是形式语言理论中熟知的 Parikh 映射。

3.2 Parikh 映射 $\#: L \to M$

考虑幺半群 $(LX, \cdot, [])$，其中 $(\cdot)$ 表示列表连接（通常省略不写），而 $[]$ 是空列表。这是以生成元 X为基的自由幺半群。再考虑幺半群 $(MX, +, 0)$，其中 $+$ 是实值函数的逐点求和，0 是常零函数，分别表示多重集并和空多重集。这是以生成元X为基的自由交换幺半群。这两个幺半群由 Parikh 映射 $\#_X : LX \to MX$连接，其中 $\#_X(x)(a)$ 给出 $a \in X$ 在列表 $x \in LX$中出现的次数。它是从以生成元 X 为基的自由幺半群到其交换像的幺半群同态。注意，$\#_X$ 是满态射，因为每个多重集都是某个列表的像。Jacobs [8] 将映射 $\#_X$ 称为累积（acc）。

更一般地，我们将在下文证明，$\#$ 是一个单子态射。

$$\# : (L, \mu^L, \eta^L) \to (M, \mu^M, \eta^M)$$

（定理4）。这意味着 $\#$: $L \to M$ 是一个与以下结构相容的自然变换：μ 和 η；换言之，将单子视为自函子范畴上的幺半群时，它是一个幺半群同态。

由于 $\#_X$ 是一个幺半群同态，我们有

$$\#_X([]) = 0 \qquad\qquad \#_X(xy) = \#_X(x) + \#_X(y).$$

在生成元 $[a]$上，

$$\#_X([a]) = \lambda b \in X\,.[b = a] = \eta_X(a).$$

利用这些事实，我们可以证明 $\#\colon L \to M$ 是自然变换。对于$f\colon\ X \to Y$,

$$\begin{aligned}
&Mf(\#_X([a_1,\ldots,a_n])) \\
&= Mf(\sum_{i=1}^{n} \#_X([a_i])) = Mf(\sum_{i=1}^{n} \lambda a \in X\,.[a = a_i]) \\
&= \lambda b \in Y\,. \sum_{f(a)=b} \sum_{i=1}^{n} [a = a_i] = \lambda b \in Y\,. \sum_{i=1}^{n} [b = f(a_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \#_Y([f(a_i)]) = \#_Y([f(a_1),\ldots,f(a_n)]) \\
&= \#_Y(Lf([a_1,\ldots,a_n])),
\end{aligned}$$

因此 $Mf \circ \#_X = \#_Y \circ Lf$。

3.3 分配律 $\otimes^M\colon \boldsymbol{MF \to FM}$

我们首先定义自然变换 $\otimes^M\colon MF \to FM$，然后证明它满足分配律所需的性质。对于任意 $x \in LX$，定义

$$S(x) = \{y \in LX \mid \#_X(y) = \#_X(x)\} = \#_X^{-1}(\#_X(x)).$$

那么 $y \in S(x)$ 当且仅当 y 和 x 长度相同，设为 n，且 y 是 x的一个置换；也就是说，

$$S([b_1,\ldots,b_n]) = \{[b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(n)}] \mid \sigma \text{ is a permutation on } \{1,\ldots,n\}\}.$$

引理 1. 设 $S = S([b_1,\ldots,b_n])$。对于 $\{1,\ldots,n\}$ 上任意固定的置换 π，映射

$$[a_1,\ldots,a_n] \mapsto [a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(n)}] \tag{1}$$

是一个双射 $S \to S$。

证明。由于 S 在置换下封闭，

$$\{[a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(n)}] \mid [a_1,\ldots,a_n] \in S\} \subseteq S.$$

但映射 (1) 是单射，因此

$$|\{[a_{\pi(1)},\ldots,a_{\pi(n)}] \mid [a_1,\ldots,a_n] \in S\}| \geq |S|,$$

因此等式成立，所以 (1) 必须是 S 上的双射。 □

所需的自然变换 $\otimes^M\colon\ MF \to FM$在以下引理中定义。这本质上与 Jacob 的第三种刻画 [8,公式（5）]相同。

引理 2. 存在唯一的自然变换 $\otimes^M\colon MF \to FM$，使得以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} LF & \xrightarrow{\otimes^L} & FL \\ {\scriptstyle \#F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F\#} \\ MF & \xrightarrow[\otimes^M]{} & FM \end{array} \tag{2}$$

证明。令

$$X^{(n)} = \{m \in MX \mid \sum_{a\in X} m(a) = n\},$$

X 上大小为 n 的多重集。对于给定的 $[\![f_1,\dots,f_n]\!] \in LFX$，定义

$$\begin{aligned} &\otimes_X^M (\#_{FX}([\![f_1,\dots,f_n]\!])) \\ &= \lambda y \in X^{(n)}.\ \sum_{[\![a_1,\dots,a_n]\!]\in \#_X^{-1}(y)} \prod_{i=1}^n f_i(a_i). \end{aligned}$$

同样按照约定，假定右侧的函数定义在所有 MX 上，但在 $MX \setminus X^{(n)}$ 上取零。这在多重集 $\#_{FX}([\![f_1,\dots,f_n]\!])$ 上定义了 $\otimes_X^M$；我们必须证明该定义与 $[\![f_1,\dots,f_n]\!]$ 的选择无关。

对于任意 $[\![b_1,\dots,b_n]\!] \in LX$，我们有 $\#_X([\![b_1,\dots,b_n]\!]) \in MX$，并且

$$\begin{aligned} &\otimes_X^M (\#_{FX}([\![f_1,\dots,f_n]\!]))(\#_X([\![b_1,\dots,b_n]\!])) \\ &= \sum_{[\![a_1,\dots,a_n]\!]\in \#_X^{-1}(\#_X([\![b_1,\dots,b_n]\!]))} \prod_{i=1}^n f_i(a_i) \\ &= \sum_{[\![a_1,\dots,a_n]\!]\in S([\![b_1,\dots,b_n]\!])} \prod_{i=1}^n f_i(a_i). \end{aligned}$$

那么对于任意置换 $\sigma\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$,

$$\begin{aligned} &\otimes_X^M (\#_{FX}([\![f_{\sigma(1)},\dots,f_{\sigma(n)}]\!]))(\#_X([\![b_1,\dots,b_n]\!])) \\ &= \sum_{[\![a_1,\dots,a_n]\!]\in S([\![b_1,\dots,b_n]\!])} \prod_{i=1}^n f_{\sigma(i)}(a_i) \\ &= \sum_{[\![a_1,\dots,a_n]\!]\in S([\![b_1,\dots,b_n]\!])} \prod_{i=1}^n f_i(a_{\sigma^{-1}(i)}) && (3) \\ &= \sum_{[\![a_{\sigma^{-1}(1)},\dots,a_{\sigma^{-1}(n)}]\!]\in S([\![b_1,\dots,b_n]\!])} \prod_{i=1}^n f_i(a_{\sigma^{-1}(i)}) && (4) \\ &= \sum_{[\![a_1,\dots,a_n]\!]\in S([\![b_1,\dots,b_n]\!])} \prod_{i=1}^n f_i(a_i). && (5) \end{aligned}$$

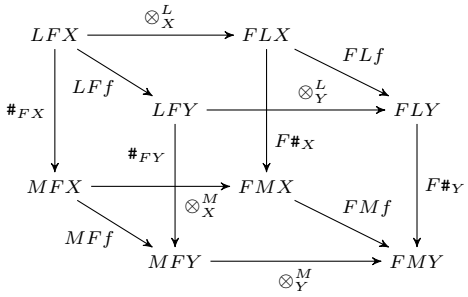


图 2： $\otimes^M$ 从 $\otimes^L$ 的自然性

推理 (3) 来自乘法的交换性，(4) 来自引理 1，而 (5) 来自重新索引。因此， $\otimes^M_X(\#_{FX}([f_1,\ldots,f_n]))$ 和 $\otimes^M_X(\#_{FX}([f_{\sigma(1)},\ldots,f_{\sigma(n)}]))$ 在所有形如 $\#_X([b_1,\ldots,b_n]) \in MX$ 的元素上取值一致，并且二者在形如 $\#_X([b_1,\ldots,b_m])$ 且 $m \neq n$ 的元素上都取值 0。但这已经涵盖了全部 MX，因为 $\#_X$ 是满射。

等式（2）现在可由 $F\#_X$ 和 $\otimes^L_X$ 的定义得出：

$$\begin{aligned}
&\otimes^M_X(\#_{FX}([f_1,\ldots,f_n])) \\
&= \lambda y \in X^{(n)}.\ \sum_{[a_1,\ldots,a_n]\in\#_X^{-1}(y)} \prod_{i=1}^n f_i(a_i) \\
&= \lambda y \in X^{(n)}.\ \sum_{\#_X([a_1,\ldots,a_n])=y} \prod_{i=1}^n f_i(a_i) \\
&= F\#_X(\otimes^L_X([f_1,\ldots,f_n])).
\end{aligned}$$

还需证明 $\otimes^M$ 的自然性。也就是说，对于 $f\colon X \to Y$，

$$FMf \circ \otimes^M_X = \otimes^M_Y \circ MFf. \tag{6}$$

我们借此机会说明一个一般性观察：它使我们能够将关于 L 的性质向下传递到 M，途径是#。假设我们知道 $\otimes^L$是一个自然变换。图2中，顶面的交换性断言了这一事实，而我们希望推导出底面也具有同样的性质。前后两个垂直面的交换性由（2）得出。左右两个垂直面的交换性则由#的自然性得出。利用这些事实，我们可以证明图2

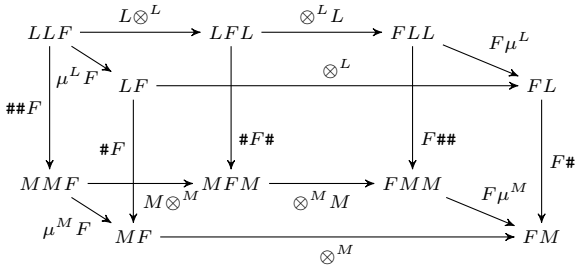


图3：分配律公理

中的以下路径等价：

$$\begin{aligned} & LFX \to MFX \to FMX \to FMY \\ = \;& LFX \to FLX \to FLY \to FMY \qquad (7) \\ = \;& LFX \to LFY \to FLY \to FMY \qquad (8) \\ = \;& LFX \to MFX \to MFY \to FMY \qquad (9) \end{aligned}$$

推理（7）来自后侧和右侧的垂直面，（8）来自顶面，而（9）来自左侧和前侧的垂直面。因此

$$FMf \circ \otimes^M_X \circ \#_{FX} = \otimes^M_Y \circ MFf \circ \#_{FX}.$$

但由于 $\#_{FX}\colon LFX \to MFX$是一个满态射，我们可以得出

$$FMf \circ \otimes^M_X = \otimes^M_Y \circ MFf. \qquad \square$$

我们可以应用相同的技巧来证明 $\otimes^M$ 满足分配律公理。这些公理与图 1 中的相同，只是用 M 替代 L。假设这些图表对于 L 成立（这仍有待证明——见§A.1），我们可以为 M推导出这些图表。例如，要将图 1 中 L 的左上性质转移到 M，我们使用图 3中的图表，其中

$$\begin{aligned} \#\# &= M\# \circ \#L = \#M \circ L\# \\ \#F\# &= MF\# \circ \#FL = \#FM \circ LF\#. \end{aligned}$$

图中顶面3 给出了我们关注的性质 L，我们希望据此推出底面也具有相同的性质。我们得到一组等价路径

$$\begin{aligned} & LLF \to MMF \to MFM \to FMM \to FM \\ = \;& LLF \to MMF \to MF \to FM \end{aligned}$$

利用顶面和垂直侧面的交换性，再利用##F: $LLF \to MMF$是满态射这一事实，可得底面交换。顶面的交换性将在下文§A.1中证明；侧面则由（2）、#的自然性以及单子定律得到。

其他公理的验证过程类似。事实上，在 §4 中，我们将证明一个一般定理，从而可以一次性推导出所有这些公理。

定理 2. $\otimes^M$: $MF \to FM$是一个分配律。将其限制在分布的多重集上时，它特化为 $\otimes^M$: $MD \to DM$。

证明。四条分配律公理可以按照上述论证思路逐条验证，也可以利用下文的推论 1一次性验证。

对于最后一条陈述，我们注意到，对于分布 d_1、.....、 d_n,

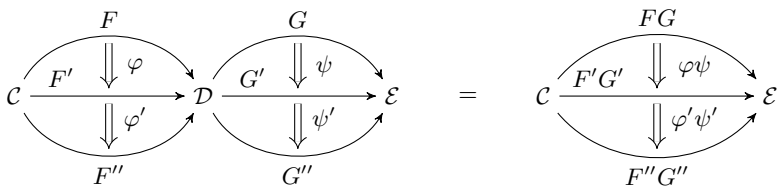
$$\begin{aligned}
&\sum_{m \in MX} \otimes_X^M (\#_{FX}([d_1, \ldots, d_n])) (m) \\
&= \sum_{m \in MX} \sum_{\#_X([a_1,\ldots,a_n])=m} \prod_{i=1}^n d_i(a_i) \\
&= \sum_{[a_1,\ldots,a_n] \in LX} \prod_{i=1}^n d_i(a_i) \;=\; \prod_{i=1}^n \sum_{a \in X} d_i(a) \;=\; 1. \qquad \square
\end{aligned}$$

4 一个一般结果

本节将说明，上一节的结果如何作为一个关于 2-范畴的一般定理的推论得出。该定理指出，2-胞腔之间的等式在满2-自然变换下保持不变。在我们的应用中，该定理允许将涉及 L 和 F 的等式通过一个以 # 定义的 2-自然变换映射为涉及 M 和 F 的等式。

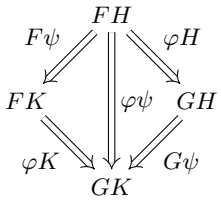
回顾一下，在 2-范畴中，1-胞腔的复合和 2-胞腔的复合分别称为水平复合和垂直复合。我们用 $\circ$ 表示垂直复合，并用并置表示水平复合。水平复合也作用于 2-胞腔，并满足以下性质：若 F、F'、$F'' : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 G、G'、G'': $\mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 是 1-胞腔，且 φ: $F \to F'$、 φ': $F' \to F''$、$\psi : G \to G'$ 和 $\psi' : G' \to G''$ 是 2-胞腔，则

$$(\varphi' \circ \varphi)(\psi' \circ \psi) = (\varphi'\psi') \circ (\varphi\psi) : FG \to F''G''. \tag{10}$$



范畴、函子和自然变换构成一个 2-范畴 Cat，其中 0-胞腔是范畴，1-胞腔是函子，2-胞腔是自然变换。在 Cat 中，自然变换上的水平复合定义如下：对于 $\varphi\colon F \to G$ 和 $\psi\colon H \to K$，

$$\varphi\psi : FH \to GK = \varphi K \circ F\psi = G\psi \circ \varphi H \tag{11}$$



反过来，$\varphi H = \varphi \mathrm{id}_H$和 $F\psi = \mathrm{id}_F\psi$。

2-函子之间的 2-自然变换类似于函子之间的自然变换，只是高一个层级。形式化地，设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}$ 为 2-范畴，并设 $\Phi,\Psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}$为 2-函子，满足对 $\mathcal{F}$的每个 0-胞腔 O，都有 $\Phi O = \Psi O$。2-自然变换 $\varphi\colon \Phi \to \Psi$ 是由 2-胞腔 $\varphi_S\colon \Phi S \to \Psi S$ 构成的族，这些 2-胞腔由 1-胞腔 S 索引，并且对每个 2-胞腔 $\sigma\colon S \to T$，下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \Phi S & \xrightarrow{\Phi\sigma} & \Phi T \\ {\scriptstyle \varphi_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_T} \\ \Psi S & \xrightarrow[\Psi\sigma]{} & \Psi T \end{array} \tag{12}$$

对 $\mathcal{F}$的每个 0-胞腔 O，要求 $\Phi O = \Psi O$，这使得 φ_S 可以是一个 2-胞腔。如果所有分量都是满态射，则 2-自然变换是满的。

现在设 $\mathcal{F}$ 为由有限生成元集 $\mathcal{O}$、 $\mathcal{T}$和 $\mathcal{R}$分别作为 0-胞腔、1-胞腔和 2-胞腔生成的自由 2-范畴。设 $\mathcal{C}$ 为另一个 2-范畴，并设 $\Phi,\Psi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{C}$为 2-函子，满足对每个 $O \in \mathcal{O}$，都有 $\Phi O = \Psi O$。

假设对于每个1-胞腔生成元 $S \in \mathcal{T}$，都有一个与之关联的2-胞腔 $(\#)_S\colon \Phi S \to \Psi S$ of $\mathcal{C}$。若 $S = S_1 \cdots S_n$ 是 $\mathcal{F}$ 的一个 1- 胞腔，则定义 $(\#)_S$ 为水平复合

$$(\#)_S = (\#)_{S_1} \cdots (\#)_{S_n} : \Phi S \to \Psi S.$$

特别地，对于 $n = 0$，对于 $I_O\colon O \to O$， $\mathcal{F}$ 的一个恒等1-胞腔，$(\#)_{I_O}\colon \Phi I_O \to \Psi I_O$ 是 $\Phi O = \Psi O$ 上的恒等1-胞腔。

定理 3. 如果图表

$$\begin{array}{ccc} \Phi S & \xrightarrow{\Phi\sigma} & \Phi T \\ {\scriptstyle (\#)_S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\#)_T} \\ \Psi S & \xrightarrow[\Psi\sigma]{} & \Psi T \end{array} \tag{13}$$

对每个 2-胞腔生成元 $\sigma : S \to T$ in $\mathcal{R}$ 都交换，那么对于由 $\mathcal{R}$生成的所有 2-胞腔 σ，它也交换。因此，(#) 是一个 2-自然变换 $\Phi \to \Psi$，其分量为 $(\#)_S$。

证明。对于恒等态射，

$$\begin{aligned}(\#)_S \circ \Phi(\mathsf{id}_S) &= (\#)_S \circ \mathsf{id}_{\Phi S} && \text{since } \Phi \text{ is a 2-functor}\\ &= \mathsf{id}_{\Psi S} \circ (\#)_S \\ &= \Psi(\mathsf{id}_S) \circ (\#)_S && \text{since } \Psi \text{ is a 2-functor.}\end{aligned}$$

对于垂直复合 $\tau \circ \sigma$： $S \to U$ 其中 σ： $S \to T$ 和 τ： $T \to U$，若对 σ 和 τ成立，即

$$(\#)_T \circ \Phi\sigma = \Psi\sigma \circ (\#)_S \qquad (\#)_U \circ \Phi\tau = \Psi\tau \circ (\#)_T, \tag{14}$$

then

$$\begin{aligned}&(\#)_U \circ \Phi(\tau \circ \sigma) \\ &= (\#)_U \circ \Phi\tau \circ \Phi\sigma && \text{since } \Phi \text{ is a 2-functor}\\ &= \Psi\tau \circ (\#)_T \circ \Phi\sigma && \text{by (14), right-hand equation}\\ &= \Psi\tau \circ \Psi\sigma \circ (\#)_S && \text{by (14), left-hand equation}\\ &= \Psi(\tau \circ \sigma) \circ (\#)_S && \text{since } \Psi \text{ is a 2-functor.}\end{aligned}$$

对于水平复合 $\sigma\tau$： $SU \to TV$其中 σ： $S \to T$和 τ： $U \to V$，若（13）对 σ 和 τ成立，即

$$(\#)_T \circ \Phi\sigma = \Psi\sigma \circ (\#)_S \qquad (\#)_V \circ \Phi\tau = \Psi\tau \circ (\#)_U, \tag{15}$$

then

$$\begin{aligned}&(\#)_{TV} \circ \Phi(\sigma\tau) \\ &= ((\#)_T(\#)_V) \circ ((\Phi\sigma)(\Phi\tau)) && \text{since } \Phi \text{ is a 2-functor}\\ &= ((\#)_T \circ \Phi\sigma)((\#)_V \circ \Phi\tau) && \text{by (10)}\\ &= (\Psi\sigma \circ (\#)_S)(\Psi\tau \circ (\#)_U) && \text{by (15)}\\ &= ((\Psi\sigma)(\Psi\tau)) \circ ((\#)_S(\#)_U) && \text{by (10)}\\ &= \Psi(\sigma\tau) \circ (\#)_{SU} && \text{since } \Psi \text{ is a 2-functor.}\end{aligned}$$ □

推论 1。 假设定理 3的条件成立。若进一步 $(\#)_S$ 对每个 1-胞腔 S 的 $\mathcal{F}$都是满态射，则在解释 Φ 下成立的每个 2-胞腔方程，在解释 Ψ下也成立。也就是说，对所有 σ， τ： $S \to T$属于 $\mathcal{F}$的 2-胞腔，若 $\Phi\sigma = \Phi\tau$，则 $\Psi\sigma = \Psi\tau$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}\Psi\sigma \circ (\#)_S &= (\#)_T \circ \Phi\sigma && \text{by Theorem 3}\\ &= (\#)_T \circ \Phi\tau && \text{since } \Phi\sigma = \Phi\tau\\ &= \Psi\tau \circ (\#)_S && \text{by Theorem 3.}\end{aligned}$$

由于 $(\#)_S$是满态射， $\Psi\sigma = \Psi\tau$。

在我们的应用中，$\mathcal{C}$ 是 Cat，即由范畴、函子和自然变换构成的 2-范畴，并且

- $\mathcal{O} = \{O\}$,
- $\mathcal{T} = \{P : O \to O, Q : O \to O\}$,
- $\mathcal{R} = \{\mu : PP \to P, \eta : I \to P,$
  $\mu' : QQ \to Q, \eta' : I \to Q, \otimes : PQ \to QP\}$,
- $\Phi = \{O \mapsto \mathsf{Set}, P \mapsto L, Q \mapsto F, \mu \mapsto \mu^L, \eta \mapsto \eta^L,$
  $\mu' \mapsto \mu^F, \eta' \mapsto \eta^F, \otimes \mapsto \otimes^L\}$,
- $\Psi = \{O \mapsto \mathsf{Set}, P \mapsto M, Q \mapsto F, \mu \mapsto \mu^M, \eta \mapsto \eta^M,$
  $\mu' \mapsto \mu^F, \eta' \mapsto \eta^F, \otimes \mapsto \otimes^M\}$,
- $(\#)_P = \#$, $(\#)_Q = \mathsf{id}_F$.

我们需要验证定理 3 和推论1的条件。对于定理3的条件 (13)，我们必须证明，对 $\mathcal{R}$中的每个 2-胞腔生成元，(13) 都成立。这些条件是

$$\begin{array}{ccc} LL & \xrightarrow{\mu^L} & L \\ {\scriptstyle \#\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \#} \\ MM & \xrightarrow[\mu^M]{} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\eta^L} & L \\ {\scriptstyle \mathsf{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \#} \\ I & \xrightarrow[\eta^M]{} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} LF & \xrightarrow{\otimes^L} & FL \\ {\scriptstyle \#F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F\#} \\ MF & \xrightarrow[\otimes^M]{} & FM \end{array}$$

此外，关于 μ^F 和 η^F还有两个条件，它们只涉及恒等态射，因此显然成立。最右侧的图表就是 (2)，已在引理 2中验证。其余两个条件的完整证明见 §A.2。

对于推论1，我们必须证明所有 $(\#)_S$ 都是满态射。根据 (11)，只需证明 # 是满态射，并且函子 L、F和 M 保持满态射。对任意集合范畴 X，$\#_X : LX \to MX$ 将 X 中的元素列表映射为其元素构成的多重集，显然是满射。稍加思考便可看出，函子 L、F和 M 保持满态射；不过，我们仍在 §A.2中给出明确证明。

这些结果引出了一种定理2 的替代证明，采用一种通用方法，将涉及 L 的性质转化为涉及 M 的性质。由于我们的应用满足定理 3 和推论1的条件，因此，在解释 Φ 下成立的任何 2-胞腔方程，在 Ψ下也成立。这样，我们便可以根据相应的、涉及 L的方程，一次性推导出若干所需的、涉及 M 的方程：关于 μ^M 的单子方程：$MM \to M$和 η^M：$I \to M$、$\otimes^M$的自然性，以及关于分配律 $\otimes^M$的方程：$MF \to FM$。

要理解其工作原理，请注意，这些性质对应的图表（例如图2 和3 ）都具有相同的形式：它们都是立方图表，顶面包含一个涉及 L 的图表，底面则是同一个图表，只是将 L 替换为 M；连接它们的垂直箭头由 2-自然变换（#）的各分量组成。这些分量只是将 L替换为 M，而且是满态射。所有垂直面都交换，因为（#）是一个 2-自然变换。因此，运用引理2中的同一论证，可以得出：只要顶面交换，底面也交换。

5 结论

我们给出了一个有限分布单子与有限多重集单子之间分配律的简化证明；该分配律最初由 Jacobs 证明[8]。与 Jacobs 的证明不同，我们不需要任何组合数学工具，因为我们认为这与问题无关。证明分为两部分：（a）分布单子与列表单子之间的分配律。由于列表具有顺序，这一分配律更直观，也更容易通过等式证明；（b）关于 2-范畴的一般定理，其结论是，单子律和分配律等范畴论定律在满2-自然变换下保持不变。在这里，涉及列表的定律通过遗忘顺序的 Parikh 映射转化为涉及多重集的定律，该映射将列表映射为其元素组成的多重集。

我们认为，Jacobs 的结果有望显著推进人们对非确定性与概率之间相互作用的理解，尤其是考虑到此前众所周知的分布单子与幂集单子难以结合这一问题。本文没有回顾 Jacobs 的证明，因为该证明技术性很强，而且与我们的方法并无实质关联。不过，我们确实认为，重要的结果值得不止一种证明方式，也有些读者可能会发现，我们的方法更容易理解。

我们这项工作一个有趣且新颖的方面，是对问题进行一般性的 2-范畴表述，其中 2-范畴被用作自然变换等式逻辑的逻辑工具。这里有几项创新值得我们进一步研究，也可能有进一步的应用：将自由 2-范畴用作逻辑语法，将 2-函子用作代数解释，以及指出满 2-自然变换能够保持涉及自然变换的交换图。我们特别指出，证明以优雅的方式运用了水平复合和垂直复合，从而将一整类自然变换之间的方程作为特例予以保持。我们推测，这一技术在涉及其他类别相容性图时也可能有进一步的应用潜力。

为简化起见，我们仅推导了有限多重集单子与有限分布单子之间的分配律；不过，我们相信该证明可以推广到任意可测空间上的完整测度 Giry单子，正如 [5], 所述，采用的也是同一种技术。

致谢

谨此感谢美国国家科学基金会通过 CCF-2008083 号拨款提供的支持。

参考文献

1. Affeldt, R., J. Garrigue, D. Nowak 和 T. Saikawa, *A trustful monad for axiomatic reasoning with probability and nondeterminism* **31** , J. Funct.Program.

(2021)，第 e17 页。网址：https://doi.org/10.1017/S0956796821000137 2. Beck, J., *Distributive laws* *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory* 80 1969 ，载于：B. Eckman，编者，，数学讲义丛书第 号，Springer，第 119–140 页。3. Chen, Y. 和 J. W. Sanders，*Unifying probability with nondeterminism*，载于：A. Cav- alcanti 和 D. Dams，编者，*FM 2009: Formal Methods, Second World Congress, Eindhoven The Netherlands November 2-6* ,, , *2009. Proceedings*，计算机科学讲义 5850 (2009)，第 467–482 页。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-642-05089-3_304. Dahlqvist, F., L. Parlant 和 A. Silva，*Layer by layer - combining monads*，载于：B. Fischer 和 T. Uustalu，编者，*Theoretical Aspects of Computing - ICTAC2018 - 15th International Colloquium, Stellenbosch, South Africa, October 16-19*, 2018 11187 2018 153 172 , *Proceedings*，计算机科学讲义（），第 – 页。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-030-02508-3_95. Dash, S. 和 S. Staton，*A monad for probabilistic point processes*，理论计算机科学电子札记 333 (2021)，第 19–32 页。网址：https://doi.org/10.4204%2Feptcs.333.2 6. den Hartog, J. 和 E. P. de Vink，*Mixing up nondeterminism and probability: a preliminary report* ，载于：C. Baier, M. Huth, M. Z. Kwiatkowska 和 M. Ryan，编者，*First International Workshop on Probabilistic Methods in Verification, PROBMIV*1998, *Indianapolis, Indiana, USA, June 19-20*, 1998，理论计算机科学电子札记 22 (1998)，第 88–110 页。网址：https://doi.org/10.1016/S1571-0661(05)82521-6 7. Goy, A. 和 D. Petrisan，*Combining probabilistic and non-deterministic choice via weak distributive laws* ，载于：H. Hermanns, L. Zhang, N. Kobayashi 和 D. Miller，编者，*LICS '20: 35th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science Saarbrücken* *2020* 2020 454 464 ,, *Germany, July 8-11*,（），第 – 页。网址：https://doi.org/10.1145/3373718.3394795 8. Jacobs, B.，*From multisets over distributions to distributions over multisets*，载于：*2021 36th Annual ACM/IEEE Symp. Logic in Computer Science (LICS)*，2021，第 1–13 页。9. Jakl, T., D. Marsden 和 N. Shah，*Generalizations of bilinear maps – technical report* ，CoRR（）。2022 网址：https://arxiv.org/abs/2205.05382 10. Keimel, K. 和 G. D. Plotkin，*Mixed powerdomains for probability and nondeterminism* **13** 2017 ，逻辑方法与计算机科学（）。网址：https://doi.org/10.23638/LMCS-13(1:2)2017 11. Mislove, M. W.，*Nondeterminism and probabilistic choice: Obeying the laws*，载于：C. Palamidessi，编者，*CONCUR 2000 - Concurrency Theory, 11th InternationalConference, University Park, PA, USA, August 22-25*, 2000, *Proceedings*，计算机科学讲义 1877 (2000)，第 350–364 页。网址：https://doi.org/10.1007/3-540-44618-4_2612. Mislove, M. W., J. Ouaknine 和 J. Worrell，*Axioms for probability and nondeterminism* ，载于：F. Corradini 和 U. Nestmann，编者，*Proceedings of the 10th International Workshop on Expressiveness in Concurrency, EXPRESS 2003, Marseille,France, September 2*, 2003，理论计算机科学电子札记 96 (2003)，第 7–28 页。网址：https://doi.org/10.1016/j.entcs.2004.04.019

13. Sokolova, A. 和 H. Woracek, *Proper semirings and proper convex functors*，载于：C. Baier 和 U. Dal Lago，编者，*Foundations of Software Science and Computation Structures (FoSSaCS'18)* **10803** 2018 331 347 ，LNTCS（），第–页。14. Varacca, D.，《概率、非确定性与并发：概率计算的两种指称模型》，博士论文，奥胡斯大学（2003）。15. Varacca, D. 和 G. Winskel, *Distributing probability over non-determinism*，数学结构与计算科学 **16** （2006），第87–113页。网址 https://doi.org/100960129505005074 161017 /S. Wang, D. J. Hoffmann 和 T. W. Reps, *probabilistic programs with nondeterminism* ¨ *A denotational semantics for low-level Proceedings of the* ，载于：B. Konig，编者，*Thirty-Fifth Conference on the Mathematical Foundations of Programming Semantics*, *MFPS 2019*, *London*, *UK*, *June 4-7*, 2019，理论计算机科学电子札记 **347** （2019），第303–324页。网址https://doi.org/10016 171016 2019 09 . /j.entcs. .. Zwart, M.，《通过分配律论单子的非组合性》，博士论文，牛津大学（2020）。18. Zwart, M. 和 D. Marsden, *No-go theorems for distributive laws*，逻辑方法与计算科学 **18** （2022）。网址 https://doi.org/10.46298/lmcs-18(1:13)2022

A 补充证明

A.1 $\otimes^L : LF \to FL$ 是一个分配律

本节验证 $\otimes^L : LF \to FL$ 是一个分配律。由于我们使用的是列表而非多重集，记号上要简单得多，而且只涉及初等等式推理。这是我们方法的一大优势。

证明（定理 *1* 的证明）。我们首先说明图表

$$\begin{array}{ccc} LFX & \xrightarrow{\otimes^L_X} & FLX \\ {\scriptstyle LFh}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle FLh} \\ LFY & \xrightarrow[\otimes^L_Y]{} & FLY \end{array}$$

可交换，因此 $\otimes^L : LF \to FL$ 是一个自然变换。

令 $f = [f_1, \ldots, f_n] \in LFX$, $f_i \in FX$。根据定义，对于 $\bar{a} = [a_1, \ldots, a_n] \in X^n$,

$$\otimes^L_X(\bar{f})(\bar{a}) = \prod_{i=1}^{n} f_i(a_i) \tag{16}$$

并且，如果列表 $\bar{f}$ 和 $\bar{a}$ 的长度不同，则 $\otimes^L_X(\bar{f})(\bar{a}) = 0$。$\otimes^L_X(\bar{f})$ 的支撑是 $\operatorname{supp} \otimes^L_X(\bar{f}) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{supp} f_i$。

如果 $h\colon X \to Y$，则 $Fh\colon FX \to FY$。如果 $f \in FX$ 和 $b \in Y$，则 $Fh(f) \in FY$ 和

$$\begin{aligned} Fh(f) &= \lambda b \in Y\,.\, \sum_{\substack{a \in X \\ h(a)=b}} f(a) \\ Fh(f)(b) &= \sum_{\substack{a \in X \\ h(a)=b}} f(a). \end{aligned} \tag{17}$$

尽管可能有无穷多个 $a \in X$ 满足 $h(a) = b$，由于 f 是有限支撑的，这些项中至多只有有限多个会对求和作出贡献。

利用（17）和（16），

$$FLh(\otimes_X^L(\bar{f}))(\bar{b}) = \sum_{\substack{\bar{a} \in X^n \\ Lh(\bar{a})=\bar{b}}} \otimes_X^L(\bar{f})(\bar{a}) = \sum_{\substack{\bar{a} \in X^n \\ Lh(\bar{a})=\bar{b}}} \prod_{i=1}^{n} f_i(a_i). \tag{18}$$

另一方面，利用（16）和（17），

$$\otimes_Y^L(LFh(\bar{f}))(\bar{b}) = \prod_{i=1}^{n} Fh(f_i)(b_i) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{\substack{a \in X \\ h(a)=b_i}} f_i(a). \tag{19}$$

根据半环的分配律，（18）和（19）右侧相等，因此

$$\otimes_Y^L(LFh(\bar{f}))(\bar{b}) = FLh(\otimes_X^L(\bar{f}))(\bar{b}).$$

由于 $\bar{f}$ 和 $\bar{b}$ 是任意的，

$$\otimes_Y^L \circ LFh = FLh \circ \otimes_X^L.$$

我们必须证明图 1 中的图表可交换。先从简单的开始。对于 $f \in FX$，

$$\begin{aligned} &\otimes_X^L\,(\eta_{FX}^L(f)) \\ &= \otimes_X^L([\![f]\!]) = \lambda[\![a]\!]\,.\,f(a) \\ &= \lambda y\,.\, \sum_{\eta_X^L(a)=y} f(a) = F\eta_X^L(f). \end{aligned}$$

对于 $\bar{a} = [\![a_1, \ldots, a_n]\!] \in LX$,

$$\begin{aligned}
&\otimes^L_X (L\eta^F_X(\bar{a})) \\
&= \otimes^L_X([\![\eta^F_X(a_1), \ldots, \eta^F_X(a_n)]\!]) \\
&= \otimes^L_X([\![\lambda b.[b = a_1], \ldots, \lambda b.[b = a_n]]\!]) \\
&= \lambda[\![b_1, \ldots, b_n]\!] \in X^n . \prod_{i=1}^{n} (\lambda b.[b = a_i])(b_i) \\
&= \lambda[\![b_1, \ldots, b_n]\!] \in X^n . \prod_{i=1}^{n} [b_i = a_i] \\
&= \lambda\bar{b} \in X^n . [\bar{b} = \bar{a}] \\
&= \eta^F_{LX}(\bar{a}).
\end{aligned}$$

对于图 1 左上角的图表，1我们需要证明

$$F\mu^L_X \circ \otimes^L_{LX} \circ L\otimes^L_X = \otimes^L_X \circ \mu^L_{FX}.$$

设 $[\![f_1, \ldots, f_n]\!] \in LLFX$，其中 $f_i = [\![f_{i1}, \ldots, f_{ik_i}]\!], 1 \le i \le n$。则

$$\begin{aligned}
&F\mu^L_X(\otimes^L_{LX}(L \otimes^L_X ([\![\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n]\!]))) \\
&= F\mu^L_X(\otimes^L_{LX}([\![\otimes^L_X (\bar{f}_1), \ldots, \otimes^L_X(\bar{f}_1)]\!])) \\
&= F\mu^L_X(\otimes^L_{LX}([\![\lambda\bar{a}_1 . \prod_{i=1}^{k_1} f_{1i}(a_{1i}), \ldots, \lambda\bar{a}_n . \prod_{i=1}^{k_n} f_{1i}(a_{1i})]\!])) \\
&= F\mu^L_X(\lambda[\![\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]\!] . \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k_i} f_{ij}(a_{ij})) \\
&= \lambda y . \sum_{\mu^L_X(x)=y} (\lambda[\![\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n]\!] . \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k_i} f_{ij}(a_{ij}))(x) \\
&= \lambda[\![a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk_n}]\!] . \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k_i} f_{ij}(a_{ij}) \\
&= \otimes^L_X([\![f_{11}, \ldots, f_{1k_1}, \ldots, f_{n1}, \ldots, f_{nk_n}]\!]) \\
&= \otimes^L_X(\mu^L_{FX}([\![\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n]\!])).
\end{aligned}$$

最后，对于图1左下方的图表，我们需要证明

$$\mu^F_{LX} \circ F \otimes^L_X \circ \otimes^L_{FX} = \otimes^L_X \circ L\mu^F_X.$$

设 $\bar{f} = [f_1, \ldots, f_n] \in LFFX$, $f_i \in FFX = \mathbb{R}^{\mathbb{R}^X}$。图表中的一条路径给出

$$
\begin{aligned}
&\mu^F_{LX}(F \otimes^L_X (\otimes^L_{FX}(\bar{f}))) \\
&= \mu^F_{LX}(F \otimes^L_X (\lambda \bar{g}.\, \prod_{i=1}^n f_i(g_i))) \\
&= \mu^F_{LX}(\lambda y.\, \sum_{\otimes^L_X(x)=y} (\lambda \bar{g}.\, \prod_{i=1}^n f_i(g_i))(x)) \\
&= \mu^F_{LX}(\lambda y.\, \sum_{\otimes^L_X(\bar{g})=y} \prod_{i=1}^n f_i(g_i)) \\
&= \lambda a \in LX.\, \sum_{g \in FLX} (\lambda y.\, \sum_{\otimes^L_X(\bar{g})=y} \prod_{i=1}^n f_i(g_i))(g) \cdot g(a) \\
&= \lambda a \in LX.\, \sum_{g \in FLX} (\sum_{\otimes^L_X(\bar{g})=g} \prod_{i=1}^n f_i(g_i)) \cdot g(a) \\
&= \lambda a \in LX.\, \sum_{\bar{g} \in (FX)^n} \prod_{i=1}^n f_i(g_i) \cdot (\otimes^L_X(\bar{g}))(a) \\
&= \lambda [a_1, \ldots, a_n] \in LX.\, \sum_{\bar{g} \in (FX)^n} \prod_{i=1}^n f_i(g_i) \cdot \prod_{i=1}^n g_i(a_i) \\
&= \lambda [a_1, \ldots, a_n].\, \sum_{\bar{g} \in (FX)^n} \prod_{i=1}^n f_i(g_i) \cdot g_i(a_i). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

另一条路径给出

$$
\begin{aligned}
&\otimes^L_X (L\mu^F_X(\bar{f})) \\
&= \otimes^L_X([\mu^F_X(f_1), \ldots, \mu^F_X(f_n)]) \\
&= \otimes^L_X([\lambda a \in X.\, \sum_{g \in FX} f_1(g) \cdot g(a), \ldots, \\
&\qquad\qquad \lambda a \in X.\, \sum_{g \in FX} f_n(g) \cdot g(a)])) \\
&= \lambda [a_1, \ldots, a_n].\, \prod_{i=1}^n \sum_{g \in FX} f_i(g) \cdot g(a_i), \qquad (21)
\end{aligned}
$$

以及（20）和（21）根据乘法对加法的分配律是等价的。

A.2 定理3的条件

我们还必须证明应用定理3所需的其余条件（13）。同样，证明只涉及初等等式推理。

定理 4. 以下图表是可交换的:



证明。对于左侧图表，令 $\ell_i = [\![a_{i1}, \ldots, a_{ik_i}]\!]$、 $a_{ij} \in X$、 $1 \le i \le n$，并令

$$\begin{aligned} f_i = \#_X(\ell_i) &= \sum_{j=1}^{k_i} \#_X([\![a_{ij}]\!]) \\ &= \sum_{j=1}^{k_i} \lambda a \in X\,.[a = a_{ij}], \quad 1 \le i \le n. \end{aligned}$$

回忆 $\#\# = \#M \circ L\#$。于是

$$\begin{aligned} &\#_X(\mu_X^L([\![\ell_1, \ldots, \ell_n]\!])) \\ &= \#_X([\![a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk_n}]\!]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \#_X([\![a_{ij}]\!]) = \sum_{i=1}^{n} f_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mu_X^M(\#_{MX}(L\#_X([\![\ell_1, \ldots, \ell_n]\!]))) \\ &= \mu_X^M(\#_{MX}([\![\#_X(\ell_1), \ldots, \#_X(\ell_n)]\!])) \\ &= \mu_X^M(\#_{MX}([\![f_1, \ldots, f_n]\!])) = \mu_X^M(\sum_{i=1}^{n} \#_{MX}([\![f_i]\!])) \\ &= \mu_X^M(\sum_{i=1}^{n} \lambda h \in FX\,.[h = f_i]) \\ &= \lambda a \in X\,. \sum_{h \in FX} (\sum_{i=1}^{n} \lambda h \in FX\,.[h = f_i])(h) \cdot h(a) \\ &= \lambda a \in X\,. \sum_{h \in FX} \sum_{i=1}^{n} [h = f_i] \cdot h(a) \\ &= \lambda a \in X\,. \sum_{i=1}^{n} f_i(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i. \end{aligned}$$

最后，对于右侧图表，对任意 $a \in X$，

$$\#_X(\eta_X^L(a)) = \#_X([\![a]\!]) = \lambda b \in X\,.[b = a] = \eta^M(a). \qquad \square$$

引理 3。函子 L、 F 和 M 保持满态射。

证明。事实上，定义在集合范畴上的所有函子都保持满态射。根据选择公理，每个满射 $f\colon X \to Y$ 都有一个右逆 $f'\colon Y \to X$，即$f \circ f' = \mathrm{id}_Y$。这说明 f 是一个分裂满态射，而任意范畴中的所有函子 G 都保持分裂满态射：

$$Gf \circ Gf' = G(f \circ f') = G\mathsf{id}_Y = \mathsf{id}_{GY}.$$

任意范畴中的分裂满态射 f 都是满态射，因为

$$e_1 \circ f = e_2 \circ f \Rightarrow e_1 \circ f \circ f' = e_2 \circ f \circ f' \Rightarrow e_1 = e_2. \qquad \square$$