arXiv:2301.10816v2 [cs.GT] 4 Sep 2023

步入未知：为亲和度不确定的论文分配审稿人

Cyrus Cousins[0000−0002−1691−0282]、Justin Payan*[0000−0001−7601−3500]和Yair Zick[0000−0002−0635−6230]

马萨诸塞大学阿默斯特分校，美国马萨诸塞州阿默斯特，邮编 01002 {cbcousins, jpayan, yzick}@umass.edu

摘要。 成功的同行评审过程要求为每篇论文分配合格且感兴趣的审稿人。大多数自动化审稿人分配方法都会为每个论文-审稿人配对估算一个实值亲和度分数，以此作为匹配质量的代理指标，然后分配审稿人，使亲和度分数总和最大化。大多数亲和度分数估算方法本质上都存在噪声：审稿人只能对少数论文出价，而文本相似度模型和主题领域匹配本身也是带有噪声的估计器。现有的论文分配系统并非为严格处理同行评审匹配市场中的噪声而设计。在本研究中，我们假设论文-审稿人亲和度分数位于一个称为不确定性集合的高概率区域之内或附近。我们针对不确定性集合，最大化审稿人分配的分数总和的最坏情况。我们展示了如何针对各类不确定性集合稳健地最大化分数总和，从而避免分配中可能出现的严重错误。我们提出的通用方法可将多种论文-审稿人亲和度模型整合到审稿人分配中，为实现更稳健的同行评审流程开辟道路。

关键词： 资源分配 · 同行评审 · 极大极小优化

1 引言

同行评审是评估科学知识的一项基础制度。在整个20世纪，科学职业发展迅速，而同行评审制度难以应对规模的扩大。现代计算机科学会议会收到数千篇投稿，并将其分配给规模相近的委员会。由于规模庞大，程序委员会主席依赖自动化的审稿人分配平台，例如 Microsoft CMT、OpenReview 和 EasyChair，这些平台使用复杂的匹配算法。审稿平台通常采用两阶段流程，以大幅度自动化审稿人分配 [5, 18, 24]。首先，系统估计每个论文-审稿人配对之间的“匹配度”，称为论文-审稿人亲和度分数。接下来，系统通过约束优化分配审稿人，最大化基于所计算亲和度分数的某个函数（通常是分数之和，或功利主义福利 [5]）。既往研究指出，审稿人分配过程是改善计算机科学领域同行评审整体质量的重要着力点 [26, 31]。目前已有工作着手解决审稿人分配中的不足 [14–16, 18, 21, 23, 25, 27, 30, 33],，但尚无工作系统性地处理审稿人分配中的根本问题：不确定性 。

匹配度分数计算中的不确定性是分配误差的主要来源之一 [18]。当我们将审稿人分配给论文时，我们希望确保未来审稿的质量，而这本质上具有噪声。由于这种不可预测性，会议通常通过四个主要信息来源构建能够反映审稿人专长和兴趣的亲和度分数。这些来源包括：(a) 主题领域匹配 （SAM）分数或基于关键词的匹配，即将审稿人提供的专长领域与论文作者提交的关键词进行比较；(b) 文本相似度分数，通常由知名的多伦多论文匹配系统（TPMS） [5]或 ACL 分数 [23], 实现；(c) 竞标，即审稿人表达其审阅论文的明确能力和意愿；最后是 (d) 推荐，程序委员会成员可以据此为论文推荐审稿人。总体亲和度分数通常通过这四项分数的线性组合计算得出。[1] 近期的会议（例如 AAAI 2021）也采取了类似的方法，对 TPMS 分数、ACL 分数和 SAM 分数进行线性

* 通讯作者。所有作者对本工作贡献相同。[1] CMT 以这种方式计算亲和度分数，详见 https://cmt3.research.microsoft.com/docs/help/chair/auto-assign-reviewers.html；OpenReview 也是如此（来源：私人通信）。

组合，并根据审稿人出价将总和提升到某个幂次 [18]。

这些常见的亲和度分数组成部分都可能缺失或不准确。最先进的文档相似度度量与专家判断不一致的比例最高可达 43% [34], , 而 AAAI 中近 40% 的 TPMS 分数完全缺失 2021 [18]。[2] 在大型人工智能会议上，5% 至 15% 的论文收到的正向出价少于三份，但有证据表明，如果收集缺失的出价，其中许多会是正向出价 [9, 21, 27]。尽管尚未对基于关键词的相似度分数开展系统研究，但关键词匹配准确率取决于作者和审稿人是否使用一致的术语，而这一过程不可避免地会丢失细微差别。研究表明，即使是专业编辑或论文作者直接推荐的审稿人，平均表现也出奇地差；第三方标注人员通过审稿质量指数进行评估后得出了这一结论 [29, 36], , 这也表明推荐可能存在噪声。

据我们所知，目前所有审稿人分配系统仍依赖亲和度分数估计值，却没有直接考虑到这些分数只是对分配质量的带噪估计。我们的工作迈出了弥补这一根本性缺口的第一步。我们探讨了一种广义的亲和度分数概念，组织者可以采用任何衡量审稿人与论文匹配度的度量来实现亲和度。这些度量可能完全可观测，也可能并非如此；例如，组织者可以将对未知出价的估计纳入亲和度计算。我们的方法还支持更先进的亲和度度量，例如基于历史数据预测审稿人表现的预测器。

1.1 我们的贡献

为了妥善考虑不确定性，我们首先构造一个称为不确定性集合 的区域，该区域以很高的概率接近真实亲和度；然后在该不确定性集合上最大化最坏情况福利。不确定性集合是一种非常通用的构造，使会议组织者能够利用现有数据和合理假设引入自己的不确定性模型。不确定性集合推广了概率分布——虽然可以根据概率分布构造不确定性集合，但非贝叶斯模型通常不会 指定完整的概率分布。在这些情况下，针对不确定性集合给出最坏情况保证是相当自然的。我们将不确定性集合上最大化最坏情况福利这一问题称为不确定性下的审稿人分配（Reviewer Assignment under Uncertainty），简称 RAU。

本文提供了许多不确定性集合的示例，首先介绍第 3.1 节中的轴对齐超矩形不确定性集合，以及第3.2节中的球形和椭球不确定集。定理 6 和定理 7 给出了详尽的端到端示例，说明会议组织者如何利用历史数据或抽样出价中平方误差 的界，构造椭球不确定集；这是一种频率学派方法，无法针对期望福利进行优化。我们还提出了不确定性集演算，使人们能够从简单组件构造复杂且信息丰富的不确定性集合（第3.3节）。我们的结果不受亲和度模型限制；组织者可以任意定义亲和度分数，只要能够估计所有论文-审稿人对的分数，并对部分配对进行抽样即可。

我们证明，RAU 在凸不确定性集合上是 NP困难的（定理 10），并提出一种名为鲁棒审稿人分配（RRA）的近似算法。该算法适用于任何能够高效计算最坏情况福利的凸不确定性集合（第 4 节）。RRA 将随机舍入 方法应用于离散 RAU 问题的凸松弛 ，并分析了由凸规划方法和随机舍入导致的优化误差 ，以及因使用不确定性集合而非已知亲和度分数所导致的极大极小误差 （第 4.2 节）。我们给出了 RAU 的真实福利相对于极大极小福利解的界（命题 2），并探究了 RAU 的整数间隙（命题13）。

我们使用 ICLR 最近五轮迭代的公开数据，实证展示了我们的方法相较于常用基线方法的鲁棒性（第 5.1 节）。此外，我们还探究了合成场景，在这些场景中，RRA 避免了最常用基线方法所面临的负面后果（第 5.2 节）。我们希望这项工作能引起人们对亲和度分数临时性特征的关注，推动改进其计算方式，并进一步研究其鲁棒性。本文的所有证明均收录于附录中。

[2] 尽管 AAAI 2021 的组织者没有说明为何缺失如此多 TPMS 分数，但分数缺失有多种原因，包括审稿人选择不使用该系统，或提供的出版记录不充分或为空。

1.2 相关工作

当前的自动化同行评审系统会逐篇计算临时的亲和度分数，并最大化总和 [5, 18, 25], 论文的最低值 [16, 33], 或论文组的最低值 [1]。

近期有两项研究以我们的前提为出发点：常用的亲和度分数可能没有看起来那么准确。如今已有数据可直接将亲和度分数的各项内容与专家对审稿人匹配度的判断进行比较，而该数据集的作者表明，现有的相似度评分计算方法会产生许多误差 [34]。近期一项研究利用分配算法中的随机性，直接评估分配决策，结果表明，与出价相比，应赋予文本相似度更高的权重 [28]。这些结果推动了亲和度分数计算（尤其是文本相似度计算）的进一步改进，同时也说明，合理利用现有的噪声信息来源同样很有必要。

其他研究使用现代自然语言处理技术来改进基于文档的相似度评分 [23], 、鼓励审稿人竞标出价不足的论文 [9, 21, 27], , 或抑制策略性竞标行为 [13–15]。尽管这些方法降低了不确定性，但并未直接处理亲和度分数中的不确定性。

我们的鲁棒优化算法基于迭代超梯度上升方法；类似技术已应用于标签未知情况下的监督学习 [19] , 以及群体身份未知情况下的公平学习 [7]。

2 不确定性下的审稿人分配

假设有一组 P 共 n 篇提交给同行评审会议的论文，[3] 以及一组 R 共 m 位审稿人。审稿人分配问题的关键输入是论文—审稿人 亲和度评分矩阵 $S^* \in [0,1]^{n\times m}$ （我们也将 $[0,1]^{n\times m}$ 称为单位超立方体），其中 $S^*_{p,r} \in [0,1]$ 表示论文 $p \in P$与审稿人$r \in R$之间的亲和度。该矩阵 S^* 编码了真实的 亲和度，也就是将每位审稿人分配给每篇论文所能为会议带来的价值。此时，自然会产生两个问题：“如何才能预先知道一项论文—审稿人分配会带来多少价值？”以及“我们所说的价值究竟指什么？”这些问题直接促使我们开展这项研究；审稿人分配之所以具有挑战性，是因为亲和度取决于对不确定的未来结果定义不清的偏好。

尽管存在这一根本性挑战，所有既往研究都假设可以直接获取真实亲和度 [1, 5, 16,18, 25, 33]。我们放宽这一假设，转而只假设对 S^* 有部分了解，并用一个不确定性集合 $\mathcal{S} \subseteq [0,1]^{n\times m}$ 表示，该集合以较高概率包含一个接近 S^* 的点。

定义 1（（δ,γ）不确定性集合）。设 $S^* \in [0,1]^{n\times m}$ 为真实亲和度评分矩阵。一个（δ,γ）不确定性集合满足 $\mathbb{P}\big(\inf_{S\in\mathcal{S}} \|S - S^*\|_1 > \gamma\big) < \delta$，即它很可能包含某个与 S^* 的距离不超过 γ 的 S。

一旦我们计算出一个（δ，γ）不确定性集合 $\mathcal{S}$，我们的目标就是找到一个分配矩阵 A，将审稿人分配给论文，并在由 A 和 S^* 定义的评分函数上提供良好的最坏情况保证，同时满足一些硬约束。分配是确定性的，即位于单位超立方体的顶点上，或 $\mathcal{A}_0 \doteq \{0,1\}^{n\times m}$。我们计算出审稿人到论文的分配 $A \in \mathcal{A}_0$，其中 $A_{p,\,r} = 1$ 当且仅当 r 被分配来评审论文 p。硬约束通常包括每篇论文所需的审稿人数、审稿人工作量上限以及利益冲突。利益冲突由集合 $\mathcal{C} \subseteq (P \times R)$ 构成，其中（p，r）$\in \mathcal{C}$ 意味着 r 不能被分配给 p。$\mathcal{A}_{\mathrm{CoI}} \subseteq \mathcal{A}_0$ 表示所有符合 $\mathcal{C}$ 中利益冲突约束的分配所构成的集合。如果 $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{CoI}}$ 且（p，r）$\in \mathcal{C}$，那么 $A_{p,\,r} = 0$。

假设每篇论文 p 恰好需要 k_p 位审稿人，而每位审稿人 r 分配到的论文不得超过 u_r 篇。那么

$$\mathcal{A}_P \doteq \left\{A\in\mathcal{A}_0 \,\middle|\, \forall p\in P\colon \sum_{r\in R} A_{p,r} = k_p\right\} \;\&\; \mathcal{A}_R \doteq \left\{A\in\mathcal{A}_0 \,\middle|\, \forall r\in R\colon \sum_{p\in P} A_{p,r} \le u_r\right\}$$

分别定义论文审稿覆盖要求 和审稿人工作量上限。我们有时会提到总审稿工作量 $K \doteq \sum_{p\in P} k_p$。综合起来，这些硬约束确定了一组可行分配$\mathcal{A} \doteq \mathcal{A}_{\mathrm{CoI}} \cap \mathcal{A}_P \cap \mathcal{A}_R$。

[3] 同行评审场所是指任何为进行同行评审而将审稿人分配给论文的实体。典型的会议是同行评审会议，但我们的方法也适用于 ACL Rolling Review 等类似场所 [22]。

我们的目标是计算分配任务 A，使基于评分的目标函数 $\mathrm{W}(A,\ S)$ 最大化，同时满足所有硬约束。本文始终假设 W 是功利主义社会福利 $\mathrm{W}(A,\ S) \doteq \frac{1}{n}\sum_{p\in P}\sum_{r\in R} A_{p,\ r} S_{p,\ r}$。

总之，不确定性下的审稿人分配（RAU）问题以论文集合 P、审稿人集合 R、分配约束 $\mathcal{A}$ 和不确定性集合 $\mathcal{S}$ 为输入。理想情况下，我们会计算 $A^* \doteq \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{W}(A,\ S^*)$，但由于我们不知道 S^*，因此无法做到。因此，我们的目标是寻找或近似

$$A^{\mathrm{MM}} \doteq \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A,S)\ . \tag{1}$$

这里的 A^{MM} 针对不确定性集合内对抗性（最坏情形）的亲和度分数最大化福利，从而以高概率确保鲁棒性。鲁棒性保证能够防止灾难性失败，但代价是平均情况性能有所下降。

我们以一个简单的观察结束本节：对于任意分配 A，将 $\mathcal{S}$ 上的最坏情况福利与 S^* 条件下 A 的真实福利联系起来。

命题 2（联系 $\mathcal{S}$ 上的真实福利与最坏情况福利）。 假设 $\mathcal{S}$ 是一个 (δ,γ) 不确定性集合，并且对所有 S、$S'\in\mathcal{S}$，都有 $\|S-S'\|_1 \le L$，且真实亲和度评分矩阵标记为 S^*。考虑任意分配 $A\in\mathcal{A}$。那么，其概率至少为 $1-\delta$，

$$\mathrm{W}(A,S^*) - \tfrac{L+\gamma}{n} \le \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A,S) \le \mathrm{W}(A,S^*) + \tfrac{\gamma}{n}\ .$$

命题 2 意味着，如果我们希望 $\mathcal{L}_1$ 直径较小的不确定性集合 $\mathcal{S}$，就可以使用鲁棒目标 (1) 近似优化真实福利。比较 $\mathrm{W}(A^{\mathrm{MM}},\ S^*)$ 与 $\mathrm{W}(A^*,\ S^*)$ 时，也有类似的界；后者即为未知的真实最优分配 A^* 所对应的福利（定理14）。不过，命题 2 指出，无论采用何种分配 A，最大最小目标本身都接近真实福利；而定理14则表明，特定分配 A^{MM} 相对于 A^*的遗憾较低。

3 亲和度分数的不确定性模型

我们首先分析几种简单的不确定性集合，即 S 已知的情形，以及超矩形、球形和椭球形不确定性集合。本节最后将展示一条组合规则，使会议组织者能够将多个不确定性集合合并为一个 RAU 问题。

S 已知的情形 $\mathcal{S}=\{S\}$相当直接。这对应于当前大多数会议管理系统的实现方式 [5, 18]。当 $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{\mathrm{CoI}}\cap\mathcal{A}_P\cap\mathcal{A}_R$时，二元整数规划 $\arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{W}(A,\ S)$ 已知可在多项式时间内求解，因为它是一个具有全酉模约束的线性规划。直观而言，这些约束在分配超立方体上引入切面，但不会产生新的顶点，因此所得多面体的所有顶点都位于二元整数格上。多个公开可用的资源中都提供了这种线性规划的高效实现 [16, 25, 33, 35]。现在我们来考察超矩形、球形和椭球形不确定性集合。

3.1 基于置信区间的超矩形不确定性集

许多简单直观的不确定性集合模型都采用轴对齐超矩形的形式。一种朴素的不确定性集合可以分别估计每个 $S_{p,\ r}$ 的置信区间，并使用并集界为亲和度分数给出一个高概率区域。会议组织者还可能确定性地假设亲和度分数由某些区间界定，并取多个此类区间界的交集。例如，他们可以从单位超立方体的全局约束开始。随后，可以根据某些对象是否获得特定出价、程序委员会是否建议进行该分配，或是否达到文档相似度分数阈值，为对象对给出下界和上界。该模型是临时的且简单，但在实践中可能适用。此外，如果我们假设以至少 $1-\delta$的概率，这些界中只有很小的常数比例 γ 可能被违反，那么在更现实的假设下，我们可以建立一个（δ，γ）置信区间。

如果我们取所有论文-审稿人评分的下界，就得到一个下界亲和度评分矩阵 $\underline{S}$。类似地，取论文-审稿人评分的所有最大可能值，就得到一个上界亲和度评分矩阵 $\overline{S}$。因此，我们的不确定性集合为 $\mathcal{S}_{\square} \doteq \{X \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid \underline{S}_{p,r} \le X_{p,r} \le \overline{S}_{p,r}\ \forall p, r\}$。我们的第一个结果是，对于轴对齐的超矩形不确定性集合，RAU 可以在多项式时间内求解。

定理 3（超矩形不确定性下的 RAU）。当不确定性集合为轴对齐超矩形区域 $\mathcal{S}_{\square}$ 时，

$$\arg\max_{A\in\mathcal{A}} \inf_{S\in\mathcal{S}_{\square}} \mathrm{W}(A,S) = \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{W}(A,\underline{S}) \ .$$

因此，*RAU* 会最大化 $\underline{S}$ 的 W，这可通过线性规划归约在多项式时间内完成。

轴对齐的超矩形不确定性集合对应于这样一种情况：每个论文-审稿人评分的不确定性都受到独立限制，因此相对简单。尽管超矩形不确定性集合易于处理，但它们过于悲观，因为所有亲和度同时取极端值的可能性极低（也就是说，S 实际上是极不可能出现的结果）。我们可以使用考虑到多个极端值同时出现概率较低的不确定性集合模型，来改进估计。

3.2 具有 $\mathcal{L}_2$ 误差保证的椭球不确定性集合

许多标准模型会直接限制其预测的 $\mathcal{L}_1$ 或 $\mathcal{L}_2$ 误差，这意味着其不确定性集合比超矩形 $\mathcal{S}$ 更乐观（因此对命题 2 的保证更严格）。

我们首先分析具有 $\mathcal{L}_2$ 误差保证的对称不确定性集合。例如，我们可以随机均匀地征集出价，然后使用具有 $\mathcal{L}_2$ 误差保证 [4, 8, 17]的协同过滤来预测未抽样的出价。随后可以将 $\mathcal{S}$ 构造为确定已知值（基于文档的相似度评分和基于关键词的匹配评分）与实际出价和估计出价的线性组合，从而得到一个球形不确定性集合 $\mathcal{S}$。

我们可以将一个球形（δ，0）不确定性集合视为由点估计 S^0 和一个半径 ε 构成，该半径用于限制点估计 S^0的$\mathcal{L}_2$ 误差。形式上，我们旨在求解问题 $\arg\max_{A\in\mathcal{A}} \inf_{S\in B_\varepsilon(S^0)} \mathrm{W}(A, S)$，其中 $B_\varepsilon(S^0) \doteq \{X \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid \|X - S^0\|_F \le \varepsilon\}$ 表示以 S^0为中心的 ε Frobenius 范数球。

定理 4（球形不确定性下的 RAU）。当 $\mathcal{S}$ 是一个球体时，

$$\arg\max_{A\in\mathcal{A}} \inf_{S\in B_\varepsilon(S^0)} \mathrm{W}(A,S) = \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{W}(A,S^0) \ ,$$

它可以在多项式时间内计算。此外，对于所有 $A \in \mathcal{A}$，

$$|\mathrm{W}(A,S^0) - \mathrm{W}(A,S^*)| \le \tfrac{\varepsilon\sqrt{K}}{n} \ .$$

对定理 4 的一种理解是，在球形不确定性集合上进行 A^{MM} 并不能比 $\arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{W}(A, S^0)$ 提供更多鲁棒性保证。因此，要获得有意义的鲁棒性保证，我们似乎既需要限制亲和度分数的总变化量（定理 3），也需要亲和度分数噪声具有不对称性（定理 4）。我们可以直观地解释这些结果：要决定如何最好地分配审稿人，我们需要在分配亲和度可能较高（但也可能较低）的配对，与分配亲和度处于平均水平但确定性较高的配对之间进行权衡。只有当论文-审稿人对之间的不确定性有所不同，且不确定性的总量受到限制时，这些权衡才有意义。

基于这一直觉，我们将其推广到椭球不确定集的情形。在一个简单模型中，我们可以将亲和度分数建模为多元高斯分布，并在第 5 节的实验中对此进行更深入的探讨。在这种情况下，我们得到一个均值向量[4] $\vec{\mu} \in [0,1]^{nm}$ 和一个半正定协方差矩阵

[4] 严格来说，这个多元高斯分布的一个样本是 $\mathbb{R}^{nm}$ 中的向量，必须将其重塑为矩阵 $S \in \mathbb{R}^{n\times m}$。我们会按照行优先顺序将矩阵转换为向量，并在方便时忽略矩阵与向量之间的区别。

$\Sigma \in \mathbb{R}^{nm\times nm}$。给定置信水平 $1-\delta$，我们构造一个不确定性集合

$$\mathcal{S} \doteq \left\{S \in \mathbb{R}^{nm} \mid (S-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(S-\vec{\mu}) \le \chi^2_{nm}(1-\delta)\right\} \ , \tag{2}$$

其中，χ^2_k 是具有 k 个自由度的 χ^2 分布的逆累积分布函数。若假设不存在模型误差（通常这并不是一个稳妥的假设），那么真实亲和度分数以至少 $1-\delta$的概率包含在 $\mathcal{S}$ 中。我们还知道，$\chi^2_{nm}(1-\delta)$ $\le nm + 2\sqrt{nm}\ln\frac{1}{\delta} + 2\ln\frac{1}{\delta}$。可以看出，不确定性集合的大小仅取决于 $\frac{1}{\delta}$的对数，因此我们可以在 δ与不确定性集合的 $\mathcal{L}_1$ 直径之间进行权衡。

虽然式 (2) 中采用的高斯模型作出了很强的建模假设，但我们可以使用验证集和具有可证明尾界的预测模型，来获得无需任何此类假设的不确定性集合。为此，我们需要一个用于预测亲和度分数的模型。会议组织者随后可以利用验证数据获得 $\mathcal{L}_2$ 误差界；由于抽样偏差（对于任何给定会议，只会观测到某些论文-审稿人对），这将产生一个椭球。在这种情形下，不确定性集合并非由概率分布的置信区间推导而来，而是直接来自总泛化误差的尾界。在这种情形下进行优化需要采用 RAU 这类稳健方法，不能使用平均情形分析。

现在，我们将以更具技术性的细节介绍这个预测模型。假设某个论文-审稿人配对的真实亲和度分数为 $f^*(p,\ r)$，并且我们可以使用一个预测模型 $f(p,\ r)$，该模型可能是在历史会议上训练得到的。实际上，f 根据审稿人分配之前可用的任何信息，预测审稿人 r 对论文 p 的亲和度，而亲和度的具体定义由会议组织者决定。例如，某个会议可能会认为，审稿人出价最能衡量亲和度，并使用历史数据训练一个预测器 f，根据基于文档的相似度评分和关键词预测缺失的出价。或者，会议组织者可能会决定，真实亲和度 $f^*(p,\ r)$ 应对应元审稿人对评审质量的判断，随后可以使用历史数据训练 f 来预测这些判断。

我们将取 $\hat{S}_{p,r} \doteq \hat{f}(p,\ r)$ 和 $S^*_{p,\ r} \doteq f^*(p,\ r)$。我们假设可以评估 $\hat{f}$ 当前会议中的所有论文-审稿人对，以及可能还包括历史会议中的配对。我们或许可以对当前会议和历史会议中的部分（但非全部）配对进行抽样$f^*(p,\ r)$（即验证数据）。然后，我们根据在验证集上计算出的期望平方误差估计值，对 f 与 f^* 之间平方误差的加权平均值进行概率界定。验证集的具体构成因应用而异，但总体策略是估计平方误差 $\mathbb{E}[(S^* - \hat{S})^2]$,，其中，$S^*$ 和$\hat{S}$ 由 f^* $\hat{}$和 f 在一个随机论文-审稿人配对上的取值给出。我们介绍两种方法：第一种是归纳式方法，利用历史数据或辅助数据构建验证集；第二种是直推式方法，假设可以在当前同行评审会议中查询一小部分随机抽取的真实亲和度分数（例如出价）。我们需要定义如何对一列满足条件独立且无放回的随机变量进行抽样。

定义5. 变量序列 x_1、x_2、$\ldots x_t$（其中所有 $x_i \in \mathcal{X}$）从支撑集为 $\mathcal{X}$ 的分布 $\mathcal{D}$ 中条件独立地无放回抽取，当且仅当变量 x_i 按顺序从 x_1 抽取至 x_t，并且对于任意 $i \in \{1,\ldots t\}$、$p_{\mathcal{D}}(x_i = x|x_1,\ldots x_{i-1}) = \frac{p_{\mathcal{D}}(x_i=x)}{\int_{\mathcal{X}\setminus\{x_1,\ldots x_{i-1}\}} p_{\mathcal{D}}(x_i=y)dy}$，对所有 $x \in \mathcal{X}\setminus\{x_1,\ldots x_{i-1}\}$ 均成立，且 $p_{\mathcal{D}}(x_i = x|x_1,\ldots x_{i-1}) = 0$ 对 $x \in \{x_1,\ldots x_{i-1}\}$ 成立。

定理6（基于归纳式预测器的椭球不确定性集）。设 $\mathcal{D}'$ 是论文-审稿人对上的一个概率分布，$\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ 分别是论文和审稿人的分布。假设 P 和 R 分别从 $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ 中条件独立地无放回抽取。[5] 假设我们从 $\mathcal{D}'$ 中条件独立地无放回抽取 T 个论文-审稿人对 $\{(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$，并且这些论文-审稿人对的真实和估计亲和度分数分别为 $\{f^*(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$ 和 $\{\hat{f}(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$。

Let

$$\alpha(p,r) \doteq \frac{\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}\sim\mathcal{D}^{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{p}=p)\mathbb{P}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{D}^{\mathcal{R}}}(\boldsymbol{r}=r)}{\mathbb{P}_{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\sim\mathcal{D}'}((\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=(p,r))} \quad \& \quad \alpha_{\min} \doteq \inf_{p\in\mathcal{P},r\in\mathcal{R}} \alpha(p,r)$$

[5] 稍微滥用一下记号，我们对论文 $p \in P$ 和审稿人 $r \in R$ 进行编号，使得 p 既可以表示 $\mathcal{P}$ 中的一篇论文，也可以表示 1 到 n 之间的一个整数。

分别表示（1）从 $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 中抽取 p 且从 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ 中抽取 r 的概率比，与从 $\mathcal{D}'$中抽取(p,r) 的概率比；（2）概率比下确界。现在构造椭球矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{nm\times nm}$，令其为对角矩阵，使得对于所有 $p \in P, r \in R$，均有 $\Sigma_{pm+r,pm+r} = \alpha(p,r)$。

那么，对于任意 $\delta \in (0,\ 1)$，椭球

$$\mathcal{S} \doteq \left\{ S \in \mathbb{R}^{nm} \;\middle|\; \frac{1}{nm}(S-\hat{S})^{\intercal}\Sigma^{-1}(S-\hat{S}) \le \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2}_{=\hat{\xi}} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{T}+\frac{n+m}{nm\alpha_{\min}^2}\right)\frac{\ln\frac{1}{\delta}}{2}}}_{=\eta} \right\}$$

是一个$(\delta,\ 0)$ 不确定性集合，其中 $\hat{}\xi$ 表示我们估计分数的经验平方误差，而 η 表示由抽样导致的超额误差界。

不同于标准的审稿人分配设定，定理6假设历史数据和当前会议都是随机的。具体而言，历史论文-审稿人配对从 $\mathcal{D}'$ 中抽样（用于模拟历史数据生成过程），而当前会议的论文和审稿人分别从 $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ 中抽样（用于模拟论文投稿和审稿人自愿参与的过程）。接下来，我们构造 $\alpha(p,\ r)$，以重新加权当前会议上的平方误差，使其与 $\mathcal{D}'$ 上的期望平方误差相匹配（即，我们使用重要性抽样来校准关于 $\mathcal{D}'$ 的期望，使其与关于 $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ 的期望相匹配）。例如，$\mathcal{D}'$ 反映了历史数据生成的所有要素，其中最重要的是可获得来自多个关注重点各异的会议的历史数据。随后，我们可以使用论文和审稿人相对稳定的主题领域来模拟 $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$，因此，$\alpha(p,\ r)$ 反映了当前会议中 p 和 r 的主题领域受欢迎程度与历史会议相比的比例。

我们在直推式设定下证明了类似的结果。我们不再基于历史数据构造预测函数，而是将当前会议中一小组已知亲和度推广到同一会议中的未知亲和度。请注意，$\mathcal{D}'$ 现在反映的是从当前会议而非历史会议中获取（$p_i,\ r_i$）配对样本的过程。

定理 7（由直推式预测器得到的椭球不确定性集合）。假设我们从 $\mathcal{D}'$ 中有条件地独立无放回抽取 T 个论文-审稿人对 $\{(p_i,\ r_i)\}_{i=1}^{T}$，这些论文-审稿人对的真实和估计亲和度分数分别为 $\{f^*(p_i,\ r_i)\}_{i=1}^{T}$ 和 $\{\hat{}f(p_i,\ r_i)\}_{i=1}^{T}$。令

$$\alpha(p,r) \doteq \frac{(nm)^{-1}}{\mathbb{P}_{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\sim\mathcal{D}'}((\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=(p,r))}$$

表示均匀随机抽取 $p,\ r$ 与从 $\mathcal{D}'$ 中抽取 $(p,(\ r))$ 之间的概率比，并将椭球矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{nm\times nm}$ 构造为对角矩阵，使得对于所有$p \in P,\ r \in R$，均有 $\Sigma_{pm+r,\ pm+r} = \alpha(p,\ r)$。

那么，对于任意 $\delta \in (0,1)$，椭球

$$\mathcal{S} \doteq \left\{ S \in \mathbb{R}^{nm} \;\middle|\; \frac{1}{nm}(S-\hat{S})^{\intercal}\Sigma^{-1}(S-\hat{S}) \le \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2}_{\hat{}\xi} + \underbrace{\sqrt{\frac{\ln\frac{1}{\delta}}{2T}}}_{=\eta}, \right\}$$

ξ 是一个$(\delta,0)$ 不确定性集合，其中 $\hat{}\ \xi$ 表示我们估计分数的经验平方误差，而 η 表示由抽样导致的超额误差界。

这一传导式结果可以直接应用于许多不同场景：在这些场景中，会议组织者可以从当前会议收集关于 f^* 的（$p_i,\ r_i$）对的样本，而非使用历史数据。必须在分配大多数审稿人之前获取这些信息。例如，组织者可以将 f^* 定义为审稿人的假设出价；那么，根据定理 7，就需要收集少量出价 $\hat{}$，以估计 f 的误差。同样，f^* 可以对应于对评审质量的元审稿人评判，这可以通过采用两阶段评审流程来实现：第一阶段产生的评审和反馈 $\hat{}$ 将用于估计 f 的误差。这些 f^* 的定义需要付出高昂的抽样成本，但组织者仍可通过在定理 7 的不确定性集合上求解 RAU，高效地针对复杂的亲和度模型。

我们自然会提出这样一个问题：“需要多少样本才能获得精确的置信界？”注意，根据命题 2，对抗性福利与真实福利之间的差距为 $\frac{L}{n}$，其中 L 表示 $-$

$\mathcal{L}_1$ $\mathcal{S}$的直径。对于定理 7 中的椭球形不确定集，$\frac{L}{n} \le 2m\sqrt{\alpha_{\max}}(\hat{\xi}+\eta)$，其中 $\hat{\alpha}_{\max} \doteq \sup_{p\in\mathcal{P},\, r\in\mathcal{R}} \alpha(p, r)$。此外，随着 T 增大，经验平方误差 ξ会收敛到某个 ξ，因此我们只需选取 $T \in \mathbf{\Omega}\left(\frac{\log\frac{1}{\delta}}{\xi^2}\right)$ 个样本，就能确保不确定性集合在常数因子范围内达到最优；此时，福利差距为 $\mathbf{O}(m\sqrt{\alpha_{\max}}\xi)$，这同样在常数因子范围内最优。值得注意的是，所需样本量 T与场地规模无关 （即 n 和 m），因此，征集这些额外出价所增加的负担微乎其微。我们还发现，这种方法的根本局限在于平均平方误差 ξ，它取决于预测器、会议和抽样分布 $\mathcal{D}'$。因此，使用能使这一数值较小的预测器至关重要。幸运的是，许多预测模型都会专门针对某项任务进行训练，以最小化 $\mathcal{L}_2$ 误差，因此这种情况往往成立；这也启发了我们选择椭球形不确定集。请注意，尽管这一论证针对定理 7，但对于确保定理 6 中 $\eta = \mathbf{O}(\xi)$ 所需的验证集规模，也可以进行类似论证。

最后，我们指出，使用不确定性集合构造中的 γ 参数（$\mathcal{L}_1$ 误差），可以在对抽样过程作出较不理想（但更现实）假设的情况下扩展这两项结果。具体而言，如果验证集样本中有 $T\gamma$ 是从 $\mathcal{D}'$ 抽取的，且$\hat{s}$、s^* 及其对应的 (p, r) 对受到对抗性污染，那么这两项结果都能得到一个 $(\delta, T\gamma)$ 不确定性集合；这立即适用于隐私、对抗鲁棒性以及策略无关性的各种概念。此外，为了对更复杂且可能尚未得到充分理解的分布偏移进行建模，我们利用贝内特不等式得到 [2] a$\left(\delta+\delta', T\gamma+\frac{1}{3}\ln\frac{1}{\delta'}+\sqrt{2T\gamma(1-\gamma)\ln\frac{1}{\delta'}}\right)$ 不确定性集合；此时，验证集改为从某个$\mathcal{D}''$ 中抽取，且 TVD$(\mathcal{D}', \mathcal{D}'') \le \gamma$。

3.3 组合规则

我们经常会遇到比前几节所述简单几何形状更复杂的不确定性集合。例如，我们可以将单位超立方体的约束与第3.2节所述的椭球形不确定集相交。这会产生截断椭球，这是一个常见的构造，我们将在第 5 节再次看到。

引理8（不确定集交集）。假设每个 $\mathcal{S}_i$ （ $i \in [k]$ ）都是一个（δ_i,0）不确定性集合。那么 $\mathcal{S}_\cap \doteq \bigcap_{i=1}^k \mathcal{S}_i$ 是一个（$\|\vec{\delta}\|_1$,0）不确定性集合。

我们还可以使用引理 9，将（δ，γ）不确定性集合转换为更大的（δ，0）不确定性集合。

引理 9（$\mathcal{L}_1$ 误差项）。如果 $\mathcal{S}$ 是一个（δ, γ）不确定性集合，那么对于任意 $\eta \in [0, \gamma]$，都有闵可夫斯基和

$$\mathcal{S}' \doteq \mathcal{S} + \{\vec{s} \in \mathbb{R}^{nm} \mid \|\vec{s}\|_1 \le \eta\} = \{\vec{x} + \vec{s} \mid \vec{x} \in \mathcal{S}, \|\vec{s}\|_1 \le \eta\}$$

是一个$(\delta, \gamma - \eta)$ 不确定性集合。

我们可以依次应用引理 8 和引理 9，求任意 (δ, γ) 不确定性集合的交集。首先，通过引理 9 将它们扩展为更大的 $(\vec{\delta_i}, 0)$ 不确定性集合，然后应用引理 8 求出它们的交集。

我们还可以将这些结果应用于第 3 节前面所述的不确定性集合。例如，多个轴对齐超矩形约束的交集会生成一个轴对齐超矩形。当会议定义的结构约束（例如，根据主题重叠设定的硬上界和下界）与逐对误差界相交时，就可能出现这种情况。同样，我们也可以考虑由两个不同估计器根据定理 6 和定理 7 得出的两个椭球误差界相交的情况。如果两个椭球的质心相同，且其中一个严格小于另一个，那么这种交集并无意义；但如果两个椭球的质心不同（例如估计器存在不同偏差时），它们的交集可能会带来显著好处。

算法 1 鲁棒审稿人分配（RRA）

要求： 误差容限 ε、超梯度范数上界 λ、不确定性集合 $\mathcal{S}$、约束分配空间 $\tilde{\mathcal{A}}$、总审稿工作量 $K = \sum_{p \in P} k_p$（即所需分配任务的总数）

任意初始化 $S^{(0)} \in \mathcal{S}$

$A^{(0)} \leftarrow \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{W}(A, S^{(0)})$ // 初始化 $A^{(0)}$，以优化 $S^{(0)}$（通过线性规划归约）

$\hat{} A \leftarrow A^{(0)}$; $\hat{} w \leftarrow -\infty$ // 维护最优分配方案 $\hat{} A$ 和对抗性福利 $\hat{} w$

$T \leftarrow \lceil 2K(\frac{\lambda}{\varepsilon})^2 \rceil$; $\alpha \leftarrow \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$ // 计算足够的步数 T 和步长 α

对 $t \in \{1, 2, \ldots T\}$ **执行**

  $S^{(t)} \leftarrow$ 参数下确界$_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{W}(A^{(t-1)}, S)$ // 对手从 $\mathcal{S}$ 中选择 $S^{(t)}$

  如果 $\mathrm{W}(A^{(t-1)}, S^{(t)}) > \hat{} w$ // 如果对抗性福利优于此前的最佳值，则更新 $\hat{} A$

    $\hat{} A \leftarrow A^{(t-1)}$; $\hat{} w \leftarrow \mathrm{W}(A^{(t-1)}, S^{(t)})$

  $A^{(t)} \leftarrow A^{(t-1)} + \alpha \nabla_{A^{(t-1)}} \mathrm{W}(A^{(t-1)}, S^{(t)})$ // 使用超梯度步骤更新分配方案

  $A^{(t)} \leftarrow \arg\min_{A \in \tilde{\mathcal{A}}} \|A - A^{(t)}\|_2$ // 投影到可行分配集合 $\tilde{\mathcal{A}}$

返回 $\mathrm{Round}(\hat{A})$ // 样本整数分配

4 鲁棒审稿人分配（RRA）

现在，我们提出一种通用算法，只要能够在多项式时间内计算对抗性（最坏情形）福利，就可以近似求解凸不确定集上的 RAU 问题。我们首先在定理 10 中证明，对于此类凸不确定区域，RAU 通常是 NP困难的。

定理 10（RAU 的困难性）。在凸不确定性集合 $\mathcal{S}$ 上，*RAU* 是 *NP*困难的，即使对于具有多项式时间对手的 $\mathcal{S}$ 也是如此。具体而言，即使将 $\mathcal{S}$ 限制为由多项式个半空间相交形成的有界多面体，*RAU* 仍然是 *NP*困难的。

4.1 鲁棒审稿人分配

鉴于这一困难性结果，我们概述一种方法，以便在具有多项式时间对手的凸不确定性集合中高效近似求解 RAU。我们首先允许采用分数分配（而非二元分配）。随后，我们应用超梯度上升（类似于次梯度下降），以近似 $\tilde{}\arg\max_{A \in \tilde{\mathcal{A}}} \inf_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{W}(A, S)$，其中 $\tilde{\mathcal{A}}$ 是第 2 节中离散分配方案可行集合 $\mathcal{A}$ 的凸包。当超梯度上升算法终止时，我们将该分配随机舍入为二元分配。

具体而言，我们提出了算法 1，将其称为 RRA。RRA 对目标函数采用迭代对抗优化策略。在每次迭代 t 中，我们执行一个对手步骤，以确定给定 $S^{(t)}$ 分配 $A^{(t-1)}$ 下最不利的情况。随后，在假设评分矩阵在 $S^{(t)}$ 处保持不变的情况下，我们从 $A^{(t-1)}$ 到 $A^{(t)}$ 执行梯度上升步骤，接着执行投影步骤，以确保 $A^{(t)}$ 保持可行（即不违反任何分配约束）。梯度上升步骤是有效的，因为梯度 $\nabla_A \mathrm{W}(A, \arg\inf_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{W}(A, S))$ 是超梯度 $\nabla_A \inf_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{W}(A, S)$ 的一个元素。

证明收敛所需的迭代次数取决于梯度范数上界 λ，它是满足以下条件的最小项：对于所有 A 和 S，$\|\nabla_A \mathrm{W}(A, S)\|_2 \leq \lambda$。我们在关于 λ、$\frac{1}{\varepsilon}$ 和总审稿工作量 K 的多项式次数迭代内，以误差 ε 逼近最大最小最优连续矩阵 $\tilde{A}^{\mathrm{MM}}$。RRA 的时间复杂度还取决于对抗性最小化和投影步骤，但只要这些步骤能在多项式时间内完成，RRA 也同样具有多项式时间复杂度。我们在命题 11 中陈述收敛结果。该证明应用了关于次梯度下降 [32] 的标准收敛结果。

命题 11（超梯度上升效率）。令 λ 表示 *RRA* 中所用超梯度元素 $\nabla_A \mathrm{W}(A, S)$ 的 $\mathcal{L}_2$ 范数上界。*RRA* 的超梯度上升部分经过 $\lceil 2K(\frac{\lambda}{\varepsilon})^2 \rceil$ 次迭代后，收敛到与极大极小最优连续分配 $\tilde{A}^{\mathrm{MM}}$ 相差不超过 ε。*RRA* 的运行时间为 $\mathbf{O}\big(2KC(\frac{\lambda}{\varepsilon})^2\big)$，其中 C 为一次对手与投影步骤的时间成本。

尽管迭代次数的上界可能相当大，但这证明，只要对手与投影步骤都能在多项式时间内求解，且

时间内求解，且 λ 有界，RAU 的凸松弛就能在多项式时间内求解。此外，实际应用中收敛所需的迭代次数通常会小得多。

在（截断）椭球不确定集的情况下，复杂度结果有所改善。在截断椭球不确定集下，对抗性最小化步骤可在多项式时间内完成，因为它是在凸二次约束（以及盒约束）下的线性目标函数（即二阶锥规划）；而投影步骤始终可在多项式时间内完成，因为它是在线性约束（即分配约束 $\mathcal{A}$）下的凸二次目标函数。一般情况下，λ 的界可能难以计算，但我们证明，在截断椭球不确定集的情况下，λ 通常有界良好。

推论 12（椭球不确定性下的超梯度上升效率）。对于截断椭球不确定性集合，*RRA* 的超梯度上升部分会在 $\mathbf{O}\left(\frac{2Km}{n\varepsilon^2}\right)$ 次迭代内收敛到与极大极小最优连续分配 $\tilde{A}^{\mathrm{MM}}$ 相差不超过 ε 的范围。

最后，我们可以使用扩展的伯克霍夫-冯·诺依曼分解采样算法[3, 10, 15]进行舍入。该采样算法根据连续分配矩阵 $\hat{A}$定义的分布生成一个整数样本 $\hat{A}'$。样本 $\hat{A}'$仍满足 $\tilde{\mathcal{A}}$的约束，并且 $\mathbb{E}_{A'}[\hat{A}] = \hat{A}$。该采样算法的时间复杂度为$\mathbf{O}(mn(m+n))$，与超梯度上升的复杂度相比通常可以忽略不计。

4.2 最大最小与整数性间隙

除了 RRA（算法 1）的优化误差外，还有两个误差来源：在不确定性下工作所产生的极大极小误差，以及舍入误差。

RAU 的整数间隙可能相当大；类似地，舍入后的分配 A' 与连续分配 A 之间的 $\mathcal{L}_1$ 差异也可能相当大。令人惊讶的是，我们在本节中证明，尽管整数间隙很大，但以很高的概率，这并不会导致舍入后解 A'的真实 Welfare出现很大的次优性。直观地说，每当最大最小最优连续解 $\tilde{A}^{\mathrm{MM}}$ 与任意有效二元整数分配之间的 $\mathcal{L}_1$ 距离很大时，舍入过程中所做的决策在平均意义上会相互抵消，因此对该分配的真实福利影响相对较小。

命题13（$\mathcal{L}_1$ 与整数解的距离）。设有一个未舍入的分配 A 以及对 A 进行的随机舍入 A'，使得 $\mathbb{E}[A'] = A$。那么，由舍入导致的分配的预期 $\mathcal{L}_1$ 偏差满足

$$\mathbb{E}_{A'}\left[\|A' - \tilde{A}\|_1\right] = 2\left(\|\tilde{A}\|_1 - \|\tilde{A}\|_2^2\right) \le nm - 2\left\|\tfrac{1}{2} - \tilde{A}\right\|_1 .$$

尽管这些分配任务可能需要进行相当大幅度的舍入，定理14表明，RRA 产生的舍入后的分配具有近似最优的真实福利（按期望计）。定理14还允许离散/连续极大极小分配存在 ε误差。为此，我们定义 $A^\varepsilon \in \mathcal{A}$，表示 RAU 的任意 ε-最优离散解，以及 $A^\varepsilon \in \mathcal{A}$，表示 RAU 的任意 ε-最优连续解。 A^ε 和 A^ε 由以下性质正式定义

$$\max_{A\in\mathcal{A}} \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A,S) - \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A^\varepsilon,S) \le \varepsilon \;\;\&\;\; \max_{A\in\tilde{\mathcal{A}}} \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A,S) - \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(\tilde{A}^\varepsilon,S) \le \varepsilon .$$

定理14（福利中的极大极小差距与整数性差距）。假设 $\mathcal{S}$ 是一个具有$\mathcal{L}_1$ 直径 L 的 (δ,γ) 不确定性集合。令 A^ε 表示一个 ε-最优离散 *RAU* 解，令 A^ε 表示一个 ε-最优连续 *RAU* 解。令 A' 表示将随机舍入过程 *Round* 应用于 A^ε 后产生的随机变量，并假设 *Round* 保持期望不变，即 $\mathbb{E}_{A'}[A'] = A^\varepsilon$。此外，假设真实亲和度分数为 S^*，并将最优解 $A^* \doteq \arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{W}(A,S^*)$。于是有以下结论。

1. 最大最小差距：$\mathbb{P}\big(\mathrm{W}(A^*,S^*) - \mathrm{W}(A^\varepsilon,S^*) > \varepsilon + \frac{2\gamma+L}{n}\big) < \delta$. *2. RRA* 的期望遗憾：$\mathbb{P}\big(\mathrm{W}(A^*,S^*) - \mathbb{E}_{A'}[\mathrm{W}(A',S^*)] > \varepsilon + \frac{2\gamma+L}{n}\big) < \delta$. *3. RRA* 的概率遗憾：$\mathbb{P}\big(\mathrm{W}(A^*,S^*) - \mathrm{W}(A',S^*) > \varepsilon + (2\gamma+L)\sqrt{2\ln(1/\delta')/n}\big) < \delta' + \delta$.

表 1： 在五届 ICLR 会议上，朴素 LP、FairFlow、PeerReview4All、FairSequence 和 RRA 方法的对抗性福利与平均福利（均值 ± 标准差）。为便于比较，福利值乘以 100。使用 RRA 时，对抗性福利始终最高（**粗体**），但 2018年除外；该年的结果与其相差不到一个标准差。

年份	m	n	对抗性效用主义福利· 100					平均效用主义福利· 100				
			LP	FF	PR4A	FS	RRA	LP	FF	PR4A	FS	RRA
2018	1657	546	**17**±3	7±3	**17**±3	16±3	16±3	**179**±2	134±12	177±2	177±2	160±4
2019	2620	851	22±2	12±2	22±2	22±2	**27**±3	**184**±1	139±9	**184**±1	183±1	161±3
2020	4123	1327	17±2	11±2	18±2	17±2	**23**±2	**187**±1	158±8	**187**±1	186±1	166±5
2021	4662	1557	23±2	18±2	23±2	23±2	**33**±3	**192**±1	177±2	**192**±1	191±1	174±6
2022	5023	1576	28±2	23±2	28±2	27±2	**38**±2	**191**±1	177±1	190±1	190±1	172±3

由于 A' 是 RRA 的结果，定理14直接界定了 RRA 的期望遗憾和概率遗憾。请注意，概率遗憾所对应的分布是关于舍入过程的随机性而言的，而定理14中的所有界都是关于不确定性集合 $\mathcal{S}$的 δ 而言的。

5 实验

我们利用五年的 ICLR 数据构建不确定性集合：构造一个非对称多元高斯分布，并取其置信区间（如示例 (2) 所示）。我们将所提方法在对抗情形和平均情形下的表现，与四种常用基线在这两种情形下的表现进行比较。随后，我们展示了针对对抗情形进行优化的重要性。代码和数据已在 GitHub 上公开。[6]

5.1 基线比较

我们考察了所提方法在截断椭球不确定集合 $\mathcal{S}$ 下稳健地最大化功利主义福利的能力。本实验旨在模拟现实中的会议场景，因此我们不假设能够获取真实亲和矩阵。因此，我们只能比较 RRA 与基线方法在对抗情形和平均情形下的福利，而无法比较真实福利。

我们使用 OpenReview API 收集了 ICLR 最近五届会议（2018–2022）中提交的所有论文（包括录用和拒稿的论文）。按照近期研究的做法，我们将每年的作者群体用作审稿人池，因为我们无法获取这些会议的真实审稿人身份。各会议年份的审稿人和论文数量见表 1。

对于每位作者的每一年，我们收集该作者在当年或之前几年向 ICLR 投稿的论文中的关键词多重集。然后，我们采用与 AAAI 2021 [18] 类似的流程，将关键词转换为均值向量 $\vec{\mu} \in \mathbb{R}^{nm}$，并构建用于论文-审稿人亲和度分数的协方差矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{nm \times nm}_{\geq 0}$。向量 $\vec{p}$ 设定为使得 $\vec{p}_i$ 是论文 p中关键词 i 的指示变量。向量 $\vec{r}$最初设定为使得 $\vec{r}_i$ 表示关键词 i 在该审稿人当年或之前几年会议所发表的论文中出现的次数。随后，我们调整 $\vec{r}$ 的取值（但不改变其顺序），使最小的非零值为 0.2，最大值为 1，其余非零值在 0.2 与 1 之间均匀分布。令 $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^V$满足 $\vec{\lambda}_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$。降序排序表示按降序排列向量取值的函数，$M_{\vec{p}}$ 和 $M_{\vec{r}}$ 分别表示 $\vec{p}$ 和 $\vec{r}$ 中的非零项数，且$Z = \sum_{i=1}^{M_{\vec{p}}} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$。我们设定 $\vec{\mu}_{pr} = \frac{\vec{\lambda} \cdot Sorted}{Z}(\vec{p} \circ \vec{r})$、$\Sigma_{pm+r,pm+r} = (M_{\vec{p}} M_{\vec{r}})^{-2}$，并将 Σ 的所有非对角线元素设为 0。选择此流程是为了大致仿照 AAAI 2021 所采用的流程。对于 ICLR 的每一年，我们将鲁棒优化的不确定性集合 $\overline{\mathcal{S}}$ 设为分布$\mathcal{N}(\vec{\mu}, \Sigma)$的 95%置信区间（如式 (2) 所示），并与单位超立方体（引理8）取交集。

对于 ICLR 的每一年，我们从审稿人和论文中分别无放回地抽取 60%，重复 100 次，以便为实验的统计鲁棒性生成更多数据。我们假设所有论文都需要 3 份评审，且所有审稿人最多可以评审 6 篇论文。不存在利益冲突。随后，我们运行 RRA

[6] https://github.com/justinpayan/RAU

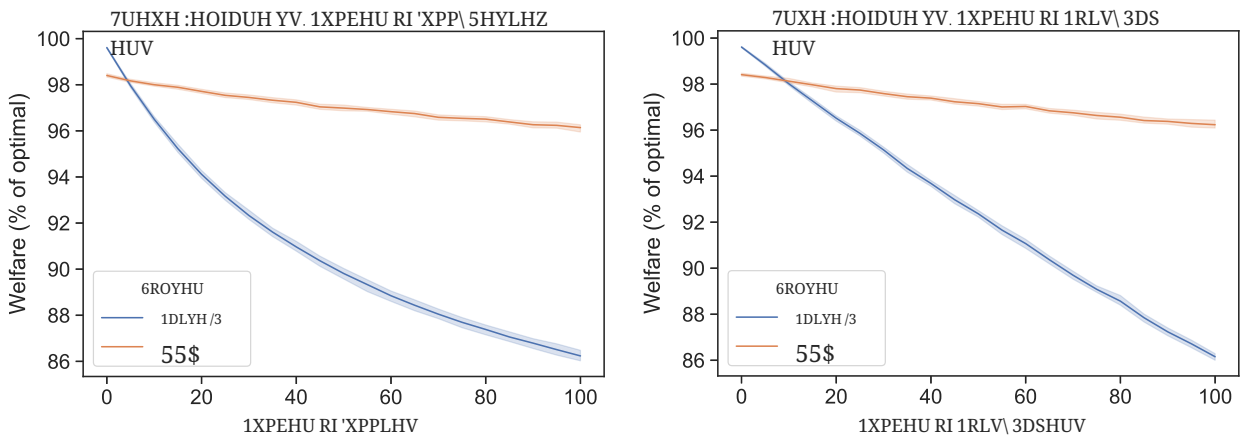

图 1： 左：在已知 S^* 时，朴素 LP 方法与 RRA 在 MIDL 2018 数据集上的真实福利（占最优值的百分比），随“虚拟评审人”数量增加的变化。虚拟评审人对所有论文的真实亲和度都较低，但其估计亲和度分数的噪声更大。随着我们添加更多虚拟评审人，朴素 LP 形式的真实福利（会议组织者并不知道这一数值）急剧下降，而 RRA 则能保持较高的真实福利。图中展示了每种虚拟评审人数量下 100 次重复实验的最小值、最大值和平均值。右：MIDL 2018 数据集上的真实福利随噪声论文数量增加的变化。对于噪声论文，最好的 20th 到 30th 名审稿人的亲和度被高估了 0.3。再一次，RRA 对这种系统性高估具有鲁棒性，而 LP 的表现则大幅下降。

使用我们计算出的置信区域 $\mathcal{S}$，并将其与由 $\arg\max_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{W}(A, \vec{\mu})$ 给出的分配（即“LP”解）进行比较；也就是说，这是针对平均分进行优化的朴素解。我们还将其与现实会议中常用的三个基线方法 FairFlow [16], PeerReview4All [33], 和 FairSequence [25] 进行比较。这些实验的结果如表 1 所示。所有基线方法的对抗性能都远远落后于 RRA。

5.2 对抗分析的重要性

为了说明针对对抗情形进行优化的重要性，我们开展了一项实验，模拟向数据集中加入大量低质量、高方差审稿人的影响；还开展了类似实验，系统性地高估部分论文子集的某些亲和度。这类审稿人往往会出现在现代会议评审中。在获得某个近期大型人工智能会议的有限访问权限后（$m,\ n \approx 4000$），我们随机抽查了 100 名审稿人。其中 12 人是博士生，40 人提交的出价不超过 10 个。论文较少的博士生，其真实专业能力相对于根据既往研究得出的基于文档的相似度评分，往往具有更高的方差；而出价较少的审稿人，其真实兴趣相对于其出价，往往也具有更高的方差。直观而言，当论文作者提交的关键词与他们预期的确切含义不符，或审稿人将其列在错误的子社区中时，就可能系统性地高估论文的亲和度。我们认为这种情况相当常见，并将对这一重要问题进行严谨考察留待未来研究。

我们使用 MIDL 2018 的数据集，该数据集可公开获取，过去曾用于验证许多审稿人分配算法 [16, 25, 33]。该数据集包含一个亲和度分数矩阵 $n \times m$，这些分数曾用于会议期间将审稿人分配给论文。我们在本实验中使用此数据集，因为它规模足够小，可以在不同设置下运行大量实验（$n = 118$ 篇论文和 $m = 177$名审稿人）。我们假设，177 名原始审稿人对每篇论文的真实亲和度等于公开数据集中给出的亲和度分数，但这些分数是带噪声估计的。因此，我们假设会议组织者能够获取估计亲和度分数，这些分数等于原始亲和度分数加上服从正态分布的噪声 $\mathcal{N}(0,\ .02)$。我们还假设会议组织者知道，对于每个论文-审稿人配对，估计误差服从 $\mathcal{N}(0,\ .02)$。我们还在数据集中添加了一些“虚拟”审稿人。对于每位虚拟审稿人，我们将其对所有论文的真实亲和度设为.1，并从

$\mathcal{N}(.1,\ .15)$中抽取估计亲和度。与原始审稿人一样，我们假设会议组织者知道，对于每个论文-审稿人配对，估计误差服从 $\mathcal{N}(0,\ .15)$。这一简单设置意味着真实亲和度分数服从一个多元高斯分布，而会议组织者并不知道这些分数。我们取该分布的 95%置信区间，并将其与单位超立方体求交，以定义一个截断椭球不确定集。随后，我们使用朴素 LP 和 RRA 分配审稿人，并比较每种方法下的真实福利（但该福利未知）。

对于包含噪声论文的情形，我们选取一部分论文，并按亲和度从高到低，为每篇论文找出排名从 20th 到 30th （不含）的审稿人。对于每篇论文，我们将这 10 位审稿人的估计亲和度增加.3。随后，我们假设会议组织者估计这些论文-审稿人对的标准差为.15，而其余标准差估计为.02。

结果如图1所示。我们报告朴素 LP 和 RRA 的福利占最优值的百分比，并对每种虚拟评审人/论文数量的设置运行 100 次后取平均值。我们还报告每种设置下这 100 次运行中的最小值和最大值。随着虚拟评审人或噪声论文数量增加，朴素 LP 方法的真实福利最多下降约 15%，而 RRA 始终保持较高的真实福利。

6 RRA 的扩展

与本文迄今探讨的情形相比，我们的方法适用范围可能广泛得多。该方法可以纳入对目标函数的修改，例如加入额外的软约束。我们还可以考虑对不公平结果施加惩罚 [16, 25, 33], ，或通过惩罚来遏制操纵性竞标行为 [13–15]。另一种彼此独立的扩展是直接修改福利函数。然而，任务的对抗性似乎意味着我们无法采用更复杂的福利函数，例如幂平均福利；这类函数原本可以用于求最大化 [6]。

一种正交的扩展方式是直接修改福利函数，以此调整分配系统的优先级，例如提高公平性（即群体平等主义 [1], ，也就是任何会议分会或学科领域中论文的最低平均效用），或考虑其他背景因素，例如使用加权效用总和函数，对会议分会、期刊分会和研讨会分会论文的重要性进行加权。我们在表 1 中显示，RRA 以平均情形下福利 W 的下降为代价，大幅改善了最坏情形下的福利 W。如果期望值 S 已知，那么将目标函数修改为在最坏情形和平均情形的福利 W 之间进行线性插值，应该相当简单。

一般而言，公平福利函数是凹函数，因此可以直接应用本文的凹优化方法。不过，我们需要能够计算并界定其梯度，并相应地修改 RRA；而且，对于任意福利函数，对抗性最小化问题可能难以求解。加权功利主义社会福利函数是一种直接的扩展，基本不会带来困难；群体平等主义福利则可以通过分别针对每个群体进行对抗性优化，再选取群体平均值最小的评分矩阵来实现（这是一种在对抗性不确定性条件下公平机器学习中采用的策略 [7]）。然而，除这类便于处理的特殊情况外，我们的任务具有对抗性这一特点，似乎很可能使得更复杂的福利函数无法使用，例如幂平均福利；后者本来可以用于最大化 [6]。

7 结论

不确定性是审稿人分配中普遍存在的问题。由部分信息导致的出价偏差、文本相似度得分中的预测误差，以及关键词术语错位，都会导致对审稿人能力的不准确估计。此外，未来评审质量所固有的不确定性可以被量化，但永远无法被完全消除。我们将不确定性视为核心要素，将不确定性下的审稿人分配问题表述为 RAU，并在广泛条件下通过 RRA 加以解决。

我们定义并探讨了审稿人分配中的不确定性集合这一概念；我们的理论和示例展示了不确定性集合在建模现实世界中的不确定性感知审稿人分配工作流程方面的灵活性。某些特殊的不确定性集合（单点集、超矩形或球形）可将问题简化为

无不确定性的情形，而这些情形均可通过线性规划求解。一般的 RAU 问题是 NP困难，而我们的 RRA算法可提供近似解，其误差保证取决于不确定性集合。

由于 RRA 针对不确定性感知对手进行优化，我们会避免分配不确定性较高的论文-审稿人对。这种考虑不确定性的方法所得到的解决方案，比基于逐点评审匹配度估计进行优化更稳健。我们希望本文能呼吁人们进一步研究匹配度分数计算，确保亲和度与下游评审质量相关，并纳入同行评审中固有的不确定性。

致谢 感谢 OpenReview、Vignesh Viswanathan、Elita Lobo、Chang Zeng、Nihar Shah，以及 GAIW、IJCAI 和 SAGT 的审稿人提供反馈。Cyrus Cousins 感谢马萨诸塞大学阿默斯特分校数据科学中心提供的博士后奖学金支持。本研究使用的高性能计算设备由马萨诸塞技术协作组织管理的协同研发基金资助购置。

参考文献

1. Aziz, H., Micha, E., Shah, N.：《同行评审中的群体公平性》。载于：第22届AAMAS会议论文集（2023） 2. Bennett, G.：独立随机变量之和的概率不等式。《美国统计协会期刊》**57**(297), 33–45（1962年） 3. Budish, E., Che, Y.K., Kojima, F., Milgrom, P.：实现随机分配：Birkhoff-von Neumann定理的推广。载于：Cowles夏季会议（2009年） 4. Cai, T.T., Zhou, W.X.：通过最大范数约束优化实现矩阵补全。《电子统计学期刊》**10**(1), 1493–1525（2016年） 5. Charlin, L., Zemel, R.：《多伦多论文匹配系统：一种自动化论文审稿人分配系统》。载于：2013 年 ICML 同行评审与出版模式研讨会论文集（2013） 6. Cousins, C.：可证明公平的福利中心机器学习公理化理论。载于：第35届NeurIPS会议论文集。第16610–16621页（2021） 7. Dong, E., Cousins, C.：去中心化插补：人口统计学边缘群体的公平学习。载于：ICML Queer in AI研讨会（2022） 8. Fang, E.X., Liu, H., Toh, K.C., Zhou, W.X.：用于鲁棒矩阵恢复的最大范数优化。《数学规划》**167**(1), 5–35（2018年） 9. Fiez, T., Shah, N., Ratliff, L.：一种用于优化同行评审中论文竞标的SUPER*算法。载于：第36届UAI会议论文集（2020） 10. Gandhi, R., Khuller, S., Parthasarathy, S., Srinivasan, A.：相关舍入及其在近似算法中的应用。《ACM期刊》（JACM）**53**(3), 324–360（2006） 11. Garg, N., Kavitha, T., Kumar, A., Mehlhorn, K., Mestre, J.：将论文分配给审稿人。《Algorithmica》**58**(1), 119–136（2010） 12. Hoeffding, W.：有界随机变量之和的概率不等式。《美国统计协会期刊》**58**(301), 13–30（1963年） 13. Jecmen, S., Shah, N.B., Fang, F., Conitzer, V.：防止论文竞标操纵以进行审稿人分配的权衡。载于：2022年ICLR机器学习评估标准研讨会论文集（2022） 14. Jecmen, S., Yoon, M., Conitzer, V., Shah, N.B., Fang, F.：关于同行评审中恶意论文竞标的数据集。载于：2023年WWW会议论文集（2023） 15. Jecmen, S., Zhang, H., Liu, R., Shah, N., Conitzer, V., Fang, F.：通过随机化审稿人分配缓解同行评审中的操纵。载于：第34届NeurIPS会议论文集（2020） 16. Kobren, A., Saha, B., McCallum, A.：具有局部公平性约束的论文匹配。载于：第25届KDD会议论文集（2019） 17. Lee, J.D., Recht, B., Srebro, N., Tropp, J., Salakhutdinov, R.R.：最大范数正则化的实用大规模优化。第23届NeurIPS会议论文集（2010） 18. Leyton-Brown, K., Nandwani, Y., Zarkoob, H., Cameron, C., Newman, N., Raghu, D.等：大型会议中的论文与审稿人匹配。arXiv预印本 arXiv:2202.12273（2022） 19. Mazzetto, A., Cousins, C., Sam, D., Bach, S.H., Upfal, E.：弱监督下具有性能保证的对抗性多类别学习。载于：国际机器学习会议。PMLR（2021） 20. McDiarmid, C.：论有界差分法。《组合数学综述》**141**(1), 148–188（1989年）

21. Meir, R., Lang, J., Lesca, J., Mattei, N., Kaminsky, N.：一种受市场启发的同行评审论文分配竞标方案。载于：第35届AAAI会议论文集（2021） 22. Neubig, G., ACL评审委员会：ACL滚动评审提案（2020），aclweb.org/adminwiki/index. php?title=ACL_Rolling_Review_Proposal 23. Neubig, G., Wieting, J., McCarthy, A., Stent, A., Schluter, N., Cohn, T.：ACL审稿人匹配代码。github. com/acl-org/reviewer-paper-matching（2020） 24. OpenReview：如何进行自动分配（ 2023 ），docs.openreview.net/how-to-guides/paper-matching-and-assignment/how-to-do-automatic-assignments 25. Payan, J., Zick, Y.：我将安排妥当！优化排序以实现公平的审稿人分配。载于：第31届IJCAI会议论文集（2022） 26. Rogers, A., Augenstein, I.：我们能做些什么来改善自然语言处理领域的同行评审？载于：2020年EMNLP会议论文集（2020） 27. Rozenzweig, I., Meir, R., Mattei, N., Amir, O.：缓解会议论文分配中的竞标偏斜。载于：2023年国际自主智能体与多智能体系统会议论文集（2023） 28. Saveski, M., Jecmen, S., Shah, N.B., Ugander, J.：同行评审分配策略的反事实评估。arXiv预印本 arXiv:2305.17339（2023） 29. Schroter, S., Tite, L., Hutchings, A., Black, N.：作者推荐的审稿人与编辑选择的审稿人在评审质量和发表建议方面的差异。《Jama》**295**(3), 314–317（2006） 30. Shah, N.B.：改进同行评审的有原则的方法。技术报告，卡内基梅隆大学（2019） 31. Shah, N.B.：同行评审中的挑战、实验与计算解决方案。《ACM通讯》**65**(6), 76–87（2022） 32. Shor, N., Kiwiel, K.C., Ruszcay`nski, A.：不可微函数的最小化方法。施普林格出版社（1985） 33. Stelmakh, I., Shah, N.B., Singh, A.：PeerReview4All：公平且准确的同行评审审稿人分配。载于：第30届ALT会议论文集（2019） 34. Stelmakh, I., Wieting, J., Neubig, G., Shah, N.B.：审稿人分配问题的黄金标准数据集。arXiv预印本 arXiv:2303.16750（2023） 35. Taylor, C.J.：关于将会议论文最优分配给审稿人。技术报告，宾夕法尼亚大学（2008） 36. Van Rooyen, S., Black, N., Godlee, F.：用于评估手稿同行评审的评审质量工具（RQI）的开发。《临床流行病学杂志》**52**(7), 625–629（1999）

A 缺失的证明

我们给出正文中所有未附证明的理论结果的证明。附录 A.1 证明真实福利与最大最小福利之间的关系。附录 A.2 证明了如何从估计器构造不确定性集合，以及如何通过组合或扩展其他不确定性集合来构造不确定性集合的相关结果。最后，附录 A.3 证明了 RAU 的 NP 困难性，并给出构造性证明，说明如何在特殊情形（超矩形和球体）下精确求解 RAU，以及如何在具有多项式时间对手的凸不确定性集合情形下近似求解 RAU。

A.1 真实福利与最大最小福利之间的关系

我们证明了这样一个命题：分配 A 在（δ，γ）不确定性集合 $\mathcal{S}$ 上的最低福利与 A 的真实福利之间存在加性关系。近似界的紧致程度取决于集合 $\mathcal{S}$ 的 $\mathcal{L}_1$直径，以及不确定性集合所允许的加性 $\mathcal{L}_1$ 误差 γ。

命题 2（关于 $\mathcal{S}$ 上的真实福利与最坏情况福利的关系）。假设 $\mathcal{S}$ 是一个（δ，γ）不确定性集合，对于所有 S、$S' \in \mathcal{S}$，均有 $\|S - S'\|_1 \le L$，且真实亲和度评分矩阵记为 S^*。考虑任意分配$A \in \mathcal{A}$。那么，以至少 $1-\delta$ 的概率，

$$\mathrm{W}(A, S^*) - \tfrac{L+\gamma}{n} \le \inf_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{W}(A, S) \le \mathrm{W}(A, S^*) + \tfrac{\gamma}{n} \ .$$

证明。对于右侧，注意到以至少 $1-\delta$ 的概率，存在某个 $S^*_\gamma \in \mathcal{S}$ 满足$\|S^*_\gamma - S^*\|_1 \le \gamma$。令 $S' =$ 为使 W(A, S) 最小的 arg min$_{S\in\mathcal{S}}$。根据定义，W(A, S') $\le$W(A, S^*_γ)。如果 W(A, S^*_γ) $\le$W(A, S^*)，则得到了所需的不等式。否则，我们可以应用如下事实：W(A, S^*_γ)−W(A, S^*) =W(A, $S^*_\gamma - S^*$) $\le \frac{1}{n}\|S^*_\gamma - S^*\|_1 \le \frac{1}{n}\gamma$；其中倒数第二个不等式成立，是因为 A 的每个元素都属于 $\{0, 1\}$。

为了推导左侧，我们将尝试给出 W(A, S^*) − W(A, S') 的上界，其中 $S' =$ 为使 W(A, S) 最小的 arg min$_{S\in\mathcal{S}}$。同样，以至少 $1-\delta$ 的概率，存在某个 $S^*_\gamma \in \mathcal{S}$ 满足 $\|S^*_\gamma - S^*\|_1 \le \gamma$。因此，W($A$, S^*)−W(A, S^*_γ) =W(A, $S^* - S^*_\gamma$) $\le \frac{1}{n}\|S^* - S^*_\gamma\|_1 \le \frac{\gamma}{n}$。应用类似的推理，我们可以给出 W($A$, S^*_γ) − W(A, S') =W(A, $S^*_\gamma - S'$) $\le \frac{1}{n}\|S^*_\gamma - S'\|_1 \le \frac{L}{n}$ 的上界。□

A.2 构造不确定性集

我们首先证明两个结果，说明如何利用归纳式或直推式尾界为估计亲和度分数构造椭球不确定集。

定理6（基于归纳式预测器的椭球不确定性集）。设 $\mathcal{D}'$ 是论文-审稿人对上的概率分布，$\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ 分别是论文和审稿人上的概率分布。假设 P 和 R 分别从 $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 和 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ 中以条件独立的方式无放回抽取。[7] 假设我们从 $\mathcal{D}'$ 中以条件独立的方式无放回抽取 T 个论文-审稿人对 $\{(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$，且这些论文-审稿人对分别具有真实和估计的亲和度分数 $\{f^*(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$ 和 $\{\hat{f}(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$。

Let

$$\alpha(p,r) \doteq \frac{\mathbb{P}_{\boldsymbol{p}\sim\mathcal{D}^{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{p}=p)\mathbb{P}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{D}^{\mathcal{R}}}(\boldsymbol{r}=r)}{\mathbb{P}_{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\sim\mathcal{D}'}((\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=(p,r))} \quad \& \quad \alpha_{\min} \doteq \inf_{p\in\mathcal{P}, r\in\mathcal{R}} \alpha(p,r)$$

分别表示（*1*）从 $\mathcal{D}^{\mathcal{P}}$ 中抽取 p 且从 $\mathcal{D}^{\mathcal{R}}$ 中抽取 r 的抽样概率与从 $\mathcal{D}'$ 中抽取 (p, r) 的抽样概率之比，以及（*2*）概率比下确界。现在将 椭球矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{nm\times nm}$ 构造为对角矩阵，使得对于所有 $p \in P, r \in R$，均有 $\Sigma_{pm+r,pm+r} = \alpha(p, r)$。

[7] 稍微滥用一下记号，我们对论文 $p \in P$ 和审稿人 $r \in R$ 进行编号，使得 p 既可以表示 $\mathcal{P}$ 中的一篇论文，也可以表示 1 到 n 之间的一个整数。

那么，对于任意 $\delta \in (0,\ 1)$，椭球

$$\mathcal{S} \doteq \left\{ S \in \mathbb{R}^{nm} \;\middle|\; \frac{1}{nm}(S-\hat{S})^{\intercal}\Sigma^{-1}(S-\hat{S}) \leq \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2}_{=\hat{\xi}} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{T}+\frac{n+m}{nm\alpha_{\min}^2}\right)\frac{\ln\frac{1}{\delta}}{2}}}_{=\eta} \right\}$$

$\hat{}$是一个 $(\delta,0)$ 不确定性集合，其中 ξ 表示我们估计分数的经验平方误差，而 η 表示由抽样导致的超额误差界。

证明。 我们旨在证明椭球 $\mathcal{S}$ 是一个 $(\delta,0)$ 不确定性集合。换言之，必须以概率 $1-\delta$满足：真实亲和度分数 S^* 符合

$$\frac{1}{nm}(S^*-\hat{S})\Sigma^{-1}(S^*-\hat{S}) \leq \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2}_{=\hat{\xi}} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{T}+\frac{n+m}{nm\alpha_{\min}^2}\right)\frac{\ln\frac{1}{\delta}}{2}}}_{=\eta} \ .$$

我们将给出一个关于该差值的概率界

$$Z \doteq \frac{1}{nm}(S^*-\hat{S})^{\intercal}\Sigma^{-1}(S^*-\hat{S}) - \hat{\xi} = \frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S^*_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)} - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2 \ .$$

首先注意到 $\mathbb{E}[Z] = 0$。我们假设论文 $p \sim \mathcal{D}^{\mathcal{P}}$、审稿人 $r \sim \mathcal{D}^{\mathcal{R}}$以及样本（即审稿人与论文配对）是按照 $(p_i,r_i) \sim \mathcal{D}'$ 抽取的。为简化记号，我们将用 $\{(p_i,r_i)\}_{i=1}^{T} \sim \mathcal{D}'$ 表示所有论文-审稿人配对 $(p_i,r_i) \sim \mathcal{D}'$构成的集合。另外，回想一下 $\alpha(p,r) = \mathbb{P}_{\boldsymbol{p}\sim\mathcal{D}^{\mathcal{P}}}(\boldsymbol{p}=p)\mathbb{P}_{\boldsymbol{r}\sim\mathcal{D}^{\mathcal{R}}}(\boldsymbol{r}=r)\,\mathbb{P}_{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\sim\mathcal{D}'}((\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=(p,r))$。我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{\substack{P\sim\mathcal{D}^{\mathcal{P}},R\sim\mathcal{D}^{\mathcal{R}}\\ \{(p_i,r_i)\}_{i=1}^{T}\sim\mathcal{D}'}}[Z] &= \mathop{\mathbb{E}}_{\substack{P\sim\mathcal{D}^{\mathcal{P}},R\sim\mathcal{D}^{\mathcal{R}}\\ \{(p_i,r_i)\}_{i=1}^{T}\sim\mathcal{D}'}}\left[\frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S^*_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)} - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2\right] \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{P\sim\mathcal{D}^{\mathcal{P}},R\sim\mathcal{D}^{\mathcal{R}}}\left[\frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S^*_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)}\right] - \mathop{\mathbb{E}}_{\{(p_i,r_i)\}_{i=1}^{T}\sim\mathcal{D}'}\left[\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2\right] \ .
\end{aligned}$$

按照重要性抽样的标准论证，也很明显，

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{P\sim\mathcal{D}^{\mathcal{P}},R\sim\mathcal{D}^{\mathcal{R}}}\left[\frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S^*_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)}\right] &= \frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\mathop{\mathbb{E}}_{P\sim\mathcal{D}^{\mathcal{P}},R\sim\mathcal{D}^{\mathcal{R}}}\left[\frac{(S^*_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)}\right] \\
&= \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{nm}\mathop{\mathbb{E}}_{(p_i,r_i)\sim\mathcal{D}'}\left[(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2\right] \\
&= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\mathop{\mathbb{E}}_{(p_i,r_i)\sim\mathcal{D}'}\left[(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2\right] \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{\{(p_i,r_i)\}_{i=1}^{T}\sim\mathcal{D}'}\left[\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2\right] \ .
\end{aligned}$$

此外， Z 是一个由相互负相关的随机变量构成的系统的函数（这是由无放回抽样导致的），该系统包含 T 个辅助项、 m 名审稿人和 n 篇论文。修改任意一个 T 辅助项，最多会导致 Z发生 $\frac{1}{T}$ 变化；每篇 n 论文的影响至多为 $\frac{1}{n\alpha_{\min}}$，每位m 审稿人的影响至多为 $\frac{1}{m\alpha_{\min}}$。因此，有界差分的平方和为 $\frac{1}{T}+\frac{1}{n\alpha_{\min}^2}+\frac{1}{m\alpha_{\min}^2}$。

因此，根据 McDiarmid不等式 [20]，有

$$\mathbb{P}\left(Z \geq \sqrt{\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{n\alpha_{\min}^2}+\frac{1}{m\alpha_{\min}^2}\right)\frac{\ln\frac{1}{\delta}}{2}}\right) \leq \delta \ .$$

□

定理 7（由直推式预测器得到的椭球不确定性集合）。假设我们从 $\mathcal{D}'$ 中有条件地独立且无放回地抽取 T论文-审稿人配对 $\{(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$，这些论文-审稿人配对分别具有真实和估计的亲和度分数 $\{f^*(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$ 和 $\{\hat{f}(p_i, r_i)\}_{i=1}^T$。令

$$\alpha(p,r) \doteq \frac{(nm)^{-1}}{\mathbb{P}_{(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\sim\mathcal{D}'}((\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})=(p,r))}$$

表示在均匀随机抽样 (p, r) 与从 $\mathcal{D}'$ 中抽样 (p, r) 之间的概率比，并将椭球矩阵 $\Sigma \in \mathbb{R}^{nm\times nm}$ 构造为对角矩阵，使得对于所有 $p \in P$、$r \in R$，均有 $\Sigma_{pm+r,\ pm+r} = \alpha(p, r)$。

那么，对于任意 $\delta \in (0, 1)$，椭球

$$\mathcal{S} \doteq \left\{ S \in \mathbb{R}^{nm} \;\middle|\; \frac{1}{nm}(S-\hat{S})^\intercal \Sigma^{-1}(S-\hat{S}) \leq \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2}_{\hat{\xi}} + \underbrace{\sqrt{\frac{\ln\frac{1}{\delta}}{2T}}}_{=\eta}, \right\}$$

ξ 是一个（δ、0）不确定性集合，其中 $\hat{\xi}$ 表示我们估计分数的经验平方误差，而 η 表示由抽样导致的超额误差界。

证明。结果的证明与定理6类似。这里，审稿人和论文均为固定的。我们将对随机变量相对于其均值的偏差进行界定

$$Z \doteq \frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)} - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2 \ .$$

我们证明 $\mathbb{E}[Z] = 0$，因为

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{\{(p_i,r_i)\}_{i=1}^T\sim\mathcal{D}'}[Z] &= \mathop{\mathbb{E}}_{\{(p_i,r_i)\}_{i=1}^T\sim\mathcal{D}'}\left[\frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)} - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2\right] \\
&= \frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)} - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\mathop{\mathbb{E}}_{\{(p_i,r_i)\}_{i=1}^T\sim\mathcal{D}'}\left[(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2\right] \\
&= \frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)} - \frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{nm}\mathop{\mathbb{E}}_{\{(p_i,r_i)\}_{i=1}^{nm}\sim\mathrm{Unif}(P\times R)}\left[\frac{(f^*(p_i,r_i)-\hat{f}(p_i,r_i))^2}{\alpha(p_i,r_i)}\right] \\
&= \frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)} - \frac{1}{nm}\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\frac{(S_{p,r}-\hat{S}_{p,r})^2}{\alpha(p,r)} \ .
\end{aligned}$$

要应用最终界限，只需考虑 T 个相互独立的辅助项，每个辅助项的有界差异为 $\frac{1}{T}$。在这种情况下，对于每个 T 辅助项，我们都有有界差异项 $\frac{1}{T}$。通过 Hoeffding [12] 或 McDiarmid [20] 不等式，可得最终结果

$$\mathbb{P}\left(Z \geq \sqrt{\frac{\ln\frac{1}{\delta}}{2T}}\right) \leq \delta \ .$$

□

现在我们已经说明了如何根据亲和度分数估计器构造不确定性集合，最后将说明如何组合不确定性集合。我们在第3.3节证明了引理8，表明不确定性集合

可以通过求交形成新的不确定性集合。引理8可以与引理 9结合，从较简单的不确定性集合构造出多种类型的不确定性集合。

引理 9（$\mathcal{L}_1$ 误差项）。若 $\mathcal{S}$ 是一个 (δ, γ) 不确定性集合，则对任意 $\eta \in [0, \gamma]$，都有闵可夫斯基和

$$\mathcal{S}' \doteq \mathcal{S} + \{\vec{s} \in \mathbb{R}^{nm} \mid \|\vec{s}\|_1 \leq \eta\} = \{\vec{x} + \vec{s} \mid \vec{x} \in \mathcal{S}, \|\vec{s}\|_1 \leq \eta\}$$

是一个 $(\delta, \gamma - \eta)$ 不确定性集合。

证明。将真实亲和度分数记为 S^*。若 $S^* \in \mathcal{S}'$，则有 $\|S - S^*\|_1 = 0 \leq \gamma - \eta$。下面讨论 $S^* \notin \mathcal{S}'$ 的情况。根据定义 1，以至少 $1 - \delta$ 的概率，存在某个 $S \in \mathcal{S}$ 使得 $\|S - S^*\|_1 \leq \gamma$。不妨设 $\eta \leq \|S^* - S\|_1$，因为若不然，则 $S^* \in \mathcal{S}'$。考虑 $S' = S + \eta \frac{S^* - S}{\|S^* - S\|_1}$。为了证明 $S' \in \mathcal{S}'$，我们必须证明 $\left\|\eta \frac{S^* - S}{\|S^* - S\|_1}\right\|_1 \leq \eta$。这很容易证明，因为 $\left\|\eta \frac{S^* - S}{\|S^* - S\|_1}\right\|_1 = \frac{\eta}{\|S^* - S\|_1} \|S^* - S\|_1 = \eta$。此外，

$$\begin{aligned}
\|S^* - S'\|_1 &= \left\|S^* - \left(S + \eta \frac{S^* - S}{\|S^* - S\|_1}\right)\right\|_1 \\
&= \left(1 - \frac{\eta}{\|S^* - S\|_1}\right) \|S^* - S\|_1 \\
&= \|S^* - S\|_1 - \eta \\
&\leq \gamma - \eta \ ,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式以至少 $1 - \delta$ 的概率成立。因此，以至少 $1 - \delta$ 的概率，$\mathcal{S}'$包含一个点 S'，其与 S^* 的距离不超过 $\gamma - \eta$ $\mathcal{L}_1$，且 $\mathcal{S}'$ 是一个 $(\delta, \gamma - \eta)$ 不确定性集合。 □

A.3 RAU 的 NP 困难性与求解算法

我们首先证明，RAU 是 NP困难问题，即使在由多项式数量的半空间相交构成的有界多面体这一情形下也是如此。

定理 10（RAU 的困难性）。对于凸不确定性集合 $\mathcal{S}$，*RAU* 是 *NP*困难问题；即使 $\mathcal{S}$ 配有多项式时间对手，结论也成立。特别地，即使将 $\mathcal{S}$ 限定为由多项式数量的半空间相交构成的有界多面体，*RAU* 仍然是 *NP*困难问题。

证明。我们将问题归约为在审稿人分配约束下最大化平等主义福利的问题；已知该问题是 NP困难的 [11, 33]。在审稿人分配的最大平等主义福利问题中，我们有相同的可行分配集合 $\mathcal{A}$，以及一个固定的评分矩阵 S。目标是找到一个分配 A，使任意论文的总分中的最小值最大化；等价地，即最小化 $\min_{p \in P} \sum_{r \in R} A_{p,\,r} S_{p,\,r}$。

给定最大平等福利问题的一个实例（P，R，$\mathcal{A}$，S），我们现在构造一个基于凸不确定性集合 $\mathcal{S}$ 的 RAU 实例。n 论文 P、m 审稿人 R 和有效分配 $\mathcal{A}$ 均保持不变。为构造不确定性集合 $\mathcal{S}$，首先考虑集合 $\mathcal{S}' = \{S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}\}$，其中 $S^{(p)}$ 的定义满足：当 $i = p$ 时，$S_{i\,,\,j}^{(p)} = S_{i,\,j}$；当 $i \neq p$ 时，$S_{i\,,\,j}^{(p)} = 0$。令 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{S}'$ 的凸包。换言之，$\mathcal{S}$ 是如下集合

$$\mathcal{S} \doteq \left\{ X \in [0,1]^{n \times m} \,\middle|\, X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\} \ .$$

由于 $\mathcal{S}$ 是一个凸集，因此（P，R，$\mathcal{A}$，$\mathcal{S}$）是一个基于凸不确定性集合的 RAU 实例。此外，$\mathcal{S}$ 是由多项式数量的半空间相交形成的有界多面体。

对于任意 $A \in \mathcal{A}$，我们有

$$S_{\min} \doteq \arg\min_{S \in \mathcal{S}} n\mathrm{W}(A, S) = \arg\min_{S \in \mathcal{S}} \mathrm{W}(A, S) \ .$$

我们将证明 $S_{\min} \in \mathcal{S}'$，从而完成证明。固定 A，并考虑某个元素 $X \in \mathcal{S}$，其中 $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S^{(i)}$，且不失一般性地，$\alpha_1$，$\alpha_2 > 0$。另不失一般性地，假设 $\sum_{r \in R} A_{1,\,r} S_{1,\,r} \leq \sum_{r \in R} A_{2,\,r} S_{2,\,r}$。

考虑另一种情况 $X' \in \mathcal{S}$，其中 $X' = (\alpha_1 + \alpha_2)S^{(1)} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i S^{(i)}$。那么

$$\begin{aligned} n\mathrm{W}(A, X) &= \alpha_1 \sum_{r \in R} A_{1,r} S_{1,r} + \alpha_2 \sum_{r \in R} A_{2,r} S_{2,r} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i \sum_{r \in R} A_{i,r} S_{i,r} \\ &\geq (\alpha_1 + \alpha_2) \sum_{r \in R} A_{1,r} S_{1,r} + \sum_{i=3}^{n} \alpha_i \sum_{r \in R} A_{i,r} S_{i,r} \\ &= n\mathrm{W}(A, X') \ . \end{aligned}$$

由于限制分数矩阵的支撑集（即将某些$\alpha_i \neq 0$ 设为 0）总能降低 W(A, S)，因此对于某个 $S \in \mathcal{S}'$，W 可达到最小值。因此，由于对于任意给定的 A，我们有

$$\min_{S \in \mathcal{S}'} n\mathrm{W}(A, S) = \min_{p \in P} \sum_{r \in R} A_{p,r} S_{p,r} \ ,$$

RAU 问题的最大化解与平等主义福利问题的最大化解等价。换言之，如果我们能够高效地计算 RAU 的鲁棒解，就能求解平等主义福利问题。因此，RAU 是 NP困难。

□

尽管即使在相当简单的情况下，RAU 也是 NP困难，但在某些特殊情况下，RAU 可以归约为一个可在多项式时间内求解的问题。第一种情况是超矩形不确定性集。

定理 3（超矩形不确定性下的 RAU）。当不确定性集合是一个轴对齐超矩形区域 $\mathcal{S}_{\square}$ 时，

$$\arg\max_{A \in \mathcal{A}} \inf_{S \in \mathcal{S}_{\square}} \mathrm{W}(A, S) = \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{W}(A, \underline{S}) \ .$$

因此，*RAU* 对 S 最大化W ，这可通过线性规划归约在多项式时间内完成。

证明。对于任意分配 $A \in \mathcal{A}$，$\inf_{S \in \mathcal{S}_{\square}} \mathrm{W}(A, S) = \mathrm{W}(A, \underline{S})$，也就是说，假设所有分数均为矩形约束下可能达到的最差值时，即可得到最低福利（可能不唯一）。为说明原因，考虑任意矩阵 $X \in \mathcal{S}_{\square}$，其中 $X_{p,r} > S_{p,r}$，对于某些 p 和 r成立。考虑 X'，其中 $X'_{p,r} = S_{p,r}$，且对于 $i \neq p$ 或 $j \neq r$，$X'_{i,j} = X_{i,j}$ 成立。要么 $A_{p,r} = 0$，因此 $\mathrm{W}(A, X) = \mathrm{W}(A, X')$；要么 $A_{p,r} = 1$，因此 $\mathrm{W}(A, X) > \mathrm{W}(A, X')$。

我们还注意到，问题 $\arg\max_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{W}(A, \underline{S})$ 是一个已知 S 的 RAU 实例。正如第 3 节开头所述，该问题可通过线性规划在多项式时间内求解。 □

对于球形不确定性集合，RAU 也可以在多项式时间内求解，而且该证明相比定理 3 的证明提供了更多一些洞见。

定理 4（球形不确定性下的 RAU）。当 $\mathcal{S}$ 是一个球体时，

$$\arg\max_{A \in \mathcal{A}} \inf_{S \in B_{\varepsilon}(S^0)} \mathrm{W}(A, S) = \arg\max_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{W}(A, S^0) \ ,$$

这可以在多项式时间内计算。此外，对于所有 $A \in \mathcal{A}$，

$$|\mathrm{W}(A, S^0) - \mathrm{W}(A, S^*)| \leq \tfrac{\varepsilon\sqrt{K}}{n} \ .$$

证明。 设 $\mathbf{0}$ 表示所有元素均为 0 的 $n \times m$ 矩阵。对于任意 $A \in \mathcal{A}$，有

$$\begin{aligned}
\inf_{S \in B_\varepsilon(S^0)} \mathrm{W}(A,S) &= \min_{X \in B_\varepsilon(\mathbf{0})} \mathrm{W}(A, S^0 + X) \\
&= \min_{X \in B_\varepsilon(\mathbf{0})} \mathrm{W}(A,X) + \mathrm{W}(A,S^0) && \text{Linearity of W} \\
&= \mathrm{W}\left(A, S^0 - A\frac{\varepsilon}{\|A\|_F}\right) && \text{见下文} \\
&= \mathrm{W}(A,S^0) - \mathrm{W}\left(A, A\frac{\varepsilon}{\|A\|_F}\right) && \text{Linearity of W} \\
&= \mathrm{W}(A,S^0) - \tfrac{1}{n}\|A\|_F \varepsilon \\
&= \mathrm{W}(A,S^0) - \tfrac{1}{n}\sqrt{K}\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{W}(A,\ S^0)$ 不依赖于 X，我们只需找到 $\arg\min_{X \in B_\varepsilon(\mathbf{0})} \mathrm{W}(A,\ X)$。由于 $\|A\|_F$ 是固定的（且极小值点出现在 $\|X\|_F = \varepsilon$），极小值点必定是 $X = -A\frac{\varepsilon}{\|A\|_F}$。

同样，$\sqrt{K}$、ε 和 n 都是固定的。因此，我们可以看到，该函数的极大值点与 $\mathrm{W}(A,\ S^0)$ 的极大值点相同。该

问题 $\arg\max_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{W}(A,\ S^0)$ 是一个已知 S 的 RAU 实例，可在多项式时间内求解。我们可以将半径为 ε 的球形不确定性所导致的最坏情况福利损失量化为

$$\mathrm{W}(A,S^0) - \mathrm{W}(A,S^*) \le \tfrac{1}{n}\sqrt{K}\varepsilon \ .$$

通过与上述类似的论证可得

$$\max_{S \in B_\varepsilon(S^0)} \mathrm{W}(A,S) = \mathrm{W}(A,S^0) + \tfrac{1}{n}\sqrt{K}\varepsilon \ ,$$

因此，我们也有

$$\mathrm{W}(A,S^*) - \mathrm{W}(A,S^0) \le \tfrac{1}{n}\sqrt{K}\varepsilon \ .$$

□

最后，我们将证明第 4 节中的命题 11。当不确定性集合 $\mathcal{S}$ 存在一个可在多项式时间内求解的最小化对手时，该命题可用于求解 RAU 的近似解。我们使用来自 [32] 的以下结果。

定理 15。 假设 $w\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个凸函数，其极小化点为 w^*，最优集为 $X^* = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n\colon\ w(\vec{x}) = w^*\}$。令 $\vec{x}_0$ 表示次梯度下降的起始点。假设我们有一个上界 $\rho \ge \max_{\vec{x} \in X^*} \|\vec{x}_0 - \vec{x}\|_2$。此外，假设在次梯度下降算法的每一步中，次梯度的欧几里得范数都有一个上界 λ。采用恒定步长 α 进行 T 步次梯度下降后，若 $\hat{w}$ 表示经过 T 步后找到的最佳函数值，则

$$\hat{w} - w^* \le \frac{\rho^2 + \lambda^2\alpha^2 T}{2\alpha T} \ .$$

命题 11（超梯度上升效率）。 令 λ 表示 *RRA* 中所用超梯度元素 $\nabla_A \mathrm{W}(A,S)$ 的 $\mathcal{L}_2$ 范数上界。*RRA* 的超梯度上升部分经过 $\lceil 2K(\frac{\lambda}{\varepsilon})^2 \rceil$ 次迭代后，收敛到与极大极小最优连续分配 $\tilde{A}^{\mathrm{MM}}$ 相差不超过 ε 的解。*RRA* 的运行时间为 $\mathbf{O}\big(2KC(\frac{\lambda}{\varepsilon})^2\big)$，其中 C 表示一次对手与投影步骤的时间开销。

证明。 首先，我们证明 $\rho \le \sqrt{2K}$（回顾一下，ρ 定义为上界 $\rho \ge \max_{\vec{x} \in X^*} \|\vec{x}_0 - \vec{x}\|_2$）。由于初始分配 $A^{(0)}$ 和最优分配 A^* 都属于 $\tilde{A}$，因此它们都必须满足约束：对于所有论文 p，$\sum_{r \in R} A_{p,\ r} = k_p$。这意味着，即使两种分配没有任何重叠，它们至多也会在 $2K$ 个条目上有所不同。在最坏情况下，对两种分配之差取欧几里得范数，可得 ρ 的界。

我们的函数是凹函数，并且我们在输入空间上进行最大化，因此可以应用定理 15 来最小化其相反数。根据定理 15，我们知道，经过 T 次采用步长为

α的次梯度上升迭代后，误差 $\varepsilon = \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A^*, S) - \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(\hat{A}, S)$ 满足

$$\varepsilon \le \frac{\rho^2 + \lambda^2\alpha^2 T}{2\alpha T} .$$

右侧在 $\alpha = \dfrac{\rho}{\lambda\sqrt{T}}$ 处取得最小值。将 α 的这个值代入后，得到

$$\varepsilon \le \frac{\rho\lambda}{\sqrt{T}} .$$

求解 T 后可得

$$T \ge \left(\frac{\rho\lambda}{\varepsilon}\right)^2 .$$

由于 $\rho \ge \sqrt{2K}$，较大的迭代次数 $T \ge 2K(\frac{\lambda}{\varepsilon})^2$ 已足够。将 T 的这个值代入上文给出的 α 方程，可得 $\alpha = \frac{\varepsilon}{\lambda^2}$。 □

我们还证明了以下推论，它针对 $\mathcal{S}$ 为（截断）椭球的情形，给出了所需迭代次数的更精确界限。

推论 12（椭球不确定性下的超梯度上升效率）。对于截断椭球不确定集，*RRA* 的超梯度上升部分经过 $\mathbf{O}\left(\frac{2Km}{n\varepsilon^2}\right)$ 次迭代后，将收敛到与极大极小最优连续分配 $\tilde{A}^{\mathrm{MM}}$ 相差不超过 ε 的解。

证明。由于次梯度始终包含于 $\mathcal{S}$ 中，我们可以轻松地给出其范数的上界。对于所有 $A \in \mathcal{A}$ 和 $S \in \mathcal{S}$，我们有

$$\|\nabla_A \mathrm{W}(A, S)\|_2 \le \max_{S\in\mathcal{S}} \tfrac{1}{n}\|S\|_2 .$$

反过来，如果该椭球的中心为 $\vec{\mu}_{\mathcal{S}}$，半径为 q，那么我们可以利用三角不等式来证明

$$\max_{S\in\mathcal{S}} \|S\|_2 \le \|\vec{\mu}_{\mathcal{S}}\|_2 + q ,$$

其中，q可计算为 $\Sigma_{\mathcal{S}}$的最大特征值。$\|\vec{\mu}_{\mathcal{S}}\|_2$和 q均为 $O(\sqrt{nm})$，因此我们看到λ 是 $O(\sqrt{\frac{m}{n}})$。应用命题 11 即可完成证明。 □

定理14（福利中的极大极小差距与整数性差距）。假设 $\mathcal{S}$ 是一个（δ, γ）不确定性集合，其 $\mathcal{L}_1$ 直径为 L。令 A^ε 表示一个 ε-最优离散 *RAU* 解，并令 A^ε 表示一个 ε-最优连续 *RAU* 解。令 A' 表示将随机舍入过程 *Round* 应用于 A^ε后得到的随机变量，并假设 *Round* 保持期望不变，即 $\mathbb{E}_{A'}[A'] = A^\varepsilon$。此外，假设真实亲和度分数为 S^*，并将最优解记为 $A^* \doteq$ 极大值点 $_{A\in\mathcal{A}}\ \mathrm{W}(A, S^*)$。由此可得以下结论。

1. 最大最小差距：$\mathbb{P}\big(\mathrm{W}(A^*, S^*) - \mathrm{W}(A^\varepsilon, S^*) > \varepsilon + \frac{2\gamma+L}{n}\big) < \delta$。*2. RRA* 的期望遗憾：$\mathbb{P}\big(\mathrm{W}(A^*, S^*) - \mathbb{E}_{A'}[\mathrm{W}(A', S^*)] > \varepsilon + \frac{2\gamma+L}{n}\big) < \delta$。*3. RRA* 的概率遗憾：$\mathbb{P}\big(\mathrm{W}(A^*, S^*) - \mathrm{W}(A', S^*) > \varepsilon + (2\gamma+L)\delta' / n\big) < \delta' + \delta$。

证明。 我们先证明极大极小差距界。以至少 $1-\delta$ 的概率，存在某个 $S^*_\gamma \in \mathcal{S}$ 使得 $\|S^*_\gamma - S^*\|_1 \le \gamma$，因此 $\mathrm{W}(A^*, S^*) \le \mathrm{W}(A^*, S^*_\gamma) + \frac{\gamma}{n}$（根据命题 2）。同样，$\mathrm{W}(A^\varepsilon, S^*_\gamma) \le \mathrm{W}(A^\varepsilon, S^*) + \frac{\gamma}{n}$。综合起来，这些结论意味着

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(A^*, S^*) - \mathrm{W}(A^\varepsilon, S^*) &\le \mathrm{W}(A^*, S^*_\gamma) - \mathrm{W}(A^\varepsilon, S^*) + \tfrac{\gamma}{n} \\ &\le \mathrm{W}(A^*, S^*_\gamma) - \mathrm{W}(A^\varepsilon, S^*_\gamma) + 2\tfrac{\gamma}{n} .\end{aligned}$$

现在，$\mathrm{W}(A^*, S^*_\gamma) \le \max_{A\in\mathcal{A}} \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A, S) + \frac{L}{n}$，根据定义，$\mathrm{W}(A^\varepsilon, S^*_\gamma) \ge \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A^\varepsilon, S)$，因此

$$\mathrm{W}(A^*, S^*_\gamma) - \mathrm{W}(A^\varepsilon, S^*_\gamma) + 2\frac{\gamma}{n} \le \max_{A\in\mathcal{A}} \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A, S) - \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A^\varepsilon, S) + \tfrac{2\gamma+L}{n} .$$

A^ε 的定义意味着 $\max_{A\in\mathcal{A}} \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A, S) - \inf_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{W}(A^\varepsilon, S) \le \varepsilon$，从而得出所需结果。

˜为了求得 RRA 的期望遗憾，我们首先应用以下两个事实： $\mathbb{E}_{A'}[A'] = A^{\varepsilon}$ ，且 W 是一个线性˜目标函数。现在，我们必须界定 W(A^*, S^*) − W(A^{ε}, S^*)，这可以通过使用我们之前求得最大最小差距时所用的相同证明来完成（将 A^{ε} 和 $\mathcal{A}$ 替换为 A^{ε} 和 $\mathcal{A}$）。

最后，概率最坏情形遗憾界由马尔可夫不等式得出。 □