arXiv:2301.10853v1 [math.SG] 25 Jan 2023

纤维化极化、Mabuchi 射线与几何Peter–Weyl定理中的量子化

˜T. BAIER、J. HILGERT、O. KAYA、J. M. MOURAO 和 J. P. NUNES

Abstract. 本文运用几何量子化的技术，对 Peter–Weyl 定理给出几何诠释。我们提出了一种针对特定类型非 K¨ahler 极化的半形式修正几何量子化新方法，并研究了一类重要的例子，即紧半单群 K 的余切丛。我们的主要结果表明，这种典范定义的极化出现在配备 Mabuchi度量的 $K \times K$-不变 K¨ahler 极化空间的测地边界上，而且其半形式修正量子化与 K¨ahler 情形同构。极限极化在环面作用下的不变性发挥了重要作用。

沿特定 Mabuchi测地线对量子态丛进行的酉平行移动，由 Hall相干态变换给出，将 K 的非交换傅里叶变换与 K的不可约表示的 Borel–Weil 描述联系起来。

Contents

1. 引言 2 2. 预备知识 5 2.1. 李理论记号与约定 5 2.2. T^*K 7 的等变几何 2.3. 不变 K¨ahler 结构与 Mabuchi 测地射线 10 3. 纤维化极化中的半形式修正量子化 13 3.1. 纤维化极化 13 3.2. 半形式与量子空间的定义 15 3.3. 纤维化极化的局部结构与 Bohr– Sommerfeld 条件 16 3.4. 与哈密顿群作用相关的纤维化极化 18 4. T^*K 20 上的 Kirwin–Wu 极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$ 4.1. Kirwin–Wu 极化的局部描述 20 4.2. 关于 T_{inv} 的傅里叶分解及其与 Borel–Weil 定理的关系 22 4.3. 极化收敛 23 4.4. 典范丛 $\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}$ 的平凡性与极化族中的半形式 25

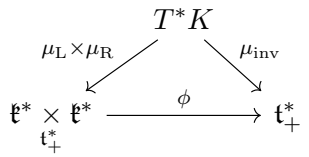
Date: 2023年1月27日。

5. 扩展量子丛 28 5.1. 无限测地时间下量子化的收敛 29 5.2. 广义相干态变换与几何量子化 32 5.3. 量子态扩张丛上的平坦联络 33 6. 酉非阿贝尔傅里叶变换：Peter–Weyl 定理与 Borel–Weil 定理之间的几何联系。36 7. 更一般理论的展望 37 附录 A. 极化族与半形式修正量子化的收敛 40 A.1. 连续极化族 40 A.2. 量子态的收敛 41 参考文献 41

1. Introduction

在紧半单李群 K 的余切丛 T^*K 上，与标准辛形式 ω_{std} 相容的 $K\times K$-不变 K¨ahler 结构所成的空间构成一个无限维空间 $\mathcal{M}$ ，该空间可由定义在极大环面的李代数对偶 $\mathfrak{t}^*$ 上的 Weyl 不变凸函数 g 有效参数化。这样的函数确定一个复结构 J_g，或者等价地，确定一个极化（就几何量子化而言） $\mathcal{P}_g$；后者进而定义了一个量子空间丛$\mathcal{H}\to\mathcal{M}$，其中对于任意点 $g\in\mathcal{M}$， $\mathcal{H}$ 由线丛 $L\otimes\mathcal{K}^{1/2}$ 的 J_g-全纯截面空间构成，其中 L 是预量子线丛，而 $\mathcal{K}^{1/2}$ 是典范丛的一个平方根；在此情形下，两者都是可平凡化的。

在本文的第一部分，我们引入一种极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$，其最初的描述及存在性证明归功于 Kirwin 和 Wu[KW14]；它并非 K¨ähler，而是属于“混合”类型。采用一种更一般且新颖的方法，我们从第 2.2 节所述哈密顿作用自然定义的图示出发，



Kirwin–Wu 极化的定义是：在正 Weyl 室的内部 $\mathring{\mathfrak{t}}_+^*$ 上，为 ϕ 的纤维赋予唯一的 $K\times K$-不变复结构，使其相对于约化辛形式为 K¨ähler。

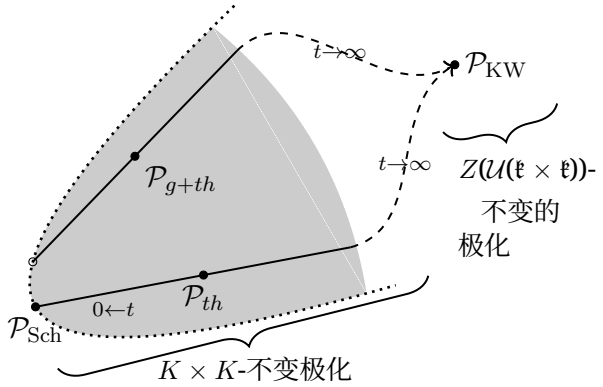
我们的第一个主要定理指出，Kirwin–Wu 极化位于 K¨ähler 极化空间 $\mathcal{M}$ 的边界上：

定理（见下文定理 4.9）。假设 h 是严格凸且具有 Weyl 不变性；则由 $g+th$ 定义的极化收敛至 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$

$$\mathcal{P}_{g+th} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$$

在正则层的复化切丛的拉格朗日 Grassmann 流形中逐点收敛 $(T^*K)^{\mathrm{reg}}$ （见第 2.2.2 节）。

这一收敛结果导出了以下关于我们在 T^*K 上的 $K\times K$-不变极化参数空间的示意图：



实 Schr¨odinger 极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}$ （也称为垂直偏振）和混合 Kirwin–Wu 极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$，都位于不变 K¨ahler 极化凸集的边界上（前者对应有限测地时间，后者对应无穷远），该凸集以灰色区域表示。Schr¨odinger 极化已在 [Hal02] 中得到详细研究。由动量映射的平方范数生成的 Mabuchi测地线，以及 Hall 相应的相干态变换，将实现非交换傅里叶变换，并成为几何量子化中的一个对象。

鉴于 Kirwin–Wu 极化是 K¨ahler 极化连续退化过程中出现的，因此自然会将量子化丛扩展

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \subset & \overline{\mathcal{H}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \subset & \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\cup\{\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}},\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}\} \end{array}$$

我们这项工作的一个初步但核心的要点，是在第 3.2 节中为 K¨ahler 极化和混合极化下的半形式修正量子化给出了一种新颖而统一的定义。在第 3 节中，我们引入了一类特定的“纤维化”极化，其局部结构相当刚性（参见图示 (20) 和命题 3.10），并使玻尔–索末菲条件得以定义。正如我们在第二个主要结果中所证明的，这些条件的作用可由量子化所具有的“几何”结构阐明。

定理（参见定理 3.13）。与纤维化极化相关联的量子态支撑在玻尔–索末菲叶构成的子集上。

我们的下一个主要结果回到纤维化极化的主要例子，即不变 Mabuchi 空间背景下的 Kirwin–Wu 极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$。 $\mathcal{M}$ 上的量子化丛向 $\overline{\mathcal{M}}$ 中的边界点的延拓是 $K\times K$-等变的。考虑对应于复化的一个矩阵元的量子态$s^{g}_{\lambda,\,A}$ （由最高权 λ 以及相应表示的一个自同态$A\in\operatorname{End}V_\lambda$标记），我们得到：

定理（见定理 5.5）。对于测地射线 $g_t := g + th$，在正则子集 $(T^*K)^{\mathrm{reg}}$ 上，量子态族 $s^{g_t}_{\lambda,\,A}$ 连续延拓到 Kirwin–Wu 极化，

$$\lim_{t\to\infty} s^{g_t}_{\lambda,A} =: s^{\mathrm{KW}}_{\lambda,A}.$$

在第 5.2 节中，我们从广义相干态变换（gCST）的角度解释定理 5.5。第 5.3 节描述了 h 的虚时间流如何借助一个平坦联络提升到量子态扩张丛，该联络的平行移动由 gCST 给出。当 h为二次 Casimir 算子时，Hall相干态变换为限制在由二次 Casimir 算子生成的 Mabuchi测地射线上的量子态扩张丛定义了一个酉联络的平行移动。这将 [Hal02、FMMN05、FMMN06、Hue08、KMN13a], 中的结果延拓至无限测地时间；在这些结果中，Schr¨odinger 极化和不变 K¨ahler 极化中的量子化通过广义相干态变换联系起来。特别地，沿着由二次 Casimir 算子生成的 Mabuchi测地线，可得到量子态希尔伯特空间之间一个酉的 $K\times K$-不变同一化。这对应于 $f\in L^2(K,dx)$的算子值傅里叶变换的一个自然几何解释，该变换由 f的 Peter–Weyl 展开描述，其中 dx 是 K上的归一化 Haar 测度。 f 的这一展开中的每一项都对应于一个几何 Bohr–Sommerfeld 圈及其上支撑的一个分布截面。该对应关于 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$-极化截面空间上的自然内积结构是酉的。在每个 Bohr–Sommerfeld 圈上，该内积由其不变性性质唯一确定至一个标量因子。所选的归一化由有限测地时间的内积极限得到，并且与 Peter–Weyl 定理所预言的内积一致。

与 Kirwin–Wu 极化相关的分布截面，可以直接解释为余伴随轨道上 Borel–Weil 线丛的全纯截面。因此，广义相干态变换的极限不仅为算子值傅里叶变换提供了几何解释，还直接建立了 Peter–Weyl 定理与 Borel–Weil 定理之间的联系，正如第 6 节所述。

第 7 节概述了一项计划，旨在 Hamiltonian G-空间的背景下，建立表示与几何圈之间的联系。

在本文准备期间，预印本 [LW22] 问世，其中也考虑了在无限 Mabuchi 测地线时间处出现的混合极化；在该文中，生成 Mabuchi 测地线的哈密顿量仅沿环面作用的动量变量的一个子空间为凸。在环面情形下，[Per22] 研究了类似结果，相关成果将发表于[MNP]。然而值得注意的是，本文虽然讨论非阿贝尔哈密顿作用，但初始的 K¨ahler 极化并不在不变环面 T_{inv}.的作用下保持不变

本研究拓展了轨道方法：通过对辛流形 T^*K进行量子化，一次性处理了 K 的全部不可约表示。事实上，如本文所述， $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$ 的可量子化辛约化集合ˆ与 K中的最高权集合通过对应关系$\lambda \mapsto \mathcal{O}_{\lambda+\rho} \times \mathcal{O}_{(\lambda+\rho)^*}$一一对应。轨道方法在为各种李群的不可约表示提供参数和几何实现方面取得了巨大成功（例如参见 [Duf82]）。此外，也有一些颇具吸引力的分支规则描述，例如用辛结构术语描述 Plancherel 测度（例如参见 [Lip80, Ver82]）。然而，这类分解通常并非通过轨道方法证明，而是对用其他方法证明的结果所作的重新诠释。交织算子很少通过几何量子化构造。迄今为止，主要的例外是通过与极化变化相关的 BKS（Blattner–Kostant–Sternberg）变换得到的算子（例如参见 [FMMN06, Hue08, Lis87]）。尤其是，非交换群及其相关对称空间的傅里叶变换，仅在少数情形下通过几何量子化构造出来，例如与复半单群 [Lis87]相关的黎曼对称空间。如今，广义相干态变换的极限实际上给出了紧李群算子值傅里叶变换的这种构造，且完全基于几何量子化（参见 [Dix77, § 18.8.1]）。

在后续工作中，我们将把这些方法应用于紧对称空间，并预计也可将其推广至非紧型黎曼对称空间。要处理非紧半单群，还需进一步将该方法推广至非黎曼对称空间。第 7 节概述的研究计划也将在后续工作中展开。

2. Preliminaries

2.1. 李理论记号与约定。全文中，我们考虑一个紧、连通且单连通的[1] 李群 K，以及一个固定的极大环面 $T \subset K$。除了相应李

[1]单连通条件仅为行文简洁而设。

代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$的包含映射外，还有一种规范方式可将对偶空间 $\mathfrak{t}^*$ 识别为子空间 $(\mathfrak{k}^*)^T \subset \mathfrak{k}^*$ ，该子空间在余伴随作用限制到极大环面后保持不变。由此，李代数及其对偶空间均可规范地且 T-等变地分解，

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{t}^{\perp}, \qquad \mathfrak{k}^* = \mathfrak{t}^* \oplus \mathfrak{t}^{*\perp}. \tag{1}$$

当我们偶尔使用一个 K-不变内积来识别下文的 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{k}^*$ 时，该识别相对于这些分解是分块对角的。

记 $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}} \subset \mathfrak{t}$ 为指数映射 $\mathfrak{t} \to T$ 的核，记 $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ 为其整数对偶，

$$\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} := \{\xi \in \mathfrak{t}^* \mid \forall \eta \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}} : \langle \eta, \xi \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

注意，通过如下识别， $2\pi i \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ 可自然地与权格对应

$$\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}} \qquad \leftrightarrow \qquad \chi_\lambda : T \to U(1), \chi_\lambda \circ \exp(\eta) := e^{2\pi i \langle \lambda, \eta \rangle}.$$

我们同样固定 Weyl 群在 $\mathfrak{t}^*$ 上作用的一个凸基本域 $\mathfrak{t}^*_+$ ，并记其内部为 $\mathring{\mathfrak{t}}^*_+$。它与正 Weyl 室 $i\mathfrak{t}^*_+ \subset i\mathfrak{t}^*$ 规范同构。由于这些规范识别，我们也将 $\mathfrak{t}^*_+$ 称为正 Weyl 室，并将 $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ 的元素称为权。

按照惯例，Weyl 群 $w \in W := \mathrm{Norm}_K(T)/T$中的元素有时会与其在 K中的提升混同，而最长元记作 w_0。

2.1.1. 线丛及其截面。 K-线性化的（也称为 K-齐性的）线丛与 K/T 上的特征标$_T\chi : T \to U(1)$ 一一对应，对应关系为 $L_\chi := K \times \mathbb{C}_{\chi^{-1}}$，其中我们采用如下记号

$$[k, z] = [kt, \chi(t^{-1})z] \in K \overset{T}{\times} \mathbb{C}_\chi$$

表示与主丛 $K \to K/T$ 及表示 χ^{-1}相关联的线丛。特别地， L_χ 的光滑截面与满足以下条件的等变函数 $f : K \to \mathbb{C}$ 一一对应： $f(kt) = \chi(t) f(k)$。

2.1.2. $K_{\mathbb{C}}$ 的 Borel 子群与 Borel–Weil 定理。考虑任意最高权表示 $\pi_\lambda : K \to \mathrm{End}(V_\lambda)$，其权为正则权 λ，并取一个最高权向量 $v_\lambda \in V_\lambda$。我们汇总不变复结构、Borel 子群以及 K/T 上的线丛之间关系的一些众所周知的事实（参见例如 [Ser59]）：

定理 2.1（Borel–Weil）。
(a) 射影化 $[v_\lambda] \in \mathbb{P}V_\lambda$ 中最高权向量的稳定子 $B := \mathrm{Stab}_{K_{\mathbb{C}}}[v_\lambda]$ 是复化 $K_{\mathbb{C}}$ 的一个 Borel 子群。

(b) K-等变嵌入

$$K/T \ni kT \overset{\psi}{\mapsto} [\pi_\lambda(k)v_\lambda] \in K \cdot [v_\lambda] \subset \mathbb{P}V_\lambda \tag{2}$$

是到其像上的微分同胚，并且相对于由以下识别给出的不变复结构，它是一个双全纯同构

$$K/T = K_{\mathbb{C}}/B.$$

(c) 超平面丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}V_\lambda}(1)$ 沿嵌入 ψ 的拉回为 L_{χ_λ}。

(d) 每个线丛 L_{χ_λ} 都能以唯一方式在 $K_{\mathbb{C}}/B$ 上成为全纯线丛，因为 ${}_BL_\lambda := L_{\chi_\lambda} = K_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}_{\chi_{-\lambda}}$，且其全纯截面空间与对偶表示同构

$$H^0(K_{\mathbb{C}}/B, L_\lambda) \cong V_\lambda^*.$$

明确地说，这些截面可识别为 T-等变映射

$$f_v(k) := \langle \pi_\lambda(k)v_\lambda, v\rangle \in \mathbb{C} \qquad \forall v \in V_\lambda.$$

注 2.2。
(i) 更一般地，所有包含 $T_{\mathbb{C}}$ 的 Borel 子群 $B^w \subset K_{\mathbb{C}}$ 都类似地作为极端权向量 $[\pi_\lambda(w)v_\lambda]$ 的稳定子出现，其中 w 遍历 Weyl 群。为简便起见，我们将与 B 相对的 Borel 子群，即通过 Weyl 群的最长元 w_0 共轭得到的子群，记为 $B_- := B^{w_0}$。它是最低权特征空间 $[v_{w_0\lambda}]$ 的稳定子。
(ii) 我们隐含地使用了这样一个事实：极大环面 T 的特征可以通过如下识别延拓到 Borel 子群 B （其极大幺幂子群记为 U）

$$B \longrightarrow B/U = T_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\chi_\lambda} \mathbb{C}^*, \tag{3}$$

(iii) 当然，(c) 和 (d) 对于正 Weyl 室的壁上的权同样成立，而 (a) 和 (b) 则必须借助更一般的抛物子群加以修改。

2.2. T^*K的等变几何。这里，我们回顾紧致连通李群 K 的余切丛 T^*K 的一些几何性质；更完整的论述可参见 [LM87，第 IV 章，4] 或 [AGMM94] 。

2.2.1. 辛几何。余切丛 T^*K 可自然地识别为乘积 $K \times \mathfrak{k}^*$,

$$K \times \mathfrak{k}^* \ni (x, \xi) \mapsto \xi \circ d_e L_{x^{-1}} \in T_x^*K, \tag{4}$$

（其中 L_x 表示由 $x \in K$进行的左平移），我们将在全文中默认使用这一识别。同构 (4) 的导数给出了切空间的一个识别

$$T_{(L_{x^{-1}})^*\xi}(T^*K) = \mathfrak{k} \times \mathfrak{k}^*$$

˙在此识别下，点 (x,ξ) 处切向量（$\dot{x}_i,\xi_i$） $\in \mathfrak{k}\times\mathfrak{k}^*$上的标准辛形式为

$$\omega_{\mathrm{std}}\left((\dot{x}_1,\dot{\xi}_1),(\dot{x}_2,\dot{\xi}_2)\right)=\langle\dot{\xi}_2,\dot{x}_1\rangle-\langle\dot{\xi}_1,\dot{x}_2\rangle+\langle\xi,[\dot{x}_1,\dot{x}_2]\rangle. \tag{5}$$

特别地，相应的体积形式可与乘积测度对应起来

$$\int_{T^*K} f\frac{\omega_{\mathrm{std}}^n}{n!}=\int_K\int_{\mathfrak{k}^*} f(x,\xi)dxd\xi, \tag{6}$$

其中， dx 表示 K上的归一化 Haar 测度，而 $d\xi$ 表示相应的勒贝格测度（参见 Hal02，(2.3)）]。自然的（左） $K\times K$作用于 T^*K 可表示为

$$(x_1,x_2)(x,\xi)=(x_1xx_2^{-1},\mathrm{Ad}^*_{x_2}\,\xi),$$

且它是哈密顿的，其动量映射为 $\mu=\mu_L\times\mu_R$：$T^*K\to\mathfrak{k}^*\times\mathfrak{k}^*$

$$K\times\mathfrak{k}^*\ni(x,\xi)\mapsto(\mu_L\times\mu_R)(x,\xi)=(\mathrm{Ad}^*_x\,\xi,-\xi)\in\mathfrak{k}^*\times\mathfrak{k}^*.$$

2.2.2. KAK分解与不变矩映射的奇异环面作用。正则集 $\mathfrak{k}^*_{\mathrm{reg}}$ 由李代数对偶中稳定子为极大环面的元素组成；它是穿过正 Weyl 室内部$\check{\mathfrak{t}}^*_+$ 中元素的余伴随轨道之并。它与 K的乘积定义了一个子集 $K\times\mathfrak{k}^*_{\mathrm{reg}}\cong(T^*K)_{\mathrm{reg}}\subset T^*K$，我们称之为正则层。在该层上，我们考虑 KAK分解，即映射

$$\begin{aligned}K\times\check{\mathfrak{t}}^*_+\times K&\longrightarrow K\times\mathfrak{k}^*_{reg}\\(x_1,\xi_+,x_2)&\longmapsto(x_1x_2^{-1},\mathrm{Ad}^*_{x_2}\,\xi_+)\end{aligned} \tag{7}$$

它是一个关于作用 $(x_1,\xi_+,x_2)\cdot t=(x_1t,\xi_+,x_2t)$ 的 $K\times K$-等变主 T 丛。我们会经常以较为隐含的方式使用 KAK-分解，写作 $(x,\xi)=(x_1x_2^{-1},\mathrm{Ad}^*_{x_2}\,\xi_+)$；计算结果不受 x_i 的不确定性影响，这一点显而易见。

不变矩映射由将 μ 与自然同胚 $\mathfrak{t}^*_+\times-\mathfrak{t}^*_+\cong(\mathfrak{k}^*\times\mathfrak{k}^*)/(K\times K)$ 的逆映射复合而定义。在我们的情形中，它自然地与映射 μ_{inv}：$T^*K\to\mathfrak{t}^*_+$ 相对应

$$\mu_{\mathrm{inv}}\left((x,\xi)=(x_1x_2^{-1},\mathrm{Ad}^*_{x_2}\,\xi_+)\right)=\xi_+. \tag{8}$$

在此，出于与我们所考虑的复结构的退化相关、且将在后文显现的原因，区分正 Weyl 室最为方便

$$\mathfrak{t}^*_+\times-\mathfrak{t}^*_+\quad\subset\quad\mathfrak{t}^*\times\mathfrak{t}^* \tag{9}$$

相对于作用于T^*K的群 $T\times T\subset K\times K$ 的极大环面。

Kirwan 多面体 [Kir94], 按定义是该正 Weyl 室与 μ的像的交，因此是 $\mathfrak{t}_+^*$的反对角嵌入副本，因而可通过 $\xi_+ \mapsto (\xi_+, -\xi_+)$自然地识别为 μ_{inv} 的像。正则层的动量映射像可自然地识别为纤维积 $\mathfrak{k}^* \times_{\check{\mathfrak{t}}_+^*} \mathfrak{k}^* \subset \mathfrak{k}^* \times \mathfrak{k}^*$，其中分别取决于映射 $\xi \mapsto \mathrm{Ad}_K^* \xi \cap \mathfrak{t}_+^*$ 和 $\xi \mapsto -\mathrm{Ad}_K^* \xi \cap \mathfrak{t}_+^*$。

Kirwan 多面体相对内部在动量映射下的原像

$$\Sigma := \mu^{-1}\left(\check{\mathfrak{t}}_+^*\right) = \left\{(t, \xi_+) \mid t \in T, \xi_+ \in \check{\mathfrak{t}}_+^*\right\} \subset K \times \mathfrak{k}^*$$

是 T^*K 的一个开辛子簇，称为辛截面。在我们的情形中，它就是开环面簇 $T \times \check{\mathfrak{t}}_+^*$，但请注意，由于（5）中的符号约定，环面作用由 $s \cdot (t, \xi_+) = (s^{-1}t, \xi_+)$给出。

由于 μ_{inv} 取值于极大环面T的李代数的对偶，因此，将其解释为某个环面作用的动量映射，是一个相当自然的想法（至少可追溯至 Guillemin 和 Sternberg [GS84]）；事实上，在一般情形下，这在一个稠密开子集上是可行的（另见[Lan17] 和 [Kno11，引理 2.3]）。我们仅给出本情形下的显式描述：

命题 2.3. 取极大环面$T \subset K$的一个固定副本 $T_{\mathrm{inv}} := T$；不变矩映射在正则层上的限制

$$\mu_{\mathrm{inv}} : (T^*K)_{\mathrm{reg}} \to \check{\mathfrak{t}}_+^*$$

是 T_{inv}作用的哈密顿动量映射

$$(x = x_1 x_2^{-1}, \xi = \mathrm{Ad}_{x_2}^* \xi_+) \star t := (x x_2 t^{-1} x_2^{-1}, \xi). \tag{10}$$

它使动量映射 μ 在正则层上的限制

$$(T^*K)_{\mathrm{reg}} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{k}^* \times_{\check{\mathfrak{t}}_+^*} \mathfrak{k}^*$$

成为一个 $K \times K$-等变 T_{inv}-主丛，其底空间为动量映射的像。

证明. 这很容易验证，因为此作用与 $K \times K$-作用可交换，并且在辛截面 Σ 上，它与式 (10) 一致。□

注 2.4.

(i) 我们将此作用称为“奇异环面作用”，将 T_{inv} 称为“奇异环面”，尽管它并无任何奇异之处，唯一例外是该作用仅定义在正则层上，且无法连续延拓至整个 T^*K；对于无重数流形，有判据可用于确定不变矩映射的哪些函数能够在正则层之外光滑延拓，参见 [Kno11，定理 4.1]。

(ii) 如果令其与 T_{inv} 等变，则从 KAK-分解 (7) 得到的映射将变为

$$(x_1, \xi_+, x_2) \star t := (x_1 t^{-1}, \xi_+, x_2).$$

2.3. 不变的 K¨ahler 结构与 Mabuchi 测地射线。

2.3.1. 不变的 K ¨ähler 结构。下文中，对偶向量空间之间的勒让德变换将发挥重要作用，我们借此机会引入必要的记号：对于向量空间 V 上的任意光滑函数 $f\colon V \to \mathbb{R}$，我们通过典范同构将 $d_v f$ 视为对偶向量空间 V^* 中的一个元素

$$\begin{array}{ccc} T_vV & \xrightarrow{d_v f} & T_{f(v)}\mathbb{R} \\ {\scriptstyle \text{can.}}\Big\| & & \Big\|{\scriptstyle \text{can.}} \\ V & \xrightarrow{d_v f} & \mathbb{R} \end{array}$$

从整体上看，这些导数定义了勒让德变换（对凸函数或凹函数 f 特别有用）

$$\mathcal{L}_f : V \to V^*, \quad \mathcal{L}_f(v) = d_v f.$$

命题2.5（[Nee00a, Nee00b, KMN13a]）。设 $g\colon \mathfrak{k}^* \to \mathbb{R}$ 是一个在余伴随作用下不变的严格凸函数；则 (a) 勒让德变换 $\mathcal{L}_g\colon \mathfrak{k}^* \to \mathfrak{k}$ 是 K-等变的，并且限制为勒让德变换 $\mathcal{L}_{(g|_{\mathfrak{t}^*})}$ 的限制 $g|_{\mathfrak{t}^*}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{k}^* & \xrightarrow{\mathcal{L}_g} & \mathfrak{k} \\ \bigcup & & \bigcup \\ \mathfrak{t}^* & \xrightarrow{\mathcal{L}_{(g|_{\mathfrak{t}^*})}} & \mathfrak{t}. \end{array}$$

(b) 若 $\mathcal{L}_g$ 是满射，例如当 g 一致凸时，则映射

$$T^*K \ni (x,\xi) \mapsto x e^{i d_\xi g} \in K_{\mathbb{C}} \tag{11}$$

是到复化 $K_{\mathbb{C}}$ 上的微分同胚，使得沿此映射对自然复结构的拉回 J_g 定义了一个 K ¨ähler 结构 $(T^*K, \omega_{\text{std}}, J_g)$。

此外，全局 J_g-全纯函数环由矩阵系数生成

$$f^g_{\lambda,A}(x,\xi) := \operatorname{tr}(\pi_\lambda(x e^{i d_\xi g})A), \tag{12}$$

其中 λ 遍历支配积分权，$\pi_\lambda : K \to \mathrm{Aut}(V_\lambda)$ 是 K 的相应最高权表示，而 $A \in \mathrm{End}(V_\lambda)$。

(c)（全局）K ¨ähler 势（针对 ω_{std}，相对于 J_g）为 [KMN13a，定理 3.2]

$$\kappa_g(x,\xi) := \langle \xi, d_\xi g\rangle - g(\xi). \tag{13}$$

(a) 中关于限制的陈述由等变性推出，这意味着 $\mathcal{L}_g(\mathfrak{t}^*) \subseteq \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t}$。

定义 2.6。我们将 (b) 中描述的 $K\times K$-不变 K¨ahler 极化空间记为 $\mathcal{M}$, 并在方便时将其与 $\mathfrak{t}^*$ 上的 Weyl 不变凸函数空间等同。与不变函数 g 对应的 K¨ahler 极化记为 $\mathcal{P}_g$.

我们还将用到 [KMN13a 引理 3.4 和 3.6] 中的以下性质；这里我们在 $\mathfrak{k}^*$ 上固定一个 K-不变内积 $\langle\,,\,\rangle$，并通过与范数平方 $Q(\xi)=\frac{1}{2}\langle\xi,\xi\rangle$ 相联系的勒让德变换 $\mathcal{L}_Q$，以通常方式将 $\mathfrak{k}$ 和 $\mathfrak{k}^*K$ 等变地对应起来。

命题 2.7. 对任意光滑的 K-不变函数 $g,h\in C^\infty(\mathfrak{k}^*)^K$，有

(a) 若 $\xi\in\mathfrak{k}^*_{\mathrm{reg}}$ 正则，则 $[d_\xi g,d_\xi h]=0$。(b) 不变哈密顿量 $h\circ\mu_{\mathrm{R}}=h|_{\mathfrak{t}^*_+}\circ\mu_{\mathrm{inv}}$ 分别生成哈密顿向量场和流,

$$(X_{h\circ\mu_{\mathrm{R}}})_{(x,\xi)}=((L_x)_*d_\xi h,0)\,,\qquad and\qquad \varphi_t^{X_{h\circ\mu_{\mathrm{R}}}}(x,\xi)=(xe^{td_\xi h},\xi),$$

其中 $(L_x)_*$ 是由左平移 L_x 推前得到的。
(c) 令 Hess_h 表示 h 的海森矩阵，其定义如下:

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}d_{\xi+tb}h(a)=\langle b,\mathrm{Hess}_h(\xi)a\rangle_{\mathfrak{k}^*},\ a,b\in\mathfrak{k}^*.$$

于是,

$$\forall\,u\in K:\quad \mathrm{Hess}_h(\mathrm{Ad}^*_u\,\xi)=\mathrm{Ad}^*_u\,\mathrm{Hess}_h(\xi)\,\mathrm{Ad}^*_{u^{-1}}\,.$$

(d) 若 h 严格凸，则作为 $\mathfrak{k}^*$ 上的自同态，有:

$$\mathrm{ad}^*_{\xi^*}=\mathrm{Hess}_h^{-1}(\xi)\ \mathrm{ad}^*_{d_\xi h},$$

其中，$\xi^*\in\mathfrak{k}$ 是与 ξ 对应的李代数元素，这一对应由 $\mathfrak{k}$ 上的不变内积诱导的同构 $\mathfrak{k}\cong\mathfrak{k}^*$ 给出。
(e) 考虑与极大环面 $T\subset K$ 和正 Weyl 室 $\mathfrak{t}^*_+$ 的选取相对应的 $\mathfrak{k}\otimes\mathbb{C}$ 的 Chevalley 基。相对于 $\mathfrak{k}^*\otimes\mathbb{C}$ 的对偶基，并在分解式 (1) 的类似形式下，h 在点 $\xi\in\mathfrak{t}^*$ 处的海森矩阵向 $\mathfrak{k}\otimes\mathbb{C}$ 的 $\mathbb{C}$-线性延拓分解为:

$$\mathrm{Hess}_h(\xi)=\begin{bmatrix}\mathrm{Hess}_h(\xi)_{|\mathfrak{t}^*} & 0\\ 0 & \mathrm{diag}\frac{\langle\alpha,d_\xi h\rangle}{\langle\alpha,\xi\rangle_{\mathfrak{t}^*}}\end{bmatrix},$$

其中 α 遍历根的集合。

2.3.2. Mabuchi 测地线。在紧 K¨ahler 流形 (M,ω,J) 上，K¨ahler 类 $[\omega]\in H^2(M)$ 中的 K¨ahler 形式空间可用相对 K¨ahler 势表示为集合

$$\{\omega_\phi:=\omega+\frac{i}{2}\partial\bar\partial\phi>0\mid\phi\in C^\infty(M)\}.$$

Mabuchi度量（定义于 [Mab87]，并且早期文献 [Sem92, Don99] 也独立地对其进行了研究）在近期

的 K¨ahler 几何进展中发挥着重要作用。若一条 K¨ahler 度量路径 $\omega_t = \omega + \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\phi_t$ 满足

$$\ddot{\phi}_t - \frac{1}{2}\|\operatorname{grad}_t \dot{\phi}_t\|_t^2 = 0, \tag{14}$$

其中，grad_t 和 $\|\cdot\|_t$ 分别表示相对于由 ω_t定义的K¨ahler度量的梯度和范数。或者，由微分方程定义的Moser映射 $\psi_t \in \operatorname{Diff}(M)$

$$\frac{d}{dt}_{|_{t=0}} \psi_t(x) = -JX^{\omega_t}_{\dot{\phi}_t}(\psi_t(x))$$

（其中 $X^{\omega_t}_{\dot{\phi}_t}$ 是相对K¨ahler势的时间导数 ϕ_t 关于K¨ahler形式 ω_t的哈密顿向量场）将K¨ahler形式族平凡化，即 $\psi_t^*\omega_t = \omega$。用这些术语表示，测地线方程具有如下形式

$$\psi_t^*\dot{\phi}_t = \dot{\phi}_0. \tag{15}$$

无论如何，共同调的K¨ahler形式的一条路径 ω_t 因此也可以等价地在所谓的辛图景中描述，即通过 M上的一条复结构路径 $J_t := \psi_t^* J$来描述。于是，两个K¨ahler结构（ω， J_t）和（ω_t， J）是等价的。还应注意，相对K¨ahler势空间中的测地线方程（14）或（15）在非紧流形 M上仍然有意义。

Mabuchi测地线方程（也可表述为复齐次 Monge-Amp`ère 方程）的显式解十分罕见。重要的例子包括紧致辛托里克流形，它们是（$\mathbb{C}^*$）$^n \cong T^*T^n$. 的光滑紧化。正如在这个阿贝尔情形中一样，对于紧李群的余切丛，Mabuchi测地线方程在勒让德变换下线性化，如下所示。

令 $g, h \in C^\infty(\mathfrak{k}^*)^K$，其中 g, h 都是一致凸的，即 $\operatorname{Hess} g$、Hess_h 的算子范数都有下界。我们有如下

命题 2.8。（ [MN15] 的第 10 节） $K \times K$-不变 K ¨ahler 结构的路径（$T^*K, \omega_{\mathrm{std}}, J_{g+th}$） $t > 0$ 是一条 Mabuchi 测地射线。

与这条测地线对应的 T^*K 双全纯映射族由 X_h 的哈密顿流在解析延拓至虚时间 $it, t > 0$ 后生成。事实上，令

$$\psi_t := \mathcal{L}_g^{-1} \circ \mathcal{L}_{g+th} : T^*K \to T^*K, \tag{16}$$

我们得到 $J_{g+th} = \psi_t^* J_g$ ，并且显式地（见 [KMN13a, MN15]），对于坐标环 $\mathcal{O}_{(T^*K, J_g)}$ 和 $\mathcal{O}_{(T^*K, J_{g+th})}$ 的生成元，

$$\psi_t^* f^g_{\lambda,A} = e^{itX_h} f^g_{\lambda,A} = f^{g+th}_{\lambda,A}$$

对于 λ 一个支配积分权，以及 A 相应不可约表示的一个自同态，如式 (12) 所示。

3. Half-form corrected quantization in fibering polarizations

3.1. 纤维化极化。回顾一下，在几何量子化意义下，极化是辛流形 (M,ω) 的复化余切丛中的一个可积分布 $\mathcal{P}\subset T^*_{\mathbb{C}}M$ [Woo91, Kir04]。主要例子是由相容复结构 J诱导的 K¨ahler 极化，其中 $\mathcal{P}=T^{1,0}_{J}M$；以及由拉格朗日叶状结构 $\mathcal{L}\subset TM$的复化 $\mathcal{P}=\mathcal{L}\otimes\mathbb{C}$给出的实极化。除这些最常见的类型之外，本文还讨论所谓的混合极化，即带有实方向的复极化；其局部描述由广义 Newlander–Nirenberg 定理给出：

定理 3.1（[Nir58]）。具有实部 $\mathcal{P}\cap\overline{\mathcal{P}}\cap TM$且秩为常数的可积复分布 $\mathcal{P}\subset T_{\mathbb{C}}M$，在局部上由 $k=\operatorname{rk}(\mathcal{P}\cap\overline{\mathcal{P}})$ 个两两 Poisson 对易的实函数以及 $n-k=\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}}M-\operatorname{rk}(\mathcal{P}\cap\overline{\mathcal{P}})$ 个两两 Poisson 对易的复函数生成。

对于这种极化 $\mathcal{P}$，可以关联一个各向同性分布

$$\mathcal{D}:=\mathcal{P}\cap\overline{\mathcal{P}}\cap TM,$$

其可积性由 $\mathcal{P}$的可积性推出。它的辛正交补

$$\mathcal{E}:=(\mathcal{P}+\overline{\mathcal{P}})\cap TM=\mathcal{D}^{\perp_\omega}$$

逐纤维看是余各向同性的，但一般并不可积；我们将只考虑 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 不仅可积，而且由纤维化定义的情形——更确切地说，由于这类假设若在全局成立，限制过严，缺乏实际意义，我们将假设存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} & \breve{M} & \\ {\scriptstyle\pi_{\mathcal{D}}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\pi_{\mathcal{E}}} \\ B_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\ \phi\ } & B_{\mathcal{E}}, \end{array} \qquad \mathcal{D}=\ker d\pi_{\mathcal{D}},\ \mathcal{E}=\ker d\pi_{\mathcal{E}}, \tag{17}$$

其中 $\breve{M}\subset M$ 是一个开稠密子集，且 $\pi_{\mathcal{D}}$和 $\pi_{\mathcal{E}}$ 分别是到光滑流形 $B_{\mathcal{D}}$ 和 $B_{\mathcal{E}}$上的浸没；按照 Weinstein 的定义，它们构成一个对偶对。

注 3.2. 关于如何将这种关系延拓到“奇异集” $M\setminus\breve{M}$ 上，有一个自然条件，即采用 Ortega 的“奇异对偶对”；见下文第 3.4 节。

ϕ 的纤维是与 $\mathcal{E}$相关联的余各向同性约化：也就是说，在 $B_{\mathcal{D}}$上有一个规范定义的垂直二形式

$$\omega_{\mathcal{D}}\in\Gamma\big(B_{\mathcal{D}},\textstyle\bigwedge^2(\ker d\phi)^*\big)$$

它在 ϕ 的纤维上具有辛结构，并由以下性质唯一确定：

$$\pi_{\mathcal{D}}^{*}\omega_{\mathcal{D}} = \omega|_{\ker d\pi_{\mathcal{E}}}.$$

因此，混合极化可作如下几何描述（参见 [Woo91，命题 5.47] 或 [Kir04，命题 1.55]）。

命题 3.3. 混合极化 $\mathcal{P}$ on M 与具有实方向的

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \overline{\mathcal{P}} \cap TM$$

光滑可积复结构之间存在一一对应关系，该复结构相对于 ϕcompatible with $\omega_{\mathcal{D}}$，即 $J_{\mathcal{D}} \in \Gamma(B_{\mathcal{D}}$,End(ker $d\phi$))，满足

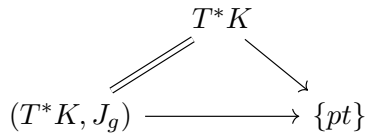
i) $J_{\mathcal{D}}^2 = -\mathrm{id}$，ii) $\omega_{\mathcal{D}}(\cdot, J_{\mathcal{D}}\cdot)$ 是 ϕ 的纤维上的伪黎曼度量，

iii) 且 $J_{\mathcal{D}}$ 在 ϕ 的纤维上可积。

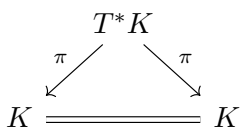
定义 3.4. 我们将这类极化称为相对于图式 (17) 的纤维化极化。

注 3.5. 纤维化极化特别包括 K¨ahler 极化（其中 $B_{\mathcal{D}} = M$ 和 $B_{\mathcal{E}} = \{pt\}$）以及由拉格朗日纤维化诱导的实极化（其中 $B_{\mathcal{D}} = B_{\mathcal{E}}$ 是该纤维化的底空间）。我们已经见过 K¨ahler 极化的例子，而第二类极化的例子则是 Schr ¨odinger 极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}$；在汇集相关信息的图式 (17) 中，这些例子表示为

(18) $\mathcal{P}_g$:



$\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}$:



请注意，所有这些极化在 $K \times K$-作用下均保持不变。

回到一般情形，回想一下，极化 $\mathcal{P}$ 的典范丛 $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ （参见 [Woo91] 的第 10.2 节）定义为这样一个线丛：其截面是被 $\overline{\mathcal{P}}$ 消去的 n-形式。张量 $J_{\mathcal{D}}$使各向同性叶空间 $B_{\mathcal{D}}$ 带有一个相对于映射 ϕ 的典范丛，以下我们将其记为 $\mathcal{K}_{\phi}$： $J_{\mathcal{D}}$ 的 $+i$-特征子空间构成一个子向量丛

$$(\ker d\phi)^{1,0}_{J_{\mathcal{D}}} \subset (\ker d\phi) \otimes \mathbb{C}$$

ϕ 的垂直丛的复化，其行列式即为相对典范丛

$$\mathcal{K}_{\phi} := \bigwedge^{\mathrm{top}} (\ker d\phi)^{1,0}_{J_{\mathcal{D}}}. \tag{19}$$

由此定义可清楚看出，将其限制到任意纤维 $\phi^{-1}(b)$上，我们便得到通常的全纯典范丛。

命题 3.6. 关于（17），纤维化极化 $\mathcal{P}$的典范丛 $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ 满足

$$\mathcal{K}_{\mathcal{P}} = \pi_{\mathcal{D}}^{*}\mathcal{K}_{\phi} \otimes \pi_{\mathcal{E}}^{*} \det T_{\mathbb{C}}^{*}B_{\mathcal{E}} = \pi_{\mathcal{D}}^{*}\left(\mathcal{K}_{\phi} \otimes \phi^{*} \det T_{\mathbb{C}}^{*}B_{\mathcal{E}}\right),$$

其中， $\mathcal{K}_{\phi}$ 是 ϕ 的相对典范丛，而 $T_{\mathbb{C}}^{*}B_{\mathcal{E}}$ 是 $B_{\mathcal{E}}$的余切丛的复化。

为使记号稍简洁一些，我们分别用 $\mathcal{K}_{g}$、 $\mathcal{K}_{\mathrm{Sch}}$和$\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}$表示极化 $\mathcal{P}_{g}$、 $\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}$和 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$ （将在下文定义）的典范丛。

极化的典范丛的极化截面发挥着关键作用；在当前设定下，有一种自然的定义，结合并推广了 K¨ahler 情形和实情形（关于这些内容，参见 [Hal02] 中的详细讨论，以及标准参考文献 [Woo91]）。

定义 3.7。对于纤维化极化，$\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ 的极化截面层由满足以下条件的 Ω 构成：在覆盖的开集 U 上，Ω 局部可写为

$$\Omega|_{U} = \pi_{\mathcal{D}}^{*}\Omega_{\phi} \otimes \pi_{\mathcal{E}}^{*}\Omega_{\mathcal{E}}$$

其中，Ω_{ϕ} 是 $\mathcal{K}_{\phi}$ 的光滑截面，且沿纤维全纯；$\Omega_{\mathcal{E}}$是余各向同性叶空间 $B_{\mathcal{E}}$上的实顶次微分形式。

3.2. 半形式与量子空间的定义。要定义与极化相关的量子化，我们需要讨论半形式。对于固定的极化 $\mathcal{P}$，半典范丛 $\kappa_{\mathcal{P}} \to M$ 是一个复线丛，并带有固定的同构 $\kappa_{\mathcal{P}}^{\otimes 2} \cong \mathcal{K}_{\mathcal{P}}$。它继承了极化截面的概念——若截面 s 的平方 $s^{\otimes 2}$ 是 $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$的极化截面，则称其为极化截面。

与极化相关的量子化由两项要求定义：局部极化条件和全局“有限能量”条件。由于含有某些紧实方向的混合极化会迫使量子态（或满足适当有限能量条件的极化截面）集中于子簇上，因此我们需要一个适当的分布型极化截面概念。

因此，考虑以下两个子层

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}}^{\infty}: \quad U \mapsto C_{\mathcal{P}}^{\infty}(U, L) \underset{C_{\mathcal{P}}^{\infty}(U,\mathbb{C})}{\otimes} C_{\mathcal{P}}^{\infty}(U, \kappa_{\mathcal{P}}) \subset C^{\infty}(U, L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}),$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}}^{-\infty}: \quad U \mapsto C_{\mathcal{P}}^{-\infty}(U, L) \underset{C_{\mathcal{P}}^{\infty}(U,\mathbb{C})}{\otimes} C_{\mathcal{P}}^{\infty}(U, \kappa_{\mathcal{P}}) \subset C^{-\infty}(U, L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}),$$

分别由 $L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}$的光滑截面和分布截面构成，它们在局部可写为 $\mathcal{P}$-极化截面的乘积（如下标所示）。Woodhouse [Woo91, §9.3] 将满足这一条件的光滑版本的截面 $\mathcal{P}$ 称为波函数。

重要的是，这一扩展对于 K¨ahler 极化是保守的：

命题 3.8（参见 [KY68，引理 2]）。在 $\mathbb{C}^n$ （或某个复流形）的开子集上满足柯西–黎曼方程的分布是全纯函数。

注记 3.9。
(i) 之所以采用这种形式写出定义，是因为很容易看出如何在 L 上定义极化分布截面：该条件由作用于光滑截面的微分方程组给出，并可直接推广为作用于分布截面的微分方程组。另一方面，对于半形式部分，极化是通过取局部截面的平方来确定的，而一般而言，分布截面无法这样处理。

(ii) 需要注意的是，这个乘积条件仅定义了一个预层，而且一般无法将全局的 $\mathcal{P}$-极化截面写成 L 和 $\kappa_{\mathcal{P}}$ 的极化截面的乘积。

3.3. 纤维化极化的局部结构与 Bohr–Sommerfeld 条件。一般而言，纤维化极化的结构在 $B_{\mathcal{E}}$ 上局部实际上具有一种“标准形”：

命题 3.10。假设 $\mathcal{P}$ 是纤维化极化，且图 (17) 中的映射 $\pi_{\mathcal{D}}$、$\pi_{\mathcal{E}}$、ϕ 都是具有连通纤维的真映射。那么，在 $\pi_{\mathcal{E}}$ 的正则值开子集 $B_{\mathcal{E}}^{\mathrm{reg}}$ 上，以下性质成立：

(a) $\pi_{\mathcal{D}}$ 的纤维是各向同性环面。(b) 在足够小的开子集 $U \subseteq B_{\mathcal{E}}^{\mathrm{reg}}$ 上，这些各向同性环面是定义在 $\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U)$ 上的哈密顿环面作用的轨道。

(c) 底空间 $B_{\mathcal{E}}^{\mathrm{reg}}$ 带有整仿射结构。

证明。Nirenberg 定理 3.1 中的函数来自 $B_{\mathcal{E}}$ 上的 k （实）坐标

$$f_1, \dots, f_k : U \to \mathbb{R}, \qquad U \underset{open}{\subset} B_{\mathcal{E}}$$

以及 $B_{\mathcal{D}}$ 上的 $n-k$ 复函数，这些函数是纤维 ϕ 上局部的 $J_{\mathcal{D}}$-全纯坐标，

$$z_1, \dots, z_{n-k} : V \to \mathbb{C}, \qquad V \underset{open}{\subset} B_{\mathcal{D}}$$

使得这些函数的拉回 $f_i \circ \pi_{\mathcal{E}}$、$z_j \circ \pi_{\mathcal{D}}$ 泊松对易。特别地，在任意点 $p \in \pi_{\mathcal{E}}^{-1}U$，沿哈密顿向量场 $X_{f_i \circ \pi_{\mathcal{E}}}$ 的流生成映射 $\mathbb{R}^k \to \pi_{\mathcal{D}}^{-1}(\pi_{\mathcal{D}}(p))$，该映射是到经过 p 的 $\pi_{\mathcal{D}}$ 纤维上的各向同性浸入。由于根据假设这些纤维是紧的，因此它们必定是环面，并且是（局部定义的）哈密顿环面作用的轨道。如同构造作用-角坐标时一样，我们得出结论：$B_{\mathcal{E}}^{\mathrm{reg}}$ 上存在整仿射结构（由 U 上那些在时间 1 的哈密顿流实际为周期性的函数定义）。□

注记 3.11. 命题 3.10 的一种等价表述是：对于余各向同性叶空间上的局部命题，我们可以不失一般性地假设其中涉及的纤维化由

哈密顿环面作用生成。

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{U} := \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(U) & \\ \swarrow & & \searrow^{\pi_{\mathcal{E}} = \mu_T} \\ \widetilde{U}/T & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & U \subset \mathfrak{t}^* \end{array} \tag{20}$$

正如下面 Kirwin–Wu 极化的定义所 स्पष्ट表明的，生成各向同性环面的哈密顿作用以及余各向同性纤维化底空间上的仿射结构当然都是全局的——它们分别是不变矩映射μ_{inv}生成的奇异环面作用：$(T^*K)_{\mathrm{reg}} \to \check{\mathfrak{t}}^*_+$，以及正 Weyl 室上的自然仿射结构。

命题 3.6 立即推出，相对于（20）纤维化的极化的典范丛 $\mathcal{K}_{\mathcal{P}}$ 带有哈密顿环面作用的典范提升；因此，任何半形式丛 $\kappa_{\mathcal{P}}$也都带有相应李代数$\mathfrak{t}$ 作用的典范提升（一般而言，单值化可能会阻碍环面作用本身在该丛上的提升）。此外，如果（L, ∇）是一个预量子线丛，则哈密顿 $\mathfrak{t}$ 作用也有一个典范提升（例如参见 [Mun01]）。

定义 3.12. 假设 $\mathcal{P}$ 是关于 (20) 的纤维化极化；点 $\xi \in U$、纤维 $\phi^{-1}(\xi) \subset B_{\mathcal{D}}$ 或余各向同性叶 $\mu_T^{-1}(\xi) \subset M$ 分别称为玻尔–索末菲的，如果李代数的作用

$$\mathfrak{t} \circlearrowright L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}|_{\mu_T^{-1}(\xi)}$$

当线丛限制到 μ_T^{-1} (ξ) 上时，下降到 T。

定理 3.13. 设 $\mathcal{P}$ 是 (20) 上的一个极化，且 U 是一个不含玻尔–索末菲点的开集；那么 U 上的任意 $\mathcal{P}$-极化截面 $\sim L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}$ 都恒等于 0。

证明。该论证与 [BFMN11，命题 3.1.(i)] 中的论证完全相同；不过，为完整起见，我们概述其证明。

由于 $\mathcal{P}$ 具有 T-不变性， $L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}$ 上 $\mathfrak{t}$ 的李代数作用在定义于任意开子集上的极化截面空间上诱导出 $\mathfrak{t}$ 的作用，其中该开子集是若干 T-轨道的并。该作用的单值化是一个映射 m，它经过环面作用的动量映射分解

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}} \times \widetilde{U} & \xrightarrow{\quad m \quad} & U(1) \\ & {\scriptstyle \mathrm{id} \times \mu_T} \searrow \quad \nearrow & \\ & \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}} \times U & \end{array} \tag{21}$$

并且，点 p 属于一个玻尔–索末菲叶，当且仅当 p 处的单值化是平凡的，

$$m|_{\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}} \times \{p\}} \equiv 0.$$

因此，如果 p 不属于玻尔–索末菲叶，则存在一个非平凡元素 $\eta \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ ，使得 $m(\eta, p) \neq 1$；对于 U中 $\mu_T(p)$的一个充分小邻域 U'内的所有点$\sim p' \in U'$，这一结论同样成立。将其作用于˜上的任意极化截面 $s \in \mathcal{H}^{-\infty}_{\mathcal{P}}(U')$，我们得到

$$s = m(\eta, \cdot)s,$$

因此，任何这样的 s 都必须为零。 □

注 3.14。式 (20) 中环面作用的动量映射 μ_T 唯一确定到平移为止；根据杜斯特尔马特–赫克曼定理 [DH82], ，可将其选取为使式 (21) 中的单值化函数 m 具有如下形式

$$m(\eta, p) = e^{2\pi i \langle \mu_T(p), \eta \rangle}.$$

这将 μ_T 中的不确定性缩减为 $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$中的平移。

我们预期，支撑在 Bohr– Sommerfeld 叶上的分布量子态，与相应约化的全纯截面之间存在自然的一一对应：

˜猜想 3.15. 在玻尔–索末菲点 ξ 处支撑且满足某个有限能量条件的极化截面子空间 $\mathcal{Q}_\xi \subset \mathcal{H}^{-\infty}_{\mathcal{P}}(U)$，与 $L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}$ 到 $\phi^{-1}(\xi)$ 的约化的全纯截面空间同构，

$$\mathcal{Q}_\xi \cong H^0(\phi^{-1}(\xi), L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}|_{\mu_T^{-1}(\xi)}/T).$$

下面我们将针对 Kirwin–Wu 极化这一具体情形，重新讨论这个问题。

3.4. 与哈密顿群作用相关的纤维化极化。尽管我们主要关注这里的具体情形 T^*K，但我们暂且停下来，说明纤维化极化这一概念在更广泛背景下的适用性。

具体而言，考虑一个哈密顿 G-流形 (M, ω)，其动量映射为$\mu : M \to \mathfrak{g}^*$，并假设 G 是紧的，且 M 按照 [Kno11] 的意义是“凸”的。我们所考虑的、支撑纤维化极化的奇异对偶对由下图给出

(22)
$$\begin{array}{ccc} & M & \\ {\scriptstyle /\sim}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \mu_{\mathrm{inv}}} \\ M/\sim & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & P \end{array}$$

其中 Kirwan 多面体 P 配备了光滑函数代数 $C^\infty(P/W_M)$，该代数在 [Kno97, Cor. 3.6], 中有所描述，并给出了一个同构

$$\mu^*_{\mathrm{inv}} C^\infty(P/W_M) = Z(C^\infty(M)^G, \{\ ,\ \})$$

与 M 上 G 不变函数的泊松代数的中心相对应，而左侧一项中的商 $M \to M/\sim$ 是按这些函数的哈密顿向量场张成的叶状结构取商。

基于这一奇异对偶对的极化具有一个“显而易见”的性质，从表示论的角度来看，这一性质是可取的：

引理 3.16。若 $\mathcal{P}$ 是相对于图 (22) 的一个纤维化极化，则群 G 的（广义）Casimir 元是 $\mathcal{P}$-极化的。

证明。该结论直接由如下包含关系得到

$$\mu_{\mathrm{inv}}^{*}\left(C^{\infty}(\mathfrak{t}^{*})^{W}\right)=\mu^{*}\left(C^{\infty}(\mathfrak{g}^{*})^{G}\right)\subset Z(C^{\infty}(M)^{G},\{\ ,\ \}).$$

□

若该作用是重数自由的，则对偶对 (22) 可简化为

(23)
$$\begin{array}{ccc} & M & \\ {\scriptstyle\mu}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\mu_{\mathrm{inv}}} \\ (\mu(M),\{\ ,\ \}_{\mathfrak{g}^*}) & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & (P,0) \end{array}$$

其中，$\mu(M)$ 上的可微空间结构已在 [Kno97] 中得到详细研究。由于 ϕ 的纤维是 G 的余伴随轨道，它们携带有限多个 G-不变复结构，其中恰有一个使其 Kostant–Kirillov–Souriau 辛形式（即 $\{\ ,\ \}_{\mathfrak{g}^*}$ 的限制）定义一个丰沛类。

定义 3.17。傅里叶极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{Fourier}}$ 是由图 (23) 定义的纤维化极化，并且是在 μ_{inv}的正则值上、关于 ϕ充分的复结构。

注 3.18。

(i) 鉴于我们处于重数自由情形，图 (23) 的左支 μ与“最优动量映射 $\mathfrak{J}$”重合，而右支 μ_{inv} 与 [Ort03]中的映射 π 重合。

(ii) 如果该作用不是重数自由的，仍然可以尝试从不变动量映射出发定义一个奇异对偶对；无论如何，ϕ 的纤维将不再是余伴随轨道，而 G-不变复结构的存在性和唯一性先验上并不明确。我们预期，由 P 上的凸函数生成的 Mabuchi 射线沿线的退化，将在非重数自由情形下定义此类复结构（从而定义傅里叶极化的推广）。

(iii) 对于紧 G，不变动量映射在一般情况下积分为一个紧环面在 M 的开稠密子集上的作用，参见 [Kno11，引理 2.3]，；而 P 中的玻尔–索末菲点将相差该环面的特征格中的元素。

(iv) 如果我们取消对 G 的紧致性要求，那么对正则集上的不变动量映射进行积分的群中将同时包含紧致方向和非紧致方向，而玻尔–索末菲点将位于 P 与线性子空间的交集中；关于杜伊斯特马–黑克曼定理相关推广的讨论，参见 [DD87] 及其中的参考文献。

作为定理 3.13 的推论，我们得到：

推论 3.19. 设 G 为紧群， $\mathfrak{g}$ 的中心平凡，且 M 是一个重数自由的哈密顿 G-流形，其动量映射与正 Weyl 室的内部相交。那么，任意分布意义下的 $\mathcal{P}_{\mathrm{Fourier}}$-极化截面都支撑在 Kirwan 多面体（相对内部）与极大环面的特征格的 ρ-平移之交集的原像上。

我们将在第 7 节概述相关猜想，这些猜想在比下文 T^*K 更一般的情形下，将这些纤维化极化与 Mabuchi 空间联系起来。

4. The Kirwin–Wu polarization $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$ on T^*K

Kirwin–Wu 极化是 T^*K 作为 Hamilton $G = K \times K$-流形时的傅里叶极化，或者更明确地说：

定义 4.1。Kirwin–Wu 极化 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$ 是稠密开子集 $(T^*K)^{\mathrm{reg}}$ 上的混合极化，通过将命题 3.3 应用于（余）各向同性纤维化而定义：

(24)
$$\begin{array}{ccc} & & (T^*K)^{\mathrm{reg}} \\ & \swarrow^{\mu} \quad \searrow^{\mu_{\mathrm{inv}}} & \\ \mathfrak{k}^* \times_{\check{\mathfrak{t}}^*_+} \mathfrak{k}^* & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & \check{\mathfrak{t}}^*_+ \end{array}$$

以及同构

(25)
$$\begin{aligned} \check{\mathfrak{t}}^*_+ \times K_{\mathbb{C}}/B \times K_{\mathbb{C}}/B_- = \check{\mathfrak{t}}^*_+ \times K/T \times K/T &\xrightarrow{\cong} \mathfrak{k}^* \times_{\check{\mathfrak{t}}^*_+} \mathfrak{k}^* \\ (\xi_+, k_1T, k_2T) &\longmapsto (\mathrm{Ad}^*_{k_1}\,\xi_+, -\mathrm{Ad}^*_{k_2}\,\xi_+) \end{aligned}$$

它赋予映射 ϕ （见式 (24)）的纤维以 $K \times K$-不变复结构（关于 Borel 子群的记号，参见第 2.1 节B、 B_-）。

4.1. Kirwin–Wu 极化的局部描述。局部 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$-极化函数（除显然适用于任意实函数$f : \check{\mathfrak{t}}^*_+ \to \mathbb{R}$的 $f \circ \mu_{\mathrm{inv}}$ 外）可以借助其定义中出现的余伴随轨道的复几何来描述。为此，我们对第 2.1 节中讨论的 K/T 上不变复结构的著名描述稍作调整。

4.1.1. Kirwin–Wu 的复方向。由于我们处理的是一个$K \times K$-作用，因此需要一种能够以正确的等变性嵌入两个余伴随轨道副本的版本；通过使用 $\mathrm{End}\, V_\lambda$ 而非 V_λ 即可实现这一点。对于任意权 $\nu \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ 及其对应的特征标

χ_ν：$T \to U(1)$，考虑将 $\mathrm{End}\ V_\lambda$ 正交投影 $P_\nu \in$ 到权特征空间

$$P_\nu v = \int_T \chi_\nu(t^{-1})\pi_\lambda(t)v\,dt, \qquad \forall v \in V_\lambda. \tag{26}$$

利用 KAK 分解（7），对任意自同态 $A \in \mathrm{End}\, V_\lambda$ 引入函数

$$(x_1, \xi_+, x_2) \mapsto \pi_\lambda(x_1)P_\lambda\pi_\lambda(x_2^{-1})A \in \mathrm{End}\, V_\lambda. \tag{27}$$

˜这些函数下降为正则层上定义良好的函数 $F_{\lambda,\ A}\colon (T^*K)_{\mathrm{reg}} \to \mathrm{End}\ V_\lambda$，并且关于奇异环面作用等变（该作用在$KAK$分解下对应于 $(x_1, \xi_+, x_2) \star t = (x_1 t^{-1}, \xi_+, x_2)$），

$$\tilde{F}_{\lambda,A}\big((x,\xi)\star t\big) = \chi_\lambda(t^{-1})\tilde{F}_{\lambda,A}(x,\xi).$$

˜与之前一样，迹的商 $F_{\lambda,\ A}(x,\xi) := \mathrm{tr}\ F_{\lambda,\ A}(x,\xi)$

$$(x,\xi) \mapsto \frac{F_{\lambda,A_1}(x,\xi)}{F_{\lambda,A_2}(x,\xi)}$$

因此是正则层某个开子集上的 T_{inv}-不变函数，并可解析地延拓至部分复化 $K_{\mathbb{C}} \times \check{\mathfrak{t}}^*_+ \times K_{\mathbb{C}}$（由同一表达式给出），其中它们通过商空间分解

$$K_{\mathbb{C}} \times \check{\mathfrak{t}}^*_+ \times K_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}/B \times \check{\mathfrak{t}}^*_+ \times K_{\mathbb{C}}/B_-.$$

为此，注意极大环面 $T \times T \subset K \times K$ 通过特征标 $\chi_\lambda \times \chi_{-\lambda}$ 作用于点 $P_\lambda \in \mathrm{End}\, V_\lambda$，因此，射影化 $[P_\lambda] \in \mathbb{P}\,\mathrm{End}\, V_\lambda$ 中相应点的稳定子是 Borel 子群 $B \times B_-$，它对应于包含 $(\lambda, -\lambda)$ 的 Weyl 室（属于$K \times K$）。我们已经证明：

命题 4.2. 设 V_λ 是 K 的一个最高权表示，且 $A_i \in \mathrm{End}\, V_\lambda$是两个自同态。那么复函数

$$(x,\xi) \mapsto \frac{F_{\lambda,A_1}(x,\xi)}{F_{\lambda,A_2}(x,\xi)}$$

（该函数在开子集 $U \subset (T^*K)^{\mathrm{reg}}$ 上有定义，此处其分母不为零）是 T_{inv}-不变的，因此可下降为函数$z_{\lambda,\ A_1,\ A_2}\colon U' = U/T_{\mathrm{inv}} \to \mathbb{C}$，定义在 $B_{\mathcal{D}} \cong \mathfrak{t}^* \times_{\check{\mathfrak{t}}^*_+} \mathfrak{t}^*$的一个开子集上。

对所有这类函数取并集，或者等价地，对单个 λ 选取适当的 A_i，使相应的线丛在余伴随轨道上非常丰 ample；这些并集生成 Kirwin–Wu 极化的复方向。

注记 4.3。注意，对于由简单张量 $A = u \otimes v^*$、$u \in V_\lambda$、$v^* \in V_\lambda^*$、$F_{\lambda,\ A}$ 给出的自同态，可以写成乘积

$$F_{\lambda,A}(x,\xi) = \mathrm{tr}(\pi_\lambda(x_1)v_\lambda \otimes v^*)\,\mathrm{tr}(\pi_\lambda(x_2^{-1})u \otimes v_\lambda^*).$$

注记 4.4。注意，尽管 ξ 分量没有明确出现在表达式 (27) 中，但这些函数当然并不独立于 ξ，因为因式分解 $x = x_1 x_2^{-1}$ 严重依赖于它。

4.2. 关于 T_{inv} 的傅里叶分解及其与 Borel–Weil 定理的关系。

4.2.1. 傅里叶谐波。对于正则层上的任意函数 $f : (T^*K)_{\mathrm{reg}} \to \mathbb{C}$ （为方便说明，我们假设其取复值，不过同样的过程也完全适用于取值于其他向量空间的情形），我们定义一族函数 $f_\nu : (T^*K)_{\mathrm{reg}} \to \mathbb{C}$ ，它们由 T_{inv}的特征标χ_ν、 $\nu \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$索引，定义如下：

$$\widehat{f_\nu}(p) := \int_{T_{\mathrm{inv}}} \chi_\nu(t) f(p \star t) dt.$$

f 的这些傅里叶谐波按照奇异环面的相应特征标（的逆）进行变换，

$$\widehat{f_\nu}(p \star t) = \chi_\nu(t^{-1}) \widehat{f_\nu}(p),$$

并且在适当意义下， f 将等于其傅里叶级数之和，

$$f(p) = \sum_\nu \widehat{f_\nu}(p).$$

由于我们只关注具有有限个非零项的函数，因此无需对这一陈述的分析性方面作出更精确的说明。

对于 J_g-全纯矩阵系数，傅里叶谐波可以明确写出

$$f^g_{\lambda,A}(x, \xi) = \mathrm{tr}(\pi_\lambda(x e^{id_\xi g}) A)$$

关于命题2.5中的 K¨ahler 极化。考虑投影到式（26）的权特征空间 $P_\nu \in \mathrm{End}\, V_\lambda$ 上的正交投影，并且对于任意点$p = (x = x_1 x_2^{-1}, \xi = \mathrm{Ad}^*_{x_2} \xi_+)$，考虑共轭

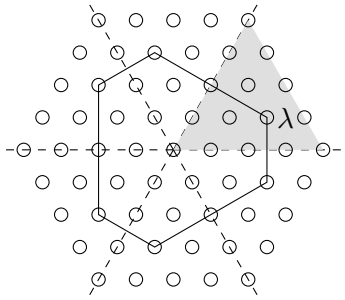
$$P_\nu(x, \xi) := \pi_\lambda(x_2) P_\nu \pi_\lambda(x_2^{-1})$$

关于 P_ν，它与不定性 $x_2 \rightsquigarrow x_2 t$ 无关，因此定义良好。

命题 4.5。矩阵系数 f^g_λ , A 的傅里叶谐波为

$$\widehat{(f^g_{\lambda,A})}_\nu(x, \xi) = \mathrm{tr}\left(\pi_\lambda(x e^{id_\xi g}) P_\nu(x, \xi) A\right), \tag{28}$$

因此，除非 ν 属于权格与最高权的魏尔群轨道的凸包的交集 $\overline{W\lambda}$ ，否则它们都为零。



$$f^g_{\lambda,A} = \sum_{\nu\in\overline{W\lambda}} \widehat{(f^g_{\lambda,\ A})}_{\nu}$$

证明。鉴于投影算子 $P_\nu(x,\xi)$ 是每个点 (x,ξ) 处权投影算子 P_ν 的共同共轭，它们的和为恒等算子

$$\mathrm{id}_{V_\lambda} = \sum_{\nu\in\overline{W\lambda}} P_\nu(x,\xi).$$

由此可得

$$f^g_{\lambda,A}(x,\xi) = \sum_{\nu\in\overline{W\lambda}} \widehat{(f^g_{\lambda,A})}_\nu(x,\xi),$$

因此，要完成证明，我们只需验证每个加项具有适当的等变性。但这可直接得出，

$$\begin{aligned}
\widehat{(f^g_{\lambda,A})}_\nu\big((x_1x_2^{-1},\mathrm{Ad}^*_{x_2}\,\xi_+)\star t\big) &= \widehat{(f^g_{\lambda,A})}_\nu(x_1t^{-1}x_2^{-1},\mathrm{Ad}^*_{x_2}\,\xi_+)\\
&= \mathrm{tr}\left(\pi_\lambda(x_1t^{-1}x_2^{-1}e^{id_{\mathrm{Ad}^*_{x_2}\xi_+}g})P_\nu(x_1t^{-1}x_2^{-1},\xi)A\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\pi_\lambda(x_1t^{-1}x_2^{-1}x_2e^{id_{\xi_+}g}x_2^{-1})\pi_\lambda(x_2)P_\nu\pi_\lambda(x_2^{-1})A\right)\\
&= \mathrm{tr}\left(\pi_\lambda(x_1e^{id_{\xi_+}g}t^{-1})P_\nu\pi_\lambda(x_2^{-1})A\right)\\
&= \chi_\nu(t^{-1})\,\mathrm{tr}\left(\pi_\lambda(x_1e^{id_{\xi_+}g})P_\nu\pi_\lambda(x_2^{-1})A\right),
\end{aligned}$$

其中，除了一些基本性质外，我们只使用了命题2.5 $\xi\mapsto d_\xi g$ 中勒让德变换的等变性。□

4.3. 极化收敛。傅里叶分解（28）与沿Mabuchi 测地射线的K¨ahler结构 I_{g_t} 的行为有关：不同的傅里叶谐波相对于测地时间 t将以不同的速率缩放。将复结构对（28）的依赖提取出来后，这一点便显而易见：

引理4.6。矩阵系数$f^g_{\lambda,A}$的傅里叶谐波（$f^g_{\lambda,A}$）$_\nu$可以写成

$$\widehat{(f^g_{\lambda,A})}_\nu\left(x=x_1x_2^{-1},\xi=\mathrm{Ad}^*_{x_2}\,\xi_+\right) = e^{\langle\nu,d_{\xi_+}g\rangle}\,\mathrm{tr}\left(\pi_\lambda(x_1)P_\nu\pi_\lambda(x_2^{-1})A\right).$$

证明。该结论由命题 4.5 的证明中的计算，以及如下观察得出：特征标 $t\mapsto\chi_\nu(t^{-1})$（的解析延拓）在元素 $e^{id_{\xi_+}g}\in T_{\mathbb{C}}$ 处的值等于 $e^{\langle\nu,\ d_{\xi_+}g\rangle}$ —— 这里我们使用了 $\mathcal{L}_g(\mathfrak{t}^*)\subseteq\mathfrak{t}$，参见命题2.5。□

考虑到下面的引理4.7，可知主导贡献（当 $t \to \infty$ 时）来自对应于最高权 λ 的傅里叶谐波。

引理 4.7。设 $g : \mathfrak{k}^* \to \mathbb{R}$ 严格凸且在余伴随作用下不变，并固定一个正权 λ；对于任意其他权 $\nu \in \overline{W\lambda}$以及正 Weyl 室内部的任意元素 $\xi_+ \in \check{\mathfrak{t}}^*_+$，

$$\langle \lambda - \nu, \mathcal{L}_g(\xi_+) \rangle > 0.$$

证明。由于勒让德变换 $\mathcal{L}_g : \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{t}$ 是一个 Weyl 群等变微分同胚，它将 Weyl 室的墙（即 W 中具有非平凡稳定子的元素）映到彼此，因此也保持正 Weyl 室的开内部。由于差 $\lambda - \nu$ 是单根的非负线性组合，且任意 $\xi_+ \in \check{\mathfrak{t}}^*_+$ 都是基本权的正线性组合，结论得证。□

引理 4.8. 对于由凸函数族 $t \mapsto g_t = g + th : \mathfrak{k}^* \to \mathbb{R}$ 指定的 K ¨ahler 极化的 Mabuchi 测地射线，其中 h 一致凸，

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\langle \lambda, \mathcal{L}_{g_t} \circ \mu_{\mathrm{inv}} \rangle} f^{g_t}_{\lambda,A} = F_{\lambda,A}$$

在正则层上逐点成立。

证明。利用引理 4.6 中的傅里叶分解，我们有

$$\left(e^{-\langle \lambda, \mathcal{L}_{g_t} \circ \mu_{\mathrm{inv}} \rangle} f^{g_t}_{\lambda,A} \right)(x, \xi) = \sum_{\nu} e^{\langle \nu - \lambda, d_{\xi_+} g_t \rangle} \operatorname{tr}\left(\pi_\lambda(x_1) P_\nu \pi_\lambda(x_2^{-1}) A \right)$$

其中 $\nu \in \overline{W\lambda}$，因此结论由引理 4.7 得出。 □

接下来，只要找到足够多局部 J_{g+th}-全纯函数，使其收敛到 Kirwin–Wu 极化函数，便可得到如 A.1 节所述的极化收敛 $\mathcal{P}_{g+th} \to \mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$。由引理 4.8 可知，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f^{g_t}_{\lambda,A}}{f^{g_t}_{\lambda,B}} = \frac{F_{\lambda,A}}{F_{\lambda,B}} \tag{29}$$

在 $(T^*K)^{\mathrm{reg}}$ 中，逐点成立于 F_λ 的零点集，B 之外，这就处理了极限的复方向。对于实方向，注意到由于

$$\ln f^{g_t}_{\lambda,A} = \ln \left(\sum_{\nu} e^{\langle \nu - \lambda, d_{\xi_+} g_t \rangle} \operatorname{tr}\left(\pi_\lambda(x_1) P_\nu \pi_\lambda(x_2^{-1}) A \right) \right) + \langle \lambda, d_{\xi_+} g_t \rangle$$

由前面的引理 4.7 可知

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln f^{g_t}_{\lambda,A} = \langle \lambda, \mathcal{L}_h \circ \mu_{\mathrm{inv}} \rangle. \tag{30}$$

定理 4.9. 设有一族凸不变函数 $g + th : \mathfrak{k}^* \to \mathbb{R}$，其中 h 严格凸。那么，当 $t \to \infty$ 时，K ¨ahler 极化 $\mathcal{P}_{g+th}$ 逐点收敛到 Kirwin–Wu 极化。

证明. 只需证明，任意点的邻域内，足够多的 J_{g_t}-极化（局部）函数收敛到 Kirwin–Wu 极化函数；考虑到命题 4.2 中对后者的描述，我们已在 (29) 和 (30) 中完成了这一证明。对于实方向，这用到了如下事实：我们可以找到 $\dim T$ 个线性无关的正则权 $\lambda \in \check{\mathfrak{t}}^* \cap \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}\circ}$。□

注 4.10. 在正则层内点的紧邻域上，这种收敛还可以改进为一致收敛，但下文不会用到收敛的解析性质。

4.4. 典范丛 $\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}$ 及半形式在族中的平凡性。附录 A.1 证明了，K¨ahler 极化（其典范丛可平凡化）收敛到 Kirwin–Wu 极化，意味着后者的典范丛也可平凡化。根据定义也可以直接看出这一点，如下所示：

命题 4.11. Kirwin–Wu 极化的典范丛可平凡化为 $K \times K$-线性化线丛。

证明。由 Kirwin–Wu 极化 (25) 的定义，以及余伴随轨道的典范丛为 $\mathcal{K}_{K_{\mathbb{C}}/B} = L_{-2\rho}$，显然 $\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}$ 与 $\pi^*_{\mathrm{KW}}(L_{-2\rho} \boxtimes L_{2\rho})$ 同构，其中 $\pi_{\mathrm{KW}} : (T^*K)_{\mathrm{reg}} \to K_{\mathbb{C}}/B \times K_{\mathbb{C}}/B_-$ 是将 μ 与 (25) 的逆映射及到余伴随轨道的投影复合而成；任意线丛 $\pi^*_{\mathrm{KW}}(L_{\lambda_1} \boxtimes L_{\lambda_2})$ 沿 KAK-分解 (7) 的进一步拉回总是平凡的，并且不难验证，$\pi^*_{\mathrm{KW}}(L_{\lambda_1} \boxtimes L_{\lambda_2})$ 可平凡化当且仅当 $\lambda_1 = -\lambda_2$。□

推论 4.12。
(i) 在两者均不消失的子集上，任意两个 $K \times K$-不变截面相差一个由 μ_{inv} 拉回的函数，该函数属于 $C^\infty(\check{\mathfrak{t}}^*_+, \mathbb{C})$。 (ii) 对任意 $K \times K$-不变的平凡化截面 $1_{\mathcal{K}^{-1}\,\mathrm{KW}}$，$\mathcal{K}^{-1}\,\mathrm{KW}$ 的任意极化整体截面 s 均可写成

$$s = (f \circ \pi_{\mathrm{KW}})(g \circ \mu_{\mathrm{inv}}) 1_{\mathcal{K}^{-1}_{\mathrm{KW}}},$$

其中 $f \in H^0(K_{\mathbb{C}}/B \times K_{\mathbb{C}}/B_-, L_{2\rho} \boxtimes L_{-2\rho})$ 和 $g \in C^\infty(\check{\mathfrak{t}}1^*_+, \mathbb{R})$。
(iii) 对任意 $K \times K$-不变的平凡化截面 $1_{\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}}$ 以及 $f \in H^0(K_{\mathbb{C}}/B \times K_{\mathbb{C}}/B_-, L_{2\rho} \boxtimes L_{-2\rho})$，截面

$$\frac{1}{f \circ \pi_{\mathrm{KW}}} 1_{\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}} \in C^\infty_{\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}}\left(\{f \circ \pi_{\mathrm{KW}} \neq 0\}, \mathcal{K}_{\mathrm{KW}}\right)$$

在其定义所在的开子集上是极化的。

为了在所考虑的整个极化族上构造半形式修正（包括 K¨ahler、Schr¨odinger 和 Kirwin– Wu），我们现在构造一个 $\mathcal{K}_\bullet$ 的平凡化截面，使其能够从

K¨ahler 延伸到退化情形：先取一个光滑的 Ad*-不变辛势 g，如第 2.3 节所述。根据 [KMN13a] 中的公式 (3.5)，全纯左 $K_{\mathbb{C}}$-不变 1-形式 ($j = 1, \dots, n$)

$$\Omega_g^j(x,\xi) := \sum_{k=1}^{n} \left[e^{-i\mathrm{ad}_{d_\xi g}}\right]_k^j \omega^k + \left[\frac{1 - e^{-i\mathrm{ad}_{d_\xi g}}}{\mathrm{ad}_{d_\xi g}} \cdot \mathrm{Hess}_g(\xi)\right]_k^j d\xi^k, \tag{31}$$

在 $(T^*K, \omega_{\mathrm{std}}, I_g)$ 上构成一个标架。这里，1-形式 $\{\omega^j\}_{j=1,\dots,n}$ 是 T^*K 上与 K 上左不变 1-形式对应的拉回，这些左不变 1-形式由 $\mathfrak{k}$ 中所选的标准正交基确定，而 ξ^k 是 $\mathfrak{k}^*$ 上对偶基中的坐标。于是，典范丛 $\mathcal{K}_{(T^*K,J_g)}$ 的左不变全纯平凡化截面为

$$\Omega_g := \bigwedge_{j=1}^{n} \Omega_g^j.$$

必须修改这些平凡化，才能使它们延拓到混合极化：

命题 4.13。映射

$$g \mapsto \widehat{\Omega}_g := \frac{e^{-2\langle \rho, \mathcal{L}_g \circ \mu_{\mathrm{inv}} \rangle}}{1 + \det \mathrm{Hess}_{\mathfrak{t}}\, g} \Omega_g \in C^\infty(M, \bigwedge^n T^*_{\mathbb{C}}(T^*K)) \tag{32}$$

定义了由 g 参数化的 K¨ahler 极化族中典范丛的一个平凡化截面。该截面通过连续性延拓为 T^*K 上 Schr¨odinger 极化的一个平凡化截面，并成为 $(T^*K)_{\mathrm{reg}}$ 上 Kirwin–Wu 极化的一个平凡化截面。

证明。对于薛定谔极化（在 $g = th$ 且 $t \to 0$ 时取极限得到），由表达式 (31) 可明显看出这一点，其中只有左不变 1- 形式保留下来；由于 Ω_g 前的分数趋于 1，我们便如预期得到 K 上哈尔测度的拉回。

对于 Kirwin–Wu 极化，证明由下一个引理给出。

□

引理 4.14。考虑 $\mathfrak{k}\otimes\mathbb{C}$, $\{H_j, E_\alpha, E_{-\alpha}\}_{j=1,\ \dots\dots,\ r,\ \alpha\in\Phi_+}$ 的一个 Chevalley 基，它对应于极大环面 $T \subset K$ 和正 Weyl 室 $\mathfrak{t}_+^*$ 的选取，其中 $\{H_j\}_{j=1,\ \dots\dots,\ r}$ 是 $\mathfrak{t}$ 的一组基，而 α_+ 表示正根集合，使得

$$\mathrm{ad}_{H_j} E_{\pm\alpha} = \pm\sqrt{-1}\alpha(H_j) E_{\pm\alpha}.$$

这里，$\alpha(H) > 0$ 对于 $\alpha \in \Phi_+$ 和 H 位于对偶正 Weyl 室的内部 $\check{\mathfrak{t}}_+$。将 ω^j、ω^α、$d\xi^j$、$d\xi^\alpha$ 记为T^*K上的对应 1-形式。

(a) 复数 n-形式 Ω_∞ 定义在 $(T^*K)^{\mathrm{reg}}$ 上，它是 $K\times K$-不变的，并且在 $\{1\}\times\check{\mathfrak{t}}^*_+$ 上等于

$$\widetilde{\Omega}_\infty := \bigwedge_{j=1}^r d\xi^j \bigwedge_{\alpha\in\Phi_+} \left(\left(\langle\alpha,\xi_+\rangle_{\mathfrak{k}^*}\omega^{-\alpha} - d\xi^{-\alpha}\right)\wedge d\xi^\alpha\right),$$

是 $\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}$ 的平凡化截面。

(b) 任意 $K\times K$-不变的 $\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}$ 光滑截面都可写成 $(f\circ\mu_{\mathrm{inv}})\widetilde{\ }\Omega_\infty$，其中 $f:\check{\mathfrak{t}}^*_+\to\mathbb{R}$ 是某个函数。

(c) 在子集 $\{1\}\times\check{\mathfrak{t}}^*_+$ 上，

$$\lim_{t\to\infty}\widehat{\Omega}_{g+th} = i^r P(\xi_+)^{-1}\widetilde{\Omega}_\infty,$$

其中

$$P(\xi_+) := \prod_{\alpha\in\Phi_+}\langle\alpha,\xi_+\rangle_{\mathfrak{k}^*}.$$

$\widehat{\ }$ 特别地，Ω_∞ 不为零，因此是 $K\times K$-不变的 $\mathcal{K}_{\mathrm{KW}}$ 平凡化截面。

证明。由 Ω_{g+th} 关于 $K\times K$ 的不变性，只需证明当 (x,ξ_+) 时极限存在，其中 ξ_+ 位于正 Weyl 室的内部（该内部与对偶正魏尔室的内部相对应，见命题 2.7 和引理 4.7），因此 ad_{ξ_+} 的像与 $\mathfrak{t}$ 的交集仅为 $\{0\}$。

命题 2.7 还意味着，$\mathrm{Hess}_{g+th}(\xi_+)$ 关于分解 $\mathfrak{k}\otimes\mathbb{C} = (\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{t}^\perp)\otimes\mathbb{C}$ 是分块对角的，并且

$$\mathrm{Hess}_{g+th}(\xi_+)_{|_{\mathfrak{t}^\perp}} = \mathrm{Diagonal}\left(\frac{\langle\alpha, d_{\xi_+}(g+th)\rangle}{\langle\alpha,\xi_+\rangle_{\mathfrak{k}^*}}\right).$$

由 (31)，我们于是得到

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-r}\bigwedge_{j=1}^r \Omega^j_{g+th}(x,\xi_+) = i^r(\det(\mathrm{Hess}_h)_{|_{\mathfrak{t}}}(\xi_+))\bigwedge_{j=1}^r d\xi^j,$$

其中右侧恒不为零。另一方面，在根空间上，对于 $\alpha>0$，我们得到:

$$\Omega^{-\alpha}_{g+th} = e^{\langle\alpha,d_{\xi_+}(g+th)\rangle}\left(\omega^{-\alpha} - \langle\alpha,\xi_+\rangle^{-1}_{\mathfrak{k}^*}d\xi^{-\alpha}\right) + \mathrm{lot}$$

and

$$\Omega^{\alpha}_{g+th} = \langle\alpha,\xi_+\rangle^{-1}_{\mathfrak{k}^*}d\xi^{\alpha} + \mathrm{lot},$$

其中，lot 表示 t 中的低阶项。因此，由 $2\rho=\sum_{\alpha\in\Phi_+}\alpha$ 可得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} e^{-2\langle\rho,d_{\xi_+}(g+th)\rangle}\bigwedge_{\alpha\in\Phi_+}(\Omega^{-\alpha}_{g+th}\wedge\Omega^{\alpha}_{g+th}) = \\ = P(\xi_+)^{-1}\bigwedge_{\alpha\in\Phi_+}\left(\left(\omega^{-\alpha} - \langle\alpha,\xi_+\rangle^{-1}_{\mathfrak{k}^*}d\xi^{-\alpha}\right)\wedge d\xi^\alpha\right).\end{aligned} \tag{33}$$

注意，(33) 的右端恒不为零。 □

掌握这些信息后，我们现在可以定义半形式丛$\kappa_\bullet$：它是 $(T^*K)^{\mathrm{reg}}$ 上的平凡线丛，并配备一个映射，该映射$\widehat{\ }$将平凡化截面的平方映至 $\Omega_\bullet$,

$$\kappa_\bullet^{\otimes 2} \cong \mathcal{K}_\bullet, \qquad 1_{\kappa_\bullet}^{\otimes 2} \mapsto \widehat{\Omega}_\bullet.$$

鉴于这一恒等式，我们也将半形式丛的平凡化截面记为

$$1_{\kappa_\bullet} = \widehat{\Omega}_\bullet^{1/2}.$$

注 4.15。命题 4.13 中考虑的平凡化截面仅对 $\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}$ 极化；对于 K¨ahler 极化，被极化的是全纯截面 Ω_g 本身，而对于 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$，不存在同时为平凡化且被极化的全局截面。为供后文使用，我们列出被极化截面的显式表达式：

命题4.16。若光滑截面 $\alpha\widehat{\ }\Omega_\bullet^{1/2}$ 满足

(a) $\mathcal{P}_\bullet = \mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}$ 是薛定谔型，且 $\alpha = \pi^* f$ 是定义在 K 上的实函数，而 $\pi\colon T^*K \to K$ 是典范极化；(b) $\mathcal{P}_\bullet = \mathcal{P}_g$ 是 Kähler 型，且 $\alpha = e^{\langle \rho, \mathcal{L}_g \circ \mu_{\mathrm{inv}} \rangle} (1 + \det \mathrm{Hess}_{\mathfrak{t}}\, g)^{1/2} f$ 是一个 J_g-全纯函数；(c) $\mathcal{P}_\bullet = \mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$ 是 Kirwin–Wu 型，且 $\alpha = \frac{h \circ \mu_{\mathrm{inv}}}{F_{\rho,\, A}}$，对于 $h \in C^\infty(\check{\mathfrak{t}}_+^*, \mathbb{C})$。

证明。对于薛定谔型和 Kähler 型极化，我们所述的条件实际上是充要条件，这一点由命题 4.13 可知；对于 Kirwin–Wu 极化，这直接由定义 3.7 以及函数 $F_{\rho,\, A}$ 描述了平方根的某些全纯截面这一事实得出（如推论 4.12 所述）

$$\mathcal{K}_\phi^{-1} \cong L_{2\rho} \boxtimes L_{-2\rho}.$$

□

5. The extended quantum bundle

本节将说明，与第 2、3 和 4 节所述的不变 K¨ahler 极化相关的量子态，如何在无限测地时间下收敛到 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$-极化截面。第 5.2 节将从广义相干态变换的角度对此作出解释。由此可得到第 1 节所述的量子态扩˜张丛，其上带有一个平坦联络；事实上，该联络沿由二次 Casimir 算子生成的虚时间流所给出的极化族是酉的。第 6 节将应用这一结果，把相干态变换与非阿贝尔傅里叶变换联系起来，从而为 Peter–Weyl 定理给出几何解释。

5.1. 无限测地时间下量子化的收敛。如第 3.2 节所述，为了讨论与定理 4.9 中极化极限 $\lim_{t\to\infty}\mathcal{P}_{g_t}=\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$ 相关的量子态的收敛，我们将预量子线丛 $L\cong T^*K\times\mathbb{C}$ 平凡化为厄米线丛：由命题2.5可知，在酉标架中， L 的 $\mathcal{P}_g$-极化截面具有如下形式： $f(x,\xi)e^{-\kappa_g(x,\xi)}$。利用命题4.16，我们得到：

命题 5.1. 与 K¨ahler 极化 $\mathcal{P}_g$ 相关的极化半形式修正截面具有如下形式

$$fe^{-\kappa_g}\otimes e^{\langle\rho,\,\mathcal{L}_g\circ\mu_{\mathrm{inv}}\rangle}(1+\det\mathrm{Hess}_{\mathfrak{t}^*}g)^{1/2}\widehat{\ }\Omega_g^{1/2}\in C^\infty_{\mathcal{P}_g}(T^*K,L)\otimes C^\infty_{\mathcal{P}_g}(T^*K,{}^{\kappa_g}),$$

其中 f 是 J_g-全纯的，且预量子线丛 L经酉平凡化。

现在，我们令命题 5.1 中表达式里的 f 等于量子化丛 $f=e^{-g(\lambda+\rho)}f^g_\lambda$, $_A$的截面，也就是说，我们考虑以下截面

$$s^g_{\lambda,A}:=e^{-g(\lambda+\rho)}f^g_{\lambda,A}e^{-\kappa_g}\otimes e^{\langle\rho,\mathcal{L}_g\circ\mu_{\mathrm{inv}}\rangle}(1+\det\mathrm{Hess}_{\mathfrak{t}^*}g)^{1/2}\widehat{\Omega}_g^{1/2}\tag{34}$$

它们是 K¨ahler 量子化丛在 K¨ahler 结构空间上的截面。稍后讨论广义相干态变换时，我们会再谈到常数 $e^{-g(\lambda+\rho)}$ 的由来。

另一方面，Kirwin–Wu 极化的量子态相对于不变量矩映射的取值 μ_{inv} 具有分布性。首先，我们注意到

命题 5.2。Kirwin–Wu 极化的 Bohr–Sommerfeld纤维是对所有支配整权 $\lambda\in\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}\cap\check{\mathfrak{t}}^*_+$ 的原像 $\mu_{\mathrm{inv}}^{-1}(\lambda)$。

证明。由于我们的预量子线丛是平凡的，其联络为$\nabla-i\theta$，其中 θ 是 Liouville–1-形式，且在 $K\times K$作用下不变，因此只需在辛截面 $\Sigma\cong T\times\check{\mathfrak{t}}^*_+$ 上检验定义 Bohr–Sommerfeld纤维的单值化条件。此处，Liouville形式限制为标准环面形式，由此得到的预量子单值化为$_{e^{2\pi i\langle\mu_{\mathrm{inv}}(p)^\eta\rangle}}$。加入半形式丛后，总单值化为

$$m(\eta,p)=e^{2\pi i\langle\mu_{\mathrm{inv}}(p)-\rho,\eta\rangle},$$

这就证明了该断言。 □

定义5.3。记 $^{\delta_{\mu^{-1}\ \text{不变}(\xi_+)}}$ 为 $K\times K$-不变的 Radon 测度，它是T^*K 上的测度，支撑在 $\mu_{\mathrm{inv}}^{-1}(\xi_+)$ 上，总质量为 1；换言之，

$$\int_{T^*K}f\,d\delta_{\mu_{\mathrm{inv}}^{-1}(\xi_+)}=\int_{K\times K}f\left((k_1,k_2)(e,\xi_+)\right)dk_1dk_2,$$

其中 dk_i 表示 K上的归一化 Haar 测度。

然后记作

$$s^{\mathrm{KW}}_{\lambda,A}:=(2\pi)^{r/2}P(\lambda+\rho)^2F_{\lambda,A}\delta_{\mu_{\mathrm{inv}}^{-1}(\lambda+\rho)}\otimes\widehat{\Omega}^{1/2}_{\mathrm{KW}}.\tag{35}$$

引理 5.4（拉普拉斯近似）。
(i) 设 V 为一个实向量空间；固定一个内积 $\langle\ ,\ \rangle$，并将相应的归一化勒贝格测度记为 dx。

设 f 是 V 的一个开子集上的光滑函数，在 x_0 处有唯一的非退化极小值，并且还假设 $f(x_0) = 0$。将 f 在任意点 $x \in V$ 处的海森矩阵 $\mathrm{Hess}f(x)$ 定义为泰勒展开二阶项中出现的自同态

$$f(x+\varepsilon\dot{x}) = f(x) + \varepsilon d_x f\dot{x} + \varepsilon^2\langle\dot{x}, \frac{\mathrm{Hess}_f(x)}{2}\dot{x}\rangle + o(\varepsilon^2).$$

那么测度

$$\sqrt{\det\frac{1}{2\pi}\mathrm{Hess}_f(x_0)}e^{-tf(x)}dx \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \delta_{x_0}$$

当 t 趋于无穷大时，收敛到支撑于 x_0 的狄拉克δ函数。
(ii) 考虑一个凸的 W-不变函数 $h\colon \mathfrak{t}^* \to \mathbb{R}$；则函数

$$\psi_h(\xi) = h(\lambda+\rho) - h(\xi) + \langle\xi - (\lambda+\rho), \mathcal{L}_h(\xi)\rangle \tag{36}$$

在 $\check{\mathfrak{t}}^*_+$ 上是凸函数，并在 $\xi = \lambda+\rho$ 处取得唯一极小值，且 $h(\lambda+\rho) = 0$，并且

$$\mathrm{Hess}_h(\lambda+\rho) = \mathrm{Hess}_{\psi_h}(\lambda+\rho).$$

(iii) 因此，特别是作为 $(T^*K)_{\mathrm{reg}}$ 上的一个测度，

$$\sqrt{\det\frac{t}{2\pi}\mathrm{Hess}_h(\lambda+\rho)}e^{-t\psi_h\circ\mu_{\mathrm{inv}}}\frac{\omega_{\mathrm{std}}^n}{n!} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} P(\lambda+\rho)^2\delta_{\mu_{\mathrm{inv}}^{-1}(\lambda+\rho)},$$

其中海森矩阵是相对于一种使 $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ 的余体积为一的内积计算的。

证明。虽然 (i) 众所周知，但 (ii) 是一个直接计算，我们略去不作。对于 (iii)，我们首先注意到，只需对 $K\times K$-不变函数进行检验，因为对于任意紧支撑连续函数 ϕ

$$\int_{(T^*K)_{\mathrm{reg}}}\phi\sqrt{\det\frac{t}{2\pi}\mathrm{Hess}_h(\lambda+\rho)}e^{-t\psi_h\circ\mu_{\mathrm{inv}}}\frac{\omega_{\mathrm{std}}^n}{n!} =$$
$$= \int_{(T^*K)_{\mathrm{reg}}}\left(\int_{K\times K}(k_1,k_2)\cdot\phi dk_1dk_2\right)\sqrt{\det\frac{t}{2\pi}\mathrm{Hess}_h(\lambda+\rho)}e^{-t\psi_h\circ\mu_{\mathrm{inv}}}\frac{\omega_{\mathrm{std}}^n}{n!}.$$

对于可写作 $\phi\circ\mu_{\mathrm{inv}}$ 的不变函数，利用辛体积形式 (6) 积分时，可以借助以下对应的公式进行简化：

$\mathfrak{t}^*$ 的外尔积分公式（参见 [Mac80], [Bou05，第 IX 章，第 6.3 节（12）]）

$$\int_{(T^*K)_{\mathrm{reg}}} (\phi\circ\mu_{\mathrm{inv}})\sqrt{\det\frac{t}{2\pi}\operatorname{Hess}_h(\lambda+\rho)}e^{-t\psi_h\circ\mu_{\mathrm{inv}}}\frac{\omega_{\mathrm{std}}^n}{n!}\overset{(6)}{=}$$

$$=\int_K\int_{\mathfrak{t}^*_{\mathrm{reg}}}(\phi\circ\mu_{\mathrm{inv}})\sqrt{\det\frac{t}{2\pi}\operatorname{Hess}_h(\lambda+\rho)}e^{-t\psi_h\circ\mu_{\mathrm{inv}}}dk_1d\xi=$$

$$=\int_{K\times K}\int_{\mathfrak{i}^*_+}P(\xi_+)^2\phi(\xi_+)\sqrt{\det\frac{t}{2\pi}\operatorname{Hess}_h(\lambda+\rho)}e^{-t\psi_h(\xi_+)}dk_1dk_2d\xi_+$$

结论由 (i) 和 (ii) 得出。 □

定理 5.5. 对于测地射线 $g_t = g + th$，在正则子集 $(T^*K)^{\mathrm{reg}}$ 上，式 (34) 中定义的量子态族连续延拓至 Kirwin–Wu 极化，

$$\lim_{t\to\infty} s^{g_t}_{\lambda,A} = s^{\mathrm{KW}}_{\lambda,A}.$$

证明。利用包含半形式的因子

$$\lim_{t\to\infty}\widehat{\Omega}^{1/2}_{g_t} =: \widehat{\Omega}^{1/2}_{\mathrm{KW}}$$

按构造收敛这一事实，我们收集所有其他因子，并将其重写为

$$e^{-g_t(\lambda+\rho)}f^{g_t}_{\lambda,A}e^{-\kappa_{g_t}}e^{\langle\rho,\mathcal{L}_{g_t}\circ\mu_{\mathrm{inv}}\rangle}(1+\det\operatorname{Hess}_{\mathfrak{t}^*}g_t)^{1/2}=F_1F_2F_3$$

其中

$$F_1(t)=f^{g_t}_{\lambda,A}e^{-\langle\lambda,\mathcal{L}_{g_t}\circ\mu_{\mathrm{inv}}\rangle}\ \to\ F_{\lambda,A}$$

$$F_2(t)=\sqrt{\det\frac{t}{2\pi}\operatorname{Hess}_h(\lambda+\rho)}e^{-t\psi_h\circ\mu_{\mathrm{inv}}}\ \to\ P(\lambda+\rho)^2\delta_{\mu^{-1}_{\mathrm{inv}}(\lambda+\rho)}$$

$$F_3(t)=e^{-\psi_g\circ\mu_{\mathrm{inv}}}(2\pi)^{r/2}\sqrt{\frac{\det\operatorname{Hess}_{\mathfrak{t}^*}h}{\det\operatorname{Hess}_h(\lambda+\rho)}+o(t^{-1})}\ \to\ \widetilde{F}_3.$$

其中 F_3 是定义在 $(T^*K)^{\mathrm{reg}}$ 上的连续函数，并且在 $\mu^{-1}_{\mathrm{inv}}(\lambda+\rho)$ 上恒等于 $(2\pi)^{r/2}$。□

备注 5.6. 关于向薛定谔极化的退化，可以直接验证：

$$\lim_{t\to0}s^{th}_{\lambda,A}=\operatorname{tr}(\pi_\lambda(x)A)\otimes\widehat{\Omega}_{\mathrm{Sch}}.$$

推论 5.7. 截面 $s^{\mathrm{KW}}_{\lambda,A}$ 是 Kirwin–Wu 极化的。

证明. 在 $F_{\rho,B}\neq0$所在的开子集上，显然

$$s^{\mathrm{KW}}_{\lambda,A}=(2\pi)^{r/2}P(\lambda+\rho)^2F_{\lambda,A}F_{\rho,B}\delta_{\mu^{-1}_{\mathrm{inv}}(\lambda+\rho)}\otimes\frac{1}{F_{\rho,B}}\widehat{\Omega}^{1/2}_{\mathrm{KW}}.$$

由于它是极化截面的极限，而生成极限极化的哈密顿向量场是极化生成元的极限

K¨ahler 极化的协变导数在极限中仍为 0。

□

5.2. 广义相干态变换与几何量子化。沿用 [KMN13a] 和第 5.1 节，我们将 K¨ahler 极化 $\mathcal{P}_{g+th}$, $t \geq 0$ 中对 T^*K 进行量子化的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{g+th}$ 定义为以下范数完备化：

$$\mathcal{H}_{g+th} := \overline{\left\{\sigma^{g+th}_{\lambda,A} \mid \lambda \in \hat{K}, A \in \mathrm{End}\,(V_\lambda)\right\}},$$

ˆ其中 K 表示由最高权 $\lambda \in \mathfrak{t}^*_{\mathbb{Z}}$ 标记的 K 不可约表示的等价类集合，并且

$$\sigma^{g+th}_{\lambda,A} := e^{-(g+th)(\lambda+\rho)} f^{g+th}_{\lambda,A} e^{-\frac{1}{2}\kappa_{g+th}} \otimes \Omega^{\frac{1}{2}}_{g+th}.$$

这一族希尔伯特空间可以通过广义相干态变换（gCST）非常有效（且显著地）加以描述

$$C_{t,h} : \mathcal{H}_g \to \mathcal{H}_{g+th}$$

如下所示。（参见 [KMN13a, (4.19)] 和 [KMN14]。）考虑两个与 Ad^* 不变的一致凸函数h自然关联的算子，

ˆ (i) 对 h h的预量子化，

$$\hat{h} := (i\nabla_{X_h} + h) \otimes 1 + 1 \otimes iL_{X_h} \tag{37}$$

它不保持 $\mathcal{H}_g$。（L_{X_h} 表示关于 X_h.的李导数）

（ii）对 h $\mathcal{Q}(h)$的量子化，它保持空间 $\mathcal{H}_g$，其定义如 [KMN14，（1.6）]

$$\mathcal{Q}(h)\, \sigma^g_{\lambda,A} := h(\lambda+\rho)\ \sigma^g_{\lambda,A}, \tag{38}$$

因此，截面 σ^g_λ , A 是 $Q(g)$的特征截面，其特征值为$h(\lambda+\rho)$。

gCST 定义为

$$C_{t,h} := e^{t\hat{h}} \circ e^{-t\mathcal{Q}(h)} \quad : \ \mathcal{H}_g \longrightarrow \mathcal{H}_{g+th}\,. \tag{39}$$

因此（参见 [KMN13a]中的第4节）

$$\sigma^{g+th}_{\lambda,A} = C_{t,h}\sigma^g_{\lambda,A},\ \forall \lambda \in \hat{K}, , A \in \mathrm{End}\,(V_\lambda).$$

事实上，gCST 也可以直接应用于施罗丁格极化的希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_{\mathrm{Sch}} := \overline{\left\{\sigma^0_{\lambda,A} \mid \lambda \in \hat{K}, A \in \mathrm{End}\,(V_\lambda)\right\}},$$

其中（参见 [Hal02]）

$$\sigma^0_{\lambda,A} := \mathrm{tr}(\pi_\lambda(x)A) \otimes \sqrt{dx}.$$

事实上，有

$$C_{1,g}\left(\mathrm{tr}(\pi_\lambda(x)A)\otimes\sqrt{dx}\right)=\sigma^g_{\lambda,A},\ \forall\lambda\in\hat{K},A\in\mathrm{End}\,(V_\lambda).$$

注意，$C_{t,\ h}$,$C_{1,\ g}$ 是希尔伯特空间之间的线性同构，并交织了 $K\times K$ 在 $\mathcal{H}_{\mathrm{Sch}},\mathcal{H}_g,\mathcal{H}_{g+th}.$ 上的自然作用。于是，定理 5.5 中所述的全纯截面收敛到分布截面的结果可改述如下，

定理 5.8。在分布意义下，

$$\lim_{t\to+\infty}C_{t,h}\sigma^{g+th}_{\lambda,A}=s^{\mathrm{KW}}_{\lambda,A},\ \forall\lambda\in\hat{K},A\in\mathrm{End}\,(V_\lambda).$$

如上所述，若将 gCST 直接应用于薛定谔量子化，这一结果同样成立。（只需设初始辛势 $g=0$。）

注 5.9。请注意，量子算子 $\mathcal{Q}(h)$ 的特定形式对于得到定理 5.8 至关重要。在辛托里克流形的量子化中也有类似结果：类似定义的 gCST 将 Mabuchi测地线族中的全纯托里克极化的量子化，与在无限测地时间处达到的实托里克极化的量子化联系起来。（参见 [BFMN11、KMN13b、KMN16]。）

$\mathcal{Q}(h)$ 的定义与 Duflo同构有关。回顾一下，Poincar´e–Birkoff–Witt 定理给出了 $\mathfrak{k}$ 的对称代数 $\mathcal{S}(\mathfrak{k})$ 与其泛包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{k})$ 之间的线性同构，PBW:$\mathcal{S}(\mathfrak{k})\to\mathcal{U}(\mathfrak{k})$。此映射并非代数同态，但将其限制在不变量子空间 PBW: $\mathcal{S}(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}\to\mathcal{U}(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ 上，再与映射 D : $\mathcal{S}(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}\to\mathcal{S}(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ 复合，便得到代数同构 $PBW\circ D$: $\mathcal{S}(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}\to\mathcal{U}(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}.$；该映射称为 Duflo同构。正如前文在 [KMN14]，中所述，当 h 为二次 Casimir 算子时，这相当于给 K 上的双不变拉普拉斯算子加上一个常数，对应于位移 $C_2(\lambda)\to C_2(\lambda)+\frac{1}{2}\langle\rho,\rho\rangle_{\mathfrak{k}^*}=\frac{1}{2}(\lambda+\rho)^2.$。这一情形将在下文第 5.3 节进一步讨论。

在下一节中，我们将讨论量子态扩张丛上的平坦联络。具体而言，我们将考虑 h （以及 g）为二次 Casimir 算子的情形，此时 $C_{t,\ h}$ 便成为 Hall 相干态变换，且量子态扩张丛上的平行移动是酉的。

5.3. 量子态扩张丛上的平坦联络。在 $\mathfrak{k}$ 上由二次 Casimir 算子给出 h 的情形下，

$$h(\xi)=\frac{1}{2}||\xi||^2,$$

映射 $C_{t,h}$ 可（采用适当约定，参见 [Hal02、FMMN05、FMMN06]）视为 Hall 相干态变换

$$C_t:L^2(K,dx)\to\mathcal{H}L^2(K_{\mathbb{C}},d\nu_t),\qquad C_t=\mathcal{C}\circ e^{\frac{t}{2}\Delta},$$

其值属于 $K_{\mathbb{C}}$ 上具有适当无穷远增长性质的全纯函数空间；此处 $d\nu_t$ 是平均热核测度，Δ是 K 上的双不变度量所对应的拉普拉斯算子， $\mathcal{C}$ 表示解析延拓。值得注意的是，这是希尔伯特空间之间的酉同构[Hal94、HZ09]。 K 的最高权为 λ 的不可约表示的矩阵元是 Δ 的特征向量，其特征值为

$$\frac{1}{2}\langle\lambda+\rho,\lambda+\rho\rangle_{\mathfrak{k}^*}-\frac{1}{2}\langle\rho,\rho\rangle_{\mathfrak{k}^*}=\mathcal{Q}(h)+\frac{1}{2}\langle\rho,\rho\rangle_{\mathfrak{k}^*}.$$

对于更一般的 Ad^*-不变一致凸函数 h, $C_{t,\ h}$ 不是酉的，尽管当 $t\to+\infty$ 时渐近地为酉（见[KMN14]的 IV.A 节）。

考虑以下由 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$-极化截面构成的向量空间

$$V_{\mathrm{KW}}:=\left\{\sigma^{+\infty}_{\lambda,A}\mid\lambda\in\hat{K},A\in\mathrm{End}\,(V_\lambda)\right\},$$

其中 $\sigma^{+\infty}_{\lambda\ A}$ ，$:=\ s^{\mathrm{KW}}_{\lambda\ A,}$ 。我们将如下说明在 V_{KW} 上定义内积结构的动机。令

$$h(\xi):=\frac{1}{2}||\xi||^2.$$

根据 [Hal02、FMMN05、FMMN06],

$$C_{t,h}:\mathcal{H}_{\mathrm{Sch}}\to\mathcal{H}_{th}$$

对所有 $t>0$，这是一个酉同构，使得

$$C_{t,h}\sigma^0_{\lambda,A}=\sigma^{th}_{\lambda,A}.$$

设 $\mathrm{tr}(\pi_\lambda(x)E_{ij})\ =:\ \pi_\lambda(x)_{ij},i,j=1,\dots,d_{\pi_\lambda}$其中 $d_{\pi_\lambda}=\dim\ V_\lambda$，表示表示 $\lambda\in K$ 相对于某个 K-不变内积在 V_λ上的标准正交基的矩阵元，使得 $\pi_\lambda(x)$ 对 $x\in K$是酉的。那么，此外，

$$\left\{\sigma^0_{\lambda,E_{ij}}\right\}_{\lambda\in\hat{K},i,j=1,\dots,d_{\pi_\lambda}}$$

是 $\mathcal{H}_{\mathrm{Sch}}$ 的正交基（参见例如 [KMN13a]）

$$||\sigma^0_{\lambda,E_{ij}}||^2=(d_{\pi_\lambda})^{-1}.$$

受 $C_{t,h},t>0$ 的酉性启发，我们将通过规定以下条件来定义 V_{KW} 上的内积结构:

$$\left\{\sqrt{d_{\pi_\lambda}}\sigma^{+\infty}_{\lambda,E_{ij}}\right\}_{\lambda\in\hat{K},i,j=1,\dots,d_{\pi_\lambda}}$$

是标准正交基。取范数完备化后，我们定义希尔伯特空间

$$\mathcal{H}_{\mathrm{KW}}:=\overline{V_{\mathrm{KW}}}.$$

注记 5.10。

（i）鉴于 $C_{t,h}$ 在 $t \to +\infty$ 下具有渐近酉性（[KMN14] 中的 IV.A 节），$\mathcal{H}_{\mathrm{KW}}$ 上的内积结构也可以等价地通过沿任意 Mabuchi 射线 $g + th, t > 0$ 取渐近值来定义。

(ii) 注意，希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{th}, t > 0$ 是带有再生核的再生核希尔伯特空间

$$K_{t,h}((x,\xi),(x',\xi')) = \sum_{\lambda \in \hat{K}, i,j=1,\dots,d_{\pi_\lambda}} d_{\pi_\lambda} \sigma^{th}_{\lambda,E_{ij}}(x',\xi') \bar{\sigma}^{th}_{\lambda,E_{ij}}(x,\xi),$$

参见例如 [HZ09，命题 2.2]。于是 $\mathcal{H}_{\mathrm{KW}}$ 上的内积具有一个再生核，该核通过取极限得到

$$K_{\mathrm{KW}}((x,\xi),(x',\xi')) := \lim_{t \to +\infty} K_{t,h}((x,\xi),(x',\xi')),$$

在适当的意义下。

如引言中所述，因此我们得到一个量子态希尔伯特空间的扩展丛，

$$\overline{\mathcal{H}} \to \overline{\mathcal{M}},$$

其中 $\overline{\mathcal{M}} := \mathcal{M} \cup \{\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}, \mathcal{P}_{\mathrm{KW}}\}$，$\mathcal{M}$ 表示 $\mathfrak{t}^*$. 上 Weyl 不变凸函数的空间。$\overline{\mathcal{H}}$ 在 $\mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}$（分别为 $\mathcal{P}_{\mathrm{KW}}$）上的纤维为 $\mathcal{H}_{\mathrm{Sch}}$（分别为 $\mathcal{H}_{\mathrm{KW}}$），而在 $g \in \mathcal{M}$ 上的纤维为 $\mathcal{H}_g$。

按照 [ADPW91], 的思想，gCST 随后为 $\overline{\mathcal{H}}$ 上的平坦 $K \times K$不变联络 ∇^Q定义平行移动，其中纤维生成截面 $\sigma_{\lambda,\ A}$、$\lambda \in K$、$A \in \mathrm{End}(V_\lambda)$ 是平行的，其中

$$\sigma_{\lambda,A}(\mathcal{P}) := \begin{cases} \sigma^0_{\lambda,A}, & \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathrm{Sch}}, \\ \sigma^g_{\lambda,A}, & \mathcal{P} = \mathcal{P}_g \in \mathcal{M}, \\ \sigma^{+\infty}_{\lambda,A}, & \mathcal{P} = \mathcal{P}_{\mathrm{KW}} \end{cases}.$$

具体而言，对于 $\overline{\mathcal{H}}$的一个截面，

$$s = \sum_{\lambda \in \hat{K}, i,j=1\dots,d_{\pi_\lambda}} a_{\lambda,ij} \sigma_{\lambda,E_{ij}},$$

对于从 $\mathcal{M}$出发的切向量 δh，我们得到

$$\nabla^Q_{\delta h} s = \sum_{\lambda \in \hat{K}, i,j=1\dots,d_{\pi_\lambda}} \delta h(a_{\lambda,ij}) \sigma_{\lambda,E_{ij}}.$$

注意，将 [FMMN05], 第 2.4 节推广可知，$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}|_{\mathcal{M}}$ 上的一个形如以下形式的截面

$$\sigma(g; x, \xi) := f(g; xe^{d_\xi g}) e^{-\frac{1}{2}\kappa_g} \otimes \sqrt{\Omega_g},$$

其中，对于固定的 g，f 关于 $\mathcal{K}_{\mathbb{C}}$是全纯的；当且仅当对于所有在 g处切于 $\mathcal{M}$的 δh，它是 ∇^Q–平行的，

$$\delta_h f = -\mathcal{Q}(h) f.$$

此处，根据 f 的同型分解，$\mathcal{Q}(h)$ 的作用方式如式 (38) 所示。

现在令 $\Upsilon \subset \overline{\mathcal{M}}$ 为由等于二次 Casimir 算子的 h 生成的闭 Mabuchi 测地射线。根据上述结果， ∇^Q 在限制 $\overline{\mathcal{H}}|_\Upsilon$ 上是酉的，其酉平行移动由 Hall的CST 给出。这确立了这一单参数量子化族的“等价性”，其中值得注意的是，在区间的一端，我们有实 Schr¨odinger 极化，而在另一端，我们有混合 Kirwin–Wu 极化。再次注意，一般而言，对于不变辛势 h 的其他选择，gCST 将不是酉的，也无法实现量子化之间的这种等价性。

注 5.11. 注意，Huebschmann 在 [Hue08, 定理 5.3 和定理 6.5] 中，利用 Peter–Weyl 定理的全纯版本和 BKS变换，描述了垂直极化与 K¨ahler 极化之间的相干态变换。相干态变换与 BKS 配对之间的关系也已在 [Hal02, FMMN06] 中确立。这些工作并未考虑 Kirwin–Wu 极化的极限情形及其相关的算子值傅里叶变换。

6. The unitary non-abelian Fourier transform: the geometric link between the Peter–Weyl and Borel–Weil theorems.

紧群 K 上的算子值傅里叶变换（[Dix77, § 18.8.1], [Fol95, § 5.3]）将映射 $L^2(K, dx)$ 等距地映到希尔伯特空间直和

$$\widehat{\bigoplus}_{\lambda\in\hat{K}} \mathrm{End}(V_\lambda),$$

其中，$\mathrm{End}(V_\lambda)$ 配备了重正规化希尔伯特–施密特内积 $(A, B) \mapsto d_{\pi_\lambda} \mathrm{tr}(A^*B)$。更确切地说，对于 $F \in L^1(K)$，定义

$$\hat{F}(\pi_\lambda) := \int_K F(x)\pi_\lambda(x)^* dx,$$

并得到 Plancherel公式

$$\|F\|^2_{L^2(K,dx)} = \sum_{\lambda\in\hat{K}} d_{\pi_\lambda} \mathrm{tr}(\hat{F}(\pi_\lambda)^* \hat{F}(\pi_\lambda))$$

对于 $F \in L^2(K, dx) \subseteq L^1(K, dx)$。

我们希望将扩展量子丛 $\overline{\mathcal{H}}$中从 $\mathcal{H}_{\mathrm{Sch}}$ 到 $\mathcal{H}_{\mathrm{KW}}$ 的平行移动与第 6 节中所述内容联系起来，

$$L^2(K, dx) \cong \mathcal{H}_{\mathrm{Sch}} \ni f = \sum_{\lambda\in\hat{K}} \mathrm{tr}(\pi_\lambda(x)A) \otimes \sqrt{dx} \mapsto \sum_{\lambda\in\hat{K}} \sigma^{+\infty}_{\lambda,A} \in \mathcal{H}_{\mathrm{KW}},$$

到算子值傅里叶变换。为此，我们需要定义一个$K \times K$-等变酉同构

$$\Phi : \mathcal{H}_{\mathrm{KW}} \cong \widehat{\bigoplus}_{\lambda\in\hat{K}} \mathrm{End}(V_\lambda).$$

显然，除在每个不可约子空间 $V_\lambda \otimes V_\lambda^*$ 上选择酉相位外，这一同构是确定的，因此我们将直接把此同构定义为

$$\Phi(\sigma^{+\infty}_{\lambda,A}) = A.$$

这将酉非阿贝尔算子值傅里叶变换实现为一个取值于 $\mathcal{H}_{\mathrm{KW}}$ and 的变换；通过显然的识别$\mathcal{H}_{\mathrm{Sch}} \cong L^2(K, dx)$，它与扩展量子丛在限制于 Υ and 上的平行移动一致，而后者由 Hall 在无穷时间处的相干态变换给出，如第5.3节所述。

为进一步证明这个定义的合理性，并建立 Peter–Weyl 定理与 Borel–Weil 定理之间的几何联系，现在令 $u \in V_\lambda, v^* \in V_\lambda^*$and，并考虑简单张量 $A = u \otimes v^* \in \mathrm{End}(V_\lambda)$。由 (35) 可得

$$\sigma^{+\infty}_{\lambda,u\otimes v^*} = (2\pi)^{r/2} P(\lambda+\rho)^2 F_{\lambda,u\otimes v^*} \delta_{\mathrm{inv}}^{-1}(\lambda+\rho) \hat{\Omega}_{\mathrm{KW}}^{\frac{1}{2}}.$$

回顾注释 4.3,

$$F_{\lambda,u\otimes v^*}(x,\xi) = \mathrm{tr}(\pi_\lambda(x_1)v_\lambda \otimes v^*)\,\mathrm{tr}(\pi_\lambda(x_2^{-1})u \otimes v_\lambda^*).$$

与第4节的结果一致，显然，$F_{\lambda,u\otimes v^*}$ 是 T-等变函数，定义在 K 上，从而可将其视为乘积余伴随轨道 $K/T \times T\backslash K$上的 Borel–Weil 丛$L_\lambda \boxtimes L_{\lambda^*}$的一个截面，其中 λ^*表示共轭表示 V_λ^*的最高权。事实上，对于 $t \in T$,

$$\mathrm{tr}(\pi_\lambda(x_1 t)v_\lambda \otimes v^*) = \chi_\lambda(t)\,\mathrm{tr}(\pi_\lambda(x_1)v_\lambda \otimes v^*)$$

and

$$\mathrm{tr}(\pi_\lambda((tx_2)^{-1})u \otimes v_\lambda^*) = \mathrm{tr}(\pi_\lambda(t^{-1}x_2^{-1})u \otimes v_\lambda^*) = \chi_{\lambda^*}(t)\,\mathrm{tr}(\pi_\lambda(x_2^{-1})u \otimes v_\lambda^*).$$

这直接将 $F_{\lambda,\ u\otimes v^*}$ 与 $u \otimes v^* \in \mathrm{End}(V_\lambda)$ 对应起来，这一点在映射 Φ 中已有隐含体现。换言之，几何量子化在 $\mathrm{tr}(\pi_\lambda(x)u \otimes v^*) \in L^2(K, dx)$ 与分布截面 $\sigma_\lambda^{+\infty}{}_{,\ u\otimes v^*}$之间建立了自然联系；后者支撑于 Bohr–Sommerfeld 圈 $\mu_{\mathrm{inv}}^{-1}(\lambda+\rho)$，并与 $H^0(\mathcal{O}, L_\lambda) \otimes H^0(\mathcal{O}, L_{\lambda^*}) \cong \mathrm{End}(V_\lambda)$ 中对应的 Borel–Weil 截面相对应。

7. An outlook on a more general theory

本节概述一项研究计划，旨在为 K¨ahler 哈密顿 G-流形背景下的表示赋予几何圈；这一构造与本文详细阐述的典范情形 T^*K, $G = K \times K$ 相平行，并对其加以推广。我们将在未来的工作中探讨更一般的情形。相关的一些思想已在第 3.4 节中提及。

设 G 是一个紧致连通单连通李群，M 是一个带有 G 哈密顿作用的 K¨ahler 流形，且其 K¨ahler 结构具有 G-不变性。设 $G \circlearrowright (M, \omega) \xrightarrow{\mu} \mathfrak{g}^*$ 为动量映射。

与 M 上的哈密顿 G 作用相关联，有一个不变的动量映射 $\mu_{\mathrm{inv}} : M \to \mathfrak{a}_+^*$，它在开稠密子集 $M \subset M$ 上定义了环面 T_{inv} 的一个作用，其李代数为 $\mathrm{Lie}(T_{\mathrm{inv}}) = \mathfrak{a}$。这里，$\mathfrak{a}^*$ 是某个商

，它是 G 的极大环面的李代数的对偶 $\mathfrak{t}^*$ （ $M = T^*K$ 已经如此，群 $K \times K$ 在其上作用，而 Kirwan 多面体位于 $\mathfrak{t}^*$ 中）。

回顾第 3.4 节，不变光滑函数空间

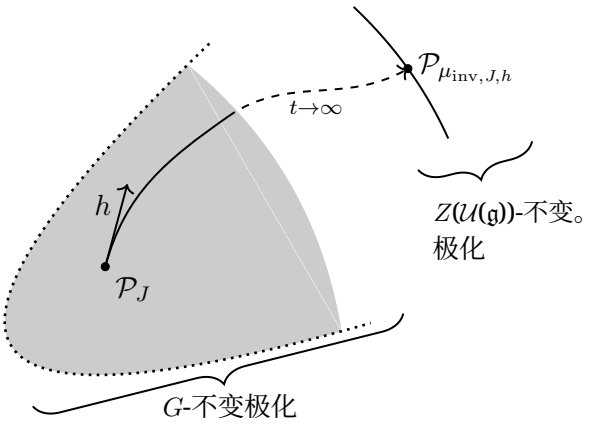
$$\mu_{\mathrm{inv}}^* \left(C^\infty(\mathfrak{t}^*)^W\right) = \mu^* \left(C^\infty(\mathfrak{g}^*)^G\right), \tag{40}$$

该空间有一个稠密子集，对应于由 r 个相互独立的 Casimir 元生成的多项式环 $\mathcal{Z}_G(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$。每个 $h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)^G$ 确定了 M上的一个光滑函数，$h \circ \mu = h \circ \mu_{\mathrm{inv}}$ 为简便起见，我们也将其记作 h。根据引理 3.16，我们得到 Ortega 意义下泊松簇的图 (22)（此时尚未涉及复结构）。

现在假设标准预量子化几何数据是 G-不变的；特别地，我们假设 G-作用提升到预量子线丛 $L \to M$. 。令 $\mathcal{P}$ 为 G-不变的 K¨ahler 极化，并假设其具有半形式丛 $\kappa_{\mathcal{P}}$。李代数 $\mathfrak{g}$ 通过部分联络作用于 $\kappa_{\mathcal{P}}$ ，该部分联络由沿 G-作用对应的基本向量场取李导数定义。于是，半形式修正量子态的希尔伯特空间将具有同型分解

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}} := H^0(M, L \otimes \kappa_{\mathcal{P}}) = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathcal{H}_{\mathcal{P}}^{\lambda}.$$

猜想 7.1. 若 $h \in \mu^* \left(C^\infty(\mathfrak{g}^*)^G\right)$ 是一致凸的，则哈密顿向量场 X_h 的虚时间流会在 M, $\mathcal{P}_s$, $s \geq 0$ 上生成一条 G-不变的 K¨ähler 极化的 Mabuchi 射线，其初始点为 $\mathcal{P}_J$；在无限测地时间处，它定义一个 G-不变的混合极化 $\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}} = \mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}},\ J,\ h}$，其实方向由 T_{inv} 的轨道给出。请注意，在非重数自由情形中，极限极化原则上可能同时取决于初始 K¨ähler 极化 $\mathcal{P}_J$ 和 h 所指定的方向。



我们将假设 $\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}$ 具有一个与退化相容的半形式丛。定义 3.12 表明，半形式修正的

Bohr–Sommerfeld 周期将具有如下形式

$$M_\lambda = \mu_{\mathrm{inv}}^{-1}(\lambda + a),$$

对于最高权 $\lambda \in \mu_{\mathrm{inv}}(M) \cap \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ 和 $a \in \mathfrak{t}_+^*$，其中的平移量 a 源于半形式丛沿途的整体化贡献。商空间 $M_\lambda/T_{\mathrm{inv}}, \lambda \in \mu_{\mathrm{inv}}(M) \cap \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$，给出了相对于 T_{inv} 的哈密顿作用，对 M （包括半形式修正）进行约化所得的可量子化辛约化集合。我们称这些集合为 M_λ 谱子流形，因为对于 $\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}$-极化的半形式修正截面，$h \in \mu^* \left(C^\infty(\mathfrak{g}^*)^G\right)$ 的预量子算子恰好对应于乘以 $h(\lambda + a)$。

因此，我们将得到一个分解

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}} = \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathcal{H}^\lambda_{\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}}, \tag{41}$$

其中 $\mathcal{H}^\lambda_{\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}}$ 中的元素是支撑在 M_λ. 上的 $L \otimes \kappa_{\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}}$ 的分布截面。注意，由于 $\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}$ 是 G-不变的， $\mathcal{H}_{\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}}$ 将具有关于 G 的不可约表示的同型分解。

在由 G 不变的 K¨ahler 极化构成的无穷维族上，我们将得到一个 K¨ahler 量子化丛。我们猜想，这个丛可以扩展，从而包含上述在无限测地时间 $\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}$ 处产生的极化所对应的量子化。正如第 5.2 节和第 5.3 节中针对 $M = T^*K, G = K \times K$ 的情形所详述的，遵循[ADPW91], 的思路，扩展量子丛应配备一个平坦联络，其平行移动沿着由猜想 7.1 中的 h 生成的 Mabuchi 射线，通过广义相干态变换$C_{s,\ h}$来定义。这个 gCST 是由沿哈密顿流在虚时间方向上的解析延拓算子与一个量子算子复合而成，该哈密顿流定义了 Mabuchi 射线，具体如下。

ˆ令 h 为与 h 相关联的 Kostant–Souriau 预量子算子。我们还为h 关联一个定义如下的“量子”算子：

$$\mathcal{Q}(h) : \mathcal{H}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{P}}, \qquad \mathcal{Q}(h)\sigma := h(\lambda + a)\sigma \text{ if } \sigma \in \mathcal{H}^\lambda_{\mathcal{P}}.$$

gCST $C_{s,h}$ ： $\mathcal{H}_{\mathcal{P}} \to \mathcal{H}_{\mathcal{P}_s}$ 定义为

$$C_{s,h} := e^{s\hat{h}} \circ e^{-s\mathcal{Q}(h)}.$$

对于每个 $s \geq 0$，gCST 都是 G-等变的，因此特别保留各型分量 $\mathcal{H}^\lambda_{\mathcal{P}_s}$。

猜想 7.2. 对于每个 $\sigma \in \mathcal{H}^\lambda_{\mathcal{P}}$,

$$\lim_{s \to +\infty} C_{s,h}\sigma =: \sigma_\infty \in \mathcal{H}^\lambda_{\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}}.$$

此外，映射 $\mathcal{H}^\lambda_{\mathcal{P}} \ni \sigma \mapsto \sigma_\infty \in \mathcal{H}^\lambda_{\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}}$ 是 G-等变的。

猜想 7.2 意味着， $\mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ 的同型分解对应于 M 分解为谱子流形M_λ 的集合，并相应地对应于关于

M 在 T_{inv}. 作用下的可量子化辛约化集合。 G的每个表示，其最高权为 λ，最初以全纯截面的形式实现于 $H^0(M, L\otimes\kappa_{\mathcal{P}})$中，因此将与支撑在谱子流形 M_λ上的 $L\otimes\kappa_{\mathcal{P}_{\mu_{\mathrm{inv}}}}$的分布截面相关联。

Appendix A. Families of polarizations and convergence of half-form corrected quantizations

A.1. 极化的连续族。由于描述极化 $\mathcal{P}$的一种方式是通过拉格朗日子丛 $\mathcal{P}\subset T^*_{\mathbb{C}}M$，极化集合便具有自然拓扑——某个指标集 I 上的极化族，是由 $t\in I$索引的拉格朗日子丛 $\mathcal{P}_t$ 族；若它作为 $M\times I$上的向量丛是连续的，则该族也是连续的。

等价地，由于我们关注逐点或局部一致收敛，可以假设 $TM=M\times V$ 且 $TM_{\mathbb{C}}=M\times V_{\mathbb{C}}$。因此， $\mathcal{P}$完全由

$$M\to \mathrm{Gr}_k(V_{\mathbb{C}}),\quad x\mapsto[\mathcal{P}_x],$$

其中 $\dim V=2k$。因此，在局部上， $\mathcal{P}$嵌入到 $C(M, \mathrm{Gr}_k(V_{\mathbb{C}}))$中，这赋予 $\mathcal{P}$ 一个自然拓扑。现在假设一族 $\mathcal{P}_t$-极化函数 f_t （处于一般位置）收敛到一族 $\mathcal{P}$-极化函数 $\{f\}$ （处于一般位置），那么 df_t 的联合核收敛到 df的联合核。但这意味着，按照所述拓扑， $\mathcal{P}_t$ 收敛到 $\mathcal{P}$ 。

由于取外积是连续的，因此特别地，在这种情况下，相对典范丛 $\mathcal{K}_\Phi$（定义在 $M\times I$ 上，相对于投影 $\Phi: M\times I\to I$，其定义与（19）中完全相同）也构成一个连续的线丛族

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{K}_\Phi & \subset & \bigwedge^n T^*_{\mathbb{C}}M\\ \downarrow & & \downarrow\\ M\times I & = & M\times I\end{array}$$

它在复化的 n-形式的向量丛中移动（相对于为该族编索引的基底 I 而言是常量）。因此，族 $\mathcal{P}_\bullet$ 的半形式丛是定义在 $M\times I$ 上的复线丛 κ_Φ，并配有一个同构 $\kappa_\Phi^{\otimes 2}\cong\mathcal{K}_\Phi$。

在本文所讨论的情形中，所有极化的典范丛都可平凡化，这大大简化了讨论；因此我们在此不探讨更一般的情形。

由 I 参数化的极化族定义了一个量子态族 $\mathcal{Q}$，其中

$$\mathcal{Q}_t\subset\mathcal{H}^{-\infty}_{\mathcal{P}_t}(M)$$

是由某种有限能量条件定义的子空间族。若 $\mathcal{P}$ 是紧致流形上的一族光滑变化的 K¨ahler 极化，且解空间的维数（在此情形下为有限维）

保持不变，则根据椭圆正则性，这族解实际上来自一个向量丛 $\mathcal{Q} \to I$。

A.2. 量子态的收敛。极化族中量子态的收敛，应按照刚才所述的方式来理解：量子态族 $s_t \otimes \sqrt{\Omega_t} \in \mathcal{H}^{\infty}_{\mathcal{P}_t}(M)$ 收敛到 $s_\infty \otimes \sqrt{\Omega_\infty} \in \mathcal{H}^{-\infty}_{\mathcal{P}_\infty}(M)$，如果 M 可由开子集 $U \subset M$ 覆盖，在这些开子集上它们是极化乘积

$$(s_t \otimes \sqrt{\Omega_t})|_U = s_t^U \otimes \sqrt{\Omega_t^U} \in C^{\infty}_{\mathcal{P}_t}(U, L) \underset{C^{\infty}_{\mathcal{P}_t}(U,\mathbb{C})}{\otimes} C^{\infty}_{\mathcal{P}_t}(U, \kappa_{\mathcal{P}_t}),$$

$$(s_\infty \otimes \sqrt{\Omega_\infty})|_U = s_\infty^U \otimes \sqrt{\Omega_\infty^U} \in C^{-\infty}_{\mathcal{P}_\infty}(U, L) \underset{C^{\infty}_{\mathcal{P}_\infty}(U,\mathbb{C})}{\otimes} C^{\infty}_{\mathcal{P}_\infty}(U, \kappa_{\mathcal{P}_\infty}),$$

并且，利用固定的厄米结构在 L 上所提供的自然嵌入 $C^{\infty}(L) \hookrightarrow C^{-\infty}(L)$，我们有

$$\lim_{t\to\infty} s_t^U = s_\infty^U \in C^{-\infty}(U, L)$$

以及

$$\lim_{t\to\infty} (\sqrt{\Omega_t^U})^{\otimes 2} = (\sqrt{\Omega_\infty^U})^{\otimes 2} \in \bigwedge^{\frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} M} C^{\infty}(M, T^*_{\mathbb{C}}M).$$

致谢：我们感谢 W.D. Kirwin 分享未发表手稿 [KW14], ，其中首次确立了 Kirwin–Wu 极化存在性的证明，也首次讨论了其量子化及部分 Bohr–Sommerfeld 周期。我们对纤维化极化的更广泛背景、其 Bohr–Sommerfeld 条件和不变环面作用的核心作用，以及利用虚时间流实现收敛，均为本文的新内容。TB、JM 和 JN 得到了项目 UIDB/04459/2020 和 UIDP/04459/2020 的资助。

References

[ADPW91] S. Axelrod、S. Della Pietra 和 E. Witten。Chern–Simons 规范理论的几何量子化。 *J. Diff. Geom.*，33(3):787–902，1991年。 DOI: 10.4310/jdg/1214446565。[AGMM94] D. Alekseevsky、J. Grabowski、G. Marmo 和 P. W. Michor。李群或主丛的余切丛上的 Poisson 结构及其约化。 *J. Math. Phys.*，35(9):4909–4927，1994年。 DOI: 10.1063/1.530822。[BFMN11] T. Baier、C. Florentino、J. Mour˜ao 和 J. P. Nunes。从无穷远视角看环面 K¨ahler 度量、量子化与紧致热带合书。 *J. Diff. Geom.*, 89 3 411 454, 2011 DOI 10 4310 1335207374 ( ): – . : . / jdg/ .[Bou05] N. Bourbaki。 *Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 7–9*。Springer, 2005年。[DD87] P. Dazord 和 T. Delzant。动作-角变量的一般问题。*J. Diff. Geom.*, 26:223–251，1987年。 DOI: 10.4310/jdg/1214441368。

[DH82] J. J. Duistermaat 和 G. J. Heckman。约化相空间辛形式的上同调变化。 *Invent. Math.*, 69 259 268, : – . : . /BF .[Dix 1982 DOI 10 1007 01399506
77] J. Dixmier。 *C* -algebras*。北荷兰数学丛书，第15卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹-纽约-牛津，1977年。[Don99] S. Donaldson。对称空间、K¨ahler 几何与哈密顿动力学。载于:

Northern California Symplectic Geometry Seminar Amer. Math. Soc., , : – . . : . / *Transl. Ser. 2* 196 13 33 1999 DOI 10 1090 2 196 02
trans / / . [Duf82] M. Duflo。李群的酉表示的构造。载于:

Harmonic analysis and group representations, 129–221, Liguori, 那不勒斯, 1982年。[FMMN05] C. Florentino、P. Matias、J. M. Mour˜ao 和 J. P. Nunes。几何量子化、复结构与相干态变换。 *J. Funct. Anal.*,

221 2 303 322, 2005 DOI 10 1016 2004 10 021 ( ): – . : . /j.jfa. . . . [FMMN06] C. Florentino 、 P. Matias 、 J. M. Mour˜ao 和 J. P. Nunes。李群余切丛的 K

¨ *J. Funct.* ahler 量子化的 *Anal.* 234 1 180 198, 2006 DOI 10 1016 2005 12 007
BKS 配对。, ( ): – . : . /j.jfa. . . . [Fol95] G. B. Folland。 *A course in abstract harmonic analysis*。第二版。CRC 出版社，博卡拉顿，2016年。[GS84] V. Guillemin 和 S. Sternberg。 *Symplectic Techniques in Physics*。剑桥大学出版社，1984年。[Hal02] B. Hall。紧型李群的几何量子化与广义 Segal-Bargmann 变换。 *Comm. Math. Phys.*,

226 2 233 268, ( ): – . : . /s .[Hal 2002 DOI 10 1007 002200200607
94] B. Hall。紧李群的 Segal-Bargmann“相干态”变换。*J. Funct. Anal.*，122(1):103–151，1994年。DOI: 10.1006/jfan.1994.1064。[Hue08] J. Huebschmann。Kirillov 特征标公式、全纯 Peter-Weyl 定理与 Blattner-Kostant-Sternberg 配对。 *J. Geom. Phys.*,

58 7 833 848, 2008 DOI 10 1016 2008 02 004 ( ): – . : . / j.geomphys. . . . [HZ09] J. Hilgert 和 G. Zhang。紧李群上的 Segal-Bargmann 变换与 Weyl 变换。*Monatsh. Math.*，158(3):285–305，2009年。DOI: 10.1007/s00605-008-0080-0。[Kir04] A. A. Kirillov。 *Lectures on the Orbit Method*。美国数学学会，2004年。[Kir94] F. Kirwan。动量映射的凸性性质。III。 *Invent. Math.*,

77 3 547 552, 1984 DOI 10 1007 01388838 ( ): – . : . /BF . [KMN13a] W. Kirwin、J. Mour˜ao 和 J. P. Nunes。几何量子化中的复时间演化与广义相干态变换。 *J. Funct. Anal.*,

265 8 1460 1493, 2013 DOI 10 1016 2013 06 021 ( ): – . : . /j.jfa. . . . [KMN13b] W. Kirwin 、 J. Mour˜ao 和 J. P. Nunes。K¨ahler 结构的退化与环面簇的半形式量子化。 *J. Symplectic Geom.*,

11 4 603 643, ( ): – . : . /JSG. .v . 2013 DOI 10 4310 2013 11 4 4
n .a .[KMN14] W. Kirwin、J. Mour˜ao 和 J. P. Nunes。相干态变换与 Mackey–Stone–von Neumann 定理。 *J. Math. Phys.*，55，102101，2014年。 DOI: 10.1063/1.4896816。[KMN 16] W. Kirwin、J. Mour˜ao 和 J. P. Nunes。环面流形量子化中的复辛同胚与伪 K¨ahler 岛。 *Math. Annalen*,364 1 28, 2016 DOI 10 1007 00208 015 1205 0 :
– . : . /s - - - . [Kno11] F. Knop。无重数哈密顿流形的自同构。

J. Am. , ( ): – . : . /S - - - - *Math. Soc.* 24 2 567 601, 2011 DOI 10 1090 0894 0347 2010 00686 8
. [Kno97] F. Knop。哈密顿流形的 Weyl 群，1997年 https://arxiv.org/abs/dg-ga/ 9712010,
[14] KW W. Kirwin 和 S. Wu。紧李群的动量空间与 Peter–Weyl 定理。未发表手稿，2014年。

[KY68] J. Kajiwara 和 M. Yoshida. 关于柯西-黎曼方程的注记。 *Mem. Fac. , , , : – . : . / Sci. Kyushu Univ. Ser. A* 22 18 22, 1968 DOI 10 2206 22 18 kyushumfs. . . [Lan17] J. Lane. 凸性与 Thimm 技巧。 *Transformation Groups*, 23(4):963– 987, 2017. DOI: https://doi.org/10.1007/s00031-017-9436-7. [Lip80] R. L. Lipsman. 余幂零根李群上的轨道理论与调和分析。 *J. Math. Pures Appl. (9)*, 59(3):337–374. [Lis87] W. Lisiecki. 对称空间上的 Blattner-Kostant-Sternberg 配对与傅里叶变换。载于 *Proceedings of the Winter School on Geometry and Physics (Srní, 1987) Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* 16 173 189, 1987 , , : – . [LM87] P. Libermann 和 C.-M. Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics* 1987 . Springer, 多德雷赫特, . [LW22] N. C. Leung 和 D. Wang. 具有 T-对称性的 K¨ahler 度量空间中的测地射线。2022. https://arxiv.org/abs/2211.05324. [Mab87] T. Mabuchi. 紧 K¨ahler 流形上的一些辛 *Os- aka J. Math.* 24 2 227 252, 1987 几何。I. , ( ): – . [Mac80] I. G. Macdonald. 紧李群的体积。 *Invent. Math.*, 56 93 95, : – . : . /BF .[MN15] J. M. Mour˜ao 和 J. P. Nunes. K¨ahler 度量空间上的复化解析哈密顿流与测地线。 *Int. Math. Res. Not.*, 20:10624– 10656, 2015. DOI: 10.1093/imrn/rnv004. [MNP] J. M. Mour˜ao, J. P. Nunes 和 A. Pereira. 混合环面极化中的几何量子化与虚时间流。进行中。[Mun01] I. Mundet i Riera. 光滑群作用在线丛上的提升。 *Bull. Lond.* , ( ): 1980 DOI 10 1007 01392542 *Math. Soc.* 33 3 351 361, 2001 DOI 10 1017 0024609301007937 - . : . /S . [Nee00a] K.-H. Neeb. 表示论与凸性。 *Transform. Groups*, 5 4 325 350, 2000 DOI 10 1007 01234796 ( ): – . : . /BF . [Nee00b] K.-H. Neeb. *Holomorphy and convexity in Lie theory*. De Gruyter 数学论丛, 28。 Walter de Gruyter & Co., 柏林, 2000. DOI: 10.1515/9783110808148.[Nir58] L. Nirenberg. 一个复 Frobenius 定理。 *Sem. analytic functions* 1:172- 189, 1958. [Ort03] J.-P. Ortega. 奇异对偶对。 *Differ. Geom. Appl.*, 19(1):61–95, 2003. DOI: 10.1016/S0926-2245(03)00015-9.[Per22] A. Pereira. *Applications of flows in imaginary time to quantization*. 博士论文, IST, 里斯本, 2022. [Sem92] S. Semmes. 复 Monge-Amp`ere 与辛流形。 *Amer. J. Math.* 114 3 495 550, 1992 DOI 10 2307 2374768 : . / . [Ser59] J.-P. Serre. 紧李群的 K¨ahleriens 齐性空间的线性表示。 *Sémin. Bourbaki 6 (1953/54), Exp. No. 100*, 1959. [Ver82] M. Vergne. 半单李群的 Poisson-Plancherel 公式。 *Ann. of* , ( ): – . : . / . [Woo91] *Math. (2)* 115 3 639 666, 1982 DOI 10 2307 2007016 N. Woodhouse. *Geometric Quantization*. 牛津大学出版社, 1991.

T. Baier,

Center for Mathematical Analysis Geometry and Dynamical Sys- , , „
tems Instituto Superior Técnico Lisbon Portugal.
Email address: thomas.baier@tecnico.ulisboa.pt

J. Hilgert, Department of Mathematics, Paderborn University, Paderborn, Germany.
Email address: joachim.hilgert@upb.de

O. Kaya, Department of Mathematics, Galatasaray University, Istanbul, Turkey.
Email address: oguzabel@gmail.com

J. Mourão, Department of Mathematics and Center for Mathematical Analysis Geometry and Dynamical Systems Instituto Superior Técnico Lis- , 、 、 ,
bon Portugal.
Email address: jmourao@tecnico.ulisboa.pt

J. P. Nunes, Department of Mathematics and Center for Mathematical Analysis Geometry and Dynamical Systems Instituto Superior Técnico Lis- , 、 、 ,
bon Portugal.
Email address: jpnunes@tecnico.ulisboa.pt