arXiv:2301.10930v1 [hep-th] 26 Jan 2023

约当代数中的渐近交换性

A. Schwarz 加利福尼亚大
学戴维斯分校数学系，美国加利
福尼亚州戴维斯市，邮编
95616，schwarz
@math.ucdavis.edu

摘要

我们估计约当代数中二次算子 Q_a 的交换子。这些估计可用于构建以约当代数表述的量子场论中的散射理论。

关键词：约当代数；二次算子；散射理论

量子理论的标准代数方法基于带对合的结合代数。要在这种方法中发展散射理论，应确定平移群在代数上的作用，并施加某些渐近交换性（玻色子的情况）或渐近反交换性（费米子的情况）条件。在近期提出的量子理论几何方法（[1]-[5]）中，约当代数比结合代数更为自然。 [5] 中证明了，只要二次算子 $Q_a = 2R_a^2 - R_{a^2}$ 渐近交换，就可以在约当代数框架内发展散射理论。（这里 R_a 表示乘法算子： $R_a(b) = b \circ a.$ ）

我们证明，在某些条件下，算子 Q_a 具有渐近交换性。 [5] 中利用这一结果证明了（包含）散射矩阵的存在性。（本文将作为附录发表于 [5]。）

我们先讨论一个简单情形：Jordan 代数 $\mathcal{B}$ 是由带有对合 * 的结合代数 $\mathcal{A}$ 的自伴元构成的集合，其运算为 $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$。假设 $\mathcal{A}$ 是一个 C*-代数，则称 $\mathcal{B}$ 为 JC-代数。容易验证，在当前情形下，我们有$Q_a = l(a)r(a)$，其中 $l(a)$ 和 $r(a)$ 是由 a 分别从左侧和

右侧乘法所定义的算子，作用于 $\mathcal{A}$.。利用关系 $[l(a)\ l(b)] = l([a,b])\ [r(a)\ r(b)] = r([b,a])$ 和 $Q_aQ_b = l(ab)r(ba)\ Q_bQ_a = l(ba)r(ab)$，我们得到如下估计

$$|||[Q_a, Q_b]||| \leq 2||a|| \cdot ||b|| \cdot |||[a,b]|||. \tag{1}$$

同样，可以用 a, b 的反交换子（或等价地，用 Jordan乘积 $a \circ b$）来估计交换子 $[Q_a, Q_b]$：

$$|||[Q_a, Q_b]||| \leq 2||a|| \cdot ||b|| \cdot |||[a,b]_+|| = 4||a|| \cdot ||b|| \cdot ||a \circ b||. \tag{2}$$

证明几乎完全相同：我们应使用关系 $l(ab) = -l(ba) + l([a,b]_+)\ r(ba) = -r(ab) + r([a,b]_+)$。

设交换李群（平移群）通过保持对合的自同构 $\alpha(\mathbf{x}\ \tau)$ 作用于 $\mathcal{A}$；我们采用记号 $\alpha(\mathbf{x}\ \tau)a = a(\mathbf{x}\ \tau)$。那么同一群也作用于 $\mathcal{B}$；它将算子 Q_a 变换为算子 $Q_{a(\mathbf{x},\tau)}$.

如果元素 $a, b \in \mathcal{A}$ 渐近交换，我们称它们满足

$$[a(\mathbf{x},\tau), b] \leq \rho(\mathbf{x},\tau)$$

其中，当 x 较大时，ρ 很小（为明确起见，我们假设 ρ 趋于零的速度快于 $||\mathbf{x}||$ 的任意次幂，并且关于 τ 至多呈多项式增长）

如果关于反交换子满足类似的关系，则元素 $a, b \in \mathcal{A}$ 渐近反交换

$$[a(\mathbf{x},\tau), b]_+ \leq \rho(\mathbf{x},\tau).$$

由 (1)、(2) 可知，在两种情况下，算子 Q_a, Q_b 渐近交换：

$$|||[Q_a(\mathbf{x},\tau), Q_b]||| \leq 2||a|| \cdot ||b||\rho(\mathbf{x},\tau).$$

我们希望将上述关系推广到 Jordan-Banach代数（JB-代数）的情形。以下论述促使我们考虑这种推广：

a) 如果 a, b 是 JB-代数 $\mathcal{B}$ 和 $a \circ b = 0$ 的两个元素，那么算子 Q_a 和 Q_b 交换 [6], [7]。

b) 如果 a, b 是 JB-代数 $\mathcal{B}$ 的两个元素，且算子 R_a, R_b 交换，那么算子 Q_a 和 Q_b 也交换 [8]。

称 a、$b \in \mathcal{B}$ 算子交换，当且仅当算子 R_a 与 R_b 交换。对于 JB-代数，文献 [8] 已证明，a、b 的算子交换性意味着

a^2 算子与 b 和 b^2 交换（类似地， b^2 算子与 a交换）。这意味着算子 Q_a 与 Q_b 交换。

设交换李群（平移群）通过自同构 $\alpha(\mathbf{x}\ \tau)$ 作用于 $\mathcal{B}$ 。同一群作用于算子 R_a 和 Q_a，将它们变换为算子 $R_{\alpha(\mathbf{x},\tau)a}$ 和 $Q_{\alpha(\mathbf{x},\tau)a}$.。若 $|||[R_{\alpha(\mathbf{x},\tau)a}, R_b]|| < .$，我们称 a、$b \in \mathcal{B}$ 渐近算子交换。自然会猜想，在这种情况下，算子 Q_a、Q_b 也渐近交换，即 $|||[Q_{\alpha(\mathbf{x},\tau)a}, Q_b]|| < \rho(\mathbf{x}\ \tau)$。[8] 中的方法不足以证明这一猜想。不过，若算子对（a， b）、（a^2， b）、（a， b^2）、（a^2， b^2）渐近算子交换，那么显然 Q_a、Q_b 渐近交换。这个结论足以满足我们所考虑的应用需求。

当平移群通过结构变换作用时，同样的结论在更一般的情形下也成立： $\alpha(\mathbf{x}\ \tau) \in Strg(\mathcal{B})$，其中 $Strg(\mathcal{B})$ 表示结构群（由自同构和可逆算子 Q_a 生成的群）。

我们将结论 a) 推广如下：

假设 JB-代数 $\mathcal{B}$ 中两个元素的 Jordan乘积 $a \circ b$ 的范数为 $\leq \epsilon.$。那么

$$|||[Q_a, Q_b]||| \leq k(||a||, ||b||)\sqrt{\epsilon} \tag{3}$$

其中 $\epsilon \geq 0$，而 k 是多项式函数

为证明这一结论，我们使用如下定理：每个 JB-代数都可以视为 JC-代数与纯例外 JB-代数的直和的子代数。（这是因为 JB-代数 $\mathcal{B}$ 是 JBW-代数 $\mathcal{B}^{**}$ 的子代数，而每个 JBW-代数都是 JW-代数与纯例外 JBW-代数的直和；定义和表述见 [8]，详细内容及证明见 [9]。）显然，若一个代数满足该结论，则其子代数也满足该结论。该结论已对 JC-代数证明（2）。因此，只需对简单例外 JB-代数证明该结论（这样便可推出它对任意纯例外代数成立）。为给出证明，我们稍微修改了 [7] 中针对 $\epsilon = 0.$ 的论证。

关于简单例外JB-代数（阿尔伯特代数），我们只需要知道以下方程

$$a^3 = t(a)a^2 - s(a)a + n(a) \tag{4}$$

它由阿尔伯特代数中的任意元素 a 满足。（这里， t、s、n 分别是阿尔伯特代数上的线性函数、二次函数和三次函数。）

首先请注意，对于任意 JB-代数 $\mathcal{B}$

$$[Q_a, Q_b] = [R_{a^2}, R_{b^2}] + o_1$$

其中 a、$b \in \mathcal{B}$、$||o_1|| \leq \epsilon f(||a||, ||b||)$。（在 [7] 中，这个公式去掉 o_1 项后可推导得出 $a \circ b = 0.$。我们采用相同的计算方法，但不忽略含有 $a \circ b$ 的项，而是利用 $||a \circ b|| \leq \epsilon.$ 对其进行估计。推导其他公式时，我们也采用相同的步骤。）下一步是公式

$$[Q_a, Q_b]c = [R_{a^2}, R_{b^2}]c + o_1 c = (a^2, c, b^2) + o_1 c = -2(a^2 \circ b, c, b) + o_1 c$$

其中 $c \in \mathcal{B}$ and (x, y, z) 表示结合子 $(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z \qquad\qquad)$.

由 (4) 可得

$$(a^2 \circ b, c, b) = -s(a, b)(a, c, b) + o_2$$

其中 $s(a, b)$ 表示与二次型 $s(a)$ 对应的双线性形式，且 $||o_2|| \leq \epsilon g(||a||, ||b||)||c||$. (参见 [7]，其中给出了 $\epsilon = 0.$ 情形下的推导) 代入$c = a$，我们得到

$$s(a, b)(a^2 \circ b) = o_3$$

其中 $||o_3|| \leq \epsilon h(||a||, ||b||)$。我们看到，要么 $|s(a, b)| \leq ||o_3||^{\frac{1}{2}}$，要么 $||a^2 \circ b|| \leq ||o_3||^{\frac{1}{2}}$.。在第一种情况下

$$||[Q_a, Q_b]|| \leq 2||o_3||^{\frac{1}{2}}||a||||b|| + \epsilon(g(||a||, ||b||) + ||o_1||.$$

在第二种情况下

$$||[Q_a, Q_b]|| \leq 4||o_3||^{\frac{1}{2}}||b|| + ||o_1||.$$

在这两种情况下，我们都得到了所需的估计。

我们再次考虑一个交换李群（平移群），它通过自同构或更一般的结构变换α (x τ)作用于 JB-代数 $\mathcal{B}$。我们假设，当 x 很大时，(α(x τ)a) $\circ$b 很小。（如果 $\mathcal{B}$ 是与 C*-代数 $\mathcal{A}$ 对应的 JC-代数，这等价于元素 a、b 在 $\mathcal{A}$.中渐近反交换。）于是由 (3) 可知，Q_a 和 Q_b 渐近交换：

若 $||(\alpha(\mathrm{x}\ \tau)\mathrm{a}) \circ \mathrm{b}|| \leq \rho(\mathrm{x}\ \tau)$，则 $||[Q_{\alpha(\mathrm{x},\tau)a}, Q_b]|| \leq k\sqrt{\rho(\mathrm{x}\ \tau)}$。

致谢 感谢 I. Shestakov 与我进行了有益的讨论。

参考文献

[1] Schwarz, A. (2020). 量子理论的几何方法。SIGMA. 对称性、可积性与几何：方法与应用，16，020。

[2] Schwarz, A. (2021) 量子理论的几何与代数方法。《核物理B》, 973, p.115601. 量子物理 2102.09176,

[3] Schwarz, A., 2021. 量子理论代数方法中的散射。结合代数。arXiv 预印本 arXiv:2107.08553.[4] Schwarz, A., 2021. 量子理论几何方法中的散射。arXiv 预印本 arXiv:2107.08557[5] Schwarz, A., 2023. 量子理论代数方法中的散射。约当代数，arXiv 预印本 arXiv: 2301.10446[6] Anquela, Jos´e, Teresa Cort´ es, and Holger Petersson.「约当代数中的交换 U_a-算子。」《美国数学会会刊》366.11 (2014): 5877-5902.[7]Shestakov, Ivan.「关于约当代数中交换的 U-算子。」《非结合与非交换代数及算子理论》。Springer, Cham, 2016. 105-109.[8] van de Wetering, John.「约旦算子代数中的交换性。」《纯粹与应用代数杂志》(2020): 106407.[9] Hanche-Olsen, Harald, and Erling Stormer. 约旦算子代数。第21卷。Pitman 高级出版计划, 1984.