arXiv:2301.10952v1 [math.CT] 26 Jan 2023

数学的无限范畴理论是不一致的

关于 Michael Ernst 的《无限范畴理论的前景：完成尚未完成的工作》的讨论 [3]

在印第安纳大学布卢明顿分校逻辑研讨班上的报告

William Wheeler

1. 希望与努力

范畴论的支持者长期以来一直希望摆脱集合论的限制，将数学建立在一种不受限制的范畴论之上。在这种范畴论中，大范畴——例如由所有群构成的群范畴 Grp、由所有拓扑空间构成的拓扑空间范畴 Top，以及由所有范畴构成的范畴范畴 Cat——都将成为（一等）实体，而不只是类。佩内洛普·马迪的综述论文《我们希望基础做什么？比较集合论、范畴论和单值方法》，[12], 第17–22页，对此进行了概括性讨论。

具体而言，1966年，William Lawvere [7] 提出了作为数学基础的所有范畴之范畴 Cat（CCAF）。Colin McLarty 在 1991 [13]中改进了这一方法。CCAF 是对所有小范畴之范畴性质的公理化，即其对象和态射是集合而非真类的范畴。此前，1964年，Lawvere [6] 提出了集合范畴的初等理论（ETCS），作为数学的一种可能基础。此后，Colin McLarty 也对其作了改进 [14]。（关于以 ETCS 为基础建立数学这一提议的最新阐述，见 [9]。）1969 年，Solomon Feferman [4] 提出了一个 S 基于 Willard van Orman Quine 的新基础 [16]的系统。桑德斯·麦克莱恩 [11] 提出了“一宇宙”方法，其基础是格罗滕迪克宇宙。

除了提出系统 S之外，Feferman [4] 还提出了三项要求，公理理论 S 的范畴论必须满足这些要求，才能成为面向数学的无限制范畴论：

（R1）构造给定类型的所有结构所组成的范畴，例如由所有群构成的群范畴 Grp、由所有拓扑空间构成的范畴 Top，以及由所有范畴构成的范畴 Cat，即成为无限制的。（R2）构造从一个范畴 A 到另一个范畴 B的所有函子所组成的范畴 B^A，其中 A 和 B 可以是任意两个范畴。（R3）确立自然数 N的存在，并对对象 a、b、.....以及集合 A、B、.....执行熟悉的运算，包括构造 $\{a, b\}$、$(a、b)$、$A \cup B$、$A \cap B$、$A - B$、$A \times B$、B^A、$\bigcup A$、$\bigcap A$、$\prod_{x \in A} B_x$等。

2013年，Feferman [5] 将一项原本隐含的要求明确列为一项要求：

(R4）证明 S 相对于当前公认的集合论体系是一致的 y.

他还在要求（R3）的常见运算列表中加入了这样一种运算：从集合 A 及其上的等价关系 E，得到规范运算 p： $A \to A/E$ 其中 p（x）是x 关于 E的等价类。

然而，这些努力最终都未能成功。1992年，McLarty [15] 指出，任何基于 Quine 的新基础的理论，例如 Feferman 在 [4] 中的体系 S，都无法对笛卡尔积封闭。范畴论 CCAF 和 ETCS 并非无限制的，即不满足（R1）。Mac Lane 的“一个宇宙”方法等价于存在一个正则不可达基数，因此不满足要求（R4）。

尽管如此，Feferman 在 2013 [5] 中仍然对无限范畴的公理化理论抱有希望，即满足要求 (R1)–(R4) 的理论。

2. Denouement

但是，2015 年，Michael Ernst [3] 证明：

定理 2.1. 如果一个 范畴公理化理论满足要求 (R1)–(R3)，那么它是不一致的 .

他的证明是针对某个特定范畴 U 的类似证明；该证明使用康托尔对角线法，证明不存在包含所有集合的集合 $\mathcal{S}$。

2.1. 集合的情况。

定理 2.2。2.2（ZF）不存在包含所有集合的集合。

证明。假设存在一个包含所有集合的集合 $\mathcal{S}$。那么，根据幂集公理，将存在它的指数对象 $2^{\mathcal{S}}$，即将其幂集视为从 $\mathcal{S}$ 到集合 $2 = \{0 = \emptyset, 1 = \{\emptyset\}\}$的特征函数的集合。对于每个集合 C，其特征函数为

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in C \\ 0 & \text{if } x \notin C \end{cases} .$$

步骤 1：（康托尔对角线法）假设 $f: \mathcal{S} \to 2^{\mathcal{S}}$。令 $A = \{x \in \mathcal{S} | (f(x))(x) = 0\}$。根据分离公理， A是一个集合，因此 $A \in \mathcal{S}$。假设存在一个集合 B，使得 $f(B) = \chi_A$。那么

$$\chi_A(B) = 1 \leftrightarrow B \in A \leftrightarrow (f(B))(B) = 0 \leftrightarrow \chi_A(B) = (\chi_A)(B) = (f(B))(B) = 0 ,$$

其中，最后一个等式成立是因为 $f(B) = \chi_A$。但是， $\chi_A(B) = 1 \leftrightarrow \chi_A(B) = 0 \neq 1$ 是不可能的。因此，不存在集合 B 使得 $f(B) = \chi_A$。所以， f 不是满射，即不是映上的。

步骤 2：存在一个映射 $f: \mathcal{S} \to 2^{\mathcal{S}}$，它是一个满射，即满上的。具体而言，定义 $F: \mathcal{S} -> 2^{\mathcal{S}}$，使得 $F(x) = \chi_x$。因为对于每个 $g \in 2^{\mathcal{S}}$， $g = \chi_{\{x:g(x)=1\}}$ 和 $\{x: g(x) = 1\}$ 是一个集合，因此也是 $\mathcal{S}$ 的一个成员，

$$F(\{x : g(x) = 1\}) = \chi_{\{x:g(x)=1\}} = g .$$

因此， F 是一个满射，即满上的。

步骤 1 和步骤 2 相互矛盾。因此，不可能存在一个包含所有集合的集合 $\mathcal{S}$。 □

2.2. 反身有向图的 RGraph 范畴。

Ernst 运用上述类型论证所针对的范畴，是反身有向图的 RGraph 范畴。 [2] 讨论了这个范畴。

定义 2.3. 2.3 反身有向图（r 图）由一组顶点和一组（有向）边组成，

(1) 每条边都有唯一的源顶点和唯一的目标顶点；(2) 每个顶点 v 都有一条指定的边 l_v，使得 l_v 的源顶点和目标顶点均为 v。

定义 2.4。2.4 从 r 图 G 到 r 图 H 的 r 图态射 M 是一个映射，它将 G 的顶点映射到 H 的顶点，并将 G 的边映射到 H 的边，且满足

(1) 对于 G 中源顶点为 u 且目标顶点为 v的每条边 e， $M(e)$ 都是 H 中的一条边，其源顶点为 $M(u)$，目标顶点为 $M(v)$；(2) 对于 G中的每个顶点 v， $M(l_v) = l_{M(v)}$。

命题 2.5。r 图及 r 图态射构成一个 RGraph 范畴，其中恒等 r 图态射为恒等箭头。

证明。（1）每个 r 图态射都有唯一的定义域反身有向图和唯一的值域反身有向图。（2）r 图态射的复合是 r 图态射。（3）对于每个有向图 G，将 G 的每个顶点映射到其自身、将 1_G G 的每条边映射到 G 其自身的恒等 r 图态射具有所需的范畴性质。

□

命题 2.6。RGraph 范畴本身是一个 r 图，其对象作为顶点，其态射作为边，并以恒等 rgraph 态射作为指定边。

2.3. RGraph 范畴的范畴性质。

首先要从范畴论的角度确定 r 图的顶点和边。

引理 2.7. RGraph 有一个终对象 1，它是一个 r 图，其顶点为（符号）$!_1$，唯一的边是指定边，其源顶点为 $!_1$，目标顶点为 $!_1$。

证明. 对任意 r 图 G，从 G 到 1 的唯一 r 图态射是这样的映射：将 G 的每个顶点映射到 $!_1$，并将 G 的每条边映射到 1 中源顶点和目标顶点均为 $!_1$ 的边。□

记号 2.8. 从 r 图 G 到终对象 1 的唯一 r 图态射记作 at $!_G$。

对于 r 图 G 的每个顶点 v，都存在唯一一个从终对象 1 到 G 的 r 图态射，它将顶点 $!_1$ 映射到 V，并将 1 的唯一一条边映射到 G 中源顶点和目标顶点均为 v 的指定边 l_v。反过来，每个从终对象 1 到 G 的 r 图态射，都将唯一的顶点 v 作为 $!_1$ 的像，并将指定边 l_v 作为 1 中唯一一条边的像。

因此，我们可以将 G 的顶点与从终对象 1 到 G 的 r 图态射等同起来。在范畴论中，从范畴的终对象出发的态射称为该范畴的全局元素。

定义 2.9。2.9 设 E 为 r 图，其顶点为 $\int$ 和 $\sqcup$，指定边为 $l_\int$（其源顶点和目标顶点均为 $\int$）以及 $l_\sqcup$（其源顶点和目标顶点均为 $\sqcup$）；另有一条边 1_E，其源顶点为 $\int$，目标顶点为 $\sqcup$。

对于 r 图 G 的每条边 e，都存在唯一一个从 E 到 G 的 r 图态射，将边 1_E 映射到 e。反过来，每个从 E 到 G 的 r 图态射都确定了 G 的唯一一条边，即 1_E 的像。

因此，我们可以将 r 图 G 的边与从 E 到 G 的 r 图态射等同起来。

定义 2.10. 2.10

(1) 若 r 图 G 满足：对每一对顶点 u 和 v，恰有一条源顶点为 u、目标顶点为 v 的边，则称其为完备的；也就是说，等价地，存在唯一一个从 r 图 E 到 G 的 r 图态射 e，使得 $e(\int) = u$ 且 $e(\sqcup) = v$。(2) 若 r 图 G 满足：对每一对顶点 u 和 v，它们之间恰有一条边，则称其为竞赛图；也就是说，存在唯一一个从 r 图 E 到 G 的 r 图态射 e，使得 $e(\int) = u$ 且 $e(\sqcup) = v$，或者 $e(\int) = v$ 且 $e(\sqcup) = u$。(3) 若 r 图 G 的边仅为其各顶点的指定边，则称其为离散的。

原理 2.11. 2.11（离散图选择公理）若 f 是从 G 到离散 r 图 D的 r 图态射，则存在一个从 D 到 G 的 r 图态射，使得 $f \circ h \circ f = f$。

我们将 假设离散图选择公理在 RGraph 范畴中成立 .

引理 2.12. RGraph 范畴有积。

引理 2.13. RGraph 范畴有指数对象。

定义 2.14. 2.14 RGraph 范畴的真值图是一个具有两个顶点真和假的图，其中一个指定边 l_{true} 的源顶点和目标顶点均为真，一个指定边 l_{false}的源顶点和目标顶点均为假；此外还有一条源顶点和目标顶点均为真的边、一条源顶点为真且目标顶点为假的边，以及一条源顶点为假且目标顶点为真的边。

引理 2.15。前面定义的真值图是 RGraph 范畴中的一个子对象分类器。

观察 2.16。RGraph 范畴是一个托普斯。

2.4. 矛盾。

定义 2.17。2.17 将 r 图 K_2 定义为具有顶点 ∞ 和 $\in$的完全 r 图；其指定边 l_∞的源顶点和目标顶点分别为 ∞，而边 $l_\in$的源顶点和目标顶点分别为 $\in$；另有一条唯一的边，其源顶点为 ∞，目标顶点为 $\in$；以及一条唯一的边，其源顶点为 $\in$，目标顶点为 ∞。

回想一下，将范畴 RGraph 视为一个 r 图时，记作 U。
r 图 K_2^U将是用于推导矛盾、类似于定理 2.2 证明中的 2^S 的 r 图。

定理 2.18. 2.18 矛盾：
(1) 不存在一个 r 图态射 $F\colon U \to K_2^U$，使其对全局元素是满射。(2) 存在一个 r 图态射 $F\colon U \to K_2^U$，使其对全局元素是满射。

证明。（证明概要；）
步骤 1：第一个断言的证明用到了 Lawvere 在 1969 年发表的论文《对角论证与笛卡尔闭范畴》中的推论 1.2 [8]:

> 定理 2.19。（Lawvere）在任意托普斯 $\mathcal{C}$ 中，以下结论成立：对于任意 $\mathcal{C}$-对象 B，若存在一个 $\mathcal{C}$-箭头 $f\colon B \to B$，使得 $f \circ b \neq b$ 对所有 $b\colon 1 -> B$ 都成立，那么不存在任何 $\mathcal{C}$-对象 A，使得存在一个对全局元素满射的 $\mathcal{C}$-箭头 $A \to B^A$。
>
> 令 $p_{K_2}\colon K_2 \to K_2$ 为置换 K_2 的顶点的 r 图态射。则 p_{K_2} 满足：对任意 $b\colon 1 -> K_2$，都有 $p_{K_2} \circ b \neq b$。根据 Lawvere 定理，不存在对全局元素满射的 RGraph 态射 $F\colon U \to K_2^U$。

步骤 2：这一步要长得多。我们需要两个引理；它们在 Ernst 的论文 [3] 的附录中得到了证明。

> 引理 2.20. 2.20（指数完备性）如果 G 是一个完备的 r 图，那么对于任意 r 图 H， G^H 都是完备的。
>
> 由于 r 图 K_2 是完备的， K_2^U 也是完备的；也就是说，对于 K_2^U 的每一对顶点 u 和 v，都存在一条唯一的边，其源顶点为 u，目标顶点为 v。将这条唯一的边记为 $\prec u, v \succ$。
> 引理 2.21. 2.21（竞赛图）对于任意 r 图 G，对于 K_2^G 的每个顶点 x，都存在一个竞赛图 Q_x，它是 K_2^G 的子有向图。此外，对于不同的顶点 x 和 y， $Q_x \neq Q_y$。
> 引理 2.22. 2.22（强化竞赛图）对于任意 r 图 G，都存在一个映射 $I\colon K_2^G \to U$，使得对于 K_2^G 的每个顶点 x， $I(x)$ 都是 K_2^G 的一个子有向图竞赛图。此外，对于不同的顶点 x 和 y， $I(x) \neq I(y)$。
>
> 令 J 为一个映射 I，用于 $G = U$, $J\colon K_2^U \to U$。
> 令 v_{other} 为 K_2^U的一个顶点。
> 定义一个 R 图态射 $F\colon U \to K_2^U$，使得
> $F(x) = \begin{cases} y \text{，当且仅当 } x \text{ 是 } U \text{ 的一个顶点，并且对于 } K_2^U\text{的某个顶点 } y\text{，} x = J(y) \\ v_{\text{Other}}\text{，当且仅当 } x \text{ 是 } U \text{ 的一个顶点，且不存在 } K_2^U\text{的顶点 } y \text{ 使得 } x = J \end{cases}$
> $)$
> $(y$
> $\prec F(u)\ F(v) \succ$，当 e 是边，且源顶点为 u、目标顶点为 v 时。对于 K_2^U中的每个顶点 y， $F(J(y)) = y$。因此， F 对全局元素是满射。
>
> □

定理 2.23. 2.23 如果一个范畴公理化理论满足 Feferman 的要求 (R1)、(R2) 和 (R3)，那么它是不一致的。

证明。如果一种范畴公理化理论满足 Feferman 的要求 (R1)、(R2) 和 (R3)，那么它就能构造出 RGraph 范畴，并证明前述定理 2.18，即证明 $\neg\varphi \wedge \varphi$，其中 φ 是陈述“存在一个 r 图态射 $F\colon U \to K_2^U$，它对全局元素是满射”。因此，该理论是不一致的。□

3. Going Forward

Ernst 指出，在他的论文发表之前，人们曾批评各种有限基础，尤其是 ZFC，认为它们未能为无限范畴论提供基础。然而，由于他证明了无限范畴论是不一致的，因此根本不可能有任何理论能为其提供基础。这也消除了对 ZFC 及类似基础的这项批评。

佩内洛普·马迪在其富有洞见的论文《我们希望基础做什么》 [12] 中分析了有关数学基础的各种立场，并得出结论：基础并没有一个界定明确的概念，但基础应该发挥什么作用，却有明确的概念。她认为，处理基础问题的富有成效的方式，是考察基础应该或可能发挥什么作用，以及它可能带来的益处。对于集合论，她指出其益处包括：它是“一个包罗万象的舞台，现代数学的各个领域都能并肩展开”，各领域之间可以相互借鉴；它提供“衡量何为合法构造或证明的共同标准”；它可以评估理论与方法中的不一致性风险；还可以充当“元数学围场，使形式化技术能够一次应用于整个数学”。鉴于 Ernst 已证明不受限制的范畴论是不一致的，马迪认为范畴论的益处在于提供“关键指导”，以“引导数学家关注重要的 [数学] 结构，并严格地依据其在数学上不可或缺的特征来刻画它们……但仅限于大致具有代数性质的数学分支。”谈及后一点时，她指出，桑德斯·麦克莱恩本人（见 [10], 第 407 页）曾说：“范畴和函子在拓扑学和部分代数领域中无处不在，但它们与大多数分析学领域尚未建立良好的联系。”对于较新的单值基础，马迪认为它的主要益处是证明检验。她认为，所有这些益处都很重要，但没有任何一种“基础”能够独自提供全部益处。

约翰·鲍德温 [1], 在马迪的工作基础上提出，鉴于范畴论所提供的根本指引，不应将范畴论作为基础与集合论相比较，而应将其与模型论相比较，视其为开展数学研究的脚手架。他指出，其他脚手架还包括描述集合论，它组织了“许多可由波兰空间刻画的主题”，以及“朗兰兹纲领，它拓展了外尔的罗塞塔石碑，以统一数论与调和分析（及二者之间的领域）”。

References

[1] 约翰·鲍德温。《探索宽广的舞台》。第1–21页，2021年。[2] R. Brown、I. Morris、J. Shrimpton 和 C. D. Wensley。《图的态射之图》。 *Electron. J. Combin.*，15(1)：文章1，共28页，2008年。[3] Michael Ernst。《无限范畴论的前景：完成尚待完成之事》。 *Rev. Symb. Log.*，8(2)：306–327，2015年。[4] Solomon Feferman。《范畴论的集合论基础》。载于 *Reports of the Midwest Category Seminar III*，第201–247页。施普林格，柏林，1969 年。[5] Solomon Feferman。《无限范畴论的基础：尚待完成之事》。 *Rev. Symb. Log.*，6(1)：6–15，2013年。[6] F. William Lawvere。《集合范畴的初等理论》。 *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*，52：1506–1511，1964年。[7] F. William Lawvere。《以范畴的范畴作为数学基础》。载于 *Proc. Conf. Categorical Algebra (LaJolla, Calif. 1965)*，第1–20页。施普林格，纽约，1966年。[8] F. William Lawvere。《对角论证与笛卡尔闭范畴》。载于 *Category Theory Homology Theory and theirApplications II (Battelle Institute Conference, Seattle, Wash., 1968, Vol. Two)*，第134–145页。施普林格，柏林，1969 年。[9] 汤姆·莱因斯特。《重新思考集合论》。 *Amer. Math. Monthly*，121(5)：403–415，2014年。[10] 桑德斯·麦克莱恩。《 *Mathematics form and function*。施普林格出版社，纽约，1986年。[11] 桑德斯·麦克莱恩。《 *Categories for the Working Mathematian*》。施普林格出版社，纽约，第二版，1998年。[12] 佩内洛普·马迪。《我们希望基础做什么？比较集合论方法、范畴论方法与单值方法》。载于 *Reflections on the foundations of mathematics—univalent foundations set theory and general thoughts*，第407卷，丛书《 *Synth. Libr.*》，第293–311页。施普林格，Cham， [2019] ©2019。[13] Colin McLarty。《范畴的范畴的公理化》。 *J. Symbolic Logic*，56(4)：1243–1260，1991年。[14] Colin McLarty。《 *Elementary Categories*》 *Elementary Toposes*。《牛津逻辑指南》第21卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1992年。[15] Colin McLarty。《NF中笛卡尔闭性的缺失》。 *J. Symbolic Logic*，57(2)：555–556，1992年。[16] W. V. 奎因。《数理逻辑的新基础》。《 *Amer. Math. Monthly*》，44(2)：70–80，1937年。