arXiv:2301.10953v2 [math.LO] 8 Nov 2023

齐次超度量结构

WIESŁAW KUBIŚ、CHRISTIAN PECH 和 MAJA PECH

摘要。我们发展了齐次波兰超度量结构理论。我们的出发点是一个有限结构的 Fraïssé 类，而关键工具是泛齐性满同态。新的 Fraïssé 极限是一个逆极限，然而其普适性是相对于嵌入而言的；并且，与 Ben Yaacov 的波兰度量 Fraïssé 理论不同， [3], 其齐性是严格的。我们的发展可被视为构建 Fraïssé 极限的类博雷尔层级的第三步，其中第一步是 Fraïssé 的经典框架，第二步则是较新的理论，即 Irwin 和 Solecki 提出的 [12], 原有限 Fraïssé 极限理论。

目录

1. 引言 1 2. 链与余链 5 2.1. 从 ω-链的余极限到 ω-余链的极限 5 2.2. 从 ω-余链到度量结构 7 2.3. ω-余链与超度量结构之间的伴随 9 2.4. 遗传类的情形 17 3. 超度量齐性与普适性 18 3.1. 超度量结构小性的概念 18 3.2. 通过射影极限构造泛齐次度量结构 20 3.3. 通用齐次同态 26 3.4. 通过逗号范畴构造泛同态与斜齐次同态 28 3.5. 关于**V**值 amalgamation 性质 31 4. 主要结果的证明 33 4.1. 定理 3.8 的证明 33 4.2. 定理 3.10 的证明 39 5. 例子与结语 41 参考文献 46

1. 引言

树和类树结构似乎在纯数学和理论计算机科学中无处不在。纯树通常被理解为一种没有圈的连通简单图，或者是一种偏序

2010 数学主题分类。 主要：03C30；次要：03C52、03C68。关键词和短语。 Fraïssé 极限、超度量、度量结构、合并扩张性质。第一和第二作者的研究得到 GA ČR（捷克科学基金会）EXPRO 20-31529X 项目的资助。第三作者感谢塞尔维亚共和国教育、科学与技术发展部的经费支持（资助编号：451-03-68/2022-14/200125）。

集，其中所有形如 $\{x\colon\ x < p\}$ 的集合都是良序的，甚至是有限线序的。在后一种情况下，我们称之为 ω-树，因为它的分支的序型为 ω——自然数。若每个元素（节点）都属于某个分支，也就是说没有叶节点，则称 ω-树为修剪的 。事实上，修剪的 ω-树与层之间的满射逆序列一一对应。具体来说，给定一个满射逆序列

$$L_0 \twoheadleftarrow L_1 \twoheadleftarrow L_2 \twoheadleftarrow \cdots$$

由此可得到一棵修剪的 ω-树，其层为 L_is，序由粘合映射给出，并增添一个最小元素 $\perp$——即根。反过来，一棵修剪的 ω-树会导出一个由满射组成的逆序列，这些满射定义在它的各层之间，并由序确定。

自然地，我们可以在树的各层上添加额外的结构，并要求粘合映射（由序诱导）保持这种结构。这样，我们可以得到例如字典序树，即每一层都带有线序的树。不过，还有许多其他可能性，例如图、群、度量空间等。这种树的极限通常称为前有限结构。它确实是与树各层同类型的结构，并以显而易见的方式定义所有关系和运算。

修剪的 ω-树的极限（即所有分支的集合）上还存在另一种结构。具体来说，我们可以自然地衡量两个不同分支彼此相距多远：若它们在 n 个层上相同，则称它们之间的距离为 2^{-n} 。在这种情形下，树的所有层都被视为离散（等距的，即任意两点之间的距离都相同）度量空间，而极限则是一个完备超度量空间，其中各层通常可以重构为某个固定半径的闭球。

结合这两种思路，我们可以将完备超度量数学结构表示为“带结构”的树的逆极限，自然会想知道它们可能有多复杂。

例如，由 [17] 的结果可知，存在一个图满同态 $\Omega\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，其中 $\mathbf{R}$表示 Rado 图。Rado 图在如下意义上最为复杂：它涵盖了所有映入 Rado 图的同态，并且相对于图的有限同态而言是齐次的。这个特殊的满同态是一个收缩（即它有一个右逆），且在同构意义下唯一。将 Ω无限次重复，我们得到一个序列/树

$$\mathbf{R} \xleftarrow{\Omega} \mathbf{R} \xleftarrow{\Omega} \mathbf{R} \xleftarrow{\Omega} \cdots$$

其极限是贝尔空间上的一个高度齐次的图，即通用波兰空间。贝尔空间的自然表示是所有取值于自然数集（或任意其他固定可数集）的无限序列所组成的集合。这里，我们得到贝尔空间的一种具体图表示，它基于 Rado 图，而非纯粹的可数无限集。

Rado 图在这里扮演什么角色？事实证明，有限图这一类具有非常良好的 amalgamation，因此泛同态 Ω 存在。一般而言，为了得到类似于 Ω 的对象——它将成为最复杂超度量结构的主要构建模块——需要对有限（或有限生成）结构这一类施加一些限制。

本文旨在提出一种理论，用于解释高度齐性的超度量结构；这些结构或许可以称为 Fraïssé 极限，或者说是二维的，因为该理论首先依赖于泛齐性同态 Ω 的存在，然后证明，将重复出现的 Ω 进行逆极限（无限次）会产生一个具有高度齐性和普适性的超度量结构。

一方面，我们使用逆极限，因此我们的理论类似于 Irwin 和 Solecki 的射影弗雷谢理论 [12], ；另一方面，我们直接得到度量结构，类似于度量弗雷歇理论 [3], 。然而，我们得到的是严格齐次性，这与连续弗雷谢理论中的通常情况相反。此外，我们的研究也可以被视为首次尝试将 Fraïssé 极限理论提升到更高层次，从而可能开启一个层级，

这与描述集合论中的博雷尔层级精神相同。第一步是经典的 Fraïssé 理论，第二步是 Irwin–Solecki 投射弗雷歇理论 [12]，可将其理解为紧（有限化）理论。我们提出下一步，可以称为 G_δ 理论，因为离散结构可以被视为开集，而它们的极限是 G_δ 结构。闭结构可以是有限结构的逆极限，因此人们不禁想要探寻由有限化结构的余极限构成的类 F_σ中的通用极限理论。但这超出了本文的讨论范围。

此外，我们是在纯粹的范畴论框架下工作，不涉及度量富化，因此不考虑近似交换图，尽管这类图表是有意义的，毕竟我们的对象是度量空间。

我们的主要结果表明，在适当的假设下，存在唯一的完备超度量结构，它是超齐次的；无论是相对于等距同构，还是相对于以适当且自然的方式保持距离的更一般嵌入，均如此。

特别地，作为一个特例，我们得到以下结果。

定理。在贝尔空间 ω^ω 上存在一个闭图关系，使得对于每个有限诱导子图 F，每个有限扩张 $G \supseteq F$ 都能在 ω^ω中实现；若将 G 视为距离为 2^{-n}、$n \in \mathbb{N}$的超度量图，则还可保持度量。此外，该图关系由这一扩张性质唯一确定。

最后，每个定义在波兰超度量空间上的闭图都嵌入到上述图中。

这一结果是一个更一般定理的特例。该定理涉及关系语言，并要求满足某种更强版本的 amalgamation 性质。下文将对此作详细说明。

补充一点：这则短文的核心思想实际上早已出现（很可能是首次出现），[2] 是在巴拿赫空间和弗雷歇空间的背景下提出的。具体而言，Gurarii 空间 $\mathbb{G}$ 是有限维巴拿赫空间在度量富化范畴论意义下的 Fraïssé 极限。事实证明，存在一个作用于 $\mathbb{G}$ 上的通用齐次非扩张算子（在 [11] 中构造），将其无限次重复应用，便可得到一个逆序列，其极限是一个泛（几乎）齐次可分分级弗雷歇空间。

这表明，我们的短文中的结果应该可以推广到度量弗雷歇理论 [3,15]。

***

1953年，Roland Fraïssé 引入了“年龄”这一概念，用以刻画一类（关系）结构 [10]。

若 **A**是一个模型论结构，则用 Age(**A**) 表示所有可嵌入 **A** 的有限生成结构所构成的类。这里，模型论结构通过以下方式定义：

(1) 一个签名 $\Sigma = (\Phi, \mathrm{P}, \mathrm{ar})$，其中 Φ 和 P 分别是互不相交的运算符号集和关系符号集，且 ar 是一个函数，为 $\Phi \cup \mathrm{P}$ 的每个元素指定其元数（0 元运算符号充当常量符号）；

(2) 一个元组 $\mathbf{A} = (A, (f_{\mathbf{A}})_{f\in\Phi}, (\varrho^{\mathbf{A}})_{\varrho\in\mathrm{P}})$，其中对所有 $f \in \Phi, \varrho \in \mathrm{P}$，都有 $f_{\mathbf{A}}\colon A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$，且 $\varrho^{\mathbf{A}} \subseteq A^{\mathrm{ar}(\varrho)}$。**A** 的运算 f也称为A的基本运算 。类似地，**A**的关系 $\varrho^{\mathbf{A}}$ 称为**A**的基本关系 。

若结构 **B** 满足 Age(**B**) $\subseteq$ Age(**A**)，则称其比 **A** 更年轻（最初，Fraïssé 使用记号$\gamma_{\mathbf{A}}$ 表示 Age(**A**)，并用 $\Gamma_{\mathbf{A}}$表示比 **A** 更年轻的结构类）。

最初，Fraïssé 为其著名的可数齐次结构刻画引入了年龄（回顾一下，若结构 **A** 的每个有限生成子结构之间的同构都能扩展为 **A** 的自同构，则称该结构 **A** 为齐次 结构）：

1.1. **定理** ([9])。 设 $\mathscr{C}$ 是同一类型的有限生成结构类。那么， $\mathscr{C}$ 是某个可数齐次结构的年龄，当且仅当

(1) 在同构意义下， $\mathscr{C}$ 包含可数多个结构；*(2)* $\mathscr{C}$ 具有遗传

性质（遗传性质），即，

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} : \mathbf{B} \in \mathscr{C}, \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B} \implies \mathbf{A} \in \mathscr{C},$$

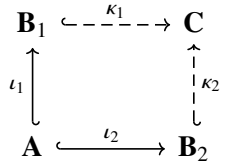
(3) $\mathscr{C}$ 具有联合嵌入性质（联合嵌入性质），即，

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{C}\ \exists \mathbf{C} \in \mathscr{C} : \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{C}, \mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{C},$$

(4) $\mathscr{C}$ 具有合并性质（合并性质），即，

$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathscr{C}, \iota_1 \colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}_1, \iota_2 \colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}_2\ \exists \mathbf{C} \in \mathscr{C}, \kappa_1 \colon \mathbf{B}_1 \hookrightarrow \mathbf{C}, \kappa_2 \colon \mathbf{B}_2 \hookrightarrow \mathbf{C}$:

下图交换:



此外，任何两个具有相同年龄的可数齐次结构都是同构的。

这个定理的证明通常涉及构造一个 ω-塔

$$\mathbf{A}_0 \xhookrightarrow{\leq} \mathbf{A}_1 \xhookrightarrow{\leq} \mathbf{A}_2 \xhookrightarrow{\leq} \mathbf{A}_3 \xhookrightarrow{\leq} \dots$$

由 $\mathscr{C}$中的结构组成。显然，其并

$$\mathbf{A}_\infty := \bigcup_{i<\omega} \mathbf{A}_i$$

当且仅当族（$\mathbf{A}_i$）$_{i<\omega}$ 在 $\mathscr{C}$中余终时，具有年龄 $\mathscr{C}$，即

$$\forall \mathbf{B} \in \mathscr{C}\ \exists i < \omega : \mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{A}_i.$$

在 [17] 中有人指出，若 Age（$\mathbf{A}_\infty$） $= \mathscr{C}$，则 $\mathbf{A}_\infty$ 是齐次的，当且仅当塔（$\mathbf{A}_i$）$_{i<\omega}$具有吸收性质:

$$\forall \mathbf{B} \in \mathscr{C}, i < \omega, \iota \colon \mathbf{A}_i \hookrightarrow \mathbf{B}\ \exists k < \omega, \hat{\iota} \colon \mathbf{B} \hookrightarrow \mathbf{A}_k : \hat{\iota} \circ \iota = \iota_i^k,$$

其中 ι_i^k是将 $\mathbf{A}_i$ 嵌入 $\mathbf{A}_k$的包含同态。

从一个年龄 $\mathscr{C}$出发，可以利用 Banach-Mazur 博弈的抽象版本证明存在一个余终的 ω-塔（$\mathbf{A}_i$）$_{i<\omega}$，且具有吸收性质（见 [14]）。

所有这些都凸显了研究可数结构时 ω-塔的作用。若由有限生成结构组成的类 $\mathscr{C}$ 具有遗传性质 HP，则称其为一个 遗传类 。显然，所有年龄包含于给定遗传类 $\mathscr{C}$的可数生成结构所成的类，与所有可表示为由 $\mathscr{C}$ 中的元素构成的某个 ω-塔之并的结构所成的类相同。这引出了以下定义:

1.2. **定义**。 设 $\mathscr{C}$是一个由同类型结构组成的类。于是我们定义

$$\sigma\mathscr{C} := \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \text{ is the union of an } \omega\text{-tower of elements from } \mathscr{C}\}.$$

形如 $\sigma\mathscr{C}$ 的类一直是模型论和组合学中众多研究的主题。例如，人们关注的问题包括: $\sigma\mathscr{C}$ 中是否存在泛结构、泛型结构、拉姆齐结构或齐性结构。

2. 链与余链

本节讨论逆序列（称为 ω-上链）与超度量之间的联系。我们还定义超度量结构的概念，其底层空间是一个可数离散空间序列的逆极限。

2.1. 从 ω-链的余极限到 ω-上链的极限。将结构构造为结构塔之并，是一种非常一般的范畴论构造——函子的余极限（参见 [19]）的特例。在当前情形中，我们从范畴 $\mathscr{S}_\Sigma$ 开始，其对象类是所有 Σ-结构组成的类 $\mathscr{S}_\Sigma$，态射则是 Σ-结构之间的同态。在 $\mathscr{S}_\Sigma$ 中，我们固定由 $\mathscr{C}$ 诱导的子范畴 $\boldsymbol{\mathscr{C}}$。在此背景下，一个 ω-塔不过是从 $\boldsymbol{\omega}$ 到 $\boldsymbol{\mathscr{C}}$ 的函子的特例（这里 $\boldsymbol{\omega}$ 表示以有限序数为对象、态射为 $i \leftarrow j$（对所有 $i \le j < \omega$）的范畴）。ω-塔 $(\mathbf{A}_i)_{i<\omega}$ 对应于函子 $F\colon \boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\mathscr{C}}$，其中 $F(i) = \mathbf{A}_i$，而 $F(i \leftarrow j)$ 是将 $\mathbf{A}_i$ 嵌入 $\mathbf{A}_j$ 的恒等嵌入。并集 $\mathbf{A}_\infty = \bigcup_{i<\omega} \mathbf{A}_i$ 是 F 在 $\mathscr{S}_\Sigma$ 中的余极限，其极限余锥为 $(\alpha_i^\infty)_{i<\omega}$，其中 $\alpha_i^\infty\colon \mathbf{A}_i \hookrightarrow \mathbf{A}_\infty$ 是恒等嵌入（要使这一点表述严谨，我们需要将 F 视为从 $\boldsymbol{\omega}$ 到 $\mathscr{S}_\Sigma$ 的函子；这并无问题，因为 $\boldsymbol{\mathscr{C}}$ 是 $\mathscr{S}_\Sigma$ 的子范畴）。

不难看出，对于每个遗传类 $\mathscr{C}$，$\sigma\mathscr{C}$ 由所有函子 $F\colon \boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\mathscr{C}} \text{ in } \mathscr{S}_\Sigma$ 的余极限组成，其中 F 将态射映射为嵌入。这启发了下面的定义：

2.1. **定义**。设 $\mathscr{C}$ 是同一类型的结构类。ω-链 $\boldsymbol{\mathscr{C}}$ 中的一个 $\mathbf{A}\colon \boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\mathscr{C}}$ 是一个函子，它将 $\boldsymbol{\omega}$ 的态射映射为 $\boldsymbol{\mathscr{C}}$ 中的嵌入。若 $\overline{\mathbf{A}}$ 在对象上作用如同 $i \mapsto \mathbf{A}_i$，在态射上作用如同 $(i \leftarrow j) \mapsto \alpha_i^j$，则 $\overline{\mathbf{A}}$ 也记作 $((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\le j<\omega})$。将 $\mathbf{A}$ 表示为图表的一个简化 $\mathbf{A}$ 表示如下：

$$\mathbf{A}_0 \xhookrightarrow{\alpha_1^0} \mathbf{A}_1 \xhookrightarrow{\alpha_2^1} \mathbf{A}_2 \xhookrightarrow{\alpha_3^2} \mathbf{A}_3 \xhookrightarrow{\alpha_4^3} \dots .$$

我们用 $\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 表示由 $\sigma\mathscr{C}$ 诱导的 $\mathscr{S}_\Sigma$ 的全子范畴。因此，$\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 是 $\boldsymbol{\mathscr{C}}$ 中 ω-链的余极限范畴。每当一个概念以范畴的方式定义时，通过对偶化，我们可以免费得到其他相应的概念。在当前情况下，ω-链余极限的最合理的对偶概念，是 ω-上链的极限。

2.2. **定义**。设 $\mathscr{C}$ 是同一类型的结构类。$\boldsymbol{\mathscr{C}}$ 中的一个 ω-上链 是一个函子 $\mathbf{A}\colon \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{\mathscr{C}}$。若 $\mathbf{A}$ 在对象上的作用为 $i \mapsto \mathbf{A}_i$，在态射上的作用为 $(i \leftarrow j) \mapsto \alpha_i^j$，则 $\mathbf{A}$ 也记作 $((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\le j<\omega})$。将 $\mathbf{A}$ 简化表示为图表如下：

$$\mathbf{A}_0 \xleftarrow{\alpha_0^1} \mathbf{A}_1 \xleftarrow{\alpha_1^2} \mathbf{A}_2 \xleftarrow{\alpha_2^3} \mathbf{A}_3 \xleftarrow{\alpha_3^4} \dots .$$

ω-上链 $\mathbf{A} = ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\le j<\omega})$ 的极限是由满足下列条件的所有元组 $\mathbf{c} = (c_i)_{i<\omega}$ 所诱导的子结构 $\mathbf{A}_\infty$，它是 $\prod_{i<\omega} \mathbf{A}_i$ 的子结构

$$\forall i < j < \omega : \alpha_i^j(c_j) = c_i.$$

见证这一事实的极限锥由投影同态族 $(\alpha_i^\infty)_{i<\omega}$ 给出，其中

$$\alpha_i^\infty\colon \mathbf{A}_\infty \to \mathbf{A}_i : \mathbf{c} \mapsto c_i.$$

这个锥称为 $\mathbf{A}$ 的典范锥。结构 $\mathbf{A}_\infty$ 称为 $\mathbf{A}$ 的典范极限。

¯为了更好地理解，不妨将 A 想象成一棵树 $T\leftarrow\mathrm{A}$，并将 A_∞ 视为其分支集。$T\leftarrow\mathrm{A}$ 的节点集由集合 $\bigcup_{i<\omega}\{i\}\times A_i$ 给出。在 $T\leftarrow\mathrm{A}$ 中，我们定义

$$(i,a_i)\sqsubseteq(j,a_j):\iff i\le j \text{ and } \alpha_i^j(a_j)=a_i.$$

¯2.3. **观察**。对于每个 ω-上链 A，我们有

(1) $(T\leftarrow A,\sqsubseteq)$ 是一棵树，即 $\forall(j,a_j)\in T\leftarrow A:(j,a_j)\#=\{(i,a_i)\in T\leftarrow A\mid(i,a_i)\sqsubseteq(j,a_j)\}$ 是一条链；*(2)* $(T\leftarrow A,\sqsubseteq)$ 是良基的，即 $\forall(i,a_i)\in T\leftarrow A:(i,a_i)\#$ 是有限的；*(3)* $(T\leftarrow A,\sqsubseteq)$ 是修剪的，当且仅当对于所有 $i\le j<\omega$，我们有 α_i^j 是满射。

通常，$(T\leftarrow\mathrm{A},\sqsubseteq)$ 中的极大链称为分支。回到对 A_∞ 的考察，一个重要的观察是，A_∞ 的元素与 $T\leftarrow\mathrm{A}$ 的分支之间存在一一对应。该对应通过将每个元素 $\mathbf{a}=(a_i)_{i<\omega}\in A_\infty$ 映射到集合 $\{(i,a_i)\mid i<\omega\}\subseteq T\leftarrow\mathrm{A}$ 得到。采用一种方便的族定义（即从指标集到集合的函数）后，可以认为 $(a_i)_{i<\omega}$ 实际上等于 $T\leftarrow\mathrm{A}$ 的一个分支。

$\alpha_i^\infty{}_{i<\omega}$的典范锥（ ω上链 $-\mathrm{A}=((\mathbf{A}_i)_{i<\omega},(\alpha_i^j)_{i\le j<\omega})$自然诱导出一个超度量 δ_{A_∞}，定义在 A_∞ 上，可通过以下方式定义

$$\delta_{A_\infty}(\mathbf{a},\mathbf{b}):=\begin{cases}2^{-\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b})} & \mathbf{a}\ne\mathbf{b}\\ 0 & \text{else,}\end{cases}$$

其中

$$\Delta(\mathbf{a},\mathbf{b}):=\min\{i<\omega\mid\alpha_i^\infty(\mathbf{a})\ne\alpha_i^\infty(\mathbf{b})\}=\min\{i<\omega\mid a_i\ne b_i\}.$$

2.4.**观察**。利用以上概念：

(1) $(A_\infty,\delta_{A_\infty})$是一个完备度量空间；*(2)* $\mathbf{A}_\infty$ 的所有基本运算相对于 δ_{A_∞}都是 1-利普希茨的；*(3)* $\mathbf{A}_\infty$ 的所有基本关系都是闭的（在相应的乘积拓扑中）。

此外，若对每个 $i<\omega$，α_i^∞的像都是可数的，则 $(A_\infty,\delta_{A_\infty})$是可分的。

证明。**关于 1：**设 $(\mathbf{a}_i)_{i<\omega}$ 是 A_∞中的一个柯西序列。那么对每个 $M<\omega$，都存在$n_0=n_0(M)$，使得对所有 n，$m>n_0$，都有 $\alpha_M^\infty(\mathbf{a}_n)=\alpha_M^\infty(\mathbf{a}_m)=:b_M$。显然，族 $(b_i)_{i<\omega}$ 在 $T\leftarrow\mathrm{A}$ 中构成一条分支 $\mathbf{b}$。因此它是 A_∞的一个元素。此外，$\lim_{i\to\infty}\mathbf{a}_i=\mathbf{b}$。

关于 2：设 $f^{\mathbf{A}_\infty}$ 是 $\mathbf{A}_\infty$ 的 n 元基本运算。设 $\mathbf{a}=(\mathbf{a}^{(0)},\ldots\ldots,\mathbf{a}^{(n-1)})$ 和 $\mathbf{b}=(\mathbf{b}^{(0)},\ldots\ldots,\mathbf{b}^{(n-1)})$ 属于 $(A_\infty)^n$。那么

$$\delta_{A_\infty}(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})=\max_{0\le i<n}\delta_{A_\infty}(\mathbf{a}^{(i)},\mathbf{b}^{(i)})=2^{-M},$$

对于某个 $M<\omega$。特别地，对于所有 $m<M$ 以及所有 $0\le i<n$，我们有

$$(*)\qquad \alpha_m^\infty(\mathbf{a}^{(i)})=\alpha_m^\infty(\mathbf{b}^{(i)}).$$

继续计算

$$f^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{a}^{(0)},\ldots,\mathbf{a}^{(n-1)})=\mathbf{c},\qquad f^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{b}^{(0)},\ldots,\mathbf{b}^{(n-1)})=\mathbf{d},\ \text{where}$$
$$f^{\mathbf{A}_i}(a_i^{(0)},\ldots,a_i^{(n-1)})=c_i,\qquad f^{\mathbf{A}_i}(b_i^{(0)},\ldots,b_i^{(n-1)})=d_i,\ \text{for all } i<\omega.$$

由 **(*)** 可知，对于所有 $0\le i<M$，都有 $c_i=d_i$。因此 $\delta_{A_\infty}(\mathbf{c},\mathbf{d})\le 2^{-M}$。

关于 3：设 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}\subseteq(A_\infty)^n$ 是 $\mathbf{A}_\infty$ 的一个基本关系。设 $\sigma:=(A_\infty)^n\setminus\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$。我们来证明 σ 是开集：设 $\mathbf{a}=(\mathbf{a}^{(0)},\ldots,\mathbf{a}^{(n-1)})\in\sigma$。设 $i_0<\omega$ 是满足以下性质的最小元素：

$(a_{i_0}^{(0)},\dots,a_{i_0}^{(n-1)})\notin\varrho^{\mathbf{A}_{i_0}}$。设 $\mathbf{b}=(\mathbf{b}^{(0)},\dots,\mathbf{b}^{(n-1)})\in(A_\infty)^n$ 满足条件 $\delta_{A_\infty}(\mathbf{a},\mathbf{b})\leq 2^{-i_0}$。那么 $(b_{i_0}^{(0)},\dots,b_{i_0}^{(n-1)})=(a_{i_0}^{(0)},\dots,a_{i_0}^{(n-1)})\notin\varrho^{\mathbf{A}_{i_0}}$。因此 $\mathbf{b}\in\sigma$。由此，σ 是开集。 □

2.2. **从 ω-上链到度量结构**。下文令 $\mathbf{A}=((\mathbf{A}_i)_{i<\omega},(\alpha_i^j)_{i\leq j<\omega})$ 为 ω 在 $\mathscr{S}_\Sigma$ 中的一个上链。令 $\mathbf{A}_\infty$ 为其典范极限，并令 $(\alpha_i^\infty)_{i<\omega}$ 为其典范锥。对于每个基本关系 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}\subseteq(A_\infty)^n$，我们可以关联一个函数

$$\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}:(A_\infty)^n\to[0,1],\quad(\mathbf{x}^{(0)},\dots,\mathbf{x}^{(n-1)})\mapsto\begin{cases}0 & (\mathbf{x}^{(0)},\dots,\mathbf{x}^{(n-1)})\in\varrho^{\mathbf{A}_\infty}\\ 2^{-M(\mathbf{x}^{(0)},\dots,\mathbf{x}^{(n-1)})} & \text{else,}\end{cases}$$

其中

$$M(\mathbf{x}^{(0)},\dots,\mathbf{x}^{(n-1)})=\min\{i<\omega\mid(x_i^{(0)},\dots,x_i^{(n-1)})\notin\varrho^{\mathbf{A}_i}\}.$$

2.5. **观察**。对于 $\mathbf{A}_\infty$ 的每个基本关系 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$，$\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$ 都是 1-利普希茨的。此外，我们有

$$\varrho^{\mathbf{A}_\infty}=\{\mathbf{x}\mid\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x})=0\}.$$

证明。第二个断言直接由 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$ 的定义得出。为证明第一个断言，取 $(A_\infty)^n$ 中的 $\mathbf{x}=(\mathbf{x}^{(0)},\dots,\mathbf{x}^{(n-1)})$ 和 $\mathbf{y}=(\mathbf{y}^{(0)},\dots,\mathbf{y}^{(n-1)})$，使得 $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$。那么，对于某个 $M<\omega$，我们有

$$\delta_{A_\infty}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})=\max_{0\leq j<n}\delta_{A_\infty}(\mathbf{x}^{(j)},\mathbf{y}^{(j)})=2^{-M}.$$

特别地，对于所有的 $j\in\{0,\dots,n-1\}$ 以及所有的 $0\leq i<M$，我们有 $x_i^{(j)}=y_i^{(j)}$。接下来，我们根据**x**和**y**是否属于 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$ 来区分情形。

情形 1：假设**x**，$\mathbf{y}\in\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}$。那么 $|\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x})-\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{y})|\leq 0<\delta_{A_\infty}(\mathbf{x},\mathbf{y})$。

情形 2：假设 $\mathbf{x}\in\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$，$\mathbf{y}\notin\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$。那么 $|\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x})-\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{y})|=\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{y})=2^{-M}$，其中 $\mathbf{b}M<\omega$。特别地，$(y^{(0)}\mathbf{c}_M,\dots,y^{(n-1)}\mathbf{c}_M)\notin\varrho^{\mathbf{A}}\mathbf{c}_M$。另一方面，由于我们有 $(x^{(0)}\mathbf{c}_M,\dots,x^{(n-1)}\mathbf{c}_M)\in\varrho^{\mathbf{A}}\mathbf{c}_M$，可得 $(x^{(0)}\mathbf{c}_M,\dots,x^{(n-1)}\mathbf{c}_M)\neq(y^{(0)}\mathbf{c}_M,\dots,y^{(n-1)}\mathbf{c}_M)$。因此，$\mathbf{b}M\geq M$。

情形3：假设**x**、$\mathbf{y}\notin\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}$。那么 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}(\underline{\mathbf{x}})=2^{-M_1}$ 且 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}(\underline{\mathbf{y}})=2^{-M_2}$，其中 $M_1,\ M_2<\omega$。令 $M:=$ 为 M_1 与 M_2 的最小值。

情形3.1：假设 $M<M$。我们断言此时 $M_1=M_2$。若不然，假设 $M_1\neq M_2$，不妨设 $M_1<M_2$。那么 $(y_{M_1}^{(0)},\dots,y^{(n-1)}{}_{M_1})\in\varrho^{\mathbf{A}_{M_1}}$。由于 $M_1=\mathbf{b}M<M$，可得 $(x^{(0)}{}_{M_1},\dots,x^{(n-1)}{}_{M_1})=(y_{M_1}^{(0)},\dots,y^{(n-1)}{}_{M_1})$。特别地，$(x^{(0)}{}_{M_1},\dots,x^{(n-1)}{}_{M_1})\in\varrho^{\mathbf{A}_{M_1}}$，这就产生了矛盾。

b情形3.2：假设 $M\leq M$。不失一般性，假设 $M_1\leq M_2$。那么

$$|\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\overline{\mathbf{x}})-\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\overline{\mathbf{y}})|=2^{-M_1}-2^{-M_2}\leq 2^{-M_1}=2^{-\widehat{M}}\leq 2^{-M}.$$ □

还有一种自然的方法可以衡量给定元组 **x** 不包含在 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$ 中的程度。具体来说，我们可以定义

$$\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\overline{\mathbf{x}}):=\delta_{A_\infty}(\overline{\mathbf{x}},\varrho^{\mathbf{A}_\infty})=\begin{cases}\inf\{\delta_{A_\infty}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}})\mid\overline{\mathbf{y}}\in\varrho^{\mathbf{A}_\infty}\} & \varrho^{\mathbf{A}_\infty}\neq\emptyset,\\ 1 & \text{else.}\end{cases}$$

与 $\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$ 类似，可以证明 $\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}$ 是 1-利普希茨，并且 $\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x})=0$ 当且仅当 $\mathbf{x}\in\varrho^{\mathbf{A}_\infty}$。然而，一般来说，我们有 $\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x})\geq\varrho^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x})$，如下例所示：

2.6. 例子。考虑由两个顶点 a 和 b 构成的完全图 K_2，以及它的补图——空图 K_2，将它们视为签名的关系结构，该签名恰好由一个二元关系符号 ϱ 组成。对所有 $0 < i < \omega$，定义 $\mathrm{A}_0 := K_2$ 和 $\mathrm{A}_i := K_2$。对所有 $0 \le i \le j < \omega$，令 $\alpha_i^j \colon \{a, b\} ! \{a, b\}$ 为恒等式。则 $\mathrm{A} = (\langle \mathrm{A}_i \rangle_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{0\le i\le j<\omega})$ 是一个 ω-上链。其典范极限 A_∞ 是顶点集为 $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ 的空图，其中 $\mathrm{a} = (a, a, \dots)$，而 $\mathrm{b} = (b, b, \dots)$。

注意，$\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1$，而 $\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}$。

2.7. **观察**。给定一个 ω-上链 $\mathrm{A} = ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{0\le i\le j<\omega})$ 由 Σ-结构组成。设 $(\alpha_i^\infty)_{i<\omega}$ 为其典范锥，其中 $\alpha_i^\infty \colon \mathbf{A}_\infty \to \mathbf{A}_i$，对每个 $i < \omega$ 均成立。那么以下条件等价：

(1) $\forall \varrho \in P : \overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty} = \underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}$，*(2)* 对所有 $i < \omega$，同态 α_i^∞ 都是强的，即对于所有 $\varrho \in P$（例如，$ar(\varrho) = n$），只要 $a^{(0)}$、……、$a^{(n-1)}$ 属于 α_i^∞ 的像，且 $(a^{(0)}, \dots, a^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_i}$，那么就存在 $x^{(0)}$、……、$x^{(n-1)} \in A_\infty$，使得 $(a^{(0)}, \dots, a^{(n-1)}) = (x_i^{(0)}, \dots, x_{(n-1)i})$，并且 $(x^{(0)}, \dots, x^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_\infty}$。

证明。“1 $\Longrightarrow$ 2”：设 $\mathbf{x}^{(0)}$，……，$\mathbf{x}^{(n-1)} \in A_\infty$，使得 $(x_{(0)i}$，……，$x_i^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_i}$。那么

$$\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) = \underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) < 2^{-i}.$$

因此，存在 $(\mathbf{y}^{(0)}$，……，$\mathbf{y}^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_\infty}$，使得 $\delta_{A_\infty}(\mathbf{x}^{(j)}$，$\mathbf{y}^{(j)}) < 2^{-i}$，对所有 $0 \le j < n$ 均成立。特别地，$x_{(j} = y_i^{(j)})$，对所有 $0 \le j < n$ 均成立。这表明 α_i^∞ 是强的。

“2 $\Longrightarrow$ 1”：设 $\mathbf{x}^{(0)}$，……，$\mathbf{x}^{(n-1)} \in A_\infty$。假设 $\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x}^{(0)}$，……，$\mathbf{x}^{(n-1)}) < 2^{-i}$。那么 $(x_{(0)i}$，……，$x_{(n-1)i}) \in \varrho^{\mathbf{A}_i}$。由于 α_i^∞ 是强的，存在 $(\mathbf{y}^{(0)}$，……，$\mathbf{y}^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_\infty}$，使得 $(x_{(0)i}$，……，$x_{(n-1)i}) = (y_i^{(0)}$，……，$y_{(n-1)i})$。由此可得 $\delta_{A_\infty}(\mathbf{x}, \varrho^{\mathbf{A}_\infty}) < 2^{-i}$。由于 i 可以任意大，因此 $\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x}) \le \underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x})$。故等式成立。□

前面的观察表明

$$\underline{\mathcal{A}}_\infty := (A_\infty, \delta_{A_\infty}, (f^{\mathbf{A}_\infty})_{f\in\Phi}, (\underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty})_{\varrho\in\mathrm{P}}) \quad \text{and} \quad \overline{\mathcal{A}}_\infty := (A_\infty, \delta_{A_\infty}, (f^{\mathbf{A}_\infty})_{f\in\Phi}, (\overline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty})_{\varrho\in\mathrm{P}})$$

按照 [4] 的定义，它们是度量结构。下面回顾有关度量结构的基本定义：

2.8. **定义**。设 $\Sigma = (\Phi, \mathrm{P}, \mathrm{ar})$ 是一个签名。一个度量 Σ-结构 A 由四元组 $(A, \delta, (f_{\mathcal{A}})_{f\in\Phi}, (\varrho^{\mathcal{A}})_{\varrho\in\mathrm{P}})$ 给出，满足

(1) (A, δ) 是一个有界完备度量空间；(2) $\forall f \in \Phi$：$f_{\mathcal{A}} \colon A^{\mathrm{ar}(f)} ! A$ 是一致连续的；(3) $\forall \varrho \in \mathrm{P}$：$\varrho^{\mathcal{A}} \colon A^{\mathrm{ar}(\varrho)} ! \mathbb{R}$ 有界且一致连续。

当 Σ 的含义可由上下文明确得知，或其并不重要时，我们将省略“度量 Σ-结构”中的“Σ-”。

度量结构的度量子结构按显然的方式定义：

2.9. **定义**。设 A 和 B 是度量 Σ 结构。如果满足以下条件，我们称 A 是 B 的度量子结构（记作 $\mathrm{A} \le \mathrm{B}$）：

(1) $A \subseteq B$，(2) $\forall f \in \Phi \, \forall \bar{x} \in A^{\mathrm{ar}(f)}$：$f\mathrm{A}(\bar{x}) = f\mathrm{B}(\bar{x})$，(3) $\forall \varrho \in \mathrm{P} \, \forall \bar{x} \in A^{\mathrm{ar}(\varrho)}$：$\varrho^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \varrho^{\mathcal{B}}(\bar{x})$。

度量嵌入的定义与度量子结构的定义一致：

2.10. **定义**。设 A 和 B 是度量 Σ-结构。若函数 $h\colon A \to B$ 满足以下条件，则称其为将 A 嵌入 B 的度量嵌入

(1) h 是单射；(2) 对所有 $f \in \Phi$（例如，元数为 n），以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{f^{\mathcal{A}}} & A \\ {\scriptstyle h^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ B^n & \xrightarrow{f^{\mathcal{B}}} & B, \end{array}$$

(3) 对所有 $\varrho \in \mathrm{P}$（例如，元数为 n），以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\varrho^{\mathcal{A}}} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle h^n}\downarrow & & \| \\ B^n & \xrightarrow{\varrho^{\mathcal{B}}} & \mathbb{R}. \end{array}$$

双射度量嵌入称为度量同构。

图 1 重述了目前为止的所有构造。对于每个 ω-上链（$(_i\mathbf{A})_{i<\omega}$，$(\alpha_i^j)_{i\le j<\omega}$），

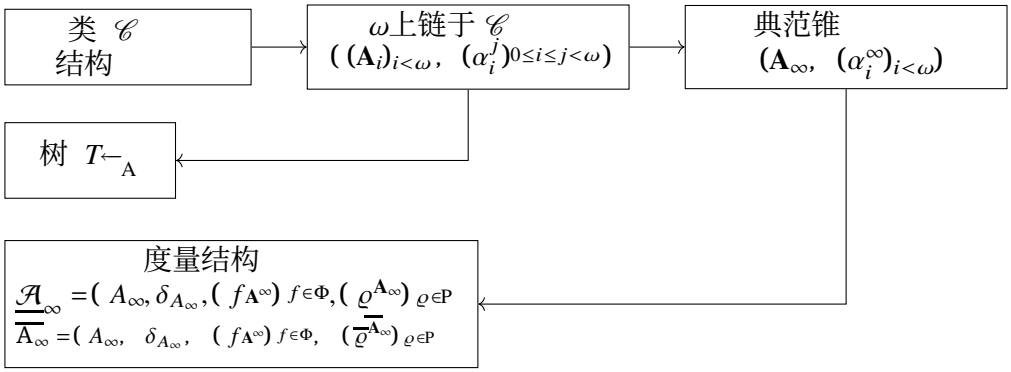


图1. 从结构到度量结构

度量结构 A_∞ 将称为该 ω-上链的典范度量结构 。注意，A 和 A 的度量 δ_{A_∞} 完全由树 $T \leftarrow \mathrm{A}$ 决定。

2.11. **定义**。 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Σ-结构类。则我们用 $\pi\mathscr{C}$ 表示所有与某个 $\mathscr{C}$ 上的 ω-上链的典范度量结构度量同构的度量结构所组成的类。

2.3. **上链与超度量结构之间的伴随**。 ω。 从 ω-上链构造典范度量结构的方式表明，这种构造应当以某种方式具有函子性。我们的下一个目标是将这种感觉具体化，把 $\pi\mathscr{C}$ 转化为一个范畴。撰写本文时，现有文献似乎尚未给出度量结构之间同态这一概念的定义。我们即将给出的定义并非意在填补这一空白。不过，对于与我们相关的特殊度量结构情形，我们认为这一定义是最自然的。在正式定义同态之前，让我们先缩小所考虑的度量结构类别：

2.12. **定义**。 设 $\mathbb{A} = (A, \delta_{\mathcal{A}}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in\Phi}, (\varrho^{\mathcal{A}})_{\varrho\in\mathrm{P}})$ 是一个度量 Σ-结构。若满足以下条件，则称 $\mathbb{A}$ 为超度量 Σ-结构

(1) $(A, \delta_{\mathcal{A}})$ 是直径至多为 1 的超度量空间，(2) 对每个 $f \in \Phi$，
$f^{\mathcal{A}}$ 都是 1-利普希茨的，(3) 对每个 $\varrho \in \mathrm{P}$，$\varrho^{\mathcal{A}}\colon A^{\mathrm{ar}(\varrho)}!$
$[0,1]$ 都是 1-利普希茨的。

若 $\mathbb{B} = (B, \delta_{\mathcal{B}}, (f^{\mathcal{B}})_{f\in\Phi}, (\varrho^{\mathcal{B}})_{\varrho\in\mathrm{P}})$ 是另一个超度量 Σ-结构，则称函数 $h\colon A!\ B$ 为从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{B}$ 的度量同态（形式上：$h\colon \mathbb{A}!\mathbb{B}$），如果

(1) $h : (A, \delta_{\mathcal{A}})!(B, \delta_{\mathcal{B}})$ 是 1-利普希茨的，(2) 对所有 $f \in \Phi$（例
如，元数为 n），以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{f^{\mathcal{A}}} & A \\ {\scriptstyle h^n}\big\uparrow\big\downarrow & & \big\uparrow\big\downarrow{\scriptstyle h} \\ B^n & \xrightarrow{f^{\mathcal{B}}} & B, \end{array}$$

(3) 对所有 $\varrho \in \mathrm{P}$（例如，元数为 n）以及所有 x_0、……、$x_{n-1} \in A$，我们都有：

$$\varrho^{\mathcal{A}}(x_0, \dots, x_{n-1}) \geq \varrho^{\mathcal{B}}(h(x_0), \dots, h(x_{n-1})).$$

h 若满足等距且等式成立，则称为度量嵌入。如果h 还具有双射性，则称其为度量同构。所有带有度量同态的超度量 Σ-结构所构成的范畴记为 $\mathscr{U}_\Sigma$。

需要注意的是，ω-上链的典范度量结构始终是超度量结构。为了使 ω-上链与超度量结构之间的对应具有函子性，我们还需要定义其在态射上的作用。设 $((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\leq j<\omega})$ 和 $((\mathbf{B}_i)_{i<\omega}, (\beta_i^j)_{i\leq j<\omega})$ 是ω上的上链。设$\mathbf{A}_\infty$和$\mathbf{B}_\infty$分别为它们的典范极限，并设 $(\alpha_i^\infty)_{i<\omega}$和 $(\beta_i^\infty)_{i<\omega}$为相应的典范锥。设

$$(h_i)_{i<\omega}\colon ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\leq j<\omega}) \Longrightarrow ((\mathbf{B}_i)_{i<\omega}, (\beta_i^j)_{i\leq j<\omega})$$

是一个自然变换。换句话说，对于所有 $0 \leq i \leq j < \omega$，我们希望下面的图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_i & \xleftarrow{\alpha_i^j} & \mathbf{A}_j \\ {\scriptstyle h_i}\big\downarrow\big\uparrow & & \big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle h_j} \\ \mathbf{B}_i & \xleftarrow{\beta_i^j} & \mathbf{B}_j. \end{array}$$

对于每个 $i < \omega$，令 $\tilde{\alpha}_i^\infty\colon \mathbf{A}_\infty ! \mathbf{B}_i$ 由 $\tilde{\alpha}_i^\infty := \alpha_i^\infty \circ h_i$定义。则 $(\tilde{\alpha}_i^\infty)_{i<\omega}$ 是 $((\mathbf{B}_i)_{i<\omega}, (\beta_i^j)_{i\leq j<\omega})$ 的一个相容锥。也就是说，对于所有 $0 \leq i \leq j < \omega$，下面的图表是交换的：

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{\alpha}_i^\infty & & \\ & \swarrow & & \nwarrow & \\ \mathbf{B}_i & \xleftarrow[\beta_i^j]{} & \mathbf{B}_j & \xleftarrow{\tilde{\alpha}_j^\infty} & \mathbf{A}_\infty. \end{array}$$

由于典范锥 $(\beta_i^\infty)_{i<\omega}$ 是一个极限锥，根据极限的泛性质，存在唯一的同态 h 从 $\mathbf{A}_\infty$ 到 $\mathbf{B}_\infty$，使得对于所有 $i < \omega$，都有 $\tilde{\alpha}_i^\infty = \beta_i^\infty \circ h$。

2.13. **观察**。 上面定义的同态 h 的作用类似于

$$h\colon (x_i)_{i<\omega} \mapsto (h_i(x_i))_{i<\omega}.$$

证明。 这直接由恒等式 $\alpha_i^\infty \circ h_i = \beta_i^\infty \circ h$得出。 □

众所周知，映射

$$\varprojlim\colon [\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma] \to \mathscr{S}_\Sigma \quad : \quad ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\le j<\omega}) \mapsto \mathbf{A}_\infty \quad , \qquad (h_i)_{i<\omega} \mapsto h$$

定义了一个函子（见 [13, 定理 8.6]）。我们将利用该函子在态射上的作用，以定义一个从 $[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$ 到 $\mathscr{U}_\Sigma$的函子。

2.14. **观察**。 上述定义的同态 $h\colon \mathbf{A}_\infty \to \mathbf{B}_\infty$ 也是从$\mathcal{A}_\infty$ 到$\mathcal{B}_\infty$的度量同态。如果$(h_i)_{i<\omega}$ 是自然嵌入，那么 h 甚至是一个度量嵌入。

证明。 首先我们证明$h : (\mathbf{A}_\infty, \delta_{\mathbf{A}_\infty}) ! (\mathbf{B}_\infty, \delta_{\mathbf{B}_\infty})$是1-利普希茨：设$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A_\infty$，并设 $i < \omega$。那么

$$(1) \qquad x_i = y_i \implies h_i(x_i) = h_i(y_i) \iff \tilde{\alpha}_i^\infty(\mathbf{x}) = \tilde{\alpha}_i^\infty(\mathbf{y}) \iff \beta_i^\infty(h(\mathbf{x})) = \beta_i^\infty(h(\mathbf{y})).$$

这表明 $\delta_{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ge \delta_{\mathbf{B}_\infty}(h(\mathbf{x}), h(\mathbf{y}))$，且 h 确实是 1-利普希茨的。

设 $\varrho \in \mathrm{P}$（例如，$\mathrm{ar}(\varrho) = n$）。设 $(\mathbf{a}^{(0)}, \dots, \mathbf{a}^{(n-1)}) \in (A_\infty)^n$，并设 $i < \omega$。那么

$$\begin{aligned}(2) \qquad (a_i^{(0)}, \dots, a_i^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_i} &\implies (h_i(a_i^{(0)}), \dots, h_i(a_i^{(n-1)})) \in \varrho^{\mathbf{B}_i} \\ &\iff (\tilde{\alpha}_i^\infty(\mathbf{a}^{(0)}), \dots, \tilde{\alpha}_i^\infty(\mathbf{a}^{(n-1)})) \in \varrho^{\mathbf{B}_i} \\ &\iff (\beta_i^\infty(h(\mathbf{a}^{(0)})), \dots, \beta_i^\infty(h(\mathbf{a}^{(n-1)}))) \in \varrho^{\mathbf{B}_i}.\end{aligned}$$

因此，$\varrho^{\mathbf{A}_\infty}(\underline{\mathbf{a}}^{(0)}, \dots, \mathbf{a}^{(n-1)}) \ge \varrho^{\mathbf{B}_\infty}(h(\underline{\mathbf{a}}^{(0)}), \dots, h(\mathbf{a}^{(n-1)}))$。由此可得，$h$ 是度量同态。

显然，若 $(h_i)_{i<\omega}$ 是自然嵌入，则 (1) 和 (2) 中的蕴含关系都是等价关系。因此，在这种情况下，h 是度量嵌入。 □

前述观察意味着这个映射

$$\varprojlim\colon ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\le j<\omega}) \mapsto \mathcal{A}_\infty, \qquad (h_i)_{i<\omega} \mapsto h$$

是从 $[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$ 到 $\mathscr{U}_\Sigma$ 的函子。

2.15. **观察**。 存在一个自然的遗忘函子 U: $\mathscr{U}_\Sigma \to \mathscr{S}_\Sigma$，它将每个超度量Σ-结构 $\mathcal{A}$ 映射到其底层的 Σ-结构 $\mathbf{A}$，其中 $\mathbf{A}$与 $\mathcal{A}$ 共享载体集和基本运算，而 $\mathbf{A}$的基本关系定义为

$$\varrho^{\mathbf{A}} = \{\bar{a} \in A^{\mathrm{ar}(\varrho)} \mid \varrho^{\mathcal{A}}(\bar{a}) = 0\}.$$

函子 U 有一个左伴随 Met，它将每个 Σ-结构 $\mathbf{A}$ 映射到一个超度量结构 $\mathcal{A}$，后者与$\mathbf{A}$ 共享载体集和基本运算。$\mathcal{A}$ 的超度量 $\delta_{\mathcal{A}}$ 是由下式给出的离散度量

$$\delta_{\mathcal{A}}(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \ne y. \end{cases}$$

此外，对于每个关系符号 $\varrho \in \mathrm{P}$，比如说，其元数为 n，我们有

$$\varrho^{\mathcal{A}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \begin{cases} 0 & (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \varrho^{\mathbf{A}} \\ 1 & (x_0, \dots, x_{n-1}) \notin \varrho^{\mathbf{A}}. \end{cases}$$

不难看出，Met 可全嵌入 $\mathscr{S}_\Sigma$ 到 $\mathscr{U}_\Sigma$中。

到目前为止，我们已经证明， ω-上链之间的自然变换会产生其规范超度量结构之间的度量同态。一个相关问题是，规范超度量结构之间的所有度量同态是否都具有这种形式。为了回答这个问题（以及更多问题），我们的目标是定义一个函子 $\mathrm{Seq}\colon \mathscr{U}_\Sigma \to [\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$，它是 Lim 的左伴随。

给定一个超度量结构 $\mathbf{A} = (A, \delta_{\mathcal{A}}, (f_{\mathcal{A}})_{f\in\Phi}, (\varrho^{\mathcal{A}})_{\varrho\in\mathrm{P}})$。对于每个 $i<\omega$，按以下方式定义 $\approx_i \subset A\times A$

$$x \approx_i y :\Leftrightarrow \delta_{\mathcal{A}}(x,y) < 2^{-i}.$$

由于 $\delta_{\mathcal{A}}$ 是一个超度量，我们有所有的 $\approx_i$ 都是 A上的等价关系。接下来，对于每个 $i<\omega$，定义 $A_i := A/{\approx_i}$。我们的目标是使 A_i 成为某个 Σ-结构 $\mathbf{A}_i$的载体。为此，对于每个$\varrho\in\mathrm{P}$（例如，其元数为 n），我们按以下方式定义 $\varrho^{\mathbf{A}_i}\subseteq A_i^n$

$$([a_0]_{\approx_i},\dots,[a_{n-1}]_{\approx_i}) \in \varrho^{\mathbf{A}_i} :\Leftrightarrow \exists b_0\in[a_0]_{\approx_i}\dots\exists b_{n-1}\in[a_{n-1}]_{\approx_i} : \varrho^{\mathcal{A}}(b_0,\dots,b_{n-1}) < 2^{-i}.$$

接下来，对于每个运算符号 $f\in\Phi$（例如，元数为 $\mathrm{ar}(f)=n$），以及所有 $a_0,\dots,a_{n-1}\in A$，定义

$$f^{\mathbf{A}_i}([a_0]_{\approx_i},\dots,[a_{n-1}]_{\approx_i}) := [f^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})]_{\approx_i}.$$

为了说明 $f\mathbf{A}^i$ 是定义良好的，设 $b_0,\dots,b_{n-1}\in A$，使得 $b_0\in[a_0]_{\approx_i},\dots,b_{n-1}\in[a_{n-1}]_{\approx_i}$。令 $\bar a := (a_0,\dots,a_{n-1})$ 和 $\bar b := (b_0,\dots,b_{n-1})$。那么 $\delta_{\mathcal{A}}(\bar a,\bar b) < 2^{-i}$。由于 $f\mathbf{A}$ 是 1-利普希茨的，我们还有 $\delta_{\mathcal{A}}(f\mathbf{A}(\bar a), f\mathbf{A}(\bar b)) < 2^{-i}$。然而，这直接意味着 $[f\mathbf{A}(\bar a)]_{\approx_i} = [f\mathbf{A}(\bar b)]_{\approx_i}$。

现在我们定义 $\mathbf{A}_i := (A/{\approx_i}, (f_{\mathbf{A}^i})_{f\in\Phi}, (\varrho^{\mathbf{A}_i})_{\varrho\in\mathrm{P}})$。完成这一步后，对于每个 $0\le i\le j<\omega$，我们根据 $\alpha_i^j\colon [x]_{\approx_j}\mapsto[x]_{\approx_i}$ 定义 $\alpha_i^j\colon A_j\to A_i$。由于 $(\approx_i)\supseteq(\approx_j)$，可知 α_i^j 定义良好，因此我们可以定义：

$$\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) := ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\le j<\omega}).$$

2.16. 注　**释**。对于所有 $0\le i\le j<\omega$，我们有 $\alpha_i^j\colon \mathbf{A}j\to\mathbf{A}_i$ 是一个满射同态 *sm.*

到目前为止，我们只定义了函子 Seq 在对象上的作用。接下来定义它在态射上的作用。设 A 和 B 是度量 Σ-结构，且 $h\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ 是一个度量同态。自然地，我们根据 $h_i\colon [a]_{\approx_i}\mapsto[$ 定义 $h_i\colon A_i\to B_i$，使其满足 $h(a)]_{\approx_i}$。

2.17. **观察**。$(h_i)_{i<\omega}\colon \mathrm{Seq}(\mathcal{A})\Rightarrow\mathrm{Seq}(\mathcal{B})$ 是一个自然变换。此外，如果 h 是度量嵌入，那么 $(h_i)_{i<\omega}$ 是一个自然嵌入。

证明。首先注意到，h 是 1-利普希茨的这一事实意味着 h_i 作为函数是良定义的。设 $f\in\Phi$ 的元数为 n。令 $[a_0]_{\approx_i},\dots,[a_{n-1}]_{\approx_i}\in A_i$。则

$$\begin{aligned} f^{\mathbf{B}_i}(h_i([a_0]_{\approx_i}),\dots,h_i([a_{n-1}]_{\approx_i})) &= f^{\mathbf{B}_i}([h(a_0)]_{\approx_i},\dots,[h(a_{n-1})]_{\approx_i}) \\ &= [f^{\mathcal{B}}(h(a_0),\dots,h(a_{n-1}))]_{\approx_i} \\ &= [h(f^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1}))]_{\approx_i} \\ &= h_i([f^{\mathcal{A}}(a_0,\dots,a_{n-1})]_{\approx_i}) \\ &= h_i(f^{\mathbf{A}_i}([a_0]_{\approx_i},\dots,[a_{n-1}]_{\approx_i})). \end{aligned}$$

现在设 $\varrho\in\mathrm{P}$ 的元数为 n，并设 $[a_0]_{\approx_i}$、……、$[a_{n-1}]_{\approx_i}\in A_i$。那么

$$([a_0]_{\approx_i},\dots,[a_{n-1}]_{\approx_i})\in\varrho^{\mathbf{A}_i} \iff \forall j\in\{0,\dots,n-1\}\,\exists b_j\in[a_j]_{\approx_i}\,\varrho^{\mathcal{A}}(b_0,\dots,b_{n-1}) < 2^{-i}.$$

固定这样一个元组（b_0、……、 b_{n-1}）。根据度量同态的定义，我们有$\varrho^{\mathcal{B}}(h(b_0)，……，h(b_{n-1}))$ $< 2^{-i}$。因此，$([h(b_0)]_{\approx_i}，……，[h(b_{n-1})]_{\approx_i}) \in \varrho^{\mathbf{B}_i}$。然而，

$$([h(b_0)]_{\approx_i}, \ldots, [h(b_{n-1})]_{\approx_i}) = ([h(a_0)]_{\approx_i}, \ldots, [h(a_{n-1})]_{\approx_i}) = h_i([a_0]_{\approx_i}, \ldots, [a_{n-1}]_{\approx_i}).$$

因此，h_i 是一个同态。

如果h 是一个度量嵌入，那么在上面的段落中，我们还可以得到

$$\varrho^{\mathcal{B}}(h(b_0), \ldots, h(b_{n-1})) < 2^{-i} \Rightarrow \varrho^{\mathcal{A}}(b_0, \ldots, b_{n-1}) < 2^{-i}.$$

结合h 是一个等距映射这一点，可以得出h_i 是一个嵌入 .

剩下要检查的是$(h_i)_{i<\omega}$的自然性。令 $0 \leq i \leq j < \omega$，并令 $[a]_{\approx_j} \in A_j$。那么

$$h_i(\alpha_i^j([a]_{\approx_j})) = h_i([a]_{\approx i}) = [h(a)]_{\approx_i} = \beta_i^j([h(a)]_{\approx_j}) = \beta_i^j(h_j([a]_{\approx_j})). \qquad \square$$

至此，函子 Seq 已被完全定义。Seq 与态射复合的相容性可直接由h_i的定义得出。

我们的下一个目标是证明函子 Seq 是 Lim— 的左伴随。为此，我们对每个 A $\in \mathscr{U}_\Sigma$ 定义一个函数 $\eta_{\mathcal{A}}$: A ! Lim—(Seq(A))，如下所示：

$$\eta_{\mathcal{A}} \colon x \mapsto ([x]_{\approx_i})_{i<\omega}.$$

2.18. **观察**。 对于每个$\mathcal{A} \in \mathscr{U}_\Sigma$，我们有 $\eta_{\mathcal{A}}$ 是一个双射度量同态。

证明。 首先证明 $\eta_{\mathcal{A}}$ 是 1-利普希茨：令 $x, y \in A$。那么，根据定义

$$\delta(\eta_{\mathcal{A}}(x), \eta_{\mathcal{A}}(y)) = \delta(([x]_{\approx_i})_{i<\omega}, ([y]_{\approx_i})_{i<\omega}) = 2^{-M},$$

其中

$$M = \min\{j < \omega \mid [x]_{\approx_j} \neq [y]_{\approx_j}\}.$$

注意，我们有

$$[x]_{\approx_j} \neq [y]_{\approx_j} \iff y \notin [x]_{\approx_j} \iff \delta(x, y) \geq 2^{-j}.$$

因此我们得到

$$M = \min\{j < \omega \mid d(x, y) \geq 2^{-j}\}.$$

然而，这意味着

$$\delta(x, y) \geq \delta(([x]_{\approx_i})_{i<\omega}, ([y]_{\approx_i})_{i<\omega}) = \delta(\eta_{\mathcal{A}}(x), \eta_{\mathcal{A}}(y)).$$

接下来我们证明 $\eta_{\mathcal{A}}$ 是双射：首先注意到 $\eta_{\mathcal{A}}$ 是单射，因为对于每个 $x \in A$，我们都有

$$\{x\} = \bigcap_{i<\omega} [x]_{\approx_i}.$$

为证明满射性，取 Lim—(Seq(A)) 中的一个元素 $(M_i)_{i<\omega}$。对于每个 $i < \omega$，选取某个 $x_i \in M_i$。那么 $(x_i)_{i<\omega}$ 是 $(A, \delta_{\mathcal{A}})$ 中的柯西序列。由于 $(A, \delta_{\mathcal{A}})$ 是完备的，该序列有一个极限 x。显然，对于每个 $i < \omega$，都有 $M_i = [x]_{\approx_i}$。

剩下要证明的是， $\eta_{\mathcal{A}}$ 满足基本运算和基本关系的相容条件。为简洁起见，用 B 表示 Lim—(Seq(A))。设 $f \in \Phi$，其元数为 n。设$x_0, \ldots, x_{n-1} \in A$。那么

$$\begin{aligned}\eta_{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1})) &= ([f^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1})]_{\approx_i})_{i<\omega} = (f^{\mathbf{A}_i}([x_0]_{\approx_i}, \ldots, [x_{n-1}]_{\approx_i}))_{i<\omega} \\ &= f^{\mathcal{B}}(([x_0]_{\approx_i})_{i<\omega}, \ldots, ([x_{n-1}]_{\approx_i})_{i<\omega}) = f^{\mathcal{B}}(\eta_{\mathcal{A}}(x_0), \ldots, \eta_{\mathcal{A}}(x_{n-1})).\end{aligned}$$

设 $\varrho \in$ P 的元数为 n。设 x_0，……， $x_{n-1} \in A$。那么

$$\varrho^{\mathcal{B}}(\eta_{\mathcal{A}}(x_0), \ldots, \eta_{\mathcal{A}}(x_{n-1})) = \varrho^{\mathcal{B}}(([x_0]_{\approx_i})_{i<\omega}, \ldots, ([x_{n-1}]_{\approx_i})_{i<\omega}) = 2^{-M},$$

其中

$$M = \min\{j < \omega \mid ([x_0]_{\approx_j}, \ldots, [x_{n-1}]_{\approx_j}) \notin \varrho^{\mathbf{A}_j}\}.$$

注意，我们有

$([x_0]_{\approx_j}, \ldots, [x_{n-1}]_{\approx_j}) \notin \varrho^{\mathbf{A}_j} \Longleftrightarrow \forall a_0 \in [x_0]_{\approx_j} \ldots \forall a_{n-1} \in [x_{n-1}]_{\approx_j}: \quad \varrho^{\mathcal{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \geq 2^{-j}$。特别是

$$\varrho^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) \geq 2^{-M} = \varrho^{\mathcal{B}}(\eta_{\mathcal{A}}(x_0), \ldots, \eta_{\mathcal{A}}(x_{n-1})).$$

□

接下来我们考虑族 $\eta = (\eta_{\mathcal{A}})_{\mathcal{A} \in \mathscr{U}_\Sigma}$。

2.19. **观察**。 η: $1_{\mathscr{U}_\Sigma} \Rightarrow \mathrm{Lim}\longleftarrow \circ \mathrm{Seq}$ 是一个自然变换。

证明。 设 A, B $\in \mathscr{U}_\Sigma$，并设 h: A ! B。我们需要证明下图交换:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "h"'] & \varprojlim(\mathrm{Seq}(\mathcal{A})) \arrow[d, "\varprojlim(\mathrm{Seq}(h))"] \\
\mathcal{B} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{B}}"] & \varprojlim(\mathrm{Seq}(\mathcal{B})).
\end{tikzcd}$$

为此，我们需要证明

$$\varprojlim(\mathrm{Seq}(h))(([x]_{\approx_i})_{i<\omega}) = ([h(x)]_{\approx_i})_{i<\omega}.$$

回顾一下，$\mathrm{Seq}(h) = (h_i)_{i<\omega}$: Seq(A) ! Seq(B) 的定义如下:

$$h_i : \mathbf{A_i} \to \mathbf{B_i}, \text{where} \quad [x]_{\approx_i} \mapsto [h(x)]_{\approx_i}.$$

Thus

$$\varprojlim(\mathrm{Seq}(h))(([x]_{\approx_i})_{i<\omega}) = (h_i([x]_{\approx_i}))_{i<\omega} = ([h(x)]_{\approx_i})_{i<\omega},$$

正如所需。 □

现在设 –A $=((\mathbf{A_i})_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\leq j<\omega})$ 是一个 ω-上链。令 A 为其典范超度量结构。令 $\mathbf{A}_\infty := U$ (A) 为 –A 的典范极限，并令 $(\alpha_i^\infty)_{i<\omega}$ 为典范极限锥。设 –B $\underset{\leftarrow}{:=} \quad = \quad {}_i \; {}_{i<\omega} \quad {}_{i\leq j<\omega} \quad {}_i = \quad {}_\infty \; {}_{\approx_i} \quad \varepsilon\leftarrow \quad \_ \quad \Rightarrow$ Seq(A) ((**B**), (β_i^j))（回顾一下，**BA**/ ）。我们按如下方式定义 A : Seq(Lim (–A)) A:

$$\varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{A}}} = (\varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{A}},i})_{i<\omega} \text{ where } \varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{A}},i} : \mathbf{B}_i \to \mathbf{A}_i \quad [\mathbf{a}]_{\approx_i} \mapsto \alpha_i^\infty(\mathbf{a}) = a_i.$$

2.20. **观察**。设 $\varepsilon := (\varepsilon\leftarrow\mathrm{A})\leftarrow\!-\mathrm{A}$。那么 ε:Seq∘Lim$\longleftarrow \Rightarrow 1_{[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]}$ 是一个自然变换。

证明。 令 –K $=((\mathbf{K}_i)_{i<\omega}, (\kappa_i^j)_{i\leq j<\omega}) \in [\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$具有典范结构 K，并令 –L $=((\mathbf{L}_i, (\lambda_i^j)_{i\leq j<\omega})) :=$Seq(K)。令 $(\zeta_i)_{i<\omega}$: –A $\Rightarrow \overleftarrow{\mathrm{K}}$。令 $\zeta :=$Lim—$(\zeta_i)_{i<\omega}(\zeta$: Lim $\_\_ \overleftarrow{\mathrm{A}}$! Lim $\_\_ \overleftarrow{\mathrm{K}})$。我们需要证明下图交换:

(3)
$$\begin{tikzcd}
\overleftarrow{\mathrm{B}} \arrow[r, Rightarrow, "\varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{A}}}"] \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{Seq}(\zeta)"'] & \overleftarrow{\mathrm{A}} \arrow[d, Rightarrow, "(\zeta_i)_{i<\omega}"] \\
\overleftarrow{\mathrm{L}} \arrow[r, Rightarrow, "\varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{K}}}"] & \overleftarrow{\mathrm{K}}
\end{tikzcd}$$

一方面，我们计算得，对每个 $i < \omega$ 都有

$$\zeta_i(\varepsilon^{\leftarrow}_{\mathrm{A},i}([\mathbf{x}]_{\approx_i})) = \zeta_i(x_i).$$

另一方面，我们计算

$$\mathrm{Seq}(\zeta)_i([\mathbf{x}]_{\approx_i}) = [\zeta(\mathbf{x})]_{\approx_i} = [(\zeta_j(x_j))_{j<\omega}]_{\approx_i}.$$

Thus

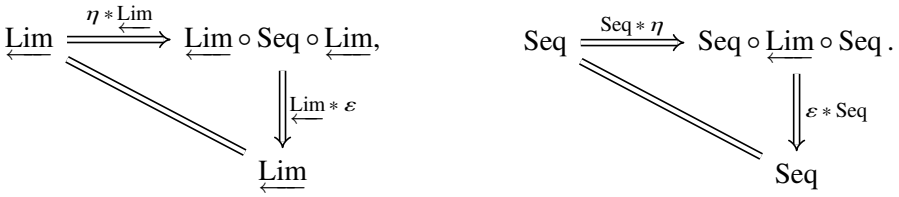
$$\varepsilon^{\leftarrow}_{\mathrm{K},i}(\mathrm{Seq}(\zeta)_i([\mathbf{x}]_{\approx_i}) = \varepsilon^{\leftarrow}_{\mathrm{K},i}([(\zeta_j(x_j))_{j<\omega}]_{\approx_i}) = \zeta_i(x_i).$$

因此，图表 (3) 交换。 □

2.21. **命题**。 函子 Seq 是函子 $\mathrm{Lim}\!\longleftarrow$ 的左伴随，其单位为 η，余单位为 ε。

证明。 我们将使用 [19,定理 IV.1.2(v)] 中对伴随的刻画：也就是说，我们证明 η 和 ε 满足三角恒等式：

(4)



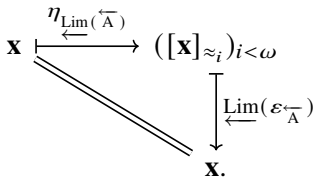
Here

$$\begin{aligned}
\eta * \underleftarrow{\mathrm{Lim}}\colon\ & \underleftarrow{\mathrm{Lim}} \Rightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}} \circ \mathrm{Seq} \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}} && (\eta * \underleftarrow{\mathrm{Lim}})^{\leftarrow}_{\mathrm{A}} = \eta_{\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{A}})},\\
\underleftarrow{\mathrm{Lim}} * \varepsilon\colon\ & \underleftarrow{\mathrm{Lim}} \circ \mathrm{Seq} \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}} \Rightarrow \underleftarrow{\mathrm{Lim}} && (\underleftarrow{\mathrm{Lim}} * \varepsilon)^{\leftarrow}_{\mathrm{A}} = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\varepsilon^{\leftarrow}_{\mathrm{A}}),\\
\mathrm{Seq} * \eta\colon\ & \mathrm{Seq} \Rightarrow \mathrm{Seq} \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}} \circ \mathrm{Seq} && (\mathrm{Seq} * \eta)_{\mathcal{A}} = \mathrm{Seq}(\eta_{\mathcal{A}}),\\
\varepsilon * \mathrm{Seq}\colon\ & \mathrm{Seq} \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}} \circ \mathrm{Seq} \Rightarrow \mathrm{Seq} && (\varepsilon * \mathrm{Seq})_{\mathcal{A}} = \varepsilon_{\mathrm{Seq}(\mathcal{A})},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\eta_{\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{A}})}&\colon \mathbf{x} \mapsto ([\mathbf{x}]_{\approx_i})_{i<\omega},\\
\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\varepsilon^{\leftarrow}_{\mathrm{A}})&\colon ([\mathbf{x}]_{\approx_i})_{i<\omega} \mapsto (\varepsilon^{\leftarrow}_{\mathrm{A},i}([\mathbf{x}]_{\approx_i}))_{i<\omega} = \mathbf{x},\\
\mathrm{Seq}(\eta_{\mathcal{A}})_i&\colon [x]_{\approx i} \mapsto [([x]_{\approx_j})_{j<\omega}]_{\approx_i} = \{([y]_{\approx_j})_{j<\omega} \mid [x]_{\approx_i} = [y]_{\approx_i}\},\\
\varepsilon_{\mathrm{Seq}(\mathcal{A}),i}&\colon [([x]_{\approx_j})_{j<\omega}]_{\approx_i} \mapsto [x]_{\approx_i}.
\end{aligned}$$

为了检查（4）中的左侧三角形交换，令 $-\mathrm{A} \in [\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$，并令 $\mathbf{x} \in \mathrm{Lim}\!\longleftarrow\!(-\mathrm{A})$。现在我们可以沿着上述图表追踪 $\mathbf{x}$：



最后，为了观察（4）中右侧三角形的交换性，令 $\mathbf{A} \in \mathscr{U}_\Sigma$，并令 $x \in A$，再令 $i < \omega$ 为任意元素。同样，我们可以沿着（4）中的右侧三角形追踪 x：

$$\begin{array}{ccc} [x]_{\approx_i} & \xmapsto{\mathrm{Seq}(\eta_{\mathcal{A}})_i} & [([x]_{\approx_j})_{j<\omega}]_{\approx_i} \\ & \searrow & \Big\downarrow \varepsilon_{\mathrm{Seq}(\mathcal{A}),i} \\ & & [x]_{\approx_i}. \end{array}$$

这就完成了证明。 □

伴随 (Seq,Lim—, ε, η) 分别在 $[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$ 和 $\mathscr{U}_\Sigma$ 的某些满子范畴之间诱导出伴随等价。在 ω-上链这一侧，该子范畴由所有满足 $\varepsilon{\leftarrow}\mathbf{A}$ 是自然同构的 ω-上链 A 构成。在超度量结构这一侧，该子范畴由所有满足 $\eta_{\mathcal{A}}$ 是度量同构的 A 构成。以下观察将对此作更精确的说明：

2.22. **观察**。 *(1)* 设 $\leftarrow\!\!-\mathbf{A} = ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\le j<\omega}) \in [\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$。则自然变换 $\varepsilon{\leftarrow}\mathrm{A} : \mathrm{Seq}(\mathrm{Lim}{\leftarrow}\!\!-(\leftarrow\!\!-\mathrm{A})) \Rightarrow \overleftarrow{\mathrm{A}}$ 是自然嵌入。当且仅当对所有 $i \le j < \omega$， α_i^j 都是满射时，它才是自然同构。

(2) 设 $\mathcal{A} \in \mathscr{U}_\Sigma$。我们已在 *2.18* 中看到， $\eta_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \to \mathrm{Lim}{\leftarrow}\!\!-(\mathrm{Seq}(\mathcal{A}))$ 是一个双射度量同态。现在再补充观察： $\eta_{\mathcal{A}}$ 是度量同构，当且仅当 $\mathcal{A}$ 与 $\mathrm{Lim}{\leftarrow}\!\!-(\leftarrow\!\!-\mathrm{A})$ 对某个 $\leftarrow\!\!-\mathbf{A} \in [\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$ 而言度量同构。换言之， $\eta_{\mathcal{A}}$ 是度量同构，当且仅当 $\mathcal{A} \in \pi\mathscr{S}_\Sigma$。

证明。关于 1：令 $\mathbf{A}_\infty = \mathrm{Lim}{-}(-\mathrm{A})$，并令 $\mathrm{Seq}(\mathbf{A}) = ((\tilde{\ }\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\tilde{\alpha}_i^j)_{i\le j<\omega})$。那么 $\varepsilon{\leftarrow}\mathrm{A},_i\colon \tilde{\ }\mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_i$，其中 $\varepsilon{\leftarrow}\mathrm{A},_i\colon [\mathrm{x}]_{\approx_i} \mapsto x_i$。设 $\mathrm{y} \in A_\infty$，使得 $x_i = y_i$。那么 $\delta_{A_\infty}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) < 2^{-i}$。因此 $\mathrm{x} \approx_i \mathrm{y}$。这说明 $\varepsilon{\leftarrow}\mathrm{A},_i$ 是单射。

令 $\varrho \in \mathrm{P}$ 的元数为 n。令 $\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)} \in A_\infty$，使得 $(x_i^{(0)}, \dots, x_i^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_i}$。那么

$$\varrho^{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) = \underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x}^{(0)}, \dots, \mathbf{x}^{(n-1)}) < 2^{-i}.$$

因此，根据定义，

$$([\mathbf{x}^{(0)}]_{\approx_i}, \dots, [\mathbf{x}^{(n-1)}]_{\approx_i}) \in \varrho^{\tilde{\mathbf{A}}_i}.$$

因此， $\varepsilon{\leftarrow}\mathbf{A},_i$ 是一个嵌入。

注意，由 2.16 可知，对每个 $i \le j < \omega$， $\tilde{\alpha}_i^j$ 都是满射。因此，如果 $\varepsilon{\leftarrow}\mathbf{A}$ 是一个自然同构，那么对所有 $i \le j < \omega$， α_i^j 都是满射。

现在假设对所有 $i \le j < \omega$， α_i^j 都是满射。我们需要证明 $\varepsilon{\leftarrow}\mathbf{A},_i$ 是满射。取 $x_i \in A_i$。对所有 $k < i$，我们定义 $x_k := \alpha_k^i(x_i)$；对所有 $k \ge i$， x_k 归纳地定义如下：如果对于某个 $k \ge i$， x_k 已定义，那么我们选择 $x_{k+1} \in A_{k+1}$，使得 $\alpha_k^{k+1}(x_{k+1}) = x_k$。定义 $\mathbf{x} := (x_k)_{k<\omega}$。那么，根据构造可知 $\mathbf{x} \in A_\infty$。此外，我们有 $\varepsilon{\leftarrow}\mathrm{A},_i([\mathbf{x}]_{\approx_i}) = x_i$，正如所需。因此， $\varepsilon{\leftarrow}\mathbf{A}$ 确实是一个自然同构。

关于 2： 注意，$\mathrm{Lim}{-}(\mathrm{Seq}(\mathbf{A})) \in \pi\mathscr{S}_\Sigma$。如果 $\eta_{\mathcal{A}}$ 是度量同构，那么 $\mathbf{A} \in \pi\mathscr{S}_\Sigma$。

因此，以下设 $\mathbf{A} \in \pi\mathscr{S}_\Sigma$。不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\infty = \mathrm{Lim}{-}(-\mathrm{A})$，其中 $-\mathbf{A} \in [\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]$。于是 $\eta_{\mathcal{A}}\colon \mathbf{x} \mapsto ([\mathbf{x}]_{\approx_i})_{i<\omega}$。

记 $\mathrm{Seq}(\mathbf{A}) = ((\tilde{\ }\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\tilde{\alpha}_i^j)_{i\le j<\omega})$。令 $\mathrm{eA}_\infty := \mathrm{Lim}{-}(\mathrm{Seq}(\mathbf{A}))$。令 $(\tilde{\alpha}_i^\infty)_{i<\omega}$ 为 $\mathbf{A}_\infty = U(\mathbf{A}_\infty)$ 的典范 $\tilde{\ }$ e 锥。

˜首先我们证明 $\eta_{\mathcal{A}}\colon (A_\infty,\ \delta_{\mathcal{A}_\infty}) ! (A_\infty,\ \delta^{\sim}{}_{\mathcal{A}})$ 是一个等距映射：令 $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in A_\infty (\mathbf{a} \neq \mathbf{b})$。令 $i < \omega$。于是

$$\alpha_i^\infty(\mathbf{a}) = \alpha_i^\infty(\mathbf{b}) \iff a_i = b_i \iff [\mathbf{a}]_{\approx_i} = [\mathbf{b}]_{\approx_i}$$

and

$$\tilde{\alpha}_i^\infty(\eta_{\mathcal{A}}(\mathbf{a})) = \tilde{\alpha}_i^\infty(\eta_{\mathcal{A}}(\mathbf{b})) \iff \tilde{\alpha}_i^\infty(([\mathbf{a}]_{\approx_j})_{j<\omega}) = \tilde{\alpha}_i^\infty(([\mathbf{b}]_{\approx_j})_{j<\omega}) \iff [\mathbf{a}]_{\approx_i} = [\mathbf{b}]_{\approx_i}.$$

因此，$\delta_{\mathcal{A}_\infty}(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \delta^{\sim}\mathrm{A}_\infty(\eta_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}),\ \eta_{\mathcal{A}}(\mathbf{b}))$。

类似地，对于元数为 n 的 $\varrho \in \mathrm{P}$，对于 $\mathbf{x}^{(0)}$，……，$\mathbf{x}^{(n-1)} \in A_\infty$，以及对于 $i < \omega$，我们可以论证

$$(\alpha_i^\infty(\mathbf{x}^{(0)}), \ldots, \alpha_i^\infty(\mathbf{x}^{(n-1)})) \in \varrho^{\mathbf{A}_i} \iff (x_i^{(0)}, \ldots, x_i^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_i}$$
$$\iff \underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x}^{(0)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}) < 2^{-i}.$$

另一方面，我们有

$$\varrho^{\widetilde{\mathcal{A}}_\infty}(\eta_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(0)}), \ldots, \eta_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(n-1)})) < 2^{-i} \iff \varrho^{\widetilde{\mathcal{A}}_\infty}(([\mathbf{x}^{(0)}]_{\approx_j})_{j<\omega}, \ldots, ([\mathbf{x}^{(n-1)}]_{\approx_j})_{j<\omega}) < 2^{-i}$$
$$\iff ([\mathbf{x}^{(0)}]_{\approx_i}, \ldots, [\mathbf{x}^{(n-1)}]_{\approx_i}) \in \varrho^{\tilde{\mathbf{A}}_i}$$
$$\iff \exists \mathbf{y}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}]_{\approx_i}, \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)} \in [\mathbf{x}^{(n-1)}]_{\approx_i} : \varrho^{\mathcal{A}_\infty}(\mathbf{y}^{(0)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}) < 2^{-i}$$
$$\iff \exists \mathbf{y}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}]_{\approx_i}, \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)} \in [\mathbf{x}^{(n-1)}]_{\approx_i} : (y_i^{(0)}, \ldots, y_i^{(n-1)}) \in \varrho^{\mathbf{A}_i}$$

由于对于所有 $\mathbf{y}^{(0)} \in [\mathbf{x}^{(0)}]_{\approx_i}$，……，$\mathbf{y}^{(n-1)} \in [\mathbf{x}^{(n-1)}]_{\approx_i}$，我们都有 $(y_i^{(0)}$，……，$y_{(n-1)i})$ 等于 $(x_{(}0)_i$，……，$x_i^{(n-1)})$，这两条等价链得出

$$\varrho^{\widetilde{\mathcal{A}}_\infty}(\eta_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(0)}), \ldots, \eta_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^{(n-1)})) = \underline{\varrho}^{\mathbf{A}_\infty}(\mathbf{x}^{(0)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}) \quad (= \varrho^{\mathcal{A}_\infty}(\mathbf{x}^{(0)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)})). \qquad \square$$

下文中，对于 $\mathscr{S}_\Sigma$ 的每个全子范畴 $\mathscr{C}$，我们用 $[[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]]$ 表示 $[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]$ 的全子范畴，该子范畴由所有满足以下条件的 ω-上链 $-\mathrm{A} = ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega},\ (\alpha_i^j)_{i \leq j < \omega})$ 所生成：所有 $\mathbf{A}_i$ 均来自 $\mathscr{C}$，且所有 α_i^j 均为满射（其中 $i \leq j < \omega$）。此外，我们用 $\boldsymbol{\pi}\mathscr{C}$ 表示 $\mathscr{U}_\Sigma$ 的全子范畴，该子范畴由 $\pi\mathscr{C}$ 所生成。观察 2.22 表明，$[[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]]$ 和 $\boldsymbol{\pi}\mathscr{S}_\Sigma$ 是等价范畴（该伴随等价由 Lim— 和 Seq 在 $[[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{S}_\Sigma]]$ 与 $\boldsymbol{\pi}\mathscr{S}_\Sigma$ 上的限制给出）。

2.4. **遗传类的情形**。 如果我们将注意力限制在这样的满子范畴 $\mathscr{C}$ of $\mathscr{S}_\Sigma$上，其中 $\mathscr{C}$ 是一个遗传类（即，它由有限生成的 Σ-结构组成，并具有遗传性质），那么算子 σ 和 π 的理论就会变得更加顺畅。我们已经指出，对于遗传类 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}_\Sigma$，$\sigma\mathscr{C}$ 由所有可数生成的 Σ-结构组成，且其年龄包含于 $\mathscr{C}$中。对于算子 π，在这种情况下，我们可以从上一节构造的伴随等价中得到更多：

2.23. **命题**。 设 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}_\Sigma$，使得 $\mathscr{C}$在 $\mathscr{S}_\Sigma$中具有遗传性质。那么 $[[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]]$和 $\boldsymbol{\pi}\mathscr{C}$ 是等价范畴。伴随等价由Lim⟵和 Seq的相应限制给出。

证明。 我们只需证明 Lim—$\restriction_{\boldsymbol{\pi}\mathscr{C}}$ 的像属于 $\boldsymbol{\pi}\mathscr{C}$，且 Seq$\restriction_{\boldsymbol{\pi}\mathscr{C}}$的像包含于 $[[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]]$。前者显然成立。因此，设 A $\in \pi\mathscr{C}$。不失一般性，A

$\leftarrow^{=}$ — $\varepsilon\leftarrow$ — $\Rightarrow$Lim (–A)，其中 $-\mathrm{A} \in [\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]$。由观察 2.22(1)，A : Seq(Lim (–A)) A 是一个自然嵌入。由于 $\mathscr{C}$在 $\mathscr{S}_\Sigma$中具有遗传性质，由观察 2.16 可知，Seq(Lim—(–A)) =Seq(A) 属于 $[[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]]$。□

到目前为止，我们只针对模型论结构的类讨论了遗传性质。自然地，我们可以将这一概念推广到度量结构，并考察一个类 $\pi\mathscr{C}$在什么条件下具有广义遗传性质。

2.24. **定义**。 设 $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{M}$ 是一类度量 Σ-结构。若对于任意 B $\in \mathscr{D}$ 和 $\iota\colon$ A $\hookrightarrow!$ B 是从 A $\in \mathscr{M}$ 到 B 的度量嵌入，都有 A 也属于 $\mathscr{D}$，则称 $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{M}$ 中具有遗传性质（HP）。

2.25. **观察**。 设 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}_\Sigma$ 在 $\mathscr{S}_\Sigma$ 中具有遗传性质。则 $\pi\mathscr{C}$ 在 $\mathscr{U}_\Sigma$ 中具有遗传性质。

证明。 设 B $\in \pi\mathscr{C}$，A $\in \mathscr{U}_\Sigma$，且 ι: A $\hookrightarrow!$ B 是一个度量嵌入。由于 $\mathscr{C}$ 在 $\mathscr{S}_\Sigma$ 中具有遗传性质，由命题 2.23 可知 Seq(B) $\in [[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]]$。根据观察 2.17，Seq($\iota$) : Seq(A) ! Seq(B) 是一个自然嵌入。再次，由于 $\mathscr{C}$ 在 $\mathscr{S}_\Sigma$ 中具有遗传性质，可得 Seq(A) $\in [[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]]$。因此，Lim—(Seq(A)) $\in \pi\mathscr{C}$。

由于 η 是一个自然变换，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xhookrightarrow{\ \iota\ } & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle \eta_{\mathcal{A}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{\mathcal{B}}} \\ \varinjlim(\mathrm{Seq}(\mathrm{A})) & \xrightarrow{\varinjlim(\mathrm{Seq}(\iota))} & \varinjlim(\mathrm{Seq}(\mathrm{B})) \end{array}$$

由观察 2.22(2)， $\eta_{\mathcal{B}}$ 是一个度量同构。因此，Lim—(Seq(ι)) ◦ $\eta_{\mathcal{A}}$ 也是一个度量嵌入。由于 $\eta_{\mathcal{A}}$ 和 Lim—(Seq(ι))都是 1-利普希茨映射，且 $\eta_{\mathcal{A}}$ 是双射（见观察 2.18），可知它们实际上都是等距映射。类似地，由于 $\eta_{\mathcal{B}}$ ◦ ι 保持所有基本关系， $\eta_{\mathcal{A}}$ 和 Lim—(Seq(ι))也保持所有基本关系。因此， η_A 和 Lim—(Seq(ι))都是度量嵌入。于是 $\eta_{\mathcal{A}}$ 是一个度量同构。这意味着 A $\in \pi\mathscr{C}$。因此， $\pi\mathscr{C}$ 在 $\mathscr{U}_\Sigma$中具有遗传性质。□

3. 超度量齐性与普适性

本节介绍我们的主要结果，首先讨论新背景下的小性。获得超度量 Fraïssé 极限的关键因素是泛斜齐次同态的存在。

3.1. **超度量结构的小性概念**。 在模型论中，如果一个结构的载体集的基数不超过某个（通常未明确指定的）基数，就称该结构为小的 。在 Fraïssé 理论中，通常称有限关系结构为小结构；更一般地，称有限生成结构为小结构。对于度量结构，鉴于其配备了度量，我们至少可以区分四种小性的概念。若度量结构 A 满足以下某一条件，则可称其为小的：

(1) A 是有限的；(2) A 是有
限生成的；(3) A 是紧的；
(4) A 是紧生成的。

这里的紧性是指 A 上由 A 的度量诱导的拓扑下的紧性。

注。 回忆一下，度量空间 (M, δ) 的子集 A 称为全有界，如果对每个 $\varepsilon > 0$， A 都可以被有限个开 ε-球覆盖。 A 称为柯西预紧，如果 A 中的每个序列都含有一个柯西子列。众所周知， A 是全有界的

当且仅当它是柯西预紧的。此外， A 是紧的，当且仅当它是全有界且柯西完备的。

3.1. **观察**。 设 $\mathcal{A} \in \mathscr{U}_\Sigma$ 是一个超度量结构。子集 $M \subseteq A$ 是柯西预紧的，当且仅当对每个 $i < \omega$，都有 $M/{\approx_i}$ 是有限集。

证明。“⇒”：假设对于某个 $i < \omega$，集合 $M/{\approx_i}$是无限的。令 $([a_j]_{\approx_i})_{j<\omega}$为 $M/{\approx_i}$中一列互不相同的元素。那么对所有 $j_1 < j_2 < \omega$，都有 $\delta_{\mathcal{A}}(a_{j_1}, a_{j_2}) \geq 2^{-i}$。因此， M中的序列 $(a_j)_{j<\omega}$没有柯西子列。换言之， M 不是柯西预紧的。

“⇐”：令 $(a_j)_{j<\omega}$为 M中的一个序列。对每个 $i < \omega$，令 $L_i := \{[a_j]_{\approx_i} \mid j < \omega\}$，并令$N_i := \{[a]_{\approx_i} \in L_i \mid \{ j < \omega \mid [a_j]_{\approx_i} = [a]_{\approx_i}\}$ 是无限的$\}$。由于 $M/{\approx_i}$是有限的， N_i非空。令$N := \text{Đ}_{i<\omega} N_i$。于是 $(N, \supseteq)$ 是一棵树。由于所有 N_i 都是有限且非空的，根据柯尼希树引理，N 有一个分支 $([b_i]_{\approx_i})_{i<\omega}$。接下来，通过归纳法，我们定义一个序列 $j_0 < j_1 < \cdots < \omega$，使得对所有 $i < \omega$，都有 $[a_{j_i}]_{\approx_i} = [b_i]_{\approx_i}$。我们先定义 $j_0 := 0$。注意 $[b_0]_{\approx_0} = [a_0]_{\approx_0} = M$。假设 j_0、……、 j_n已经确定。取 $j_{n+1} \in J_{n+1} := \{k < \omega \mid [a_k]_{\approx_{n+1}} = [b_{n+1}]_{\approx_{n+1}}\}$，使得 $j_{n+1} > j_n$（这是可能的，因为 J_{n+1}是无限的）。我们断言，序列 $(a_{j_i})_{i<\omega}$是柯西序列。事实上，若 $i < k < \omega$，则 $[a_{j_i}]_{\approx_i} = [b_i]_{\approx_i}$，且 $[a_{j_k}]_{\approx_k} = [b_k]_{\approx_k}$。由于 $[b_k]_{\approx_k} \subseteq [b_i]_{\approx_i}$，我们有$[a_{j_k}]_{\approx_i} = [a_{j_i}]_{\approx_i}$，换言之 $\delta_{A_\infty}(a_{j_i}, a_{j_k}) < 2^{-i}$。这就证明了该断言。因此， M 是柯西预紧的。□

一个直接推论是：

3.2. **推论**。 设$\mathcal{A} \in \mathscr{U}_\Sigma$是一个超度量结构，且$\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) = ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\leq j<\omega})$。那么$\mathcal{A}$ 是紧的，当且仅当对于所有 $i < \omega$， 结构$\mathbf{A}_i$ 都是有限的。

证明。显然。 □

对于紧生成超度量结构，可以表述一个稍弱的观察：

3.3. **推论**。 设$\mathcal{A} \in \mathscr{U}_\Sigma$是紧生成的，且$\mathrm{Seq}(\mathcal{A}) = ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\leq j<\omega})$。那么对于所有 $i < \omega$，结构$\mathbf{A}_i$ 都是有限生成的。

证明。 设 $M \subseteq A$ 是A的一个紧生成系统。根据观察 3.1，对于每个 $i < \omega$， $M/{\approx_i}$ 都是有限的。令$(\alpha_i^\infty)_{i<\omega}$为Seq(A)的典范锥。由于 $\alpha_i^\infty \circ U(\eta_{\mathcal{A}}) : U(\mathrm{A}) \to \mathbf{A}_i$是一个满同态（参见 2.18），因此对于每个$i < \omega$， $M/{\approx_i}$ 都是$\mathbf{A}_i$的生成集。□

请注意，一般而言，有限生成结构的 ω-上链并不一定具有紧生成的典范超度量结构，以下例子便说明了这一点：

3.4. **例子**。 考虑幺半群的签名。它由 $\Sigma = (\Phi, \mathrm{P}, \mathrm{ar})$ 给出，其中 $\mathrm{P} = \emptyset$，且 $\Phi = \{\cdot, 1\}$ 的 $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$，$\mathrm{ar}(1) = 0$。我们的目标是定义一个有限生成幺半群的 ω-上链 $-\mathrm{A} = ((\mathbf{A}_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)^{i\leq j<\omega}) -$，使得 Lim— A 不紧生成。

设 $X = \{x_i \mid i < \omega\}$ 是一个互不相同字母的集合。对于每个 $i < \omega$，令 $X_i := \{x_0, \ldots, x_{i-1}\}$。进一步，令 $\mathbf{A}_i := X_i^*$为由 X_i 自由生成的自由幺半群（特别地， X_i^*由 X_i 上的所有有限词构成，词的连接是幺半群乘法，空词 ε 是单位元）。注意，$\mathbf{A}_0 = \{\varepsilon\}$。定义 α_0^1为唯一一个将 x_0 映射到 ε的同态。类似地，对于 $i > 0$，令 α_i^{i+1}为唯一一个幺半群同态，它对所有 $j < i$ 都将 x_j 映射到其自身，并将 x_i 映射到 x_0^i（这些同态的存在性和唯一性由以下事实保证：$-\mathbf{A}_{i+1}$ 由 X_{i+1}自由生成）。因此，我们定义了 ω-上链 A：

$$\mathbf{A}_0 \xleftarrow{\alpha_0^1} \mathbf{A}_1 \xleftarrow{\alpha_1^2} \mathbf{A}_2 \xleftarrow{\alpha_2^3} \mathbf{A}_3 \xleftarrow{\alpha_3^4} \cdots$$

令 $\mathbf{A}_\infty := \overline{\mathrm{Lim}}\,\mathbf{A}$。下面证明 $\mathbf{A}_\infty$ 不是紧生成的。一个重要的初步观察是，对于每个 $i<\omega$，$\mathbf{A}_i$ 的每个生成集都必须包含 X_i。令 $M\subseteq A_\infty$为 $\mathbf{A}_\infty$的任意生成集。那么对于每个 $i<\omega$，都存在$\mathbf{a}^{(i)}\in A_\infty$，使得 $a^{(i)}_{i+1}=x_i$。但这样一来，$a^{(i)}_1=x^i_1$。由此可得 $\alpha^\infty_1(M)\supseteq\{x^i_1\mid 0<i<\omega\}$。因此，根据观察 3.1，$M$ 不是柯西预紧的。

前面的例子提示了一种较弱的小性变体：

3.5. **定义**。 若超度量结构 A 的 Seq(A) 的像中每个结构都是有限生成的，则称 A 为原有限生成。

显然，如果一个超度量结构是紧生成的，那么它也是原有限生成的。正如上面的例子所示，反之则不成立。然而，对于纯关系签名，紧性、紧生成性和原有限生成性并无区别。在超度量结构中，我们选择原有限生成性作为小性的概念。

3.2. **通过射影极限构造泛齐次度量结构**。 本节开始探讨算子 σ 和 π 联合运用的力量。受描述集合论的启发，我们致力于构建一种可以称为描述模型论，或者更谨慎地说，描述弗雷塞理论的理论。朝这个方向迈出的第一步还处于探索阶段。我们从一个 Fraïssé 类 $\mathscr{C}$ 出发，并考察类 $\pi\sigma\mathscr{C}$。特别是，我们提出这样的问题： $\pi\sigma\mathscr{C}$ 是否包含有趣的结构？这里的“有趣”例如指具有高度对称性和／或对 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 具有泛性。

3.6. **定义**。 设 $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{U}_\Sigma$ 是一个超度量结构的遗传类。若结构 $\mathbf{U}\in\mathscr{M}$ 满足：每个来自 $\mathscr{M}$ 的超度量结构都能度量嵌入 U，则称 U 为 $\mathscr{M}$-泛的 。

若 $\mathbf{H}\in\mathscr{U}_\Sigma$ 中的每个原有限生成子结构之间的度量同构都能延拓为 H 的度量自同构，则称度量结构 $\mathbf{H}\in\mathscr{U}_\Sigma$ 为齐次 。

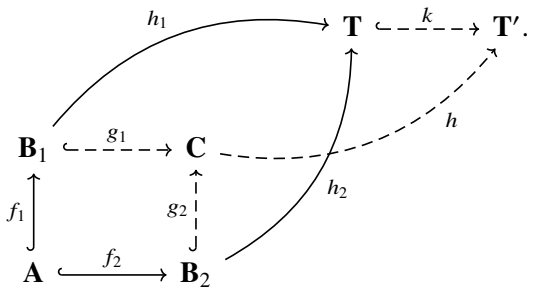
注。 Ben Yaacov 在 [3], 研究了泛齐次度量结构，其中小结构是有限生成度量结构。Fraïssé 极限是近似齐次的，也就是说，有限部分度量同构都能延拓为度量自同构，且误差可以任意小。

我们的方法与 [3] 不同，因为我们关注的是“严格”齐次结构（延拓可以保证不产生任何误差）。此外，我们采用了不同的小性概念。在 [3] 中，小度量结构是有限的；而我们的小结构大得多（原有限生成）。

为了能够表述关于齐次超度量结构的结果，我们还需要引入一些术语。

3.7. 定义。设 $\mathscr{C}$ 是同一类型的结构类。若对所有 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{T}\in\mathscr{C}$, $f_1\colon\mathbf{A}\hookleftarrow\mathbf{B}1$, $f_2\colon\mathbf{A}\hookleftarrow\mathbf{B}_2,\mathbf{h}_1\colon\mathbf{B}_1!\,\mathbf{T},\mathbf{h}_2\colon\mathbf{B}_2!\,\mathbf{T}$，若 $\mathbf{h}_1\circ f_1=\mathbf{h}_2\circ f_2$，则存在 $\mathbf{C}$、$\mathbf{T}'\in\mathscr{C}$, $g_1\colon\mathbf{B}_1\hookleftarrow\mathbf{C}$, $g_2\colon\mathbf{B}_2\hookleftarrow\mathbf{C},\mathbf{h}:\mathbf{C}!\,\mathbf{T}'$,

$k\colon \mathbf{T} \mathrel{\mathrlap{\rightarrow}\!\!\!\!\!\!\circ} \mathbf{T}'$ 使得下图交换：

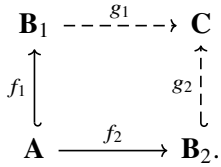


现在我们已经准备好表述主要结果：

3.8. **定理**。 设 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}_\Sigma$ 是一个年龄。当且仅当 $\mathscr{C}$ 具有合并性质 和AEP时， $\pi\sigma\mathscr{C}$ 包含一个泛且齐次超度量结构。此外， $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中的任意两个泛且齐次结构都是度量同构的。

在几个有趣的情形中，我们能够证明这些泛齐性超度量结构具有更高程度的对称性。这需要对签名和年龄 $\mathscr{C}$ 作出更强的假设：

3.9. **定义**。 设 $\mathscr{C}$ 是同一类型的结构类。我们称 $\mathscr{C}$ 具有 HAP，是指对于来自 $\mathscr{C}$ 的任意 $f_1\colon \mathbf{A} \mathrel{\mathrlap{\rightarrow}\!\!\!\!\!\!\circ} \mathbf{B}_1$,, 以及任意 $f_2\colon \mathbf{A} ! \mathbf{B}_2$，均存在 $\mathbf{C} \in \mathscr{C}$、 $g_1\colon \mathbf{B}_1 ! \mathbf{C}$，以及$g_2\colon \mathbf{B}_2 \mathrel{\mathrlap{\rightarrow}\!\!\!\!\!\!\circ} \mathbf{C}$，使得下图交换：



注。 HAP 这一缩写通常译作同态合并性质 ，以强调交换图中的两个态射只是同态，而非嵌入。鉴于 HAP 的定义中使用了不同类型的态射，另一种合理的译法是异态合并性质。值得一提的是，HAP 在数学文献中出现已有相当长的时间。我们可以追溯到 Banaschewski 的论文 [1] ，其中它被称为可传递性。在 [5], 中，它以 1PHEP 的形式出现；在 [18] 中，则称为混合合并性质 。无论如何，本文将沿用如今的标准缩写 HAP，至于字母 H 代表什么，就留给读者自行判断。

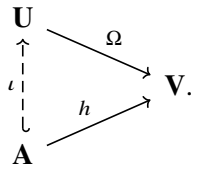
3.10. **定理**。 设 Σ 是一个有限纯关系签名， $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}_\Sigma$ 是一个具有合并性质、AEP和HAP的年龄。设$\mathcal{U}$ 为定理 *3.8* 所断言的 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中唯一的泛齐性度量结构。那么，其底层结构 **U**的任意两个有限子结构之间的同构，都可以扩张为**U**的一个自同构。此外，对于某个 $l > 0$, 可以选择这样的扩张，使其在$\mathcal{U}$ 的每个半径为 $< 2^{-l}$ 的球上，关于$\mathcal{U}$ 的度量都是等距映射。

此时，若要对这些断言给出形式上正确且完整的证明，技术上会极其复杂繁琐。我们选择分几个较小且易于处理的步骤来进行。先概述一下总体思路。我们从一个遗传类 $\mathscr{C}$ 出发。显然，$\sigma\mathscr{C}$ 也具有遗传性。根据命题 2.23，函子 Seq 和 Lim— 的适当限制在范畴 $[[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}]]$ 上诱导出一个范畴等价；该范畴由 $\sigma\mathscr{C}$ 上的满射 ω 上链构成，并且

$\boldsymbol{\pi\sigma\mathscr{C}}$。因此，我们不必在 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中构造一个通用齐次超度量结构 U，而可以构造一个适当的、从 $\sigma\mathscr{C}$ 出发的满射 ω 上链 –U，使得 $\mathrm{Lim}\,\overleftarrow{\ }\mathrm{U} \cong \mathrm{U}$。

为了得到一个泛超度量结构 $\mathrm{U} \in \pi\sigma\mathscr{C}$，我们需要构造一个对 $[[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}]]$ 泛的 ω-上链 $\overleftarrow{\ }\mathrm{U}$。为此，我们使用泛同态的概念：

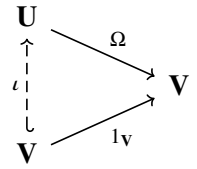
3.11. 定义。设 $\mathscr{C}$ 是一个年龄，且 $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$。同态 $\Omega\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ 称为在 $\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 中的泛同态，当且仅当对于所有 $\mathbf{A} \in \sigma\mathscr{C}$ 以及所有 $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{V}$，都存在一个嵌入 $\iota\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{U}$，使得下图交换：



关于泛同态，一个简单但非常有用的观察是：

3.12. **观察**。在 $\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 中的每个泛同态都是一个收缩。

证明。设 $\Omega\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ 是 $\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 中的泛同态。那么存在一个嵌入 ι，使得下图交换：

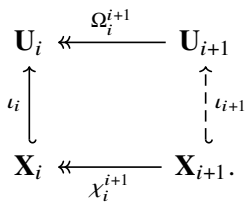


换言之，$1_{\mathbf{V}} = \Omega \circ \iota$。这意味着 ι 是一个截面，而 Ω 是一个收缩。 □

关于泛同态是否存在的问题，我们稍后再讨论。现在先来看如何利用它们来构造泛超度量结构：

3.13. **观察**。设 $\leftarrow\!\!-\mathrm{U} = ((\mathbf{U}_i)_{i<\omega}, (\Omega_i^j)_{i\le j<\omega})$ 是一个定义在 $\sigma\mathscr{C}$ 上的 ω-上链，满足 $\mathbf{U}_0$ 是 $\sigma\mathscr{C}$ 的泛对象，并且对所有 $i < \omega$，都有 Ω_i^{i+1} 是 $\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 中的泛对象。设 $\mathcal{U} := \mathrm{Lim}\leftarrow\!\!- \overleftarrow{\ }\mathrm{U}$。那么 $\mathcal{U}$ 是 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中的泛对象。

证明。设 $\mathrm{X} \in \pi\sigma\mathscr{C}$。令 $\leftarrow\!\!-\mathrm{X} := \mathrm{Seq}(\mathrm{X}) = ((\mathbf{X}_i)_{i<\omega}, (\chi_i^j)_{i\le j<\omega}) \in [[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}]]$。设 $\iota_0\colon \mathbf{X}_0 \hookrightarrow \mathbf{U}_0$ 是一个任意的嵌入（该嵌入存在，因为 $\mathbf{U}_0$ 是 $\sigma\mathscr{C}$ 中的泛对象）。假设 ι_i 已经定义。考虑 $\iota_i \circ \chi_i^{i+1}\colon \mathbf{X}_{i+1} \to \mathbf{U}_i$。由于 Ω_i^{i+1} 是泛的，存在 $\iota_{i+1}\colon \mathbf{X}_{i+1} \hookrightarrow \mathbf{U}_{i+1}$，使得下图交换：



因此，$(\iota_i)_{i<\omega}\colon \leftarrow\!\!-\mathrm{X} \Rightarrow \overleftarrow{\ }\mathrm{U}$ 是一个自然嵌入。因此 $\mathrm{Lim}\leftarrow\!\!-((\iota_i)_{i<\omega})\colon \mathrm{Lim}\ \overleftarrow{\ }\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{Lim}\ \overleftarrow{\ }\mathrm{U}$ 是一个度量嵌入。由命题 2.23 可知 $\mathrm{Lim}\leftarrow\!\!-(\leftarrow\!\!-\mathrm{X}) \cong \mathrm{X}$。因此结论成立。□

要证明齐性，类似的归纳法应该就能奏效。$\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 中同态的适当模式定义如下：

3.14. **定义**。设 $\mathscr{C}$ 为一个年龄，并设 $\mathbf{U}$、$\mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$。若同态 $\Omega\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ 满足以下条件，则称其在 $\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 中是斜齐次的：对每个 $\mathbf{A} \in \mathscr{C}$、每个 $h\colon \mathbf{A} \to \mathbf{V}$、每个 $\iota,\ \kappa\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{U}$，以及每个 $\psi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{V})$，只要满足

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U} & \xrightarrow{\Omega} & \mathbf{V} \\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & & \| \\ \mathbf{A} & \xrightarrow{h} & \mathbf{V} \\ {\scriptstyle\kappa}\downarrow & & \cong\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathbf{U} & \xrightarrow{\Omega} & \mathbf{V} \end{array},$$

交换，存在 $\varphi \in$ 自同构群$(\mathbf{U})$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U} & \xrightarrow{\Omega} & \mathbf{V} \\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & & \| \\ \varphi\circlearrowright\ \mathbf{A} & \xrightarrow{h} & \mathbf{V} \\ {\scriptstyle\kappa}\downarrow & & \cong\downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathbf{U} & \xrightarrow{\Omega} & \mathbf{V} \end{array},$$

同样，暂且不必担心斜齐次同态的存在性，而是先来看看它们的用途：

3.15. **观察**。设 $\mathscr{C}$ 是一个 *Fraïssé* 类。设 $\mathbf{U}_\bullet = (\mathbf{U}_i)_{i<\omega}, (\Omega_i^j)_{i\le j<\omega}$ 是一个在 $\sigma\mathscr{C}$ 上的 ω 上链，满足 $\mathbf{U}_0$ 是齐次的，并且对所有 $i < \omega$，都有 Ω_i^{i+1} 在 $\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 中是斜齐次的。设 $\mathcal{U} := \varprojlim \mathbf{U}_\bullet$。则 $\mathcal{U}$ 是齐次的。

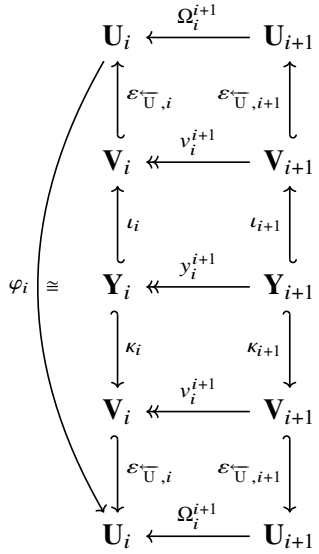
证明。设 $\mathbf{X}$ 是一个原有限生成超度量结构，并设 ι, κ 是从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{U}$ 的度量嵌入。根据观察 2.25，$\pi\sigma\mathscr{C}$ 是遗传的。由于 $\mathbf{U} \in \pi\sigma\mathscr{C}$，可推出 $\mathbf{X} \in \pi\sigma\mathscr{C}$。不失一般性，$\mathbf{X} = \varprojlim \mathbf{X}_\bullet$，其中 $\mathbf{X}_\bullet = ((\mathbf{X}_i)_{i<\omega}, (x_i^j)_{i\le j<\omega})$。

记 $\mathrm{Seq}(\mathbf{U}) = (\mathbf{U}_\bullet, (v_i^j)_{i\le j<\omega})$，$\mathrm{Seq}(\mathbf{X}) = ((\mathbf{Y}_i)_{i<\omega}, (y_i^j)_{i\le j<\omega})$，$\mathrm{Seq}(\iota) = (\iota_i)_{i<\omega}$，以及 $\mathrm{Seq}(\kappa) = (\kappa_i)_{i<\omega}$。根据观察 2.17，$\mathrm{Seq}(\iota)$ 和 $\mathrm{Seq}(\kappa)$ 是自然嵌入。根据观察 2.22(1)，$\varepsilon_{\varprojlim \mathbf{U}_\bullet}\colon \mathrm{Seq}(\mathbf{U}) \Rightarrow \varprojlim \mathbf{U}_\bullet$ 是自然嵌入。因此，$\varepsilon_{\varprojlim \mathbf{U}_\bullet} \circ \mathrm{Seq}(\iota)$ 和 $\varepsilon_{\varprojlim \mathbf{U}_\bullet} \circ \mathrm{Seq}(\kappa)$ 也都是自然嵌入。我们将通过归纳法构造 $\mathbf{U}_\bullet$ 的一个自然自同构 $\varphi = (\varphi_i)_{i<\omega}$，使得 $\varphi \circ \varepsilon_{\varprojlim \mathbf{U}_\bullet} \circ \mathrm{Seq}(\iota) = \varepsilon_{\varprojlim \mathbf{U}_\bullet} \circ \mathrm{Seq}(\kappa)$。

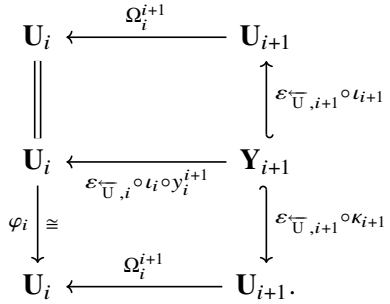
由于 $\mathbf{X}$ 是原有限生成的，$\mathbf{Y}_0$ 是有限生成的。由于 $\mathbf{U}_0$ 是齐次的，存在 $\varphi_0 \in$ 自同构群$(\mathbf{U}_0)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}_0 & \overset{\varphi_0}{\underset{\cong}{\dashrightarrow}} & \mathbf{U}_0 \\ {\scriptstyle \varepsilon_{\varprojlim \mathbf{U}_\bullet,0}\circ\iota_0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon_{\varprojlim \mathbf{U}_\bullet,0}\circ\kappa_0} \\ \mathbf{Y}_0 & = & \mathbf{Y}_0 \end{array}$$

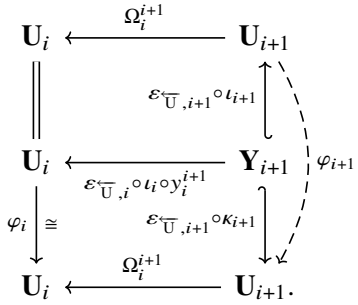
假设 $\varphi_i \in$ 自同构群$(\mathbf{U}_i)$已构造完成。特别地，下图交换：



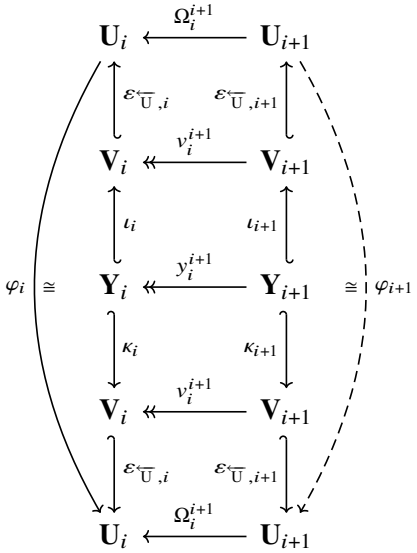
特别地，以下图表交换：



由于 $\mathbf{X}$ 是原有限生成的，$\mathbf{Y}_{i+1}$ 是有限生成的。由于 Ω_i^{i+1}是斜齐次的，存在 $\varphi_{i+1} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{U}_{i+1})$，使得下图交换：



特别地，下图交换：



因此， φ 已被完全确定。将函子 Lim—应用于这种情形，我们得到

$$\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\varphi) \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{U}}}) \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\iota)) = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\varepsilon_{\overleftarrow{\mathrm{U}}}) \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\kappa)). \tag{5}$$

注意，以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{X}}))) & \xhookrightarrow{\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\iota))} & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{U}}))) & \xrightarrow{(\underleftarrow{\mathrm{Lim}} * \varepsilon)_{\overleftarrow{\mathrm{U}}}} & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{U}}) \\
\uparrow{\scriptstyle (\eta * \underleftarrow{\mathrm{Lim}})_{\overleftarrow{\mathrm{X}}}} & & \uparrow{\scriptstyle (\eta * \underleftarrow{\mathrm{Lim}})_{\overleftarrow{\mathrm{U}}}} & \nearrow & \\
\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{X}}) & \xhookrightarrow{\iota} & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{U}}). & &
\end{array}$$

这里，左侧四边形交换，因为 $(\eta * \mathrm{Lim}—)$ 是一个自然变换；右侧三角形交换则是三角恒等式之一的结果。类似地，我们有以下图表交换：

$$\begin{array}{ccccc}
\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{X}}))) & \xhookrightarrow{\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\kappa))} & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{U}}))) & \xrightarrow{(\underleftarrow{\mathrm{Lim}} * \varepsilon)_{\overleftarrow{\mathrm{U}}}} & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{U}}) \\
\uparrow{\scriptstyle (\eta * \underleftarrow{\mathrm{Lim}})_{\overleftarrow{\mathrm{X}}}} & & \uparrow{\scriptstyle (\eta * \underleftarrow{\mathrm{Lim}})_{\overleftarrow{\mathrm{U}}}} & \nearrow & \\
\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{X}}) & \xhookrightarrow{\kappa} & \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\overleftarrow{\mathrm{U}}). & &
\end{array}$$

因此，记住 $(\mathrm{Lim}— {}^{*\mathcal{E}})_{\leftarrow\mathrm{U}} = \mathrm{Lim}—(\varepsilon_{\leftarrow\mathrm{U}})$，我们可以计算

$$\begin{aligned}
\underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\varphi) \circ \iota &= \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\varphi) \circ (\underleftarrow{\mathrm{Lim}} * \varepsilon)_{\overleftarrow{\mathrm{U}}} \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\iota)) \circ (\eta * \underleftarrow{\mathrm{Lim}})_{\overleftarrow{\mathrm{X}}} \\
&\overset{(5)}{=} (\underleftarrow{\mathrm{Lim}} * \varepsilon)_{\overleftarrow{\mathrm{U}}} \circ \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\mathrm{Seq}(\kappa)) \circ (\eta * \underleftarrow{\mathrm{Lim}})_{\overleftarrow{\mathrm{X}}} = \underleftarrow{\mathrm{Lim}}(\kappa)
\end{aligned}$$

因此，$\mathbf{U}$ 是齐次的。 □

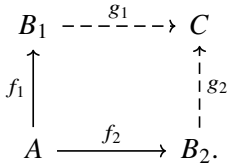
3.3. **通用齐次同态**。抽象 Fraïssé 理论源于 Droste、Göbel 和 Kubiś 在多篇论文中逐步开展的工作（参见 [7, 8, 17]）。下面回顾本文所需的抽象 Fraïssé 理论的一些基本事实。

如果对于每个带有极限余锥 $(C_\infty, (c_i^\infty)_{i<\omega})$ 的 ω-链 $((C_i)_{i<\omega}, (c_i^j)_{i\le j<\omega})$，以及每个态射 $h\colon A \to C_\infty$，都存在 $i<\omega$ 和 $h'\colon A \to C_i$，使得 $h = c_i^\infty \circ h'$，则范畴 $\mathscr{X}$ 的对象 A 称为 ω-小的。由所有 ω-小对象所诱导的 $\mathscr{X}$ 的全子范畴记作 $\mathscr{X}_{<\omega}$。

3.16. **定义**。如果范畴 $\mathscr{X}$ 中所有 ω-链都有余极限，且 $\mathscr{X}$ 中的每个对象都是 ω-链在 $\mathscr{X}_{<\omega}$ 中的余极限，则称范畴 $\mathscr{X}$ 为半代数丛态。

3.17. **定义**。如果范畴 $\mathscr{X}$ 满足以下条件，则称其为*Fraïssé* 范畴：

(1) 其所有态射都是单态射；(2) $\mathscr{X}$ 有一个可数支配子范畴，也就是说，它有一个子范畴 $\mathscr{D}$，其中对象和态射均为可数个，并且满足：(a) $\mathscr{D}$ 在 $\mathscr{X}$ 中余终，即对所有 $A \in \mathscr{X}$，都存在 $B \in \mathscr{D}$，使得 $\mathscr{X}(A, B) \neq \emptyset$；(b) 对所有 $A \in \mathscr{D}$, $B \in \mathscr{X}$, $f \in \mathscr{X}(A, B)$，都存在 $C \in \mathscr{D}$, $g \in \mathscr{X}(B, C)$，使得$g \circ f \in \mathscr{D}(A, C)$；(3) $\mathscr{X}$ 是有向的，即对所有 A, $B \in \mathscr{X}$，都存在 $C \in \mathscr{X}$，使得 $\mathscr{X}(A, C) \neq \emptyset$，且$\mathscr{X}(B, C) \neq \emptyset$。(4) $\mathscr{X}$ 具有合并性质（AP），即对所有 $A, B_1, C_1 \in \mathscr{X}$ 以及所有 $f_1\colon A \to B_1, f_2\colon A \to B_2$，都存在 $C \in \mathscr{X}$，$g_1\colon B_1 \to C$，以及 $g_2\colon B_2 \to C$，使得下图交换：



抽象 Fraïssé 理论中的一个基本概念是 Fraïssé 序列：

3.18. **定义**。设 $\mathscr{X}$ 是一个范畴。若一个 ω-链 $\vec{A} = ((A_i)_{i<\omega}, (\alpha_i^j)_{i\le j<\omega}) \in [\omega, \mathscr{X}]$ 满足以下条件，则称其为*Fraïssé* 序列

(1) $\vec{A}$ 的像在 $\mathscr{X}$ 中余终，即对所有 $B \in \mathscr{X}$，都存在 $i<\omega$，使得 $\mathscr{X}(B, A_i) \neq \emptyset$；

(2) $\vec{A}$ 具有吸收性质，即对所有 $B \in \mathscr{X}$、$i<\omega$、$f \in \mathscr{X}(A_i, B)$，都存在 $j \ge i$、$g \in \mathscr{X}(B, A_j)$，使得 $g \circ f = \alpha_i^j$。

注意，如果 $\mathscr{X}$ 有一个 Fraïssé 序列，那么这个 ω-链的像构成 $\mathscr{X}$ 的一个可数支配子范畴。最后，让我们在范畴的抽象框架中正式引入普适性和齐性的概念：

3.19. **定义**。设 $\mathscr{X}$ 是一个范畴，$\mathscr{Y}$ 是 $\mathscr{X}$ 的一个全子范畴。若对所有 $Y \in \mathscr{Y}$ 都有 $\mathscr{X}(Y, U) \neq \emptyset$，则称 U 中的对象 U 为 $\mathscr{Y}$-泛 。此外，若对所有 $Y \in \mathscr{Y}$ 以及所有态射 $f, g\colon Y \to U$，都存在 $\varphi \in \mathrm{Aut}(U)$，使得 $\varphi \circ g = f$，则称 U 为 $\mathscr{Y}$-齐次 。

注。若 $\mathscr{Y} = \mathscr{X}$，则我们简称“泛”，而不说“$\mathscr{Y}$-泛”。此外，若$\mathscr{Y} = \mathscr{X}_{<\omega}$，则我们简称“齐次”，而不说“$\mathscr{Y}$-齐次”。

在抽象 Fraïssé 理论中，特别值得关注的是所有态射均为单态的半代数类范畴 $\mathscr{X}$，对于这些范畴，$\mathscr{X}_{<\omega}$ 是一个 Fraïssé 范畴。

下面我们汇总本语境中所需的抽象 Fraïssé 理论结果：

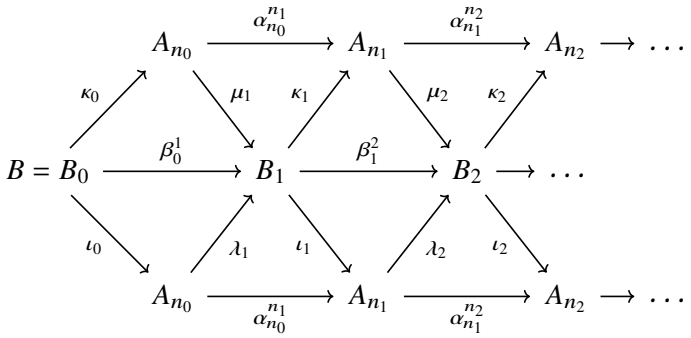
3.20. **定理** (Droste、Göbel [7], Kubiś [17])。 设 $\mathscr{X}$ 是一个所有态射均为单态的半代数范畴。假设 $\mathscr{X}_{<\omega}$ 是一个 *Fraïssé* 范畴。令 $\mathscr{D}$ 为 $\mathscr{X}_{<\omega}$的一个可数支配子范畴。那么

> *(1)* $\mathscr{X}_{<\omega}$ 存在一个 *Fraïssé* 序列 $\bar{}\to\mathrm{F}$，其像完全包含于 $\mathscr{D}$中；*(2)* 若 U 是 $\bar{}\to\mathrm{F}$ 在 $\mathscr{X}$中的余极限，则它在 $\mathscr{X}$中是泛且齐次的；*(3)* $\mathscr{X}$中的任意两个泛齐次对象都同构。

证明。 (1) 即 [17, 推论 3.8]（的证明）。(3) 即 [7,定理 1.1]。

(2) 隐含于 [17]中。为方便读者，下面给出技术细节：假设 $\bar{}!\mathrm{F}=((A_i)_{i<\omega},(\alpha_i^j)_{i\le j<\omega})$。令 $(U,(\alpha_i^\infty)_{i<\omega})$为一个极限余锥。

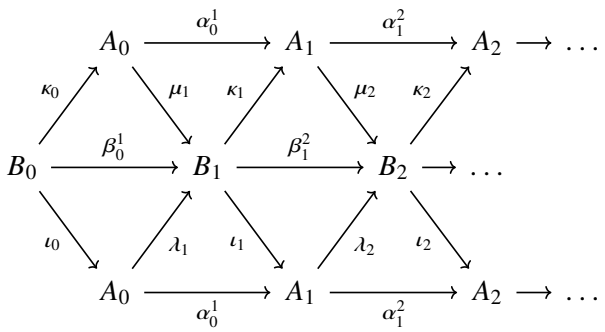
首先，我们证明 U 是齐次的。令 $B\in\mathscr{X}_{<\omega}$，并令 $\iota,\ \kappa\colon B!U$。通过归纳法，我们将构造以下交换图表：



其中 $(n_i)_{i<\omega}$ 是一个由非负整数组成的严格递增序列。

由于 $\mathscr{X}$ 是半代数丛态，存在 $n_0<\omega,\iota_0,\ \kappa_0\colon B!A_{n_0}$，使得 $\iota=\alpha_{n_0}^\infty\circ\iota_0$ 和 $\kappa=\alpha_{n_0}^\infty\circ\kappa_0$。定义 $B_0:=B$。假设 $\iota_i,\ \kappa_i\colon B_i!A_{n_i}$ 已经构造完成。根据合并性质，存在 $B_{i+1}\in\mathscr{X}_{<\omega},\mu_{i+1}\colon A_{n_i}!B_{i+1},\lambda_{i+1}\colon A_{n_i}!B_{i+1}$，使得 $\mu_{i+1}\circ\kappa_i=\lambda_{i+1}\circ\iota_i$。定义 $\beta_i^{i+1}:=\lambda_{i+1}\circ\iota_i$。由于 $\bar{}!\mathrm{F}$ 是一个 Fraïssé 序列，因此存在 $n_{i+1}>n_i$ 和 $k_{i+1},\ \iota_{i+1}\colon B_{i+1}!A_{n_{i+1}}$，使得 $\alpha_{n_i}^{n_{i+1}}=\iota_{i+1}\circ\lambda_{i+1}=\kappa_{i+1}\circ\mu_{i+1}$。于是，该图表构造完成。

根据 [17,命题 3.3(a)],，链 $((A_{n_i})_{i<\omega},(\alpha_{n_i}^{n_j})_{i\le j<\omega})$ 也是一个 Fraïssé 序列。不失一般性，我们可以假设对每个 $i<\omega$，都有 $n_i=i$。在此假设下，上面的交换图如下所示



令$(B_\infty, (\beta_i^\infty)_{i<\omega})$为 $\bar{}!\mathrm{B} = ((B_i)_{i<\omega}, (\beta_i^j)_{i\le j<\omega})$的极限余锥。注意，$(U, (\alpha_i^\infty \circ \iota_i)_{i<\omega})$和$(U, (\alpha_i^\infty \circ \kappa_i)_{i<\omega})$是 $\bar{}!\mathrm{B}$ 的相容余锥。令 ι_∞， κ_∞：$B_\infty ! U$为相应的中介态射。特别地，对每个 $i<\omega$，我们有 $\iota_\infty \circ \beta_i^\infty = \alpha_i^\infty \circ \iota_i$。以及 $\kappa_\infty \circ \beta_i^\infty = \alpha_i^\infty \circ \kappa_i$。

类似地，注意到 $(B_\infty, (\beta_{i+1}^\infty \circ \mu_{i+1})_{i<\omega})$ 和 $(B_\infty, (\beta_{i+1}^\infty \circ \lambda_{i+1})_{i<\omega})$ 是关于$-!\mathrm{F}$ 的相容余锥。令 μ_∞， λ_∞: $U ! B_\infty$ 为相应的中介态射。特别地，对于每个 $i<\omega$，我们都有 $\mu_\infty \circ \alpha_i^\infty = \beta_{i+1}^\infty \circ \mu_{i+1}$，以及 $\lambda_\infty \circ \alpha_i^\infty = \beta_{i+1}^\infty \circ \lambda_{i+1}$。

接下来，我们计算每个 $i<\omega$ 的情形:

$$\lambda_\infty \circ \iota_\infty \circ \beta_i^\infty = \lambda_\infty \circ \alpha_i^\infty \circ \iota_i = \beta_{i+1}^\infty \circ \lambda_{i+1} \circ \iota_i = \beta_{i+1}^\infty \circ \beta_i^{i+1} = \beta_i^\infty.$$

因此， $\lambda_\infty \circ \iota_\infty = 1_{B_\infty}$。类似地，我们可以计算每个 $i<\omega$ 的情形:

$$\iota_\infty \circ \lambda_\infty \circ \alpha_i^\infty = \iota_\infty \circ \beta_{i+1}^\infty \circ \lambda_{i+1} = \alpha_{i+1}^\infty \circ \iota_{i+1} \circ \lambda_{i+1} = \alpha_{i+1}^\infty \circ \alpha_i^{i+1} = \alpha_i^\infty.$$

因此， $\iota_\infty \circ \lambda_\infty = 1_U$。由此可知， ι_∞ 和 λ_∞ 互为逆同构。类似地，可以证明 κ_∞ 和 μ_∞ 互为逆同构。定义 $\varphi := \iota_\infty \circ \mu_\infty$。于是

$$\varphi \circ \kappa = \varphi \circ \alpha_0^\infty \circ \kappa_0 = \iota_\infty \circ \mu_\infty \circ \alpha_0^\infty \circ \kappa_0 = \iota_\infty \circ \beta_1^\infty \circ \mu_1 \circ \kappa_0 = \alpha_1^\infty \circ \iota_1 \circ \mu_1 \circ \kappa_0 = \alpha_1^\infty \circ \iota_1 \circ \beta_1^0$$
$$= \alpha_1^\infty \circ \iota_1 \circ \lambda_1 \circ \iota_0 = \alpha_1^\infty \circ \alpha_0^1 \circ \iota_0 = \iota_0 \circ \alpha_0^\infty = \iota.$$

$-!$ 因此 U 是齐次的。由 U 在$\mathscr{X}_{<\omega}$中的像余终可轻易推出其普适性。□

前述 Fraïssé 型定理还可以表述得更强:

3.21. **观察**。 设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴，其中所有态射都是单态射，并且 $\mathscr{C}$存在 *Fraïssé* 序列。那么 $\mathscr{C}$ 是一个 *Fraïssé* 范畴。

证明。 [17, 命题 3.1] 表明， $\mathscr{C}$是有向的且具有合并性质。Fraïssé 序列在 $\mathscr{C}$中的像是 $\mathscr{C}$的一个可数支配子范畴。□

3.4. **通过逗号范畴讨论泛同态与斜齐次同态**。 各种类型的泛同态和／或齐次同态是否存在这一问题已在[21], 中得到研究；更一般地说，该文研究了逗号范畴中的泛齐次对象。

回顾一下，逗号范畴 $(\mathrm{F} \# \mathrm{G})$ 由两个函子 $\mathrm{F}: \mathscr{A} ! \mathscr{C}$ 和 $\mathrm{G}: \mathscr{B} ! \mathscr{C}$ 指定。其对象是三元组 (A, f, B)，其中 A 和 B 分别是 $\mathscr{A}$和 $\mathscr{B}$中的对象，且$f: \mathrm{F}A ! \mathrm{G}B$ 是 $\mathscr{C}$中的一个态射。从 (A, f, B) 到 (A', f', B') 的态射是成对的 (a, b)，其中 $a: A ! A'$ 属于 $\mathscr{A}$， $b: B ! B'$ 属于 $\mathscr{B}$，并且满足下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F}A' & \xrightarrow{f'} & \mathrm{G}B' \\ {\scriptstyle \mathrm{F}a}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{G}b} \\ \mathrm{F}A & \xrightarrow{f} & \mathrm{G}B. \end{array}$$

两个箭头的复合按分量定义，即 $(c, d) \circ (a, b) := (c \circ a, d \circ b)$。

用逗号范畴的术语表述，先前定义的泛同态和斜齐次同态的概念如下：用 $(\sigma\mathscr{C}, \triangleleft!)$ 表示 $\sigma\mathscr{C}$的由所有嵌入所张成的子范畴。此外，对于任意 $\mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$ 以及 $\mathrm{Aut}(\mathbf{V})$ 的每个子群 H，用 $(\mathbf{V}, H)$ 表示恰有一个对象 $\mathbf{V}$ 的范畴，其中态射为 H 的元素。用 F 表示 $(\sigma\mathscr{C}, \triangleleft!)$ 到 $\sigma\mathscr{C}$的恒等嵌入函子。$(\mathbf{V}, H)$ 到 $\sigma\mathscr{C}$的恒等嵌入函子记为 $\mathrm{G}_{(\mathbf{V},H)}$。在 H恰好仅由 $\mathbf{V}$ 的恒等自同构组成的特殊情形下，我们不写 $\mathrm{G}_{(\mathbf{V},\{1_\mathbf{U}\})}$，而只写 $\mathrm{G}_\mathbf{V}$。

3.22. **观察**。设 $\mathbf{U}$、$\mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$，并设 $\Omega\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$。则

(1) Ω 是泛的，当且仅当 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 是 $(\mathrm{F}\downarrow \mathrm{G}_{\mathbf{V}})$中的泛对象；*(2)* Ω 是斜齐次的，当且仅当 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 是 $(\mathrm{F}\downarrow \mathrm{G}^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$中的齐次对象。

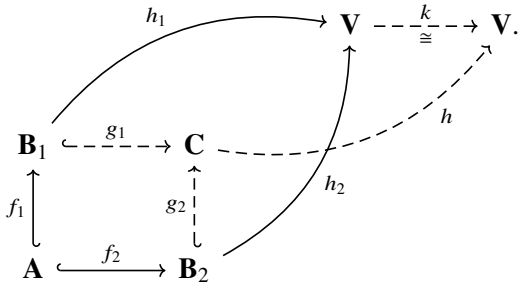
证明。显然。 □

3.23. **观察**。 范畴 $(\mathrm{F}\downarrow \mathrm{G}^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 是半代数丛态的。此外，$(\mathbf{A}, h, \mathbf{V})$属于范畴 $(\mathrm{F}\downarrow \mathrm{G}^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 的对象是 ω-小的，当且仅当 $\mathbf{A}$ 是有限生成的（即，它在 $\boldsymbol{\sigma\mathscr{C}}$ 中是 ω-小的）。

证明。 这直接由 [21, 命题 4.4] 得出。 [21, 定义 4.1] 中的条件 $P1, \ldots P7$ 在此情形下很容易验证。 □

对于范畴 $(\mathrm{F} \# \mathrm{G}^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$，合并性质的判据如下：

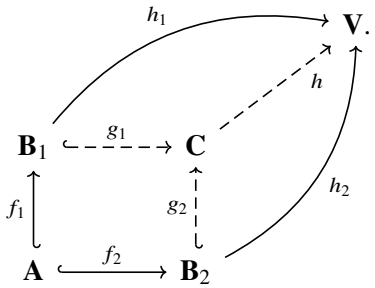
3.24. 观察。范畴 $(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$ 具有合并性质，当且仅当对于所有 A、$B_1, B_2 \in \mathscr{C}$、$f_1\colon A \hookleftarrow\!! B1$、$f_2\colon A \hookleftarrow\!! B_2, h_1\colon B_1 ! V$、$h_2\colon B_2 ! V$，若 $h_1 \circ f_1 = h_2 \circ f_2$，则存在 $C \in \mathscr{C}$、$g_1\colon B_1 \hookleftarrow\!! C$、$g_2\colon B_2 \hookleftarrow\!! C$、$h\colon C ! V$、$k \in Aut(V)$，使得下图交换：



证明。 这直接源于以下观察：对于任意子群 $H \leq \mathrm{Aut}(\mathbf{V})$，范畴 $(\mathbf{V}, H)$具有合并性质；再结合 [21, 命题 5.2(2)]即可得出。 □

注。 请注意，观察 3.24 中条件的表述是冗余的。由于 k 是 $\mathbf{V}$ 的一个自同构，因此可以将其消去，并用 $k^{-1} \circ h$ 替换 h。于是，条件可重新表述如下：

对于所有 A、$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathscr{C}$、$f_1\colon \mathrm{A} \hookleftarrow\!! \mathrm{B}1$, $f_2\colon \mathrm{A} \hookleftarrow\!! \mathrm{B}_2, \mathrm{h}_1\colon \mathrm{B}_1 ! \mathrm{V}, \mathrm{h}_2\colon \mathrm{B}_2 ! \mathrm{V}$，若 $\mathrm{h}_1 \circ f_1 = \mathrm{h}_2 \circ f_2$，则存在 $\mathrm{C} \in \mathscr{C}$, $g_1\colon \mathrm{B}_1 \hookleftarrow\!! \mathrm{C}$, $g_2\colon \mathrm{B}_2 \hookleftarrow\!! \mathrm{C}, \mathrm{h}\colon \mathrm{C} ! \mathrm{V}$，使得下图交换：



如果 $\mathscr{C}$ 对于给定的固定 $\mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$ 满足此条件，那么我们称 $\mathscr{C}$ 具有 $\mathbf{V}$-值 *amalgamation* 性质。

这立即引出下一个观察：

3.25. **观察**。 范畴 $(\mathrm{F}\downarrow \mathrm{G}_{\mathbf{V}})$ 具有合并性质 当且仅当 $\mathscr{C}$具有$\mathbf{V}$值 *amalgamation* 性质。

证明。 这直接由 [21,命题 5.2(2)]得出。 □

直接可得，$(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$具有合并性质，当且仅当$(F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$具有合并性质。接下来的观察涉及有向性。

3.26. **观察**。 假设$(F \downarrow G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$具有合并性质。那么它也是有向的。对于$(F \downarrow G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$，结论也相同。

证明。 由于 $\mathscr{C}$ 是一个年龄，它尤其具有联合嵌入性质。因此，对于任意两个结构$\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathscr{C}$，我们有 $\mathrm{h}\emptyset\mathrm{i}_{\mathbf{A}} \cong \mathrm{h}\emptyset\mathrm{i}_{\mathbf{B}}$。我们将所有 $\mathscr{C}$元素的这个唯一（在同构意义下）联合最小子结构记作 $\mathrm{h}\emptyset\mathrm{i}$。显然，$\mathrm{h}\emptyset\mathrm{i}$是$\mathscr{C}$中的一个初始对象。令$h\colon \mathrm{h}\emptyset\mathrm{i} \to \mathbf{V}$为唯一的同态。那么，$(\mathrm{h}\emptyset\mathrm{i}, h, \mathbf{V})$在$(F \# G^{\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V})})_{<\omega}$中是弱初始的。很容易看出，在这种情况下，合并性质蕴含有向性。

关于 $(F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$ 的证明完全类似。 □

接下来需要检验是否存在可数支配子范畴：

3.27. 观察。需要注意的是，$(F \# G_{\mathbf{V}})$ 构成 $(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 的一个子范畴。由于$\mathscr{C}$是一个年龄，不难看出，$(F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$ 的任意骨架都是可数的。然而，每个范畴都被其任意骨架所支配。对于 $(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$，我们需要注意，$\omega$-小对象构成的范畴可能不可数，因为 $|Aut(V)|$ 可能不可数。不过，$(F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$ 是 $(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$ 的一个支配子范畴。因此，显然，$(F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$ 的每个可数支配子范畴也支配 $(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$。

证明。 我们必须证明 $(F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$ 支配 $(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$。

由于 $(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$ 和 $(F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$ 具有相同的对象，余终性显然成立。

设 $(f, \varphi)\colon (\mathbf{A}_1, h_1, \mathbf{V}) \to (\mathbf{A}_2, h_2, \mathbf{V})$ 是 $(F \# G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$ 的一个态射。特别地，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{h_2} & \mathbf{V} \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \cong\uparrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{h_1} & \mathbf{V} \end{array}$$

注意，下图也交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{\varphi^{-1}\circ h_2} & \mathbf{V} \\ {\scriptstyle 1_{\mathbf{A}_2}}\uparrow\cong & & \cong\uparrow{\scriptstyle \varphi^{-1}} \\ \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{h_2} & \mathbf{V} \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \cong\uparrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{h_1} & \mathbf{V}. \end{array}$$

特别地，$(1_{\mathbf{A}_2}, \varphi^{-1}) \circ (f, \varphi) = (f, 1_{\mathbf{V}})$ 是 $(F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$ 的一个态射。 □

3.28. **推论**。 设 $\mathscr{C}$ 是一个年龄，且 $\mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$。那么以下条件等价：

(1) $\mathscr{C}$ 具有取值于$\mathbf{V}$的合并性质，*(2)* $(F \downarrow G^{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 是一个 *Fraïssé* 范畴，*(3)* $(F \downarrow G_{\mathbf{V}})$ 是一个 *Fraïssé* 范畴。

证明。“(1)⇒(2)”：根据观察 3.24 及其后的注，$(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$ 具有合并性质。根据观察 3.26，$(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$ 是有向的。根据观察 3.27，$(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$ 具有一个可数支配子范畴。因此，它是一个 Fraïssé 范畴。

“(2)⇒(1)”：这是由观察 3.24 及其后的注直接得出的。
“(1)⇔(3)”：利用观察 3.25 可类似地证明。 □

现在可以比较 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 和 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中的泛齐次对象：

3.29. **观察**。设 $\mathscr{C}$ 是一个年龄，$\mathbf{V} \in \mathscr{C}$，使得 $\mathscr{C}$ 具有取值于 $\mathbf{V}$ 的合并性质。设 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V}) \in (F \downarrow G_{\mathbf{V}})$。那么，$(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \downarrow G_{\mathbf{V}})$ 中是泛齐次的，当且仅当它在 $(F \downarrow G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中是泛齐次的。

证明。“⇐”：设 $(A, h, V) \in (F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$，并设 $(\iota_1, 1_{\mathbf{V}})$、$(\iota_2, 1_{\mathbf{V}}) : (A, h, V) \hookrightarrow (\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$。由于 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中是齐次的，因此存在 $(\varphi, \psi) \in$ 自同构群$(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$，使得 $(\varphi, \psi) \circ (\iota_1, 1_{\mathbf{V}}) = (\iota_2, 1_{\mathbf{V}})$。特别地，$\psi = 1_{\mathbf{V}}$。这说明 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{\mathbf{V}})$ 中是齐次的。

现在关注 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{\mathbf{V}})$ 中是泛齐性的（由推论 3.28 结合定理 3.20 可知其存在）。由于 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中是泛的，因此存在某个 $e \circ e \circ e$ $(\iota, \varphi) : (\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V}) \to (\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$。令 $(A, h, V) \in (F \# G_{\mathbf{V}})_{<\omega}$。由于 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{\mathbf{V}})$ 中是泛的，因此存在 $(\kappa, 1_{\mathbf{V}}) : (A, \varphi^{-1} \circ h, V) \to (e\mathbf{U}, e\Omega, \mathbf{V})$。注意，此时 $(\iota \circ \kappa, 1_{\mathbf{V}}) : (A, h, V) \to (\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$。

“⇒”：$(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 是 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中的泛齐性结构（根据推论 3.28，并结合定理 3.20，这样的结构确实存在）。根据证明的另一部分，$(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{\mathbf{V}})$ 中是齐次的。根据定理 3.20，存在一个同构 $(\varphi, 1_{\mathbf{V}}) : (\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V}) \to (\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$。由于 $(\varphi, 1_{\mathbf{V}})$ 也是 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中的一个同构，因此 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中是齐次的。

$(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中的普适性是显然的。 □

现在让我们将这些发现与上一节联系起来：

3.30. **推论**。设 $\mathscr{C}$ 是一个年龄，且 $\mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$。那么，对于某个 $\mathbf{U} \in \sigma\mathscr{C}$，存在一个泛斜齐次同态 $\Omega\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$，当且仅当 $\mathscr{C}$ 具有 $\mathbf{V}$ 值合并性质。

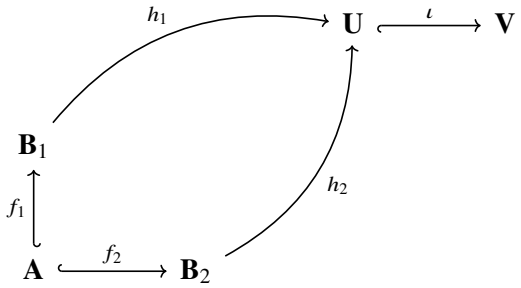
证明。“⇒”：设 $\Omega\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ 是 $\sigma\mathscr{C}$ 中的一个泛斜齐次同态。由观察 3.22，Ω 在 $(F \# G_{\mathbf{V}})$ 中是泛的，并且在 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中是齐次的。显然，在 $(F \# G_{\mathbf{V}})$ 中的普适性蕴含在 $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 中的普适性。由 [8, 命题 2.2(c)], , $(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})_{<\omega}$ 具有合并性质。最后，由观察 3.24 之后的注，$\mathscr{C}$ 具有 $\mathbf{V}$ 值合并性质。

“⇐”：假设 $\mathscr{C}$ 具有 $\mathbf{V}$ 值合并性质。由推论 3.28，$(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 是一个 Fraïssé 范畴。由定理 3.20，$(F \# G_{(\mathbf{V},\mathrm{Aut}(\mathbf{V}))})$ 有一个泛齐次对象 $(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$。由观察 3.29，$(\mathbf{U}, \Omega, \mathbf{V})$ 在 $(F \# G_{\mathbf{V}})$ 中也是泛齐次的。最后，由观察 3.22，Ω 是斜齐次且泛的。□

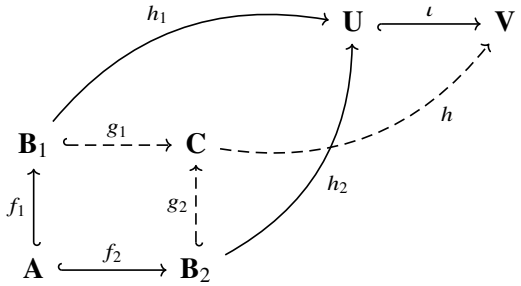
3.5. **关于 V 值 amalgamation 性质**。我们之前的研究结果表明，为了能够构造观察 3.13 和 3.15 中的 ω-上链，我们需要检验许多可能各不相同的结构 $\mathbf{V}$ 是否满足 $\mathbf{V}$ 值 AP。积极的一面是，由于我们希望构造一个同时满足这两个观察要求的 ω-上链，因此序列中的第一个结构$\mathbf{U}_0$ 应当是 $\sigma\mathscr{C}$中的泛齐次结构。这意味着从一开始我们就可以假设，$\mathscr{C}$不仅是一个年龄，而且确实是一个 Fraïssé 类。在给出本节的主要结果之前，让我们先观察到，$\mathbf{V}$ 值 AP 在某种意义上是遗传的：

3.31. **观察**。设 $\mathscr{C}$ 是一个年龄，设 $\mathbf{U}$、$\mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$，且设 $\iota\colon \mathbf{U} \hookrightarrow \mathbf{V}$。如果 $\mathscr{C}$ 具有 $\mathbf{V}$ 值合并性质，那么它也具有 $\mathbf{U}$ 值合并性质。

证明。 给定以下交换图（其中 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathscr{C}$）：



由于 $\mathscr{C}$ 具有 **V**值合并性质，因此存在 $\mathbf{C} \in \mathscr{C}$、 g_1、 g_2、h，使得下图表交换：

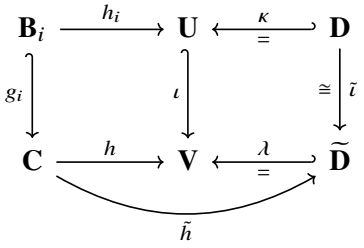


不失一般性 ，$\mathbf{C} = \mathrm{h} g_1(B_1) \cup g_2(B_2) \mathrm{i}_{\mathbf{C}}$。令 $\mathbf{D} := \mathrm{h} h_1(B_1) \cup h_2(B_2) \mathrm{i}_{\mathbf{U}}$。现在我们计算：

$$\begin{aligned}\iota(\mathbf{D}) &= \iota(\langle h_1(B_1) \cup h_2(B_2)\rangle_{\mathbf{U}}) = \langle \iota(h_1(B_1)) \cup \iota(h_2(B_2))\rangle_{\mathbf{V}} \\ &= \langle h(g_1(B_1)) \cup h(g_2(B_2))\rangle_{\mathbf{V}} = h(\langle g_1(B_2) \cup g_2(B_2)\rangle_{\mathbf{U}}) = h(\mathbf{C}).\end{aligned}$$

e e 令 $\mathbf{D} := \iota(\mathbf{D})$，并令 $\tilde{\iota}$ 为 ι到 **D**上的像限制。于是，特别地， $\tilde{\iota}$是一个同构。

˜ e 令 h 为 h 到 **D**上的像限制。那么对于每个 $i \in \{1、2\}$，下图表交换：



定义 $h' := \kappa \circ \tilde{\iota}^{-1} \circ \tilde{h}$。于是我们可以计算：

$$\iota \circ h' \circ g_i = \iota \circ \kappa \circ \tilde{\iota}^{-1} \circ \tilde{h} \circ g_i = \lambda \circ \tilde{\iota} \circ \tilde{\iota}^{-1} \circ \tilde{h} \circ g_i = \lambda \circ \tilde{h} \circ g_i = h \circ g_i = \iota \circ h_i.$$

由于 ι 是单射，因此对于每个 $i \in \{1, 2\}$，都有 $h' \circ g_i = h_i$。因此， $\mathscr{C}$ 具有 **U**-值合并性质。□

现在我们可以总结关于 **V**-值 amalgamation 性质的所有发现 ：

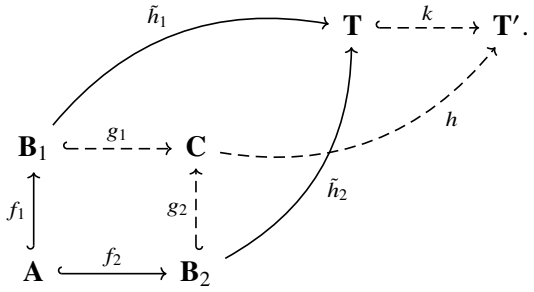
3.32. **命题** 。设 $\mathscr{C}$ 是一个 *Fraïssé* 类，其 *Fraïssé* 极限为 **V**。那么以下条件等价 *nt*

(1) $\mathscr{C}$ 具有AEP，*(2)* $\mathscr{C}$ 具有**V**值AP。*(3)*

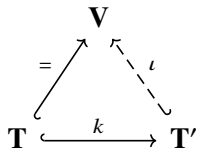
对每个$\mathbf{U} \in \sigma\mathscr{C}$， $\mathscr{C}$ 具有**U**值AP。*(4)* 对每

个$\mathbf{A} \in \mathscr{C}$， $\mathscr{C}$ 具有**A**值AP。

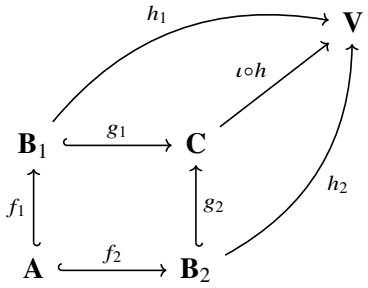
证明。“(1)⇒(2)”：给定 A、B_1, B2, f_1, f_2，h_1, h_2，满足 V 值 AP 的定义所要求的条件（见˜ ˜第 29 页）。令 T ≔ $hh_1(B_1) \cup h_2(B_2)i_{\mathbf{V}}$，并令 h_1 和 h_2 分别为 h_1 和 h_2 在 T 上的像限制。根据 AEP，存在 C、T′, g_1, g_2、h、k，使得下图交换：



由于 **V** 是 $\mathscr{C}$ 的 Fraïssé 极限，因此存在 ι: **T**′ ↪! **V**，使得



交换。由此得到以下交换图表：



这表明 $\mathscr{C}$ 具有 **V**-值合并性质。

“(2)⇒(3)”：这由 **V** 的普适性结合观察 3.31 得出。“(3)⇒(4)⇒(1)”：显然。

□

4. 主要结果的证明

4.1. **定理 3.8 的证明**。 为方便起见，我们重述定理 3 的表述。 8:

定理 3.8。 设 $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}_\Sigma$ 是一个年龄。那么， $\mathscr{C}$ 具有合并性质 和AEP，当且仅当 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 包含一个泛且齐次超度量结构。此外， $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中的任意两个普适齐次结构在度量意义下同构。

存在性证明。 假设 $\mathscr{C}$ 具有合并性质和 AEP。

设 $\mathbf{U}_0$ 是 $\mathscr{C}$ 的 Fraïssé 极限。由命题 3.32 可知，对于每个 $\mathbf{V} \in \sigma\mathscr{C}$， $\mathscr{C}$ 都具有 **V** 值合并性质。由推论 3.30，存在一个泛斜齐次同态 ω_0^1: $\mathbf{U}_1$! $\mathbf{U}_0$。通过归纳法，可将其扩展为一个 ω-上链 –U =$((\mathbf{U}_i)_{i<\omega}$，$(\Omega_i^j)_{i\le j<\omega})$，使得对所有 $i < \omega$， Ω_i^{i+1} 都是泛且斜齐次的。其他同态 Ω_i^{i+k} 按照适当复合形如 Ω_i^{i+1} 的同态自然定义。令 U ≔ Lim $\overleftarrow{__}$U。由观察 3.13 和 3.15 可知，U 在 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中是泛的且齐次。□

在给出定理 3.8 的唯一性证明之前，我们需要将 Fraïssé 理论中的一个标准观察移至超度量结构的语境中：

4.1. **观察**。 设 $\mathcal{V} \in \pi\sigma\mathscr{C}$ 是泛齐性的。设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \in \pi\sigma\mathscr{C}$ 是原有限生成的，并且设 $\mathcal{A}$ 是$\mathcal{B}$的等距子结构。设 $\iota\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{V}$ 是一个度量嵌入。则存在一个度量嵌入$\hat{\iota}\colon \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{V}$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xhookrightarrow{\hat{\iota}} & \mathcal{V} \\ {\scriptstyle\leq}\uparrow & & \| \\ \mathcal{A} & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{V}. \end{array}$$

证明。 由普适性可知，存在一个将 B 等距嵌入 κV 的映射。不失一般性，我们可以假设 B 是 V 的度量子结构。由等距齐性可知，存在 V 的度量自同构 f，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xhookrightarrow[\leq]{\kappa} & \mathcal{V} \\ {\scriptstyle\leq}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{A} & \xhookrightarrow{\iota} & \mathcal{V}. \end{array}$$

由 $\hat{\iota} := f \circ \kappa$ 即可得到结论。 □

定理 *3.8* 的唯一性证明。 设 A、B $\in \pi\sigma\mathscr{C}$ 是泛齐性超度量结–　　←构。不失一般性，设 A $=$ Lim— A，其中 A 由下式给出

$$\mathbf{A}_0 \xleftarrow{\alpha_0^1} \mathbf{A}_1 \xleftarrow{\alpha_1^2} \mathbf{A}_2 \xleftarrow{\alpha_2^3} \mathbf{A}_3 \xleftarrow{\alpha_3^4} \dots.$$

令 $(\mathbf{A}_\infty, (\alpha_i^\infty)_{i<\omega})$ 为相应的典范锥（特别地，A 的载体为 A_∞）。

同理，我们可以假设 B $=$ Lim— B，其中 B 定义如下：

$$\mathbf{B}_0 \xleftarrow{\beta_0^1} \mathbf{B}_1 \xleftarrow{\beta_1^2} \mathbf{B}_2 \xleftarrow{\beta_2^3} \mathbf{B}_3 \xleftarrow{\beta_3^4} \dots.$$

令 $(\mathbf{B}_\infty, (\beta_i^\infty)_{i<\omega})$ 为相应的典范锥（特别地，B 的载体为 B_∞）。

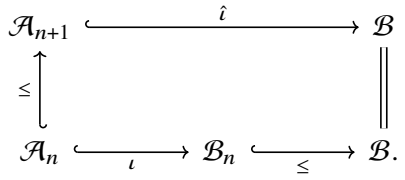
利用往返论证，我们构造 A 和 B 的可数稠密不完备度量子结构之间的度量同构。

我们将这一构造表述为两个玩家之间的博弈。该博弈与经典的长度为 ω 的埃伦费希特-弗雷塞博弈完全相同，只是获胜条件有所变化。若赋值 $\varphi\colon \mathbf{a}_i \mathrel{!}\!\shortmid \mathbf{b}_i$ 诱导出从 $\mathrm{h}\mathbf{a}_i \mid i < \omega\mathrm{i}_{\mathcal{A}}$ 到 $\mathrm{h}\mathbf{b}_i \mid i < \omega\mathrm{i}_{\mathcal{B}}$ 的度量同构 $\hat{}\varphi$，则一局对弈$((\mathbf{a}_i)_{i<\omega}, (\mathbf{b}_i)_{i<\omega})$ 对玩家2而言获胜。

我们来描述玩家2的一个必胜策略。假设经过 n 回合后，博弈的局面为 $(\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}; \mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{n-1})$，且赋值 $\mathbf{a}_i \mathrel{!}\!\shortmid \mathbf{b}_i (0 \leq i < n)$ 诱导出一个从 $\mathrm{A}_n := \mathrm{h}\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\mathrm{i}_{\mathcal{A}}$ 到 $\mathrm{B}_n := \mathrm{h}\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{n-1}\mathrm{i}_{\mathcal{B}}$ 的同构ι。

进一步假设玩家1选择 $\mathbf{a}_n \in A_{\infty}$。令 $\mathrm{A}_{n+1} := \mathrm{h}\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n\mathrm{i}_{\mathcal{A}}$。由于 B 是泛且齐次的，根据观察 4.1，存在一个等距嵌入 $\hat{\iota}\colon \mathrm{A}_{n+1} \hookrightarrow \mathrm{B}$，使得

下图表可交换:



现在玩家2回答 $\mathbf{b}_n := \hat{\iota}(\mathbf{a}_n)$。

另一方面，如果玩家1从 B_∞ 中选择 $\mathbf{b}_n$，那么玩家2 从 A_∞ 中选择 $\mathbf{a}_n$ 的方式也类似，利用 A 的普适性和齐性。

不难看出，所描述的策略是玩家2的必胜策略。

还需证明玩家1有一种策略，能够保证每个博弈 $((\mathrm{a}_i)_{i<\omega}, (\mathrm{b}_i)_{i<\omega})$ 都具有以下性质: $\{\mathrm{a}_i \mid i<\omega\}$ 在 A_∞ 中稠密，且 $\{\mathrm{b}_i \mid i<\omega\}$ 在 B_∞ 中稠密。为此，我们固定双射 $\chi\colon \omega \to \mathrm{Ð}_{i<\omega}\{i\} \times A_i$ 和 $\xi\colon \omega \to \mathrm{Ð}_{i<\omega}\{i\} \times B_i$。再次假设经过 n 回合后，博弈的位置为 $(\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_{n-1}; \mathrm{b}_0, \ldots, \mathrm{b}_{n-1})$。如果 n 为偶数，则玩家1选择满足以下条件的最小 $j<\omega$: 利用 $\chi(j) = (k,x)$，有 $x \notin \{\alpha_k^\infty(\mathrm{a}_i) \mid i<n\}$，然后继续选取任意满足 $\alpha_k^\infty(\mathrm{a}_n) = x$ 的 $\mathrm{a}_n \in A_\infty$。

若 n 为奇数，则玩家1以类似的方式，使用 ξ 选择 $\mathbf{b}_n \in B_\infty$。

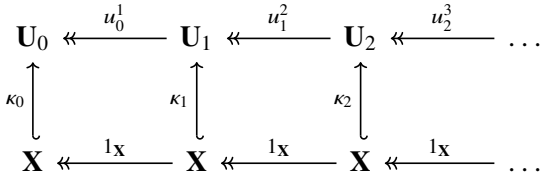
如果玩家1和玩家2各自采用相应的策略，那么由此产生的博弈就定义了一个从 A 的稠密等距子结构到 B 的稠密等距子结构的等距同构。利用完备化函子，该同构可扩展为从 A 到 B 的等距同构，正如所需。□

定理 *3.8* 反向蕴含的证明。 设 U 是 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中的一个通用齐次超度量结构。不失一般性，$\mathrm{U} = \mathrm{Lim}\,\overleftarrow{\ }\,\mathrm{U}$，其中 $\mathrm{U} = ((\mathbf{U}_i)_{i<\omega}, (u_i^j)_{i\le j<\omega})$，且所有 u_i^j 都是满射。我们将证明 $\mathscr{C}$ 具有合并性质和 AEP。

考虑任意一个形如以下形式的 ω-上链 X

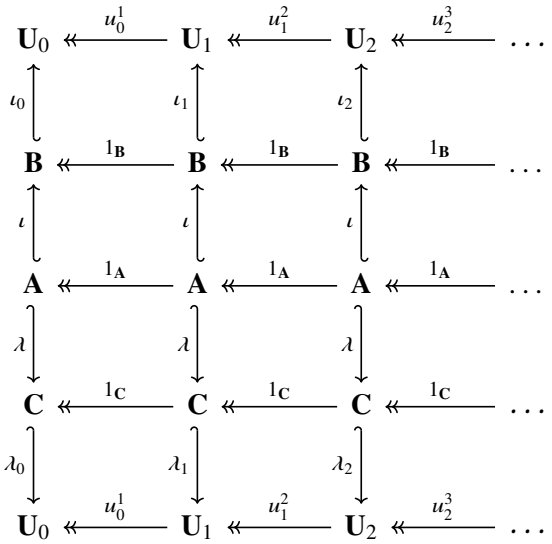
$$\mathbf{X} \xleftarrow{1_\mathbf{X}} \mathbf{X} \xleftarrow{1_\mathbf{X}} \mathbf{X} \xleftarrow{1_\mathbf{X}} \cdots$$

这是一个满射 ω-上链。根据观察 2.22(1)，我们有，$\varepsilon{\leftarrow}\mathrm{X} : \mathrm{Seq}\,\mathrm{Lim}\,\mathrm{X} \to \mathrm{X}$ 和 $\varepsilon{\leftarrow}\mathrm{U} : \mathrm{Seq}\,\mathrm{Lim}\,\mathrm{U} \to \mathrm{U}$ 都是自然同构。由 U 的普适性可知，存在一个度量嵌入 $\kappa\colon \mathrm{Lim}\,\overleftarrow{\ }\,\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{U}$。注意，此时 $(\kappa_i)_{i<\omega} := \varepsilon{\leftarrow}\mathrm{U} \circ \mathrm{Seq}\,\kappa \circ \varepsilon^{-1}{\leftarrow}\mathrm{X}$ 是一个从 X 到 $((\mathbf{U}_i)_{i<\omega}, (u_i^j)_{i\le j<\omega})$ 的自然嵌入。换言之，以下图表交换:

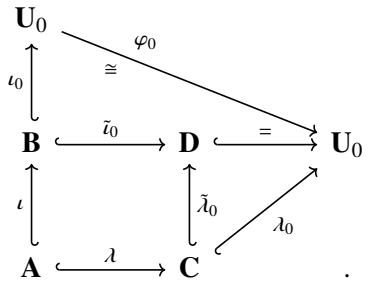


现在证明 $\mathscr{C}$ 具有合并性质。设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C} \in \mathscr{C}$，并设 $\iota\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$，$\lambda\colon \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{C}$。按照上述相同的推理，存在自然嵌入 $(\iota_i)_{i<\omega}$ 和 $(\lambda_i)_{i<\omega}$，使得下列

图表交换：

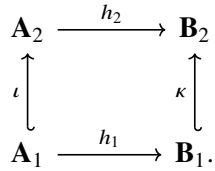


由 U 的齐性，存在一个自然自同构 $(\varphi_i)_{i<\omega}$ of $-\mathrm{U}$，使得对所有 $i<\omega\tilde{}$，都有 $\varphi_i \circ \iota_i \circ \iota = \lambda_i \circ \lambda$。令 $\mathbf{D} \coloneqq \mathrm{h}\varphi_0(\iota_0(B)) \cup \lambda_0(C)\mathrm{i}^{\mathbf{U}_0}$。令 $\lambda_0\colon \mathbf{C} \hookrightarrow! \mathbf{D}$ 为 λ_0 到 D 的像限制，并令 $\tilde{\iota}_0\colon \mathbf{B} \hookrightarrow! \mathbf{D}$ 为 $\varphi_0 \circ \iota_0$ 到 D 的像限制。那么下图交换：



特别地，$\mathscr{C}$ 具有合并性质。

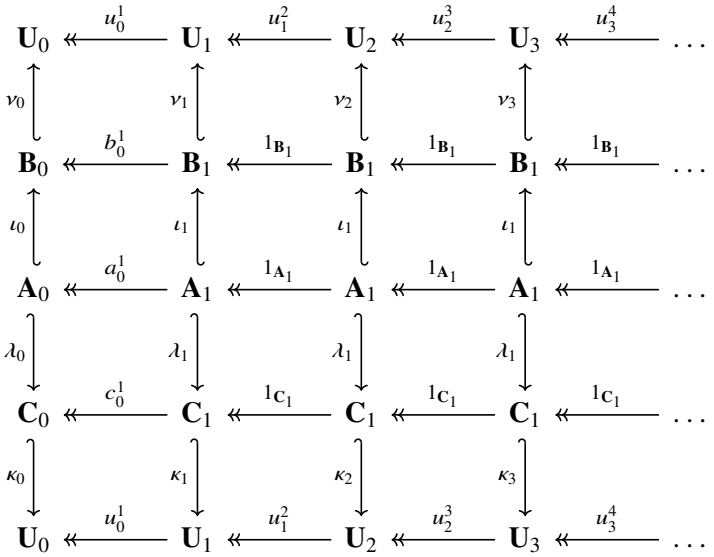
下一步是证明 $\mathscr{C}$ 具有 AEP。为此，我们考虑逗号范畴 (F # F)（关于 F 的定义，参见第3.4节开头）。(F # F) 的对象是三元组 $(\mathbf{A}, h, \mathbf{B})$，其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \sigma\mathscr{C}$，且 $h\colon \mathbf{A} ! \mathbf{B}$。从 $(\mathbf{A}_1, h_1, \mathbf{B}_1)$ 到 $(\mathbf{A}_2, h_2, \mathbf{B}_2)$ 的同态具有如下形式 (ι, κ)，其中 $\iota\colon \mathbf{A}_1 \hookrightarrow! \mathbf{A}_2$，且 $\kappa\colon \mathbf{B}_1 \hookrightarrow! \mathbf{B}_2$，，使得下图交换：



采用与证明观察3.23中相同的论证（即注意到在此情形下，[21,命题4.4] 的前提显然成立），我们观察到 (F # F) 是半代数丛态的，并且 $(\mathrm{F} \# \mathrm{F})_{<\omega}$ 的对象具有如下形式 $(\mathbf{A}, h, \mathbf{B})$，其中 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{C}$。

接下来我们将证明 $(\mathrm{F} \# \mathrm{F})_{<\omega}$ 具有合并性质。完成后，我们便可以使用 [21,命题 5.2(2)]，从而得出 $\mathscr{C}$ 具有 AEP。

设 $(\mathbf{A1}, a_0^1, \mathbf{A}_0), (\mathbf{B1}, b_0^1, \mathbf{B}_0), (\mathbf{C1}, c_0^1, \mathbf{C}_0) \in (\mathrm{F} \# \mathrm{F})$。首先假设 a_0^1、b_0^1 和 c_1^0 均为满射。与上文类似，根据 U 的普适性，存在自然嵌入 $(\nu_i)_{i<\omega}$ 和 $(\kappa_i)_{i<\omega}$，使得下图交换：

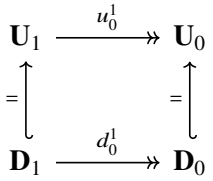


由 U 的齐性可知，存在 U 的一个自然自同构 $(\varphi_i)_{i<\omega}$，使得 $\varphi_0 \circ \nu_0 \circ \iota_0 = \kappa_0 \circ \lambda_0$，并且对所有 $1 \leq i < \omega$，都有 $\varphi_i \circ \nu_i \circ \iota_1 = \kappa_i \circ \lambda_1$。

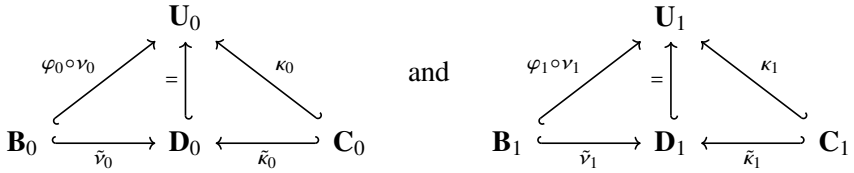
令 $\mathbf{D}_1 := \mathrm{h}\varphi_1(\nu_1(B_1)) \cup \kappa_1(C_1)\mathrm{i}\mathbf{U}_1$，并令 $\mathbf{D}_0 := \mathrm{h}\varphi_0(\nu_0(B_0)) \cup \kappa_0(C_0)\mathrm{i}\mathbf{U}_0$。那么 $u_0^1(D_1) = D_0$。事实上：

$$\begin{aligned} u_0^1(D_1) &= u_0^1(\langle \varphi_1(\nu_1(B_1)) \cup \kappa_1(C_1)\rangle_{\mathbf{U}_1}) = \langle u_0^1(\varphi_1(\nu_1(B_1)) \cup \kappa_1(C_1))\rangle_{\mathbf{U}_0} \\ &= \langle u_0^1(\varphi_1(\nu_1(B_1))) \cup u_0^1(\kappa_1(C_1))\rangle_{\mathbf{U}_0} = \langle \varphi_0(u_0^1(\nu_1(B_1))) \cup \kappa_0(c_0^1(C_1))\rangle_{\mathbf{U}_0} \\ &= \langle \varphi_0(\nu_0(b_0^1(B_1))) \cup \kappa_0(c_0^1(C_1))\rangle_{\mathbf{U}_0} = \langle \varphi_0(\nu_0(B_0)) \cup \kappa_0(C_0)\rangle_{\mathbf{U}_0} = D_0 \end{aligned}$$

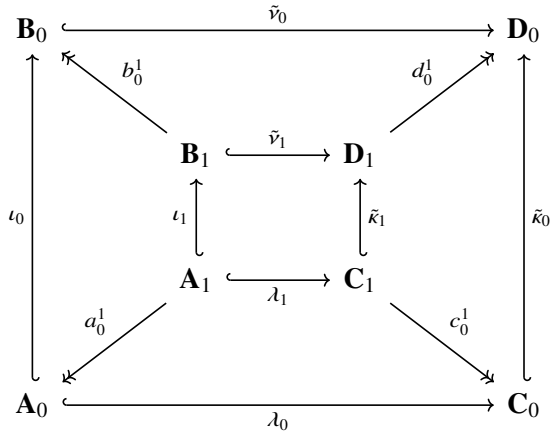
令 d_0^1 为使下图表交换的唯一同态 e:



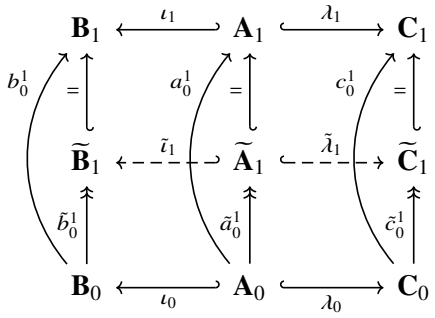
对于每个 $i \in \{1, 2\}$，令 $\tilde{\kappa}_i$ 为 κ_i 到 D_i 的像限制，并令 $\tilde{\nu}_i$ 为 $\varphi_0 \circ \nu_i$ 到 D_i 的像限制。特别地，以下图表交换：



那么以下图表也交换:



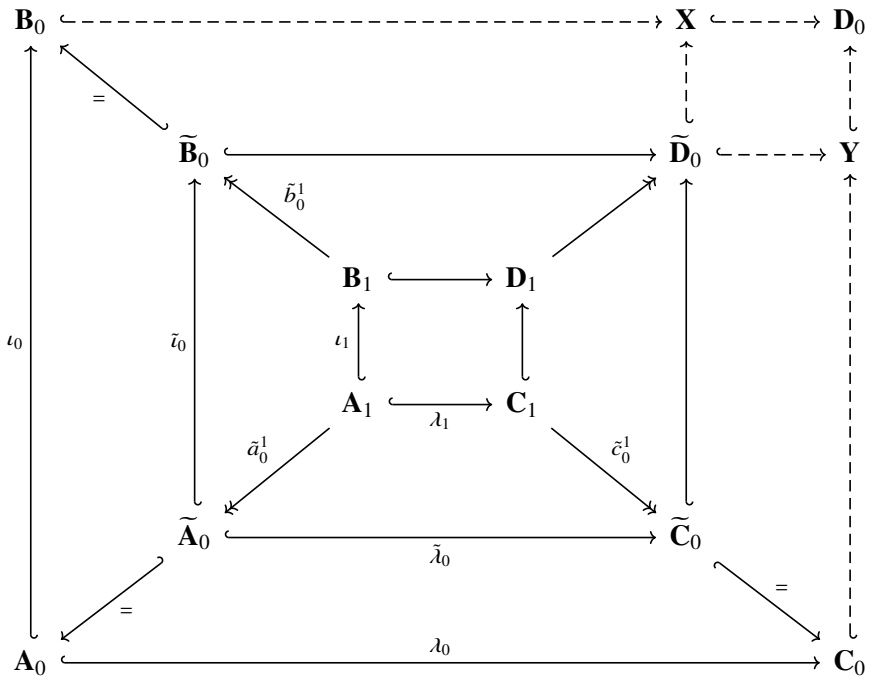
这表明 (F # F)$_{<\omega}$ 的满射对象具有 amalgamation 性质。一般情形以此为基础，论证如下: 设 $(\mathsf{A1}, a_0^1, \mathsf{A}_0)$, $(\mathsf{B1}, b_0^1, \mathsf{B}_0)$, $(\mathsf{C1}, c_0^1, \mathsf{C}_0) \in (\mathsf{F}\ \#\ \mathsf{F})_{<\omega}$, $(\iota_1, \iota_0) : (\mathsf{A1}, a_0^1, \mathsf{A}_0) \hookrightarrow\!! (\mathsf{B1}, b_0^1, \mathsf{B}_0)$, 且 $(\lambda_1, \lambda_0) : (\mathsf{A1}, a_0^1, \mathsf{A}_0) \hookrightarrow\!! (\mathsf{C1}, c_0^1, \mathsf{C}_0)$。考虑 a_0^1、b_0^1 和 c_0^1 的满单因子分解:



这里虚线箭头存在且唯一，因为

$$\iota_1(\widetilde{A}_1) = \iota_1(a_0^1(A_0)) = b_0^1(\iota_0(A_0)) \subseteq b_0^1(B_0) = \widetilde{B}_1, \quad \text{and}$$
$$\lambda_1(\widetilde{A}_1) = \lambda_1(a_0^1(A_0)) = c_0^1(\lambda_0(A_0)) \subseteq c_0^1(C_0) = \widetilde{C}_1.$$

利用满射对象的 amalgamation 性质，并三次运用 $\mathscr{C}$ 的 amalgamation 性质，我们得到以下交换图：



这表明 (F # F) 具有合并性质。因此，正如上文所述，$\mathscr{C}$具有 AEP。 □

4.2. **证明 定理 3.10**。为方便起见，我们重复一下定理 3.10 的表述 :

定理 3.10。设 Σ 是一个有限纯关系签名，$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{S}_\Sigma$ 是一个具有合并性质、AEP和HAP的年龄。设$\mathcal{U}$ 是定理 *3.8* 所断言的唯一泛齐性度量结构。则其底层结构**U**的任意两个有限子结构之间的同构都可以延拓为**U**的一个自同构。此外，对于某个 $l > 0$，可以选择这样的延拓，使其在半径为 $< 2^{-l}$ 的每个球上，都是关于$\mathcal{U}$ 的度量的等距映射。

回想一下，在定理 3.8 的证明中，$\pi\sigma\mathscr{C}$中的一个泛齐性度量结构是通过 Lim $\overleftarrow{__}$U , 其中 –U $=$ $((\mathbf{U}_i)_{i<\omega}, (\Omega_i^j)_{i\leq j<\omega})$构造出来的，它具有非常具体的性质。特别是，$\mathbf{U}_0$ 是 $\mathscr{C}$ 的 Fraïssé 极限，并且对于每个 $i < \omega$，都有 Ω_i^{i+1}: $\mathbf{U}_{i+1} \twoheadrightarrow \mathbf{U}_i$ 是一个泛斜齐性同态（参见第 33 页的“存在性证明”）。

更具体地说，上文已证明，可以选择 Ω_i^{i+1}，使得 $(\mathbf{U}_{i+1}$，Ω_i^{i+1}，$\mathbf{U}_i)$ 是逗号范畴 (F # G$_{\mathbf{U}_i}$) 中的泛齐次对象（参见推论 3.30 的证明）。

接下来，我们将修正键链的定义 **U** 为 $\mathscr{C}$ 的 Fraïssé 极限。于是，利用 $\mathscr{C}$ 具有 AEP 和 HAP，以及 [21,定理 6.8], ，我们得出 **U** 具有一个泛齐性自同态 Ω。换言之，$(\mathbf{U}$，Ω，$\mathbf{U})$ 是 (F # G$_{\mathbf{U}}$) 中的一个泛齐性对象。运用推论 3.30 的证明中相同的论证，我们得出 Ω也是泛的且斜齐次的。因此，我们可以考虑上链 ($(\mathbf{U}_i)_{i<\omega}$，$(\Omega_i^j)_{i\leq j<\omega}$)，它对每个 $i < \omega$ 定义为 $\mathbf{U}_i$:=**U**，以及 Ω_i^{i+1} := Ω。根据我们已知的一切，U_∞ :=Lim $\overleftarrow{__}$U 是 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中的一个泛齐性度量结构。令 $\mathbf{U}_\infty$为其底层结构。

在 $\mathbf{U}_\infty$ 上，我们可以引入两个移位算子 T_L 和 T_R，定义如下：

$$T_L\colon (x_0,x_1,x_2,\dots)\mapsto(x_1,x_2,x_3,\dots),\text{ and}$$
$$T_R\colon (x_0,x_1,x_2,\dots)\mapsto(\Omega(x_0),x_0,x_1,\dots).$$

4.2. **引理**。 T_L 和 T_R 是关于$\mathbf{U}_\infty$ 上的度量 δ 的互逆双 *Lipschitz* 自同构。

证明。显然，T_L 和 T_R 是 U_∞上的良定义自映射。显然，T_L 也是一个同态。此外，T_R 是一个同态，因为 Ω 是。

$T_L\circ T_R=1_{\mathbf{U}_\infty}=T_R\circ T_L$ 由 T_L 和 T_R的定义可得。

剩下需要验证双 Lipschitz 性质。设 $\delta(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=2^{-n}$。若 $n>0$，则有 $\delta(T_R(\mathbf{x}),\ T_R(\mathbf{y}))=2^{-(n+1)}$，且 $\delta(T_L(\mathbf{x}),\ T_L(\mathbf{y}))=2^{-(n-1)}$。若设 $n=0$，则至少有$1/2\le\delta(T_R(\mathbf{x}),\ T_R(\mathbf{y}))\le 1$，且 $\delta(T_L(\mathbf{x}),\ T_L(\mathbf{y}))=1$。因此，$T_L$和 T_R是双 Lipschitz 映射（Lipschitz 常数为 $L=2$）□

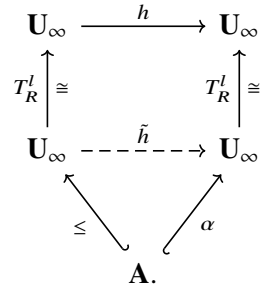
4.3. **引理**。 设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 是$\mathbf{U}_\infty$ 的有限子结构，且 $\alpha\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ 是一个同构。那么存在一个 $l<\omega$，使得 $T_L^l\circ\alpha\circ T_R^l\colon\langle T_L^l(A)\rangle\mathcal{U}_\infty\to\langle T_L^l(B)\rangle\mathcal{U}_\infty$是一个度量同构。

证明。 由于 A 是有限的，对于每个元数为 n 的关系符号 ϱ，满足$\mathbf{x}\notin\varrho^{\mathbf{A}}$的 n元组$\mathbf{x}\in A^n$只有有限多个。令 $m_\varrho<\omega$为最小值，使得对于所有$\mathbf{x}\notin\varrho^{\mathbf{A}}$，$\Omega^\infty_{m_\varrho}(\mathbf{x})\notin\varrho^{\mathbf{U}_{m_\varrho}}$。令 m为所有m_ϱ中的最大值。此外，令 $n<\omega$ 为最小值，使得$\Omega^\infty_n{\restriction}_{A\cup B}$ 是一一对应的。令$l=\max\{m,n\}$。那么对于所有$\mathbf{a},\mathbf{b}\in A$，我们有

$$\delta(T_L^l(\mathbf{a}),T_L^l(\mathbf{b}))=1=\delta(T_L^l(\alpha(\mathbf{a})),T_L^l(\alpha(\mathbf{b}))).$$

由此立即可得该断言。 □

定理 *3.10* 的证明。 设$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 是$\mathbf{U}_\infty$的有限子结构。令 $l<\omega$ 满足 $T_L^l\circ\alpha\circ T_R^l\colon\mathrm{h}T_L^l(A)\mathrm{i}\mathcal{U}_\infty!\mathrm{h}T_L^l(B)\mathrm{i}\mathcal{U}_\infty$是一个度量同构（由引理 4.3 得到）。由齐性可知，存在一个h 的度量自同构，它作用于 $\mathbf{U}_\infty$并扩张 $T_L^l\circ\alpha\circ T_R^l$。将其视为$\mathbf{U}_\infty$的自同构时，$h$ 是一个等距映射。现在考虑映射 $\tilde{h}:=T_L^l\circ h\circ T_R^l$。我们断言 $\tilde{h}$ 扩张 α。最简便的证明方法是通过以下交换图来说明



现在注意，只要 $\delta(\mathbf{x}、\ \mathbf{y})<1$，就有 $\delta(T_R^l(\mathbf{x})、T_R^l(\mathbf{y}))=2^{-l}\cdot\delta(\mathbf{x}、\mathbf{y})$。

考虑满足 $\delta(\mathbf{u},\mathbf{v})<2^{-l}$ 的 $\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$。于是 $\delta(T_L^l(\mathbf{u}),T_L^l(\mathbf{v}))=2^l\cdot\delta(\mathbf{u},\mathbf{v})<1$。另一方面，$\delta(T_L^l(\mathbf{u}),T_L^l(\mathbf{v}))=\delta(h(T_L^l(\mathbf{u})),h(T_L^l(\mathbf{v})))$。因此，根据前面的观察，我们得到

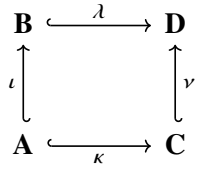
$$\begin{aligned}\delta(\tilde{h}(\mathbf{u}),\tilde{h}(\mathbf{v}))&=\delta(T_R^l(h(T_L^l(\mathbf{u}))),T_R^l(h(T_L^l(\mathbf{v}))))=2^{-l}\cdot\delta(h(T_L^l(\mathbf{u})),h(T_L^l(\mathbf{v})))\\&=2^{-l}\cdot\delta(T_L^l(\mathbf{u}),T_L^l(\mathbf{v}))=2^{-l}\cdot 2^l\delta(\mathbf{u},\mathbf{v})\\&=\delta(\mathbf{u},\mathbf{v}).\end{aligned}$$

因此，$\tilde{h}$ 在所有半径为 $<2^{-l}$ 的度量球上都是等距映射。 □

5. 例子与结语

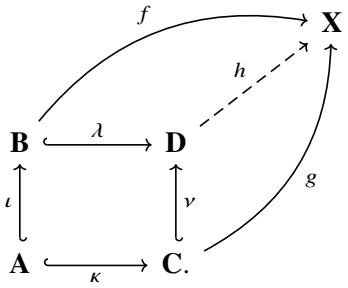
既然我们已经有了一个判据，可以判断 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 是否包含通用齐次超度量结构，那么现在正是举几个例子的时候。我们已知许多 Fraïssé 类，需要判断哪些“熟面孔”具有 AEP。遗憾的是，直接检验 AEP 并非易事。所幸，命题 3.32 给了我们一些提示。在我们看来，首先想到的是那些以某种方式具有典范 amalgam 的 Fraïssé 类。这里的“典范”可以理解为一种统一的 amalgam 构造方法。用范畴论的语言来说，这相当于寻找这样的 Fraïssé 类：对于 $(\mathscr{C}, \subset!)$ 中的每个跨度 $\mathbf{B} \overset{\iota}{\hookleftarrow} \mathbf{A} \overset{\kappa}{\subset}! \mathbf{C}$，都存在 $(\mathscr{C}, \subset!)$ 中的一个余跨度$\mathbf{B} \overset{\lambda}{\subset}! \mathbf{D} \overset{\nu}{\hookleftarrow} \mathbf{C}$，使得这个方块：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, hook, "\lambda"] & \mathbf{D} \\
\mathbf{A} \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, hook, "\kappa"'] & \mathbf{C} \arrow[u, hook, "\nu"']
\end{tikzcd}$$



是 $\mathscr{C}$ 中的一个推出方交换图。这意味着，对于所有的 $\mathbf{X} \in \mathscr{C}$，以及所有的同态 $f : \mathbf{B} ! \mathbf{X}$、$g : \mathbf{C} ! \mathbf{X}$，只要满足 $f \circ \iota = g \circ \kappa$，就存在唯一的同态 $h : \mathbf{D} ! \mathbf{X}$，使下图可交换：

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{X} \\
\mathbf{B} \arrow[r, hook, "\lambda"] \arrow[urr, bend left, "f"] & \mathbf{D} \arrow[ur, dashed, "h"] & \\
\mathbf{A} \arrow[u, hook, "\iota"] \arrow[r, hook, "\kappa"'] & \mathbf{C}. \arrow[u, hook, "\nu"'] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$



具有此性质的 Fraïssé 类有时称为严格的 （参见 [6, 第 638] 页）。鉴于命题 3.32，显然任何严格的 Fraïssé 类都具有 AEP。特别地，每个自由合并类都具有严格合并性质。严格的 Fraïssé 类的例子包括有限

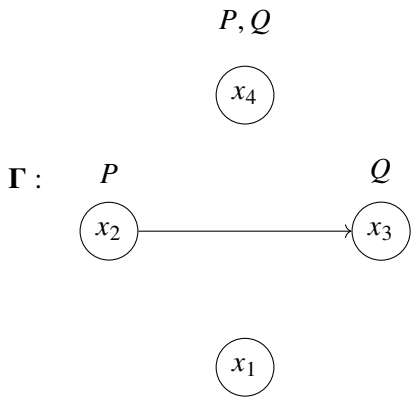
- 简单图，
- K_n-自由图，对每个 $n \geq 3$，
- 非严格偏序集，
- 有理度量空间，
- 半格，
- 分配格，
- 布尔代数，
- .....

一个具有 AEP 但不具有严格合并性质的年龄例子，是有限全序类（采用严格序关系或自反序关系）。

要找到不具有 AEP 的自然 Fraïssé 类似乎更加困难。这里我们给出一个稍显人为的例子，只是为了说明这一点：

5.1. **例子**。 考虑签名 $\Sigma = (\Phi, \mathrm{P})$，其中 Φ 为空，而 P 由一个二元关系符号 ϱ 和两个一元符号 P 和 Q 构成。我们可以将 Σ-结构视为某种

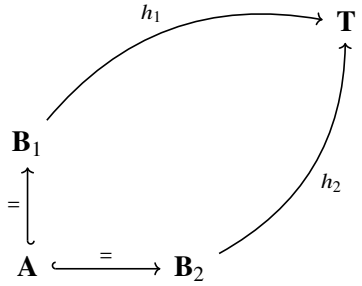
顶点着色有向图。考虑集合 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 上的 Σ-结构 $\mathbf{\Gamma}$，如下图所示：



显然，$\mathbf{\Gamma}$没有非平凡的局部同构。因此它是齐次的。设

$$\mathbf{A} := \langle x_1 \rangle_{\mathbf{\Gamma}},\ \mathbf{B}_1 := \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbf{\Gamma}},\ \mathbf{B}_2 := \langle x_1, x_3 \rangle_{\mathbf{\Gamma}},\ \mathbf{T} := \langle x_4 \rangle_{\mathbf{\Gamma}}.$$

对每个 $i \in \{1,2\}$，令 $h_i : \mathbf{B}_i \to \mathbf{T}$ 为唯一映射。显然，h_1 和 h_2 是同态。此外，下图是交换图：



$\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 关于 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{\Gamma}$ 中的唯一最小 amalgam 是 $\mathbf{C} = \mathrm{h}x_1, x_2, x_3\mathbf{i}_{\mathbf{\Gamma}}$。在 $\mathbf{\Gamma}$ 中，$\mathbf{C}$ 内的 h_1 和 h_2 的任何联合扩张都会将 x_2 和 x_3 映射到 x_4。然而，$(x_2, x_3) \in \varrho^{\mathbf{\Gamma}}$，而 $(x_4, x_4) \notin \varrho^{\mathbf{\Gamma}}$。这表明 Age($\mathbf{\Gamma}$) 不具有 AEP。

在本文末尾，我们来更详细地讨论几个例子。首先考虑有限线性序：

5.2. **例子**。下文用 $\mathscr{C}$ 表示具有自反序关系的有限线性序类（因此我们考察形如 $(A, \leq)$ 的结构，而不是更常见的 $(A, <)$；尽管从 Fraïssé 理论的角度看，这一区别无关紧要，但在我们的设定中却有很大影响）。作为有理数链的年龄，$\mathscr{C}$ 具有合并性质。文献 [16, 命题 3.23], 已证明，$\mathscr{C}$ 具有 AEP 和 HAP。仿照定理 3.10 的证明（见第 39 页），$\pi\sigma\mathscr{C}$ 中的通用齐次超度量结构可表示为 $\mathrm{Lim}\ \overleftarrow{\ \ }\mathrm{U}$，其中 –U 具有如下形式：

$$\mathbf{Q} \xleftarrow{\Omega} \mathbf{Q} \xleftarrow{\Omega} \mathbf{Q} \xleftarrow{\Omega} \cdots$$

且其中 Ω 是**有理数集** $= (\mathbb{Q},\ \leq)$的通用齐次端同态，即（**有理数集**，Ω，**有理数集**）是（F # GQ）中的泛齐次对象。Ω 的一种实现见第 818] 页的 [21, 注。特别地，Ω 可以取为有理数集**的**任意局部常值满射端同态。接下来我们

¯描述 ω-上链 U 的一个具体模型：对于每个 $n \geq 1$，考虑**有理数集**^{n} 上的字典序幂 $= (\mathbb{Q}^n, \leq_{\text{lex}})$，其中**有理数集**上的 $(a_i)_{i<n} <_{\text{lex}} (b_i)_{i<n}$ 当且仅当存在某个 $i < n$，使得 $a_i < b_i$，并且对于所有 $j < i$，都有 $a_i = b_i$。由于它是一个无端点的可数稠密链，根据**康托尔定理**，**有理数集**^{n} 上的字典序幂与**有理数集**同构。现在，若我们定义 Ω_n^{n+1}: **有理数集**$^{n+1}$ 上的字典序幂 ↠ **有理数集**^{n} 上的字典序幂，并令 Ω_n^{n+1}: $(a_0, \ldots\ldots, a_n) \mapsto (a_0, \ldots\ldots, a_{n-1})$，那么 Ω_n^{n+1} 保序、满射且局部常值。换言之，它是一个通用齐次同态。因此，我们可以不再考虑 ¯ ← ω-上链 U，而转而关注与之自然同构的 ω-上链 V，其定义如下：

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^1_{\text{lex}} \xleftarrow{\Omega_1^2} \mathbf{Q}^2_{\text{lex}} \xleftarrow{\Omega_2^3} \mathbf{Q}^3_{\text{lex}} \xleftarrow{\Omega_3^4} \cdots.$$

–V 的一个极限由字典序幂 **有理数集**$^{\omega}_{\text{lex}}$ 给出，并配有极限锥 Ω_i^{∞}: **有理数集**$^{\omega}_{\text{lex}}$ ！ **有理数集**$^{i+1}_{\text{lex}}$由 $\mathbf{a} \mapsto (a_0, \ldots\ldots, a_i)$。通过添加 $\mathbb{Q}^{\omega}$ 上的标准超度量 δ 和由下式定义的多值谓词 $\leq^{Q}$，可以将其完备化为一个超度量结构 Q

$$\leq^{Q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \coloneqq \begin{cases} 0 & \mathbf{a} \leq_{\text{lex}} \mathbf{b} \\ \delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \text{else.} \end{cases}$$

由此得到的超度量结构 Q 在 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中是泛且齐次的。此时我们作如下观察：

观察。 偏序集 **有理数集**$^{\omega}$ 字典序 同构于按自然顺序排列的无理数链。

证明。 下文中，我们记 **实数集** $= (\mathbb{R}, \leq)$，并记 $\mathbf{I} = (\mathbb{I}, \leq)$。这里， $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{I}$ 分别表示实数和无理数。

我们的目标是构造一个序列 $(\sigma_i)_{i<\omega}$，使得：

1) $\forall i < \omega$： $\sigma_i \subseteq \mathbb{I}^2$ 是一个等价关系，具有以下性质：(a) $\forall x \in \mathbb{I}$： $[x]_{\sigma_i}$ 是 $\mathbb{I}$中的有理数界开区间，(b) $\mathbf{I}/\sigma_i \cong$**有理数集**，2) $\forall a \in \mathbb{Q}\, \exists i < \omega,\ x \in \mathbb{I}$： $a =$上确界$[x]_{\sigma_i}$或 $a =$下确界$[x]_{\sigma_i}$，3) $\forall i, j < \omega : i \leq j \implies \sigma_j \subseteq \sigma_i$，4) $\forall i < \omega\, \forall x \in \mathbb{I}$： $\mathrm{h}[y]_{\sigma_{i+1}} \mid y \in [x]_{\sigma_i}\mathrm{i}$ $\mathbf{I}/\sigma_{i+1} \cong$ **有理数集**。

在开始构造序列（σ_i）$_{i<\omega}$之前，让我们先固定 $\mathbb{Q}$的一个枚举（q_i）$_{i<\omega}$。令 Ω: **有理数集** ↠ **有理数集** 为一个局部常值的满射自同态（换言之， Ω 是泛且齐次的）。定义 $L \coloneqq \{\inf [x]_{\ker \Omega} \mid x \in \mathbb{Q}\}$ 和 $U \coloneqq \{\sup [x]_{\ker \Omega} \mid x \in \mathbb{Q}\}$。令$\mathbf{B} \coloneqq \mathrm{h}L \cup U\mathrm{i}_{\mathbf{R}}$。那么$\mathbf{B}$ 是一个可数无穷无界链。根据康托尔定理，存在一个将$\mathbf{B}$ 嵌入**有理数集**的嵌入 ι。注意，可以选择 ι，使得它在 $\mathbb{Q}$ 中的像也是无界的。

接下来，对于 $x,\ y \in \mathbb{I}$ 定义 $x \sigma_0 y :\Leftrightarrow (x,\ y) \cap \iota(B) = \emptyset$。根据构造， σ_0 满足条件 1).

设 X是 σ_0 的任意一个类，并设 $q \coloneqq \inf X$。假设 σ_0、……、σ_n 已经构造完成。设 $(X_i)_i < \omega$ 是 σ_n 的等价类的一个枚举。对每个 $i < \omega$，令 $l_i \coloneqq \inf X_i$，且$u_i \coloneqq \sup X_i$属于有理数集，并令 j_i 为满足 $q_{j_i} \in (l_i, u_i)$ 的最小数。令 ψ_i: Q ! $\mathrm{h}(l_i, u_i) \cap \mathbb{Q}\mathrm{i}$Q 为一个将 q 映射到 q_{j_i} 的序同构（由康托尔定理和 Q 的齐性可知，此同构存在）。接着， ψ_i唯一地延拓为一个同构 $\mathrm{b}\varphi$: R ! $\mathrm{h}(l_i, u_i)\mathrm{i}_{\mathbf{R}}$。最后，令 φ: I ! $\mathrm{h}(l_i, u_i) \cap \mathbb{I}\mathrm{i}_{\mathbf{I}}$ 为 $\mathrm{b}\varphi$ 在 I 上的限制。显然， φ_i 是一个序同构。定义 $\sigma_{n+1,i} \coloneqq \varphi_i(\sigma_0)$。于是 $\varphi_i(X)$ 是 $\sigma_{n+1,i}$ 的一个等价类，且 $q_{j_i} = \inf \varphi_i(X)$。最后，定义 $\sigma_{n+1} \coloneqq Ð_{i<\omega} \sigma_{n+1,i}$。因此，序列 $(\sigma_i)_{i<\omega}$ 已完全定义。按照构造，它具有性质 1）、2）、3）和 4）。

现在，对于每个 $i < \omega$细 $\mathbf{I}_i \coloneqq \mathbf{I}/\sigma_i$，以及 π_i^{i+1}: $\mathbf{I}_{i+1} \twoheadrightarrow \mathbf{I}_i$根据 π_i^{i+1}: $[x]_{\sigma_{i+1}} \mapsto [x]_{\sigma_i}$，对所有 $x \in \mathbb{I}$均成立。注意，对于每个 $i < \omega$，我们都有 $\mathbf{I}_i \cong$ **有理数集**，并且 π_i^{i+1} 是一个泛齐性

¯同态。我们将由 I 表示由 ω 给出的上链

$$\mathbf{I}_0 \xleftarrow{\pi_0^1} \mathbf{I}_1 \xleftarrow{\pi_1^2} \mathbf{I}_2 \xleftarrow{\pi_2^3} \cdots .$$

设 $\tilde{\mathbf{I}} := \lim_{\leftarrow} \mathrm{I}$（特别是，$\tilde{\mathbf{I}} \cong \mathbf{Q}^{\omega}\mathrm{lex}$）。定义 $\pi\colon \mathbf{I} \to \tilde{\mathbf{I}}$，使其满足 $\pi\colon x \mapsto ([x]_{\sigma_i})_{i<\omega}$。我们断言 π 是一个同构。显然，π 是保序的。剩下要证明它也是双射。为此，只需证明对所有 $(X_i)_{i<\omega} \in \tilde{\mathbb{I}}$，都有

$$\bigcap_{i<\omega} X_i = \{x\}, \text{ for some } x \in \mathbb{I}. \tag{6}$$

证明的其余部分将用于证明 (6)。

对每个 $i < \omega$，选取某个 x_i，使其属于 X_i。由于 X_0 是 $\mathbb{R}$的有界子集，序列 $(x_i)_{i<\omega}$在 $\mathbb{R}$中有一个聚点，记为 x。

断言 1： $x \in \mathbb{I}$。反设 $x \in \mathbb{Q}$。那么由 2)，存在某个 $y \in \mathbb{I}$，使得$x = \inf[y]_{\sigma_j}$或 $x = \sup [y]_{\sigma_j}$。我们只讨论 $x = \sup[y]_{\sigma_j}$的情形，另一种情形的证明类似。

断言 1a： $X_j = [y]_{\sigma_j}$。如果 x是 X_j的下界，那么由 1b) 可得 $\inf X_j > x$。然而，此时对于所有 $k \geq j$，都有$|x - x_k| > |\inf X_j - x_k|$，这与 x是 $(x_n)_{n<\omega}$的聚点相矛盾。因此，x是 X_j 的上界。如果 $X_j < [y]_{\sigma_j}$，那么对于所有 $k \geq j$，都有 $|x_k - x| \geq \varepsilon$，其中$\varepsilon$是 $[y]_{\sigma_j}$的长度，这与 x是 $(x_n)_{n<\omega}$的聚点相矛盾。因此，断言 1a 成立。

现在考虑 $\hat{}x := \sup X_{j+1}$。由 4) 可得 $\hat{}x < x$。然而，此时对于所有 $k \geq j+1$，都有$|x_k - x| > |\hat{}x - x|$，这同样与 x是 $(x_n)_{n<\omega}$的聚点相矛盾。因此，假设 x 是有理数是错误的，断言 1 得证。

断言 2： $x \in \tilde{\mathrm{N}}_{i<\omega} X_i$。反设 $x \notin \tilde{\mathrm{N}}_{i<\omega} X_i$。设 $j < \omega$ 是满足性质 $x \notin X_j$的最小元素。假设 x是 X_j的上界。由于 x是无理数，我们有 $x > \sup X_j$。但这样一来，对于所有 $k \geq j$，都有 $|x - x_k| > |x - \sup X_j|$，这与 x是 $(x_n)_{n<\omega}$的聚点相矛盾。类似地，也可排除 x 是 X_j 的下界的情况。因此，断言 2 得证。

命题 3： $\tilde{\mathrm{N}}_{i<\omega} X_i = \{x\}$。反设存在某个 $y \neq x$，使得 $y \in \tilde{\mathrm{N}}_{i<\omega} X_i$。那么在 x 和 y 之间存在某个 $q \in \mathbb{Q}$。根据 2)，存在某个 $j < \omega$ 和某个 $X \in \mathbb{I}/\sigma_j$，使得 $q = \inf X$ 或 $q = \sup X$。然而，这样一来，x 和 y 就不可能属于σ_j的同一个等价类，矛盾。因此，命题 3 得证。□

由此，我们得到了 $\pi\sigma\mathscr{C}$ 中通用齐次超度量结构的另一种描述：$\mathrm{A} = (\mathbb{I}, \delta_{\mathcal{A}}, \leq^{\mathcal{A}})$，其中

$$\delta_{\mathcal{A}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 2^{-i} & i = \min\{j < \omega \mid [x]_{\sigma_j} \neq [y]_{\sigma_j}\}, \end{cases}$$

$$\leq^{\mathcal{A}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq y \\ 2^{-i} & i = \min\{j < \omega \mid [x]_{\sigma_j} \neq [y]_{\sigma_j}\}. \end{cases}$$

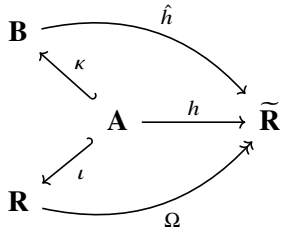
作为第二个例子，我们来看看有限图这一类：

5.3. **例子**。下文中，令 $\mathscr{C}$ 表示每个顶点都带有一个环的有限图类。众所周知，$\mathscr{C}$ 具有自由 amalgamation 性质。如上所述，这直接意味着 $\mathscr{C}$ 具有合并性质和 AEP。$\mathscr{C}$ 的 Fraïssé 极限就是添加了所有环的 Rado 图；我们将此图记作**实数集**。不难看出，$\mathscr{C}$ 具有 HAP。再一次借助

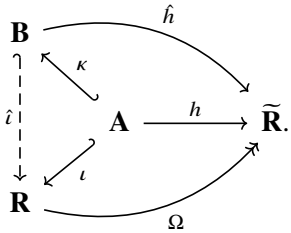
定理 3.10 的证明中的论证（见第 39 页），$\pi\sigma\mathscr{C}$中的通用齐次超度量结构可以表示为 $\mathrm{R} = \mathrm{Lim}\,\overleftarrow{\ }\,\mathrm{U}$，其中 –U 具有如下形式：

$$\mathbf{R} \xleftarrow{\Omega} \mathbf{R} \xleftarrow{\Omega} \mathbf{R} \xleftarrow{\Omega} \cdots$$

并且，其中 Ω 是$\mathbf{R}$ 的一个通用齐次自同态（即 $(\mathrm{F} \# \mathrm{G}_{\mathbf{R}})$ 中的一个通用齐次对象）。为了理解 R 的结构，我们来仔细考察一下 Ω：根据 [8, 命题 2.2]，同态 Ω：$\mathbf{R} ! \mathbf{R}$ 在 $(\mathrm{F} \# \mathrm{G}_{\tilde{\mathbf{R}}})$ 中是通用齐次的，当且仅当对于所有$\mathbf{A}$、$\mathbf{B} \in \mathscr{C}$，以及所有形如以下形式的交换图表，



存在 $\hat{\iota}$：$\mathbf{B} \dashv ! \mathbf{R}$，使下图交换：



仔细观察可知，这等价于以下条件：对于 R 的任意两个有限不相交子集 A 和 B，以及任意一个与 $\Omega(A)$ 的每个顶点都相连的 $c \in R$，都存在某个 $x \in R$，满足 $\Omega(x) = c$，使得 x 与 A中的每个顶点都有边相连，而与 B中的顶点均无边相连。有了这一认识，显然，对于每个 $c \in R$，$\mathbf{R}$ 中由 $\Omega^{-1}(c)$ 诱导的子图都与$\mathbf{R}$同构。同样可以看出，对于$\mathbf{R}$ 的所有边 $(c,\ d)$，$\mathbf{R}$ 中 $\Omega^{-1}(c)$ 与 $\Omega^{-1}(d)$ 之间的边构成一个随机二分图。

综上所述，我们可以将 R 想象成一种分形结构。从很远处看，R 就像 Rado 图。逐渐靠近 R 时，乍看之下的顶点开始显现为一簇簇顶点，而这些顶点再次诱导出 Rado 图；边则逐渐显现为随机二分图的副本。再进一步靠近，这一过程便无限重复。

最后，我们通过描述一个具体表示，来为这个例子作结：在 Rado 图的两个不同具体副本之间的一个泛齐性 e 同态 Ω：作为 Ωe 的陪域，我们取 Rado 图的一种“标准”表示，并在其中加入所有环，其中 $R = \omega$，且对于所有 $n \le m < \omega$，只要 $n = m$ 或者 m 的二进制展开中的第 n 位等于 1，就在 n 和 m 之间连一条边。我们用 ϱ 表示 $\mathbf{R}$ 的边关系。

现在来定义 Ω 的定义域。考虑由字母表 $\{0,1\}^*$ 中所有有限词组成的集合。按照惯例，我们用 ε 表示空词，用 $|w|$ 表示词 w 的字母数。我们将用 $\#(w)$ 表示 w 在 $\{0,1\}^*$ 的字典序枚举中的索引。这里，$v < w$ 表示 $|v| < |w|$ 或 $|v| = |w|$ 且 $v <_{\mathrm{lex}} w$。因此，例如，

w	ε	0	1	00	01	10	11	...
$\#(w)$	0	1	2	3	4	5	6	....

此外，对于 $w = a_0 \dots a_n$ 以及 $i < \omega$，我们定义

$$w_i := \begin{cases} a_i & i \leq n \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

接下来，令 $\varphi\colon \omega \twoheadrightarrow \omega$，使得对于所有 $n < \omega$， $\varphi^{-1}(n)$ 都是无限的。例如，我们可以取在线整数数列百科全书中的 A002262序列（见 [20]），其定义如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\varphi(n)$	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	...

现在， Ω 的定义域是图 $\mathbf{R}$，其顶点集为 $\{0,1\}^*$。对于任意 $v, w \in \{0,1\}^*$，若 $\#(v) \leq \#(w)$，则当 $v = w$ 成立，或当 $(\varphi(|v|), \varphi(|w|)) \in \varrho$ 且 $w_{\#(v)} = 1$ 时，我们在 v 和 w 之间连一条边。最后

y 我们定义 $\Omega\colon \mathbf{R} ! \mathbf{R}$ 如下 g to

$$\Omega\colon w \mapsto \varphi(|w|).$$

为了证明 Ω 确实是一个通用齐次同态，令 A 和 B 是 $\{0,1\}^*$ 的有限不相交子集，并令 $C := \Omega(A)$。取 $\mathbf{R}$ 中任意一个与 C 中所有顶点相连的顶点 c。令 n 满足 $\varphi(n) = c$，且 $n > \max\{\#(x) \mid x \in A \cup B\}$。取 $u \in \{0,1\}^*$，使得 $|u| = n$，并且对所有 $v \in A$，都有 $u_{\#(v)} = 1$；对所有 $w \in B$，都有 $u_{\#(w)} = 0$。不难看出，作此选择后， $\Omega(u) = c$，且 u 在 $\mathbf{R}$ 中与 A 的所有元素相连，而与 B 中的任何元素都不相连。由上述注释可知，这意味着 Ω 确实是泛齐性且齐次的。

参考文献

[1] B. Banaschewski. 代数方程类中的单射性与本质扩张。载于普适代数会议论文集（安大略省金斯顿，皇后大学，*1969*），第131–147页。安大略省金斯顿：皇后大学，1970年。[2] C. Bargetz、J. Kąkol 和 W. Kubiś. 一个具有几乎泛配置的可分弗雷歇空间。《函数分析杂志》，272(5):1876–1891，2017年。[3] I. Ben Yaacov. 度量结构的 Fraïssé 极限。《符号逻辑杂志》，80(1):100–115，2015年。[4] I. Ben Yaacov、A. Berenstein、C. W. Henson 和 A. Usvyatsov. 度量结构的模型论。载于模型论在代数与分析中的应用。第*2*卷，数学研究生教材第350卷，第315–427页。剑桥大学出版社，剑桥，2008年。[5] I. Dolinka. 某些 Fraïssé 极限的自同态幺半群的 Bergman性质。*Forum Mathematicum*，第–页，2011年12月。[6] I. Dolinka 和 D. Mašulović. 某些超齐次结构的自同态幺半群的普适性结果。《爱丁堡数学学会会刊》第二辑，55(3):635–656，2012年。[7] M. Droste 和 R. Göbel. 编程语言指称语义理论中的泛域。载于第五届 *IEEE* 计算机科学逻辑年度研讨会（宾夕法尼亚州费城，*1990*），第19–34页。IEEE计算机学会出版社，加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯，1990年。[8] M. Droste 和 R. Göbel. 关于泛对象的一个范畴论定理及其在阿贝尔群论和计算机科学中的应用。载于 L. A. Bokut'、Y. L. Ershov 和 A. I. Kostrikin 编，纪念 *A. I. Mal'cev* 国际会议论文集，苏联新西伯利亚，*1989*，当代数学第131(3)卷，第49–74页，罗得岛州普罗维登斯，1992年。美国数学学会。[9] R. Fraïssé. 关于推广有理数序关系的某些关系。《巴黎科学院报告》，237 542，1953年 540：–。[10] R. Fraïssé. 关于将若干已知的序关系性质推广到关系。《巴黎科学院报告》，237 510，1953年 508：–。[11] J. Garbulińska-We

ˇ 73 1 143 158, 2015

grzyn 和 W. Kubiś. Gurariı空间上的泛算子。《算子理论杂志》，( )：–。[12] T. Irwin 和 S. Solecki. 投射 Fraïssé极限与伪弧。《美国数学会汇刊》，358(7):3077–3096，2006年。[13] D. M. Kan. 伴随函子。《美国数学会汇刊》，87:294–329，1958年。[14] A. Krawczyk 和 W. Kubiś. 有限生成结构的博弈。*Annals of Pure and Applied Logic*，172(10):论文编号103016，13页，2021年。

[15] W. Kubiś. 度量富集范畴与近似 Fraïssé 极限。*arXiv:1210.6506*，2012年10月。[16] W. Kubiś. Fraïssé 极限的内射对象与收缩。*Forum Mathematicum*，第–页，2013年1月。[17] W. Kubiś. Fraïssé 序列：研究泛齐次结构的范畴论方法。*Annals of Pure and Applied Logic*，165(11):1755–1811，2014年。[18] W. Kubiś. Fraïssé 极限的内射对象与收缩。*Forum Mathematicum*，27(2):807–842，2015年。[19] S. Mac Lane. 工作数学家的范畴论，数学研究生教材第5卷。Springer-Verlag，纽约，第2版，1998年。[20]OEIS Foundation Inc. 在线整数序列百科全书，2023年。电子版网址：http://oeis.org。[21] C. Pech 和 M. Pech. 逗号范畴中的 Fraïssé 极限。*Applied Categorical Structures*，2018年2月。

捷克科学院数学研究所，Žitná 25，115 67 布拉格，捷克共和国电子邮箱地址：kubis@math.cas.cz网址: https://users.math.cas.cz/kubis/

电子邮箱地址: pech@math.cas.cz网址: https://www.researchgate.net/profile/Christian_Pech2

诺维萨德大学数学与信息学系，21000 诺维萨德，塞尔维亚电子邮箱地址：maja@dmi.uns.ac.rs网址: http://people.dmi.uns.ac.rs/~maja/