arXiv:2301.10981v1 [math.GT] 26 Jan 2023

SOME MOY 图的格同调的性质 S

HAJIME KUBOTA

Abstract. MOY 图的格点同调可直接由 Harvey 和 O'Donnol [4]所发展的横截空间图的格点同调定义。我们研究了 MOY 图的格点同调的一些性质，例如定向 skein 关系、收缩一条边的影响，以及将方向相同的平行边合并的影响。

1. Introduction

格点同调是由 Manolescu、Ozsv´ath、Szab´o 和 Thurston [6]发展的组合链环 Floer 同调。结/链 Floer 同调受到广泛研究，因为它在低维拓扑中有多种应用。例如，结 Floer 同调能够检测结的亏格 [9]。结 Floer 同调被称为 Alexander 多项式的范畴化，因为其分次欧拉示性数与 Alexander 多项式一致。

Harvey 和 O'Donnol 将格点同调扩展到了横截空间图 [4]。粗略地说，横截空间图是在每个顶点处对入边和出边进行区分的空间图。对于一个横截空间图 f: $G \to S^3$，Harvey 和 O'Donnol 将扩展格点同调定义为 $HFG^-(f)$，即相对双分次的 $\mathbb{F}[U_1, \ldots, U_V]$-模；并将 $HFG(f)$定义为相对双分次的 $\mathbb{F}$-向量空间，其中 V是 f 的顶点数，而 $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。所谓 $relatively\ bigraded$，是指一个具有绝对 $\mathbb{Z}$-值 Maslov 分次和相对 $H_1(S^3 - f(G))$-值 Alexander 分次的模或向量空间。他们证明，其格点同调的帽版本是缝合 Floer 同调的组合版本 [4, 定理 6.6]。作为推论，其帽版本的分次欧拉示性数与 Friedl、Juh´asz 和 Rasmussen [3],的挠不变量$T(E(f)\ \gamma(f)) \in \mathbb{Z}[H_1(E(f))]$一致，其中 $(E(f)\ \gamma(f))$ 是由 f确定的缝合流形。Harvey 和 O'Donnol 将横截空间图的 Alexander 多项式定义为挠不变量 $T(E(f)\ \gamma(f))$。

Harvey 和 O'Donnol 还提到，对于 Bao [1] 定义的某些平衡二分图，如果这些图没有汇点、源点或割边，那么它们的格点同调与 Hee-gaard Floer 同调相同。对于横截空间图 f，我们可以唯一地取其平衡二分空间图 f'。由于 f' 也是一个横截空间图，因此我们可以取一个表示 f'的（良好）格点图 g'。Bao 指出，如果我们将 g' 视为一种特殊的 Heegaard 图，那么她的链复形与 g'的格点链复形一致。

日期：2023年1月27日。

粗略地说，具有某种称为平衡着色的边着色的横截空间图称为 MOY 图。将平衡着色与针对横截空间图的扩展格点同调相结合，我们可以快速定义 MOY 图的格点同调，记作 $HF^-(f,\ \omega)$ 或 $HF(f,\ \omega)$。我们的格点同调的 Alexander 分次取值于 $\mathbb{Z}$，因为我们可以取由 f的平衡着色所确定的同态$\omega\colon H_1(S^3-f(G))\to\mathbb{Z}$。我们研究了 MOY 图的格点同调及其分次欧拉示性数 $\Delta_{(f,\omega)}(t)\in\mathbb{Z}[t^{\pm1}]$。

我们的主要目标是研究 MOY 图的格点同调的一些性质，例如定向 skein 关系、收缩边的影响，以及将具有相同定向的平行边合并的影响。

1.1. **MOY 图**。 定向空间图 f 是抽象有向图在 S^3 中的嵌入像。**横截空间图** 是这样一种定向空间图：对于每个顶点，都存在一个小圆盘 $D\subset S^3$ 将入边与出边分隔开（图 1）。在本文中，我们始终假设每个横截空间图都没有源点和汇点，即每个顶点同时具有入边和出边。

定义 1.1。 我们用 $E(f)$ 表示 f 的边集，用 $V(f)$ 表示 f 的顶点集。对于顶点 v，令 $\mathrm{In}(v)$ 表示进入 v 的边集，$\mathrm{Out}(v)$ 表示从 v 出发的边集。

(1) ω 的**平衡着色** 是一个映射 $E(f)\to\mathbb{Z}$，满足 $\sum_{e\in\mathrm{In}(v)}\omega(e)=\sum_{e\in\mathrm{Out}(v)}\omega(e)$，对每个 $v\in V(f)$ 均成立。(2) **MOY 图** (f,ω) 是带有平衡着色的横截空间图。

注 1.2. Mellor、Kong、Lewald 和 Pigrish [7] 将平衡空间图定义为空间图与平衡着色组成的有序对；它是去掉横截条件的 MOY 图。Vance[11]和作者的论文[5]也定义了平衡空间图，指满足每个顶点处入边数等于出边数的横截空间图，这容易引起混淆。Vance 和作者所定义的平衡空间图是 MOY 图的一种特殊情形。

1.2. **主要结果**。 令 $W(i)$ 为二维分次向量空间 $W(i)\cong\mathbb{F}_{0,\ 0}\oplus\mathbb{F}_{-1,\ -i}$，其中 $\mathbb{F}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。对于双分次 $\mathbb{F}$-向量空间 X, $X[\![a,\ b]\!]$ 表示双分次 $\mathbb{F}$-向量空间的**平移**，使得 $X[\![a,\ b]\!]_{d,\ s}=X_{d+a,\ s+b}$。于是，

$$X\otimes W(i)\cong X\oplus X[\![1,i]\!].$$

定义 1.3。 设 f、f_+、f_-、f_0 是图 2 中的四个横截空间图，且 ω 是 f 的一个平衡着色。若 f、f_+、f_0、ω 或 (f、f_-、f_0、ω) 的平衡着色可由 ω 自然确定，并且 $\sum_{s=1}^{i}\omega(a_s)=\sum_{s=1}^{j}\omega(b_s)=\sum_{s=1}^{k}\omega(c_s)=\sum_{s=1}^{l}\omega(d_s)$，则称四元组 ($f$、$f_+$、$f_0$、$\omega$) 或 ($f$、$f_-$、$f_0$、$\omega$) 为一个**MOY 图的定向 skein 三元组**。

以下定理表明，对于 MOY 图的定向 skein 三元组，存在格点同调$\frown HF(f,\ \omega)$的正合列。

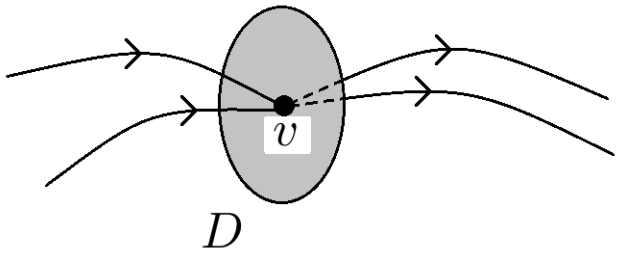


FIGURE 1. 横截空间图顶点处的一个小圆盘

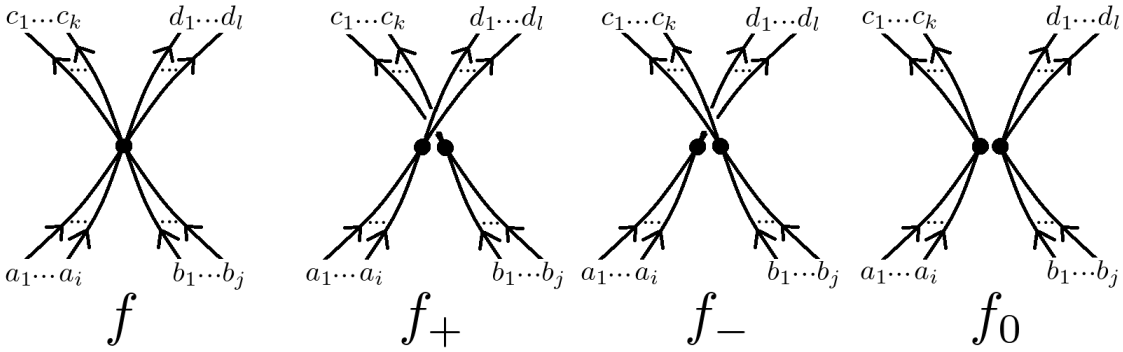
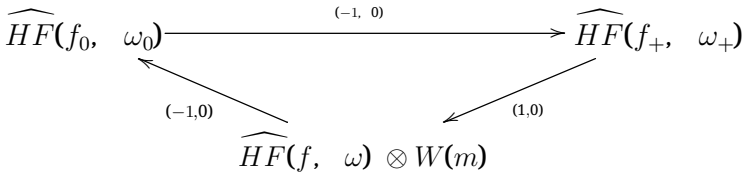
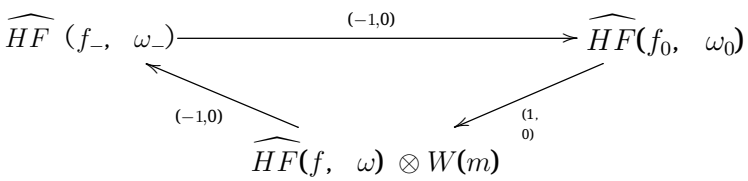


FIGURE 2. MOY 图的一个定向 skein 三元组。具有相同标签的边彼此对应。

定理 1.4。 (1) 设 $(f,\ f_+,\ f_0,\ \omega)$ 是如图 2 所示的 MOY 图定向 skein 三元组。令 $\omega_+,\ \omega_0$ 为由 ω 决定的 $f_+,\ f_0$ 的平衡着色，并令 $m = \sum_{s=1}^{i} \omega(a_s)$。则存在一个作为绝对 Maslov 分次、相对 Alexander 分次 $\mathbb{F}$-向量空间的正合三角；



(2) 假设 $(f,\ f_-,\ f_0,\ \omega)$ 是如图 2 所示的 MOY 图的定向 skein 三元组。设 $\omega_-,\ \omega_0$ 是由 ω 确定的 $f_-,\ f_0$ 的平衡着色，并令 $m = \sum_{s=1}^{i} \omega(a_s)$。那么，存在一个作为绝对 Maslov 分次、相对 Alexander 分次$\mathbb{F}$-向量空间的正合三角；



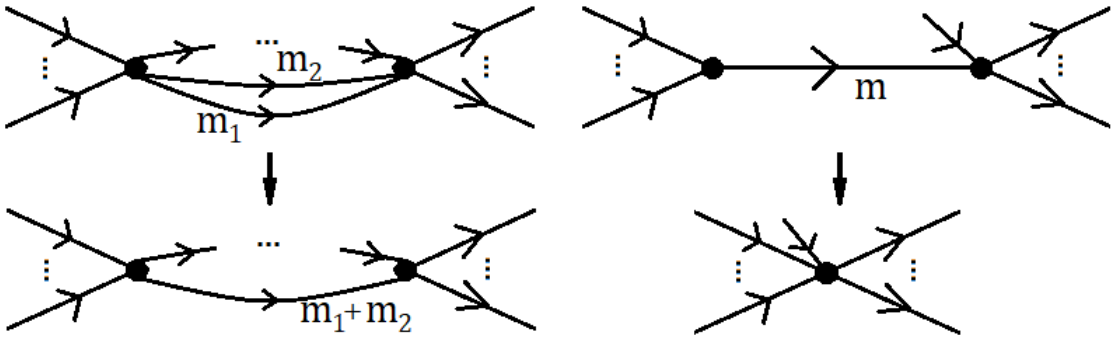


FIGURE 3. 左：定理 1.8 中的图。右：定理 1.9 中收缩一条边

定义 1.5. 对于图网格图 g，令 $\Delta_g(t)$ 表示分次欧拉示性数

$$\Delta_g(t) = \sum_{d,s\in\mathbb{Z}} (-1)^d \dim_{\mathbb{F}} \widehat{HF}(g,\omega)_{d,s} \cdot t^s.$$

这是一个横截空间图的不变量（相差一个 Alexander 分次平移），其定义 $\pm t^{\pm n}$ 因为 $\widehat{HF}(g)$ 与表示 f 的 g 的选择无关。我们将其记为 $\Delta_{(f,\omega)}(t)$。

推论 1.6。 *(1)* 设 (f, f_+, f_0, ω) 是一个 *MOY* 图的定向 *skein* 三元组，且 $m = \sum_{s=1}^{i} \omega(a_s)$。那么，存在一对整数 (m_1, m_2) 使得

$$t^{m_1} \cdot \Delta_{(f_0,\omega_0)}(t) - t^{m_2} \cdot \Delta_{(f_+,\omega_+)}(t) \doteq (1 - t^m) \cdot \Delta_{(f,\omega)}(t),$$

其中 $\doteq$ 表示相差一个 $\pm t^{\pm n}$ 倍。

(2) 令 (f, f_-, f_0, ω) 为一个定向 *MOY* 图 *skein* 三元组，且 $m = \sum_{s=1}^{i} \omega(a_s)$。那么，存在一对整数 (m_1, m_2) 使得

$$t^{m_1} \cdot \Delta_{(f_0,\omega_0)}(t) - t^{m_2} \cdot \Delta_{(f_-,\omega_-)}(t) \doteq (1 - t^m) \cdot \Delta_{(f,\omega)}(t),$$

注 1.7. 我们需要一对整数 (m_1, m_2)，因为 $\Delta_{(f,\omega)}(t)$ 在相差 $\widehat{\ }$ 乘以 $\pm t^m$ 的意义下定义，等价地，$HF(f, \omega)$ 作为相对亚历山大分次向量空间是一个不变量。

定理 1.8. 令 (f, ω) 为一个 *MOY* 图。假设 f 有两条方向相同的平行边 e_1, e_2。令 (f', ω') 为一个 *MOY* 图，它由将 e_1, e_2 替换为一条权重为 $\omega(e_1) + \omega(e_2)$ 的新边得到，且新边的方向与 e_1, e_2 的方向相同（见图 *3* 左侧）。令 V 为 f, f' 的顶点数。那么，

$$HF^-(f, \omega) \cong HF^-(f', \omega'),$$
$$\widehat{HF}(f, \omega) \cong \widehat{HF}(f', \omega'),$$

分别作为绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次的 $\mathbb{F}[U_1, \dots, U_V]$-模，以及绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次的 $\mathbb{F}$-向量空间。

定理 1.9。 设(f,ω) 为一个 ***MOY*** 图。设 f 的一条边 e 不是环。假设在其任一端点处， e 是唯一的出边或入边。设(f',ω') 为一个 ***MOY*** 图，其中 f' 是由 f 收缩 e 得到的，而 ω' 由 ω 自然确定（见图 *3* 右侧）。设 f' 的顶点数为 V。那么，

$$HF^-(f,\omega) \cong HF^-(f',\omega'),$$
$$\widehat{HF}(f,\omega) \cong \widehat{HF}(f',\omega') \otimes W(\omega(e)).$$

分别作为绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次的 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_V]$-模，以及绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次的 $\mathbb{F}$-向量空间。

2. MOY 图的格同调

2.1. 双分次链复形背景。

定义 2.1. 设 $\mathbb{F}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

- 一个**双分次 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$-模** M是一个 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$-模，它具有分解 $M=\bigoplus_{d,s\in\mathbb{Z}} M_{d,s}$ 作为一个 $\mathbb{F}$-模，使得 V_i 将 $M_{d,s}$ 映到 $M_{d-2,s-\omega(i)}$，对所有 $i=1,\dots,n$均成立，其中 $\omega(i)$ 是一些整数。
- 一个**双分次 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$模同态** $f\colon\ M\to M'$是两个双分次 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$-模之间的一个同态，它对所有 $d,s\in\mathbb{Z}$都将$M_{d,s}$映射到$M'_{d,s}$。
- $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$模同态 $f\colon\ M\to M'$若将$M_{d,s}$对所有 $d,s\in\mathbb{Z}$都映射到$M'_{d+m,s+t}$，则称其为**次数为 $(,t)$** 的齐次映射。
- (C,∂)是一个**关于 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$** 的双分次链复形，条件是 C为双分次$\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$-模，且 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$-模同态 $\partial\colon\ C\to C$满足 $\partial\circ\partial=0$，并且次数为（-1,0）的齐次。

在本文中，我们经常将链映射、链同伦等价等视为双分次 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$-模同态。

2.2. MOY 图格点同调的定义。

本节概述 MOY 图的格点同调。粗略地说，我们的格点同调的 Alexander 分次是通过取由平衡着色确定的同态 $\omega\colon\ H_1(S^3-f(G))\to\mathbb{Z}$，并将 Harvey 和 O'Donnol 的 $H_1(S^3-f(G))$-值 Alexander 分次压缩到 $\mathbb{Z}$而得到的。因此，除了细节上的微小差异，定义与 Harvey 和 O'Donnol 的定义相同。

一个**平面图网格图** g 是一个由方格组成的 $n\times n$ 网格，其中一些方格标有 X标记或 O 标记（有时也标有 O^*标记），并满足以下条件。

(i) 每行和每列上恰有一个 O 或 O^* 。(ii) 每行和每列上至少有一个 X 。(iii) O（或 O^*）与 X不在同一个方格中。

我们用 $\mathbb{O}$ 表示 O 标记和 O^* 标记的集合，用 $\mathbb{X}$ 表示 X 标记的集合，并将标记分别标记为 $\{O_i\}_{i=1}^n$ 和 $\{X_j\}_{j=1}^m$。

图网格图通过在每一行和每一列中用水平或垂直线段连接 O（或 O^*）标记与 X 标记来表示空间图，并假设垂直线段始终从水平线段上方交叉。 O^* 标记对应顶点， O 和 X 标记对应横截空间图的边内部。

Harvey 和 O'Donnol 证明，表示同一个空间图的任意两个图网格图，都可以通过有限序列的图网格变换相互连接。图网格变换包括以下三种:

- **循环置换**（图 4），即循环置换行或列。
- **交换变换**（图 4），即置换满足以下条件的两列相邻列：环面上的垂直线段 LS_1,LS_2 满足（1）$\mathrm{LS}_1 \cup \mathrm{LS}_2$ 包含两列相邻列中的所有 X 和 O；（2）$\mathrm{LS}_1 \cup \mathrm{LS}_2$ 在单个垂直圆 β_i 上的投影为 β_i；（3）它们的端点 $\partial(\mathrm{LS}_1) \cup \partial(\mathrm{LS}_2)$ 在单个 β_i 上的投影恰好是两个点。两行的置换定义相同。

- **(去)稳定化**（图 5）：设 g为一个 $n \times n$图网格图，并选取一个 X标记。若 g'是通过在 g的X标记旁添加一行和一列，将 X标记移至下一列，并在 X标记正上方放置一个新的O标记、在 X标记左上方放置一个 X标记而得到的（$n+1$）×（$n+1$）图网格图，则称 g'为 g的稳定化。稳定化的逆变换称为去稳定化。

环面图网格图是一种图网格图，我们将其视为通过自然地识别边而得到的环面上的图。我们将分隔方格的水平圆和垂直圆分别记作 $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 和 $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_j\}_{j=1}^n$。我们假设每个环面图都具有自然定向。

g 的一个状态 $\mathbf{x}$ 是一个双射 $\boldsymbol{\alpha} \to \boldsymbol{\beta}$。我们用$\mathbf{S}(g)$表示 g的状态集。我们将一个状态描述为图网格图上的 n 个点（图 6）。

对于$\mathbf{x}$,$\mathbf{y}$ $\in S(\mathbf{g})$，从$\mathbf{x}$ 到$\mathbf{y}$ 的一个**区域** ψ 是方格闭包的形式和，满足以下条件;

- ψ 被 $\boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\beta}$分割
- $\partial(\partial_\alpha \psi) = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ 以及 $\partial(\partial_\beta \psi) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$，其中 $\partial_\alpha \psi$ 是 ψ在水平圆 $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n$上的边界部分，而 $\partial_\beta \psi$是 ψ 在垂直圆上的边界部分。

若任意方格的系数均非负，则区域 ψ **为正**。在此，我们总是假设任意区域都是正区域。令 $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示从$\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$的正区域集合。

考虑满足 $|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}| = n - 2$ 的$\mathbf{x}$，$\mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)$。从$\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{y}$ 的**矩形** r 是一个满足 ∂r 为四条线段之并的区域。若$\mathbf{x} \cap \mathrm{Int}(r) = \mathbf{y} \cap \mathrm{Int}(r) = \phi$，则矩形 r 称为空矩形。令 $\mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 表示从$\mathbf{x}$ 到$\mathbf{y}$的空矩形集合。

定义 2.2。对于表示 f 且具有平衡着色 ω 的图网格图 g，**权重** ω_g: $\mathbb{O} \cup \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ 是由 ω 自然确定的映射，如下所示;

如果 O_i 对应于边 e 的内部，则为 • $\omega_g(O_i) = \omega(e)$。

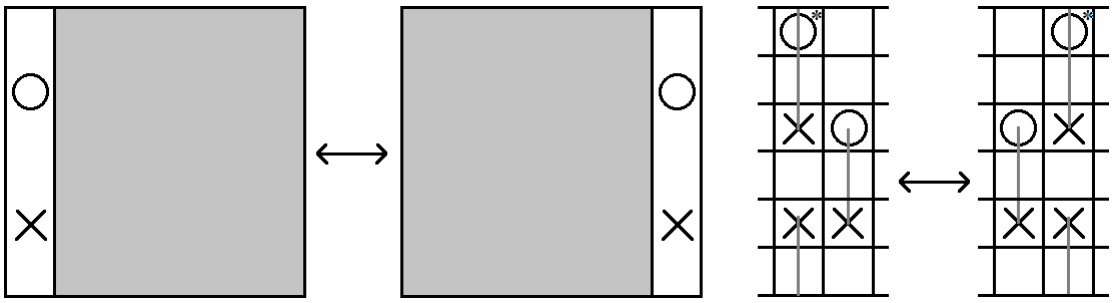


FIGURE 4. 循环置换与换位，灰色线为 $\mathbf{LS}_1$ 和 $\mathbf{LS}$ 2

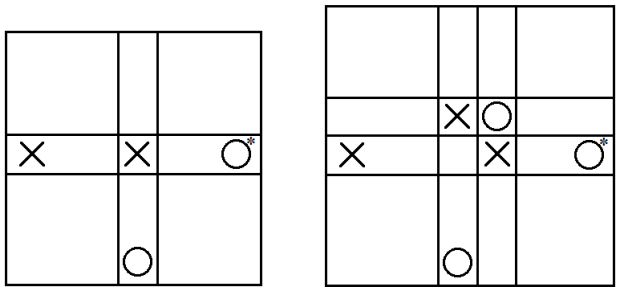


FIGURE 5. 稳定化

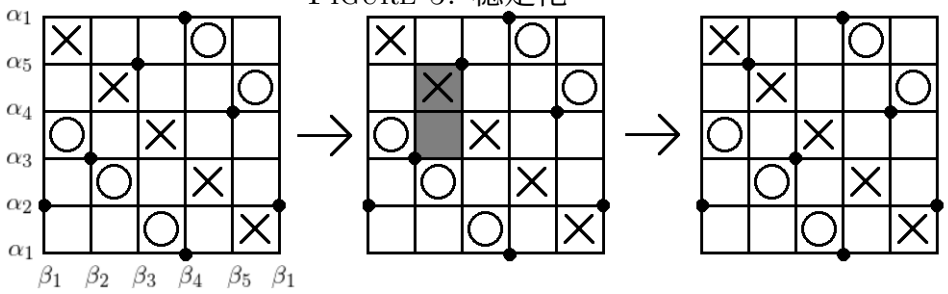


FIGURE 6. 状态与矩形的一个示例

如果 X_j 对应于边 e 的内部，则为 • $\omega_g(X_j) = \omega(e)$。
• $\omega_g(O_i) = \sum_{e\in入(v)}\omega(e) = \sum_{e\in出(v)}\omega(e)$ 若 O_i 对应于顶点 v，其中入(v)是进入 v 的边的集合，出(v)是从 v出去的边的集合。

只要不会引起混淆，我们就将 ω_g 简写为 ω 。

格点链复形（$CF^-(g,\ \omega)\ \partial^-$）是一个在 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$ 上的模，由 $\mathbf{S}(g)$ 自由生成；其中 U_i 是与 g 中的 O_i相对应的形式变量。微分 ∂^- 通过计数空矩形定义为

$$\partial^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{S}(g)}\left(\sum_{\{r\in \mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y})|r\cap\mathbb{X}=\phi\}} U_1^{O_1(r)}\cdots U_n^{O_n(r)}\right)\mathbf{y},$$

其中，如果 r 包含 O_i，则 $O_i(r) = 1$，否则 $O_i(r) = 0$，对于 $i = 1, \ldots\ldots, n$。

$CF^-(g)$有两种分次：Maslov 分次和 Alexander 分次。环面图 g 的平面实现是指沿着 α_i 和 β_j 切开环面图 g，并以自然的方式将 $[0, n) \times [0, n) \in \mathbb{R}^2$放置在某个 i 和 j上所得到的平面图形。对于两点(a_1, a_2)、$(b_1, b_2) \subset \mathbb{R}^2$，若 $a_1 < b_1$且 $a_2 < b_2$，则令$(a_1, a_2) < (b_1, b_2)$。对于两个有限点集 A、$B \subset \mathbb{R}^2$，令 $\mathcal{I}(A, B)$为满足 $a < b$的点对 $a \in A, b \in B$的数量，并令 $\mathcal{J}(A, B) = (\mathcal{I}(A, B) + \mathcal{I}(B, A))/2$。

定义 2.3。对于$\mathbf{x} \in \mathbf{S}(g)$，Maslov 分次 $M(\mathbf{x})$和 Alexander 分次$A(\mathbf{x})$定义为

$$M(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x} - \mathbb{O}, \mathbf{x} - \mathbb{O}) + 1, \tag{2.1}$$

$$A(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}, \sum_{j=1}^{m} \omega(X_j) \cdot X_j - \sum_{i=1}^{n} \omega(O_i) \cdot O_i). \tag{2.2}$$

这两个分次扩展到整个 $CF^-(g, \omega)$ 的方式如下：

$$M(U_i) = -2, \ A(U_i) = -\omega(O_i) \ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Alexander 分次的定义是：计算标记的权重乘积所对应的配对数。

注 2.4. 我们的 Alexander 分次是通过取同态 $H_1(S^3 - f(G)) \to \mathbb{Z}$得到的，该同态将每条边的子午线映射到由 ω 确定的指定整数，其余定义与 Harvey 和 O'Donnol 的定义相同。因此，我们的格点同调的不变性自然继承自 Harvey 和 O'Donnol 的论证。

此外，注意 Alexander 分次在环面图上并非良定义，但相对 Alexander 分次 $A^{rel}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y})$ 是良定义的。利用与命题 4.18[4] 和命题 3.7,[11] 相同的论证，很容易验证微分 ∂^- 将 Maslov 分次降低一阶并保持 Alexander 分次不变。因此我们可以得到：

命题 2.5。$(CF^-(g, \omega), \partial^-)$ 是一个绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次的链复形。

假设 O-标记的标记方式使得 $O_1, \ldots, O_V$是 O^*-标记，而 $O_{V+1}, \ldots, O_n$是 O-标记。令 $\mathcal{U}$为包含 $U_1 CF^-(g, \omega) \cup \cdots \cup U_V CF^-(g, \omega)$。$(CF(g, \omega), \partial)$ 是一个绝对 Maslov 分次、相对 Alexander 分次的链复形，定义在 $\mathbb{F}$-向量空间上；该向量空间由令 $CF(g, \omega) = CF^-(g, \omega)/\mathcal{U}$而得到，且 ∂ 是由 ∂^-诱导的映射。

定义 2.6。$HF^-(g, \omega)$ 和 $HF(g, \omega)$ 分别是 $(CF^-(g, \omega), \partial^-)$ 和 $(CF(g, \omega), \partial)$ 的同调。

注意，$HF^-(g, \omega)$ 被视为绝对 Maslov 分次、相对 Alexander 分次的 $\mathbb{F}[U_1, \ldots, U_V]$-模，而 $HF(g, \omega)$ 是绝对 Maslov 分次且相对 Alexander 分次的 $\mathbb{F}$-向量空间。

命题 2.7。 $HF^-(g、\ \omega)$ 和 $HF(g、\ \omega)$ 是横向平衡着色空间图的不变量。

证明。我们的链复形是通过取 Harvey 和 O'Donnol 的链复形中的某个同态 $H_1(S^3 - f(G)) \to \mathbb{Z}$ 得到的。这两个版本之间唯一的区别在于 Alexander 分次的区域。因此，不变性也随之继承。□

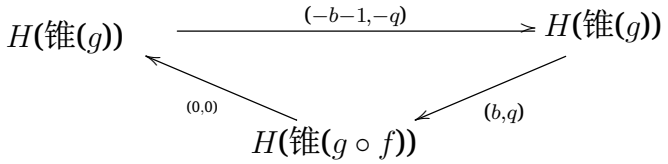
注 2.8。 $CF(g,\ \omega)$ 可视为一个绝对 Maslov 分次、相对 Alexander 分次的 $\mathbb{F}$- 向量空间，其基为 $\{U_{V+1}^{k_{V+1}} \cdots U_n^{k_n} \cdot \mathbf{x} | k_i \geq 0、\ \mathbf{x} \in \mathbf{S}(g)\}$，微分为

$$\widehat{\partial}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{S}(g)} \left(\sum_{\{r \in \mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y}) | r \cap \mathbb{X} = r \cap \mathbb{O}^* = \phi\}} U_{V+1}^{O_{V+1}(r)} \cdots U_n^{O_n(r)} \right) \mathbf{y},$$

其中， $\mathbb{O}^*$ 是 O^*标记的集合。

3. The proofs for the main Theorem 1.4

引理 3.1 (引理 A.3.10,[10])。 设 C、 C' 和 C'' 是三个双分次链复形，且 $f\colon C \to C'$ 和 $g\colon C' \to C''$ 是链映射，其次数分别为 (a, p) 和 (b, q)，并且都是齐次的。那么存在一个链映射 $\Phi : \mathrm{Cone}(g) \to \mathrm{Cone}(f)$，它是次数为 $(-b-1, -q)$ 的齐次映射，且其在同调上诱导的映射构成一个正合三角



其中这对整数表示双分次的平移量。

设 $(f,\ f_+,\ f_0,\ \omega)$ 是一组 MOY 图的定向 skein 三元组。选取图网格图 $(g,\ g_+, g_0)$，取点 c_+ 于 g_+，并取 c_0 于 g_0，再对 X 标记进行标号，使每个 X 标记对应于图 2 中每条边的权重。令 $m = \sum_{n=1}^{i} \omega_X(a_n) = \sum_{n=1}^{j} \omega_X(j_n) = \sum_{n=1}^{k} \omega_X(c_n) = \sum_{n=1}^{l} \omega_X(d_n)$。这里， ω_+， ω_0 表示由 ω 确定的权重。

我们将状态集合 $\mathbf{S}(g_+)$ 分解为不交并 $\mathbf{I}(g_+) \cup \mathbf{N}(g_+)$，其中 $\mathbf{I}(g_+) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}(g_+) | c \in \mathbf{x}\}$ 且 $\mathbf{N}(g_+) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{S}(g_+) | c \notin \mathbf{x}\}$。设 I_+ 和 N_+ 是 $CF(g_+,\ \omega_+)$ 的一个子空间，如

$$I_+ = \{U_{V+1}^{k_{V+1}} \cdots U_n^{k_n} \mathbf{x} \in \widehat{CF}(g_+) | \mathbf{x} \in I(g_+)\},$$
$$N_+ = \{U_{V+1}^{k_{V+1}} \cdots U_n^{k_n} \mathbf{x} \in \widehat{CF}(g_+) | \mathbf{x} \in N(g_+)\}$$

这个分解将 $CF(g_+,\ \omega_+) = I_+ \oplus N_+$ 分解为一个向量空间。于是，我们可以将 $CF(g_+,\ \omega_+)$ 上的微分写为

$$\widehat{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_I^I & 0 \\ \partial_I^N & \partial_N^N \end{pmatrix},$$

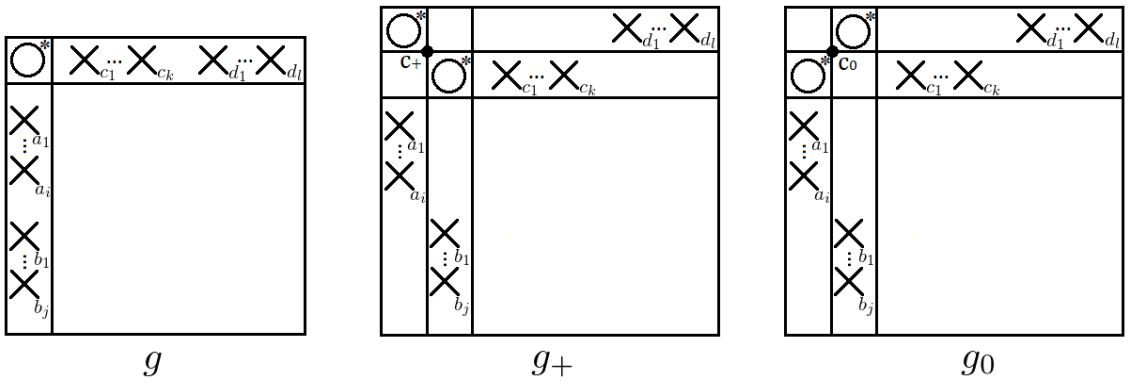


FIGURE 7. 表示 f、f_+ 和 f_0 的图网格图

例如， ∂_I^N是微分的一部分，它是一个从 I_+ 到 N_+的映射。因此，$(N_+,\ \partial_N^N)$ 是 $(\widehat{CF}(g_+,\ \omega_+)\ \widehat{\partial})$ 的子复形，而 $(I_+,\ \partial_I^I)$ 是一个商复形。根据代数锥的定义，我们可知 $\widehat{CF}(g_+,\ \omega_+) \cong \mathrm{Cone}(\partial_I^N\colon (I_+,\ \partial_I^I) \to (N_+,\ \partial_N^N))$。

我们可以用相同的方式定义 I_0 和 N_0 对于 $CF(g_0)$。在这种情况下，微分可以写作

$$\begin{pmatrix} \partial_I^I & \partial_N^I \\ 0 & \partial_N^N \end{pmatrix},$$

以及 $\widehat{CF}(g_0,\ \omega_0) \cong \mathrm{Cone}(\partial_N^I\colon (I_0,\ \partial_I^I) \to (N_0,\ \partial_N^N))$。

考虑双射 $c_+\colon \mathbf{S}(g) \to \mathbf{I}(g_+)$，其定义为 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \cup \{c_+\}$。利用 2.1 和 2.2，简单计算可知， c_+ 保持 Maslov 分次，并使 Alexander 分次增加 m。另外，考虑双射 $c_0\colon \mathbf{I}(g_0) \to \mathbf{S}(g)$，其定义为 $\mathbf{x} \cup \{c_0\} \mapsto \mathbf{x}$。此映射使 Maslov 分次增加 1，并保持 Alexander 分次。

以下结论显然成立。

引理 3.2 (引理 5.2。5,[10])。 (1) c_+ 在绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次的链复形之间诱导出一个同构 $CF(g,\omega) \cong I_+$。(2) c_0 在绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次的链复形之间诱导出一个同构 $I_0 \cong CF(g,\omega)$。

证明。 双射 c_+ 在链复形上诱导出一个同态，因为 g 上的 $\{U_{V+1},\dots,U_n\}$ 与 g_+上的 $\{U_{V+1},\dots,U_n\}$ 之间存在自然双射。容易验证，由 c_+ 诱导的映射是一个链映射。诱导出的映射是一个同构，因为在连接$\mathbf{S}(g)$的状态与$\mathbf{I}(g_+)$的状态的矩形之间存在双射。

c_0 以相同的方式诱导出一个同构。 □

考虑如下双射 $\alpha\colon \mathbf{N}(g_+) \to \mathbf{N}(g_0)$，其定义为 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$。该映射使 Maslov 分次增加 1，并保持 Alexander 分次不变。以下引理可用与引理 3.2 相同的方法证明。

引理 3.3。 α 在绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次链复形之间诱导出一个同构 $N_+ \cong N_0$。

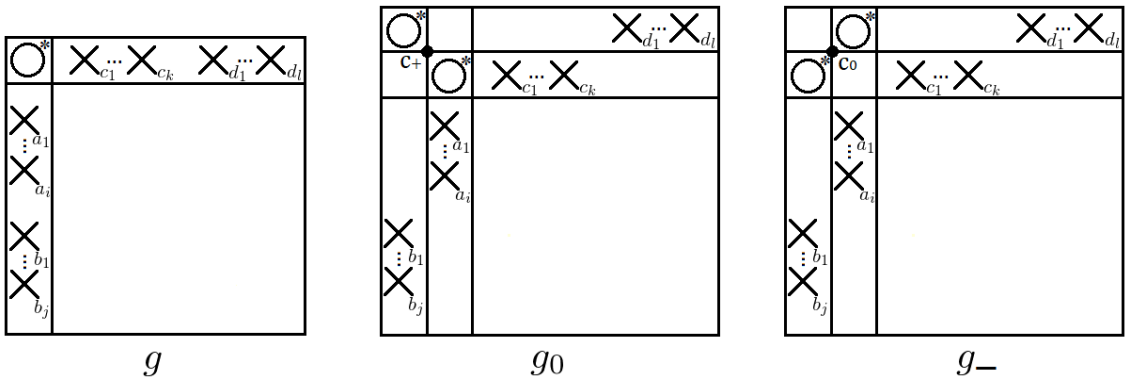


FIGURE 8. 表示 f、f_0 和 f_- 的图网格图

定理 ***1.4*** 的证明。 现在我们有如下图表

$$I_+ \xrightarrow{\partial_I^N} N_+ \xrightarrow{\alpha} N_0 \xrightarrow{\partial_N^I} I_0.$$

利用引理 3.1，我们可以得到以下正合三角：

$$\begin{array}{ccc} H(\mathrm{Cone}(\partial_N^I)) & \xrightarrow{(0,\ 0)} & H(\mathrm{Cone}(\alpha\circ\partial_I^N)) \\ & {\scriptstyle (0,\ 0)}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle (-1,\ 0)} & \\ & H(\mathrm{Cone}(\partial_N^I\circ\alpha\circ\partial_I^N)) & \end{array}$$

如上所述， $H(\mathrm{Cone}(\partial_N^I)) \cong \widehat{HF}(g,\ \omega)$。由引理 3.3，我们有 $H(\mathrm{Cone}(\alpha\circ\partial_I^N)) \cong H(\mathrm{Cone}(\partial_I^N))[\![-1,\ 0]\!] \cong HF(g_+,\ \omega_+)[\![-1,\ 0]\!]$。

对于任意状态 $\mathbf{x} \in I_+$，$(\partial_N^I\circ\alpha\circ\partial_I^N)(\mathbf{x}) = 0$，因为复合区域 $r_1 * r_2$where r_1 is 出现在 ∂_N^I 中，而 r_2 在 ∂_I^N中，所以必为一个环带，因此某些 X-标记包含于 r_1 或 r_2中。

因此我们有 $H(\mathrm{Cone}(\partial_N^I\circ\alpha\circ\partial_I^N)) \cong H(\mathrm{Cone}(0: I_+ \to I_0))$。复合映射 $\partial_N^I\circ\alpha\circ\partial_I^N$是次数为 $(-1,\ 0)$ 的齐次映射。因此利用引理 3.2，我们看到 $H(\mathrm{cone}(0: I_+ \to I_0)) \cong H(I_+)\oplus H(I_0) \cong HF(g,\ \omega)[\![0,\ -m]\!]\oplus HF(g,\ \omega)[\![1,\ 0]\!] \cong HF(g,\ \omega)\otimes W(m)[\![0,\ -m]\!]$。于是得到以下正合三角：

$$\begin{array}{ccc} \widehat{HF}(g_0,\ \omega_0) & \xrightarrow{(-1,0)} & \widehat{HF}(g_+,\omega_+) \\ & {\scriptstyle (-1,0)}\nwarrow \quad \swarrow{\scriptstyle (1,\ 0)} & \\ & \widehat{HF}(g,\ \omega)\otimes W(m) & \end{array}$$

设 (f, f_-, f_0) 是一个 MOY 图的定向 skein 三元组。(f, f_0, f_-) 的正合三角可以用同样的方法得到；

首先，按照图 8 选取图网格图 (g, g_0, g_-)。

其次，考虑双射 c_0': S(g) $\to I_0$, c_-: $I_- \to$ S(g)，以及 β: $N_0 \to N_-$，它们分别与 c_+、c_0 和 α 的构造方式相同。c_0' 是次数为 $(0, m)$ 的齐次映射，c_- 的次数为 (1,0)，而 β 的次数为 $(1, -m)$。这三个映射在同调上诱导出同构。

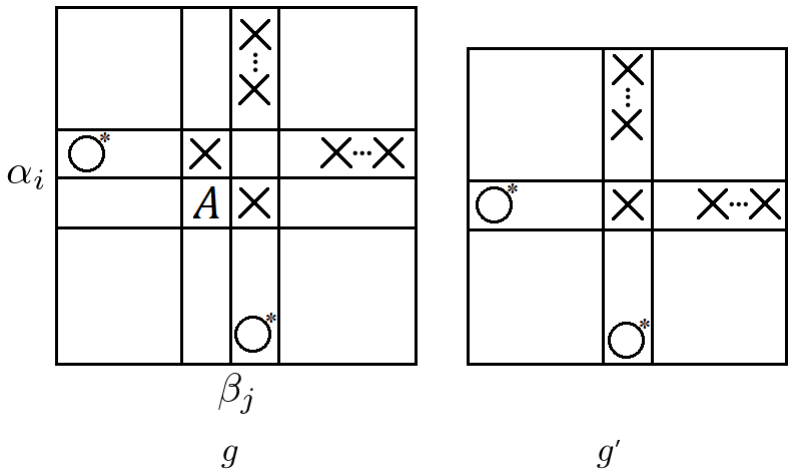


FIGURE 9. 命题 4.1 中的图网格图

最后，正合三角由下图得到；

$$I_0 \xrightarrow{\partial_I^N} N_0 \xrightarrow{\beta} N_- \xrightarrow{\partial_N^I} I_-.$$

□

4. THE PROOFS FOR THE MAIN THEOREM 1.8 AND THEOREM 1.9

首先，我们将证明定理 1.8 和定理 1.9 是以下命题的推论。

命题 4.1。设 g、g' 是图 *9* 中的两个图网格图。g' 由 g 经过类似去稳定化的移动得到。g' 的权重 ω' 由 g 的权重 ω 自然确定。假设满足以下条件：

- g 是一个$(n+1) \times (n+1)$ 图网格图。
- 沿着水平圆 α_i 的两行上的 X-标记没有任何一对在垂直方向上对齐。
- 沿着垂直圆 β_j 的两列上的 X-标记没有任何一对在水平方向上对齐。
- $A = O$ 或 $A = O^*$。
- 包含 A的行或列中恰好有一个 X-标记。

于是，在 $\mathbb{F}[U_1, \ldots, U_n]$ 上作为绝对 *Maslov* 分次、相对 *Alexander* 分次的链复形，$CF^-(g,\omega)$ 与 $CF^-(g',\omega')$ 之间存在拟同构，

注记 4.2. 由于 g 是一个 $(n+1)\times(n+1)$ 图网格图，$CF^-(g,\omega)$ 被定义为一个绝对 Maslov 分次、相对 Alexander 分次的链复形，其系数取自 $\mathbb{F}[U_1, \ldots, U_{n+1}]$，其中 U_{n+1} 与 A 处的 O-标记相关。将 $HF^-(g,\omega)$ 视为 $\mathbb{F}[U_1, \ldots, U_V]$-模时，该链复形的同调是横截空间图的不变量，其中 V 是 f 的顶点数。

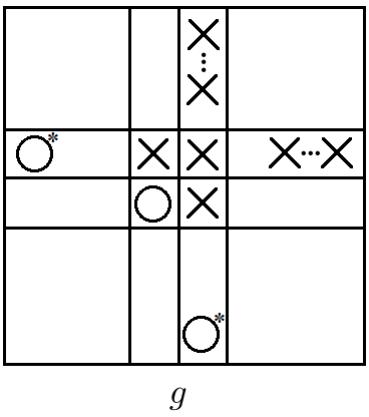


FIGURE 10. 定理 1.8 证明中的图网格图

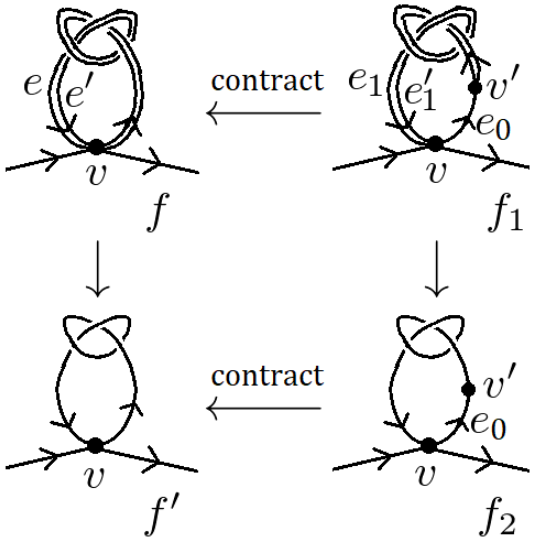


FIGURE 11. 定理 1.8 的证明：当两条平行边是环时。左侧部分的图是通过收缩边 e_0 得到的。

定理 1.8 的证明。首先，假设两条平行边连接两个不同的顶点。取一对图网格图和权重 (g,ω)，它们表示 (f,ω)，使得这两条平行边出现在 2×2 块中，如图 10 所示。然后，图 9 中出现的 g' 表示 f'，而由 (g,ω) 自然确定的 g' 的权重 ω' 表示 f' 的平衡着色。直接应用命题 4.1 作为 $A=O$，可得 $HF^-(g,\omega)\cong HF^-(g',\omega')$。拟同构 $CF^-(g,\omega)\to CF^-(g',\omega')$ 诱导拟同构 $\widehat{CF}(g,\omega) = {}^{CF^-}(\underset{U_1=\cdots=U_V=0}{g\ \omega} \to \widehat{CF},)\,(g',\omega') = {}^{CF^-}(g',\omega')\,{}_{U_1=\cdots=U_V=0}$，因此 $\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$ 可得 $HF(g,\omega)\cong HF(g',\omega')$。

接下来，我们假设 f 的两条平行边 e、e' 是 v 处的环。取一个新的平衡横截空间图（f_1, ω_1），使得如图 11 所示，f 可由 f_1 通过收缩连接 v 与新顶点 v' 的边 e_0 获得，而 ω_1 由 ω 自然确定。根据定理 1.9，作为 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_V]$-模，$HF^-(f,\omega) \cong HF^-(f_1,\omega_1)$，其中 U_V 与 v 相关，U_{V+1} 与 v' 相关（注意，$HF^-(f_1)$ 是一个 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_{V+1}]$-模）。设（$f_2$, ω_2）为一个平衡横截空间图，它由合并由 e、e' 确定的两条平行边 e_1、e_1' 得到。由于 e_1、e_1' 不是环，作为 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_{V+1}]$-模，$HF^-(f_1,\omega_1) \cong HF^-(f_2,\omega_2)$。$f'$ 由 f_2 通过收缩 e_0 获得。因此，作为 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_V]$-模，$HF^-(f_2,\omega_2) \cong HF^-(f',\omega')$。注意，由于命题 4.21, [4]，$U_V$ 与 U_{V+1} 链同伦。□

定理 ***1.9*** 的证明. 如果 e 是 v唯一的入边，则取一个表示 f 的图网格图g，使得与 v 相关的 O^*-标记位于 A 处，如图 9 所示。如果 e是 v唯一的出边，则取一个表示 f 的图网格图 g，使得与 v相关的O^*-标记位于 A处，如图 9 所示。直接将命题 4.1 用作 $A = O^*$，即可得到 $HF^-(g,\omega) \cong HF^-(g',\omega')$。

接下来，我们仔细证明帽版本。将 g'中的 O^*-标记编号为 $O_1,\dots,O_V$。由于 g 多一个 O^*-标记，将 g中的 O^*-标记编号为 $O_1,\dots,O_V,O_{n+1}$。根据帽链复形的定义，$\widehat{CF}(g,\omega) = {}^{CF^-(g,\omega)}{}_{U_1=\cdots=U_V=U_{n+1}=0}$，且 $\widehat{CF}(g',\omega') = \overline{CF^-(g',\omega')}_{U_1=\cdots=U_V=0}$。拟同构 $\overline{CF^-(g,\omega)} \to CF^-(g',\omega')$ 诱导出拟同构 $\overset{CF^-\ g\ \omega}{U_1=\cdots=U_V=0} \to \widehat{CF}(\ ,\ )\ (g',\omega')$。引理 4.21,[4] 表明，$\overline{U_{n+1}}$是零伦的，因为它是次数为 $(-1,-m)$ 的齐次映射。利用引理 4.31,[4],，我们得到 $HF(g,\omega) \cong \frown HF(g',\omega') \otimes W(m)$ □

命题 ***4.1*** 的证明。基本思路与稳定化不变性证明（第 5.2.3,[10] 节）相同。由于我们假设包含 A 的行或列中只有一个 X-标记，因此同样的论证也适用。取交点 $\alpha_i \cap \beta_j$ 作为 c。按照图 12 右侧的方式标记 c 周围的标记，并将包含 X_{j+1} 的列中的 O-标记记为 O_n。

现在，我们假设包含 A 的 row 中只有一个 X-标记 .

首先，我们引入一些与上一节相同的记号。状态集 S(g) 分解为不交并 I(g) ∪N(g)。令 N（分别为 I）表示由 N(g)（分别由 I(g)）生成的 $CF^-(g,\omega)$ 的子模。与上一节一样，N 是 $CF^-(g,\omega)$ 的子复形。将 $CF^-(g,\omega)$ 的微分表示为矩阵，可得 $CF^-(g,\omega) \cong$ Cone(∂_I^N: $(I,\partial_I^I) \to (N,\partial_N^N)$)。I($g$) 与 S($g'$) 之间的双射诱导出同构 c: $I \to CF^-(g',\omega')[U_{n+1}]$ as$\mathbb{F}[U_1,\dots,U_{n+1}]$-模，其中 $CF^-(g',\omega')[U_{n+1}] = CF^-(g',\omega') \otimes_{\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]} \mathbb{F}[U_1,\dots,U_{n+1}]$。经过简单计算可得，$c$ 是次数为 $(0,-A(\{c\}))$ 的齐次元素。

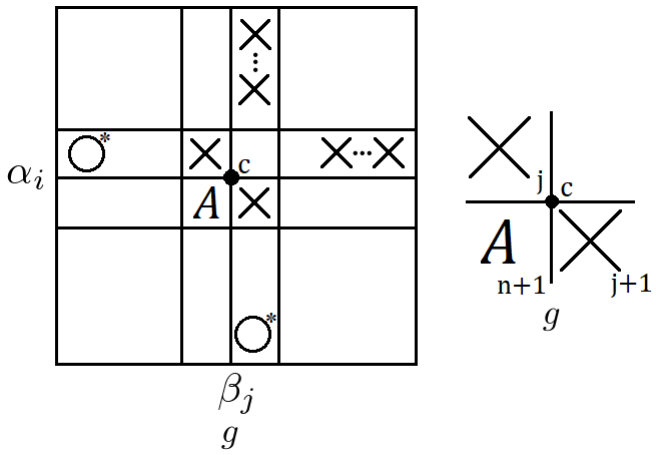


FIGURE 12. 定理 1.9 证明中的图网格图及其周围标记的标签 c

其次，我们定义同伦算子。考虑映射 $\mathcal{H}_O^-: I \to N$ and$\mathcal{H}_X^-: N \to I$ as

$$\mathcal{H}_O^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{N}(g)} \sum_{\{r\in \mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y})|r\cap\mathbb{X}=\phi, O_{n+1}\in r\}} U_1^{O_1(r)}\cdots U_n^{O_n(r)}\cdot\mathbf{y},$$
$$\mathcal{H}_X^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{I}(g)} \sum_{\{r\in \mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y})|r\cap\mathbb{X}=\{X_{j+1}\}\}} U_1^{O_1(r)}\cdots U_n^{O_n(r)}\cdot\mathbf{y}.$$

引理4.3。 • $\mathcal{H}_X^-$ 是次数为 $(-1,-\omega(O_{n+1}))$ 的齐次元，而 $\mathcal{H}_O$ 是次数为 $(1,\omega(X_{j+1})) = (1,\omega(O_{n+1}))$的齐次元。

• $\mathcal{H}_X$ 和 $\mathcal{H}_O$ 是链同伦等价。

证明。 证明与引理 5.2 相同。19,[10]考虑 $\mathcal{H}_{O,\,X}^-$: $N \to N$ 作为

$$\mathcal{H}_{O,X}^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{N}(g)} \sum_{\{r\in \mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y})|r\cap\mathbb{X}=\{X_{j+1}\}, O_{n+1}\in r\}} U_1^{O_1(r)}\cdots U_n^{O_n(r)}\cdot\mathbf{y}.$$

因此，只需验证 $\mathcal{H}_X^-\circ\mathcal{H}_O^- = \mathrm{Id}_I$和 $\mathcal{H}_O^-\circ\mathcal{H}_X^- + \mathcal{H}_{O,\,X}^-\circ\partial_N^N + \partial_N^N\circ\mathcal{H}_{O,\,X}^- = \mathrm{Id}_N$。 前一个等式显然成立，而后一个等式由引理 5.2.19,[10] 得出。□

我们看到以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\partial_I^N} & N \\ \downarrow{\scriptstyle c} & & \downarrow{\scriptstyle c\circ\mathcal{H}_X^-} \\ CF^-(g',\omega')[U_{n+1}][\![1,\omega(O_{n+1})]\!] & \xrightarrow{U} & CF^-(g',\omega')[U_{n+1}] \end{array}$$

其中，如果包含 X_{j+1} 的列中只有一个 X 标记，则为 $U = U_{n+1} - U_n$；否则为 $U = U_{n+1}$。

引理 4.4. 双分次 $\mathcal{R}$-模链复形的交换图

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & C' \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi'} \\ D & \xrightarrow{g} & D' \end{array}$$

诱导一个双分次链映射 $\Phi:\mathrm{Cone}(f)\to\mathrm{Cone}(g)$。若 ϕ和 ϕ'是拟同构，则 Φ是拟同构。

利用这个引理，我们得到 $H(\mathrm{Cone}(\partial_I^N)) \cong \mathrm{Cone}(U)$。由于 $H(\mathrm{Cone}(\partial_I^N)) \cong HF^-(g,\ \omega)$, 只需证明 $\mathrm{Cone}(U) \cong HF^-(g',\ \omega')$。

根据 $CF^-(g',\ \omega')[U_{n+1}]$ 的定义，我们得到 $H(CF^-(g',\ \omega')[U_{n+1}]) \cong H(CF^-(g',\ \omega'))[U_{n+1}]$。因此，单射 $U\colon CF^-(g',\ \omega')[U_{n+1}] \to CF^-(g',\ \omega')[U_{n+1}])$ 在同调上诱导单射 $U\colon HF^-(g',\ \omega')[U_{n+1}] \to HF^-(g',\ \omega')[U_{n+1}]$。考虑映射锥 $\mathrm{Cone}(U)$ 的长正合列，我们得到如下绝对 Maslov 分次、相对 Alexander 分次的 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_{n+1}]$-模短正合列:

$$0 \longrightarrow HF^-(g',\omega')[U_{n+1}] \xrightarrow{U} HF^-(g',\omega')[U_{n+1}] \longrightarrow H(\mathrm{Cone}(U)) \longrightarrow 0$$

因此我们看到 $\frac{HF^-(g',\ \omega')[U_{n+1}]}{\mathrm{Im}U} \cong H(\mathrm{Cone}(U))$。显然，$\frac{HF^-(g',\ \omega')[U_{n+1}]}{\mathrm{Im}U} \cong HF^-(g',\ \omega')$ 是绝对 Maslov、相对 Alexander 分次的 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$-模。结合这些等式，我们得到 $HF^-(g,\ \omega) \cong HF^-(g',\ \omega')$ 是绝对 Maslov、相对 Alexander 分次的 $\mathbb{F}[U_1,\dots,U_n]$-模。□

注 4.5. 如果包含 A 的 $column$ 中只有一个 X-标记，只需稍作修改即可得到相同结果。定义 $\mathcal{H}_X^-\colon N\to I$ 如下

$$\mathcal{H}_X^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{I}(g)} \sum_{\{r\in\mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y})|r\cap\mathbb{X}=\{X_j\}\}} U_1^{O_1(r)}\cdots U_n^{O_n(r)}\cdot\mathbf{y}.$$

$\mathcal{H}_X^-$ 是次数为 $(1,\ \omega(X_j)) = (1,\ \omega(O_{n+1}))$ 的齐次元素。利用定义如下的链同伦 $\mathcal{H}_{O,X}^-$，我们看到 $\mathcal{H}_O^-$ 和 $\mathcal{H}_X^-$ 是链同伦等价

$$\mathcal{H}_{O,X}^-(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y}\in\mathbf{N}(g)} \sum_{\{r\in\mathrm{Rect}^\circ(\mathbf{x},\mathbf{y})|r\cap\mathbb{X}=\{X_j\},O_{n+1}\in r\}} U_1^{O_1(r)}\cdots U_n^{O_n(r)}\cdot\mathbf{y}.$$

于是，存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\qquad\partial_I^N\qquad} & N \\ {\scriptstyle c}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c\circ\mathcal{H}_X^-} \\ CF^-(g',\omega')[U_{n+1}][\![1,\omega(O_{n+1})]\!] & \xrightarrow{U} & CF^-(g',\omega')[U_{n+1}] \end{array}$$

其中 $U = U_{n+1} - U_n$ 若包含 X_j 的行中只有一个 X标记，$U = U_{n+1}$ 否则。

5. Applications

引理 5.1. 设 (f,ω) 为一个 *MOY* 图，且 ω_n 是 f 的一个平衡着色，定义为$\omega_n(e) = n\cdot\omega(e)$，对任意边 e均成立。则存在一个自然同构 $A_n\colon HF^-(f,\omega) \cong HF^-(f,\omega_n)$，其中 A_n 是 *Alexander* 分次乘以 n。

证明。 存在一个自然同构 $a_n\colon CF^-(g,\omega) \to CF^-(g,\omega_n)$，定义为 $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$。利用 (2.2)，$a_n$ 保持 Maslov 分次，并将 Alexander 分次乘以 n。□

命题 5.2。 设 (f,ω) 为一个 *MOY* 图，(f^n,ω^n) 为由 (f,ω) 得到的 *MOY* 图：将每条边替换为 n 条方向和权重均与原边相同的平行副本。则存在一个自然同构$A_n\colon HF^-(f,\omega) \cong HF^-(f^n,\omega^n)$，其中 A_n是将 *Alexander* 分次乘以n。

证明。 结合定理 1.8 和引理 5.1。 □

这个命题是定理 4.5] 的部分推广。

6. Further problems

Bao 和 Wu [2] 研究了 MOY 图的 Alexander 多项式。他们针对带有平衡着色 ω的图示D，使用考夫曼态求和 $\langle D,\omega\rangle$ 定义 Alexander 多项式 f。他们总结指出，该态求和 $\langle D,\omega\rangle$ 是 Harvey 和 O'Donnol 的 Alexander 多项式的一种拓展。在他们的论文 [2], 中，Bao 和 Wu 将 Alexander 多项式定义为 $\langle D,\omega\rangle/(t^{-1/2}-t^{1/2})^{V-1}$，其中 V是图的顶点数。他们定义的 MOY 图 Alexander 多项式满足村上-大槻-山田提出的一些关系 [8]。因此，自然的问题是：这些关系能否在格点同调的框架下得到体现?

Vance[11] 和 Kubota[5] 研究的平衡空间图是 MOY 图的一种特殊情形。他们分别为平衡空间图定义了 τ 不变量和 Y 不变量。根据定义，τ 不变量和 Y 不变量显然可以推广到 MOY 图。接下来的问题是，这些不变量包含了 MOY 图的哪些信息?

7. Acknowledgement

我衷心感谢导师伊藤哲也给予的宝贵讨论和指正。本研究得到日本科学技术振兴机构的支持，资助项目为「推动创建科学技术创新的大学奖学金计划」，项目编号：JPMJFS2123。

References

[1] 鲍媛媛，*Floer* 同调与嵌入的二分图，arXiv:1401.6608v4，2018。[2] 鲍媛媛和吴忠涛，*MOY* 图的 *Alexander* 多项式，Selecta Math. (N.S.)**26** (2020)，第 2 期，论文编号 32，44 页。MR 4090586[3] Stefan Friedl、Andr´as Juh´asz 和 Jacob Rasmussen，缝合 *Floer* 同调的去范畴化，J. Topol. **4** (2011)，第 2 期，431–478。MR 2805998[4] Shelly Harvey 和 Danielle O'Donnol，空间图的 *Heegaard Floer* 同调，Algebr. Geom. Topol. **17** (2017)，第 3 期，1445–1525。MR 3677933

[5]Hajime Kubota，使用格点同调的平衡空间图 v 的同调余边不变量，arXiv:2206.15048v1，2022。[6] Ciprian Manolescu、Peter Ozsv´ath、Zolt´an Szab´o 和 Dylan Thurston，关于组合链环 *Floer* 同调，Geom. Topol. **11** (2007)，2339–2412。MR 2372850[7] Blake Mellor、Terry Kong、Alec Lewald 和 Vadim Pigrish，空间图的着色、行列式与 *Alexander* 多项式，J. Knot Theory Ramifications**25** (2016)，第 4 期，1650019，19 页。MR 3482497[8] Hitoshi Murakami、Tomotada Ohtsuki 和 Shuji Yamada，通过着色平面图的不变量构造 *Homfly* 多项式，Enseign. Math. (2) **44** (1998)，第 3–4 期，325–360。MR 1659228[9] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o，结 *Floer* 同调与四维球亏格，Geom. Topol. **7**(2003)，615–639。MR 2026543[10] Peter S. Ozsv´ath、Andr´as I. Stipsicz 和 Zolt´an Szab´o，结与链环的格点同调，Mathematical Surveys and Monographs，第 208 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。MR 3381987[11] Sucharit Sarkar，格图与 *Ozsv´ath-Szab´o tau* 不变量，Math. Res. Lett. **18** (2011)，第 6 期，1239–1257。MR 2915478